ภาคผนวก 1

นิยาม 1 (Number Field)

ให้ $\mathscr{F}$ เป็นอนุเซทของ $\mathscr{C}$ ซึ่งเป็นเซทของจำนวนเชิงซ้อน เซท $\mathscr{F}$ จะเป็น Field ได้ก็ต่อเมื่อ $\mathscr{F}$ มีคุณสมบัติดังนี้

ก. ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ แล้ว $a+b$ และ ab ก็จะยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$

ข. ถ้า a เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ แล้ว $-a$ ก็เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ ด้วย และถ้า $a \neq 0$ เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ แล้ว $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ก็เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ ด้วย

ค. 0 และ 1 เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$

สมาชิกของ Field เรียกว่า Number หรือ Scalar

จากนิยามจะเห็นได้ว่า เซทของจำนวนจริง (R) และจำนวนเชิงซ้อน (C) เป็นเซทของจำนวนตักยะ (Q) ซึ่งก็คือเซทของเศษส่วน $\frac{m}{n}$ นั้น ถ้า $n \neq 0$ เซทนี้ก็เป็น Field ตามความหมายนี้ได้

แต่เซทของจำนวนเต็ม (Z) ไม่เป็น Field ตามความหมายนี้เพราะขาดคุณสมบัติข้อ ข. กล่าวคือถ้า $n \neq 0$ เป็นเลขจำนวนเต็มแล้ว $n^{-1} = \frac{1}{n}$ จะไม่เป็นจำนวนเต็มอีกต่อไป (ยกเว้น $n = 1$ หรือ $n = -1$)

โดยนัยแห่งนิยามนี้จะเห็นได้ว่าสิ่งที่จำเป็นเป็นอย่างยิ่งที่เซทใดเซทหนึ่งจะเป็น Field ได้ก็คือ สมาชิกของเซทนั้นสามารถบวก (ลบ) และคูณ (หาร) กันได้ด้วยกฎทางเลขคณิตและพีชคณิตอย่างง่าย ๆ

Number Field เป็น Field ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับหลักเกณฑ์ของแมตริกซ์อยู่มาก แต่ความจำเป็นต้องใช้หรือต้องมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ Field นั้นมิได้จำกัดอยู่เพียง Number Field เท่านั้น บ่อยครั้งที่มีความจำเป็นต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับ Field สูงกว่านี้ เช่นในการศึกษาเรื่อง Vector Space และในการศึกษาทฤษฎีแมตริกซ์และระบบจำนวนที่กำหนดคุณสมบัติและ Operation ไว้เป็นพิเศษ ซึ่งในกรณีดังกล่าว Number Field จะครอบคลุมไม่ถึง จำเป็นต้องรู้นิยามทั่วไปของ Field ด้วยดังนี้

นิยาม 2 เซท $\mathscr{F}$ ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว และมีคุณสมบัติของการบวกและการคูณดังต่อไปนี้เรียกว่า Field

A_1. ในทุกค่าของ a และ b ที่เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $a+b$ จะเป็นสมาชิกของ ด้วย

A_2. ในทุกค่าของ a และ b ที่เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $a+b = b+a$

A_3. ในทุกค่าของ a, b และ c ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $(a+b)+c = a+(b+c)$

A_4. ในกรณีของ z (Zero) ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $a+z = A$ ในทุกค่าของ a

A_5. สมาชิก a แต่ละตัวซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น a จะมีนิเศธ (Negative), $-a$ ของตัวเอง และจะมีผลให้ $a+(-a) = 0$ เสมอ

M_1. ในทุกค่าของ a และ b ที่เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น ab ก็จะยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$

M_2. ในทุกค่าของ a, b และ c ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $(ab)c = a(bc)$

M_3. ในกรณีของ u(Unit) ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $au = ua = a$

M_4. สมาชิก a ทุกตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ $(a \neq z)$ นั้น a จะมีส่วนกลับ (Inverse) a^{-1} ของตัวเอง และมีผลให้ $aa^{-1} = a^{-1}a = u$ เสมอ

M_5. ในทุกค่าของ a และ b ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $ab = ba$

M_6. ในทุกค่าของ a, b และ c ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$ นั้น $a(b+c) = ab+ac$

นิยามนี้เป็นนิยามทั่วไปของ Field ซึ่งหมายความว่า Number Field ก็เป็นส่วนหนึ่ง**ของนิยามนี้ด้วย**

ดังที่ได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่า ในกรณีที่เซทใดเซทหนึ่งนิยามคุณสมบัติของ Operation ระหว่างสมาชิกไว้เป็นกรณีพิเศษนอกเหนือจากกฎการบวกลบคูณหารตามปกติ **เซทนั้นอาจเป็น Field** ได้แต่อาจไม่เป็น Number Field ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดก็คือ Boolean Field

Boolean Field **นิยาม** Operation ของสมาชิกของเซท $B = \{0, I\}$ ไว้ดังนี้

1. $o+o = 0$
2. $0+1 = 1+0 = 1$
3. $1+1 = 0$
4. $0\cdot0 = 0.1 = 1\cdot0 = 0$

5. $1 \cdot 1 \quad = 1$

จากการตรวจสอบพบว่า เซท B ไม่ใช่ Number Field เพราะมีคุณสมบัติของ Operation ขัดกับกฎการบวกลบคูณหารตามธรรมดา แต่ก็เป็น Field เพราะสอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 11 ประการของ Field ตามนิยาม 2

วิชาแมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้นได้นำนิยามของ Field ทั้งสองความหมายมาใช้ บางแห่งก็ใช้นิยามที่ 1 เช่นในการศึกษาเรื่อง Vector Space บางแห่งก็ใช้ในลักษณะผสมกันในทั้งสองความหมาย เช่น การศึกษาเรื่องคุณสมบัติของแมตริกซ์