ภาคผนวก 2

การบวกและการคูณ (Σ and π)

1. การบวก (Summation)

นิยาม สัญลักษณ์ Σ ใช้เป็นอักษรย่อแทนการรวมกันของจำนวนต่าง ๆ เช่น

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

i เป็นตัวแปรที่มีค่าเป็นตัวเลขตั้งแต่ 1,2,...,n i = 1 ใต้เครื่องหมาย Σ หมายความว่าค่าเริ่มต้นของ i คือ 1 และ n บนเครื่องหมาย Σ หมายความว่าค่าสุดท้ายของ i คือ n เรียก i ว่า "ดัชนีการบวก" (Index of Summation) เรียก x_i ว่าฟังค์ชั่นของ i ซึ่ง x_i จะมีค่าเป็น $x_1 x_2, \ldots$ ตามลำดับไปในทุกขณะที่ i เปลี่ยนค่าเป็น 1,2,3,...,n

1.1 คุณสมบัติของการบวก

คุณสมบัติที่ 1 ถ้า $x_i = c$ ในทุกค่าของ i = 1,2,...,n แล้ว $\sum_{i=} c = nc$

พิสูจน์ $$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{\text{n ครั้ง}} = nc$$

เช่น $$\sum_{i=1}^{3} 100 = 100 + 100 + 100 = 300$$

คุณสมบัติที่ 2 ถ้า $x_i = ky_i$ ในทุกค่าของ i = 1,2,...,n และ k เป็นตัวคงที่ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n} ky_i = k \sum_{i=1}^{n} y_i$$

พิสูจน์ $$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} ky_i = ky_1 + ky_2 + \ldots + ky_n = k(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = k \sum_{i=1}^{n} y_i$$

คุณสมบัติที่ 3 ถ้า $x_i = y_i + z_i$ ในทุกค่าของ i = 1,2,...,n แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

พิสูจน์ $$\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) + \ldots + (y_n + z_n)$$

$$= (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_1$$

1.2 การบวกซ้ำ 2 ชั้น (Finite Double Sums)

สมมุติว่ามีเซทของจำนวน (หรือวัตถุสิ่งของ) อยู่ mn ชิ้นคือ x_{ij} ; i = 1,2,...,m j = 1,2,...,n ซึ่งสามารถแจงออกมาโดยละเอียดได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{array}$$

ถ้าต้องการหายอดรวมของ x_{ij} ทุกค่า (Grand Total) ให้ทำการหาผลรวมเป็น 2 ตอน คือตอนที่ 1 ให้หาผลรวมรายแถวหรือรายสดมภ์ก่อน ตอนที่ 2 ให้นำผลรวมจากตอนที่ 1 มารวมกัน ผลลัพธ์คือยอดรวมที่ต้องการ

การหายอดรวมโดยนัยของวิธีดังกล่าวนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จากการเริ่มต้นด้วยการหาผลรวมรายแถวก่อน และผลลัพธ์ที่ได้จากการเริ่มต้นด้วยการหาผลรวมรายสดมภ์ก่อน จะมีค่าเท่ากันเสมอ นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$$

สามารถแสดงให้เห็นความเป็นจริงได้ดังนี้

ก. หาผลรวมรายแถวก่อน

					ผลรวมรายแถว
x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1n} = \sum_{j=1}^{n} x_{1j}$
x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}	$x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2n} = \sum_{j=1}^{n} x_{2j}$
⋮				⋮	⋮
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn}	$x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \ldots + x_{mn} = \sum_{j=1}^{n} x_{mj}$
ยอดรวม					$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right)$

ข. หาผลรวมรายสดมภ์ก่อน

ผลรวมรายสดมภ์					ยอดรวม
x_{11}	x_{12}	x_{13}	. . .	x_{1n}	
x_{21}	x_{22}	x_{23}	. . .	x_{2n}	
x_{31}	x_{32}	x_{33}	. . .	x_{3n}	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
.	.	.		.	
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	. . .	x_{mn}	
$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$	. . .	$\sum_{i=1}^{m} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} + \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} x_{in}$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$$

เนื่องจากยอดรวมจากทั้งสองวิธีคือยอดรวมเดียวกัน ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$$

นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

หมายเหตุ สำหรับการบวกซ้ำมากกว่า 2 ชั้นก็ยึดถือแนวคิดเดียวกันนี้ เพียงแต่มีวิธีดำเนินซับซ้อนขึ้น

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 3, x_5 = 7, x_6 = -8$

จงคำนวณหา $\sum_{i=1}^{6} x_i$ และ $\sum_{i=1}^{6} (x_i+2)(x_i-2)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} x_i &= x_1 + x_2 + \ldots + x_6 \\
&= (-2) + 1 + (-1) + 3 + 7 + (-8) \\
&= 0 \\
\sum_{i=1}^{6} (x_i+2)(x_i-2) &= (x_1+2)(x_1-2) + (x_2+2)(x_2-2) + \ldots + (x_6+2)(x_6-2) \\
&= (-2+2)(-2-2) + (1+2)(1-2) + (-1+2)(-1-2) + (3+2)(3-2) + \\
&\quad (7+2)(7-2) + (-8+2)(-8-2)
\end{aligned}$$

$$= 0+(-3)+(-3)+5+45+60$$

$$= 104$$

ตัวอย่าง 1.2 จงแสดงให้เห็นว่า

ก. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i$

ข. $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{n-k} x_{k+i} = \sum_{i=1}^{n} x_i$

วิธีทำ

ก. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + x_{n+1} = (x_1+x_2+\ldots+x_n)+x_{n+1} = x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} x_i$$

ข. $\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{n-k} x_{k+i} = (x_1+x_2+\ldots+x_k)+(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_{k+(n-k)})$

$$= x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ตัวอย่าง 1.3 จงแสดงให้เห็นว่า

ก. $\sum_{i=1}^{n} ax_i+by_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i$

ข. $\sum_{i=1}^{n} (x_i-1)(x_i+1) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n$

วิธีทำ

ก. $\sum_{i=1}^{n} (ax_i+by_i) = (ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)+\ldots+(ax_n+by_n)$

$$= (ax_1+ax_2+\ldots+ax_n)+(by_1+by_2+\ldots+by_n)$$

$$= a(x_1+x_2+\ldots+x_n)+b(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i$$

ข. $\sum_{i=1}^{n} (x_i-1)(x_i+1) = (x_1-1)(x_1+1)+(x_2-1)(x_2+1)+\ldots+(x_n-1)(x_n+1)$

$$= (x_1^2-1)+(x_2^2-1)+\ldots+(x_n^2-1)$$

$$= (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+(\underbrace{-1\ -1\ -1\ldots-1}_{n\ \text{ครั้ง}})$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n$$

ตัวอย่าง 1.4 จงแสดงให้เห็นว่า

$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

วิธีทำ

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_nx_1 + x_nx_2 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_n^2 - (x_1^1 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_nx_1 + x_nx_1 + \ldots + x_{n-1}x_n) - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_nx_1 + x_nx_2 + \ldots + x_{n-1}x_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

หรือจาก (1) จัดรวมเทอมที่เหมือนกันเข้าด้วยกัน จะได้

$$S = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \ldots + 2x_1x_n + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + \ldots + 2x_2x_n + \ldots + 2x_{n-1}x_n$$

$$= 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$$

2. การคูณ (Multiplication)

นิยาม ใช้สัญญลักษณ์ π เป็นอักษรย่อแทนการคูณกันของจำนวนต่าง ๆ เช่น

$$x_1 x_2 \ldots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

ในที่นี้ i คือดัชนีของการคูณ มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n x_i คือฟังค์ชั่นของ i

2.1 คุณสมบัติของการคูณ

คุณสมบัติที่ 1 $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$

พิสูจน์ $\prod_{i=1}^{n} c = \underbrace{c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdots c}_{n \text{ ครั้ง}} = c^n$

คุณสมบัติที่ 2 $\prod_{i=1}^{n} (kx_i) = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i$

พิสูจน์

$$\prod_{i=1}^{n} (kx_i) = (kx_1)(kx_2)(kx_3)\cdots(kx_n) = k^n(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i$$

คุณสมบัติที่ 3

$$\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)$$

พิสูจน์

$$\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = (x_1y_1)(x_2y_2)\cdots(x_ny_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)(y_1 \cdot y_2 \cdots y_n)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)$$

คุณสมบัติที่ 4

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$$

พิสูจน์

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \prod_{i=1}^{n} (x_{i1}x_{i2}x_{i3}\ldots x_{in})$$

$$= (x_{11}x_{12}x_{13}\cdots x_{1n})(x_{21}x_{22}x_{23}\cdots x_{2n})(x_{31}x_{32}x_{33}\cdots x_{3n})\cdots(x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots x_{nn})$$

$$= (x_{11}x_{21}x_{31}\cdots x_{n1})(x_{12}x_{22}x_{32}\cdots x_{3n})\cdots(x_{1n}x_{2n}x_{3n}\cdots x_{nn})$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (x_{1j}x_{2j}x_{3j}\cdots x_{nj})$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$$

ตัวอย่าง 2.1 จงกระจาย $\prod_{1 \le i \le j \le 5} (x_i - x_j)$ และเราจะเสนอผลคูณนี้ออกมาในรูปอื่นอีกได้หรือไม่ ? ผลคูณดังกล่าวประกอบด้วยกี่แฟคเตอร์ ? จงขยายความ (Generalize)

วิธีทำ

$$\prod_{1 \le i \le j \le 5} (x_i - x_j) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\cdot(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\cdot(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)$$

$$= \prod_{\substack{i = 1,\ldots,4 \\ j = 2,\ldots,5}} (x_i - x_j)$$

นั่นคือ

$$\prod_{1 \le i \le j \le n} (x_i - x_j) = \prod_{\substack{i = 1,2,\ldots,n-1 \\ j = i+1,\ldots,n}} (x_i - x_j)$$

ในที่นี้จะเห็นได้ว่าผลคูณ $\prod_{1 \le i \le j \le n} (x_i - x_j)$ ประกอบด้วยตัวประกอบ $4+3+2+1 = 10$ ตัว

***ดังนั้น $\prod_{1 \le i \le j \le n} (x_i - x_j) = \prod_{\substack{i = 1,2,\ldots,n-1 \\ j = i+1,\ldots,n}} (x_i - x_j)$ และผลคูณประกอบด้วย

ตัวประกอบ $(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1 = \sum^{n-1} (n-i)$ ตัว

ตัวอย่าง 2.2 จงแสดงให้เห็นว่า $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} x_i$

วิธีทำ

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) x_{n+1} = (x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) x_{n+1}$$

$$= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n x_{n+1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} x_i$$