บทที่ 6

อินทิเกรชั่นและอนุพันธ์และบทประยุกต์

(INTEGRATION AND DIFFERENTIATION)

ทฤษฎีแมตริกซ์และสมการเชิงเส้นเป็นเครื่องมือที่สำคัญยิ่งที่ช่วยในการหา Integration โดยเฉพาะอย่างยิ่ง Multiple Integration และในวิชาสถิติได้นำทฤษฎีแมตริกซ์และสมการเชิงเส้นไปใช้อย่างกว้างขวาง เช่นในการศึกษาเรื่องการวิเคราะห์มัลติแวริเอต (Multivariate Analysis) และการวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) ส่วนในทางเศรษฐศาสตร์ก็นำหลักการนี้ไปใช้ในวิชาเศรษฐมิติ (Econometrics) เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม ในชั้นนี้จะขอกล่าวถึงบทประยุกต์ดังกล่าวเพียงเพื่อเป็นแนวทางให้เห็นประโยชน์เท่านั้น การจะกล่าวถึงโดยละเอียดเป็นเรื่องสุดวิสัยเพราะต้องมีพื้นความรู้ในวิชานั้น ๆ ตลอดจนต้องศึกษาทฤษฎีแมตริกซ์ให้ลึกซึ้งกว่าที่กล่าวถึงมาแต่ต้น ความรู้ที่สำคัญในทฤษฎีแมตริกซ์นอกเหนือจากที่กล่าวมาแต่ต้นคือ ความรู้เกี่ยวกับ Characteristic Value Problems ความรู้เกี่ยวกับ Linear Transformation ความรู้เกี่ยวกับ Quadratic Form, Linear Form, Bilinear Form และ Hermitian Form ตลอดจนความรู้เกี่ยวกับ Trace ของแมตริกซ์ ซึ่งเรื่องต่าง ๆ ดังกล่าวนี้จะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในบทต่อไป ในที่นี้จะนำมากล่าวถึงเพียงเพื่อเป็นการปูพื้นฐานและจะกล่าวถึงเฉพาะในส่วนที่จำเป็นต้องใช้จริง ๆ เท่านั้น

อนึ่ง การจะนำไปประยุกต์กับวิชาทางสถิติและเศรษฐศาสตร์นั้นความจำเป็นประการสำคัญก็คือต้องมีความรู้ในสาขาวิชานั้น ๆ บ้างตามสมควร การจะไม่กล่าวถึงทฤษฎีและนิยามในสาขาวิชานั้นเสียเลยจะเป็นการยากที่จะประสานเนื้อหาให้ สัมพันธการได้ นักศึกษาอาจไม่รู้ต้นสายปลายเหตุและจะกลับเพิ่มภาระในการศึกษาให้มากขึ้นไปอีก

6.1 Linear Form, Bilinear Form และ Quadratic Form

นิยาม 6.1 ถ้า a เป็นเวคเตอร์ของเทอมคงที่ X เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรค่า Expression a^TX หรือ X^Ta เรียกว่า Linear Form

นั่นคือ

$$a^TX = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = X^Ta$$

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x_1 + 5x_2 - x_3 = (2, 5, -1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a^TX$

นิยาม 6.2 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ X เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรค่ามีขนาด $m \times 1$ Y เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรค่ามีขนาด $n \times 1$ Expression X^TAY เรียกว่า Bilinear Form

นั่นคือ

$$X^TAY = (x_1, x_2, \ldots, x_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m)\, y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m)\, y_2 + \cdots$$

$$+ (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m)\, y_n$$

$$= a_{11}x_1y_1 + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{m1}x_my_1 + a_{a2}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{m2}x_my_2 + \cdots$$

$$+ a_{1n}x_1y_n + a_{2n}x_2y_n + \cdots + a_{mn}x_my_n$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

ตัวอย่างเช่น $f(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 4x_1y_3 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2$

$$= (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X^TAY$$

นิยาม 6.3 ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ X เป็นเวคเตอร์ของตัวแปรขนาด $n \times 1$ Expression X^tAX เรียกว่า Quadratic Form

นั่นคือ

$$X^tAX = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + x_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n)\, x_1 + (a_{12}a_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n)\, x_2 + \cdots$$

$$+ (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\, x_n$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{21}x_2x_1 + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{n2}x_nx_2 + \cdots$$

$$+ a_{1n}x_1x_n + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Quadratic Form เป็นกรณีเฉพาะของ Bilinear Form เมื่อ X = Y และ A เป็น Square Matrix เรียก A ว่า Matrix of Quadratic Form A ไม่จำเป็นต้องเป็น Symmetric Matrix แต่โดยทั่วไป Quadratic Form ที่ใช้ในสาขาวิชาต่าง ๆ จะนิยามให้เป็น Symmetric Matrix เช่นในวิชาสถิติ วิชาเศรษฐมิติ และอื่น ๆ ในที่นี้และลำดับต่อ ๆ ไปจะกล่าวถึงเฉพาะเมื่อ A เป็น Symmetric Matrix

ตัวอย่างเช่น

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x_1^2 + 3\,x_1x_2 + 2\,x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + 3\,x_3x_1 \\
&= x_1^2 + 3\,x_1x_2 + 0\,x_1x_3 + 2\,x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + 3\,x_3x_1 + 0\,x_3x_2 + 0\,x_3^2 \\
&= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= X^TAX \text{ ; A ไม่เป็น Symmetric Matrix}
\end{aligned}
$$

หรือ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3 \\
&= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 + x_3^2 \\
&= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= X^TAX \text{ ; A เป็น Symmetric Matrix}
\end{aligned}
$$

หรือ

$$f(x) = 3\,x_1^2 + 5\,x_1x_2 + x_2^2 + 4\,x_2x_3 - 7\,x_3x_1 - 9\,x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 & 2 \\ -\frac{7}{2} & 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= X'AX$$

6.2 การส่งผ่านและค่าแสดงคุณลักษณะของเงื่อนไขการส่งผ่าน

(Transformation and Characteristic Value Problems)

นิยาม 6.4 การจับคู่ของ a ซึ่งเป็นสมาชิกของเซท S_1 กับ b ซึ่งเป็นสมาชิกของ S_2 ในลักษณะที่เมื่อกำหนดสมาชิกตัวแรกของคู่ลำดับ (a, b) ให้ จะสามารถหาค่าของสมาชิกตัวที่สองได้เพียงค่าหนึ่ง เซทของคู่ลำดับนั้นเรียกว่า "**การส่งผ่าน** S_1 **ไป** S_2" หรือ "**การแปลงรูปจาก** S_1 **ไป** S_2" (Mapping from S_1 to S_2 หรือ Trasform S_1 to S_2)

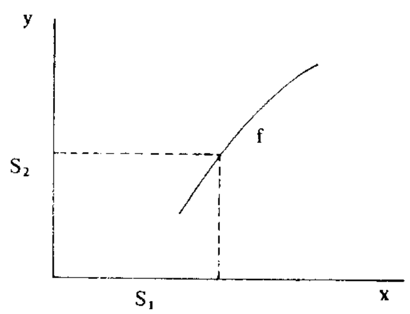
โดยทั่วไปเราเสนอการส่งผ่าน S_1 ไป S_2 ด้วยสัญญลักษณ์

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

โดยที่ f คือเงื่อนไขการส่งผ่าน (Rule of Mapping) ที่ทำหน้าที่เชื่อมโยงค่า a จาก S_1 ไปยัง b ใน S_2 หรือจะเรียกว่าแปลงรูปจาก a ใน S_1 ไปเป็น b ใน S_2 ก็ได้ โดยทั่วไปนิยมเสนอการส่งผ่านในรูป

$$y = f(x)$$

ซึ่งจะเห็นภาพได้กระจ่างกว่าเดิม เพราะเมื่อกำหนดค่า x ลงไป f จะทำหน้าที่แปลงค่าของ x ไปเป็นค่าใหม่คือ y หรือเชื่อมโยงค่าของ x กับค่าของ y ดังภาพ



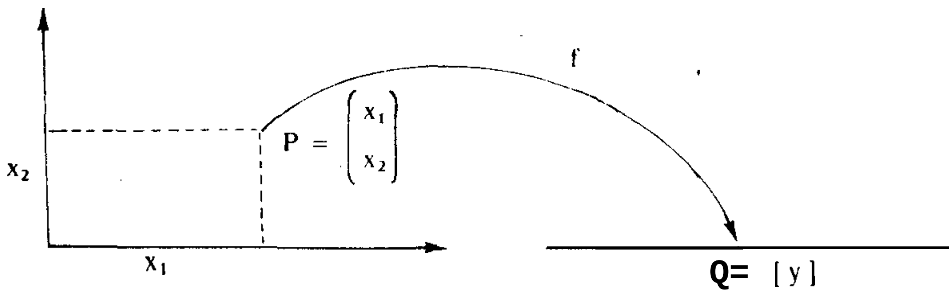
คำว่า**การส่งผ่าน** หรือ **การแปลงรูป** เป็นคำที่ทำให้เห็นภาพได้ดี ทั้งนี้เพราะต้องกันกับเรื่องซึ่งต้องมีตัวกลางตัวหนึ่งคือ f ทำหน้าที่คล้าย Processing Unit หรือ Operator

อีกประการหนึ่ง ที่ไม่ใช้คำว่า **การจับคู่** ก็เพราะเกรงว่าจะเข้าใจว่าหมายถึง Matching ซึ่งเป็นคนละความหมายกับลักษณะของคำว่า Mapping

เงื่อนไขของการส่งผ่าน (Rule of Mapping หรือ Rule of Transformation) **จึงเป็นสิ่งที่ทรงความสำคัญเป็นอย่างยิ่งและการจะกำหนดให้มีเงื่อนไขเป็นไปในลักษณะใดต้องขึ้นอยู่กับลักษณะของงานที่ต้องการ**

ตัวอย่าง 6.1 จงวาดรูปแสดงการส่งผ่านจาก S_1 **ซึ่งเป็น** Space 2 **มิติไปยัง** S_2 **ซึ่งเป็น** Space 1 **มิติ พร้อมทั้งยกตัวอย่างของงานที่สอดคล้องกับการส่งผ่านดังกล่าว**

วิธีทำ การส่งผ่านจาก S_1 ไปยัง S_2 ปรากฏดังภาพ



ตัวอย่างเช่นการส่งผ่านจาก Sample Space ที่เกิดจากการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ไปยังเซทของจำนวนจริง

การทอดลูกเต๋าพร้อมกัน 2 ลูก (หรือทีละลูก) จะเกิดหน้าลูกเต๋าที่เป็นไปได้ 36 หน้าคือ (1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 2), ..., (2, 6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)

เงื่อนไขการส่งผ่านอาจเป็น "ผลรวมของหน้าลูกเต๋า" "ผลต่างของหน้าลูกเต๋า" "ลูกเต๋าหน้าเดียวกันรวมกัน" หรืออื่น ๆ

เช่น ถ้าเงื่อนไขการส่งผ่านคือ "ผลบวกของหน้าลูกเต๋า" f (ต่อไปจะใช้ A) คือ (1, 1) ดังนั้น การส่งผ่านจาก S_1 ไป S_2 คือ

$$Y = AX$$

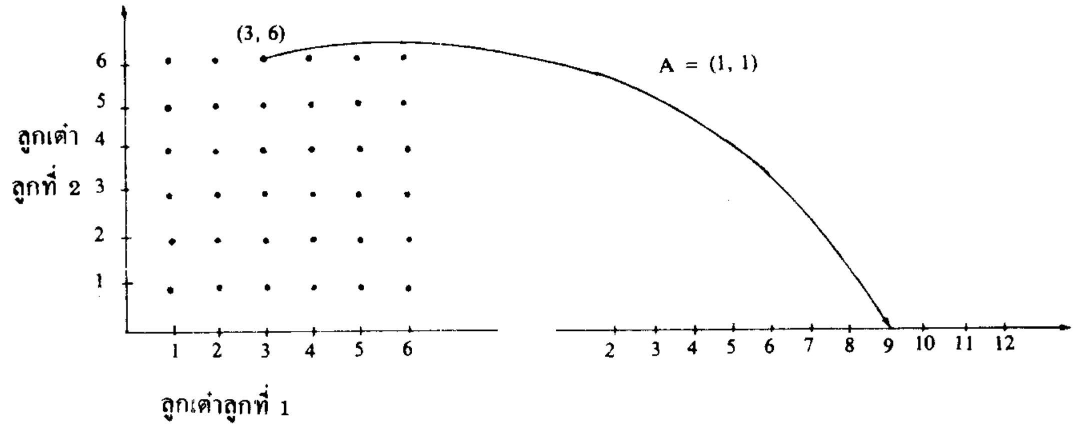
นั่นคือ $Y = (1, 1) \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = x_i + x_j$ เมื่อ x_i แทนหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 1 x_j คือหน้าของลูกเต๋าลูกที่ 2

ดังนั้น

$$S_1 = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), \ldots, (6, 1), (6, 2), \ldots, (6, 6)\}$$

และ $S_2 = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$

เช่น (3, 6) จาก S_1 จะส่งผ่านไปยัง $(1, 1)\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 3+6 = 9$ ใน S_2 ดังภาพ



จากตัวอย่างนี้ ถ้า S_1 เป็น Space n มิติ S_2 เป็น Space m มิติ และมีเงื่อนไขการส่งผ่านว่า "Y เกิดจากการประกอบกันเชิงเส้นของ X"

ดังนั้น การส่งผ่านจาก S_1 ไป S_2 จึงนิยามได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad \ldots\ldots\ldots(1) \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $\quad Y_{m\times 1} = A_{m\times n} X_{n\times 1}$

รูปนี้เป็นรูปทั่วไปของการส่งผ่านหรือการแปลงรูปจาก S_1 ไป S_2 ณ จุดนี้ขอให้สังเกตไว้ในขั้นต้น 2 ประการคือ

ก. แต่ละสมการใน (1) เป็นสมการเชิงเส้น (อาจกำหนดให้เป็นรูปอื่นที่มิใช่สมการเชิงเส้นก็ได้ แต่เท่าที่นำไปใช้ประโยชน์จริงนิยมใช้ในรูปสมการเชิงเส้น)

ข. เงื่อนไขการแปลงรูปหรือเงื่อนไขการส่งผ่านคือ A อาจเป็น Singular Matrix หรือ Nonsingular Matrix ก็ได้[1] แต่โดยทั่วไปนิยมให้ A เป็น Nonsingular Matrix

ข้อสังเกต 2 ประการนี้จะช่วยให้มองเห็นภาพการแปลงรูปเชิงเส้นหรือการส่งผ่านเชิงเส้น (Linear Transformation) ซึ่งจะกล่าวถึงในลำดับต่อไปได้กระจ่างขึ้น

ตัวอย่าง 6.2 จงส่งผ่านเวคเตอร์ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ไปยังเวคเตอร์ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ โดยใช้เงื่อนไขการส่งผ่านเป็น $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จาก $Y = AX$

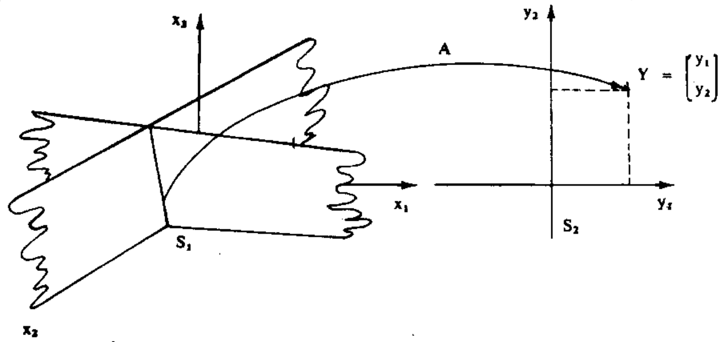
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_2$$

Solution ที่ได้คือค่าบนเส้นตรงที่เกิดจากรอยตัดของระนาบ $2x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1$ และระนาบ $x_1 + x_2 + x_3 = y_2$

ดังนั้นรูปทั่วไปของการส่งผ่านจาก S_1 ไป S_2 ของตัวอย่างนี้จะปรากฏดังภาพ



1 การส่งผ่าน Y = AX ที่ A เป็น Singular Matrix เรียกว่า Singular Transformation เป็นการส่งผ่านเวคเตอร์ X สู่เวคเตอร์ Y ซึ่งอยู่ใน Space อีกมิติหนึ่ง ถ้า A เป็น Nonsingular Matrix เรียก การส่งผ่าน Y = AX ว่า Nonsingular Transformation เป็นการส่งผ่านเวคเตอร์ X ไปยังเวคเตอร์ Y ซึ่งอยู่ในมิติเดียวกันกับ X หรือนัยหนึ่ง เป็นการส่งผ่านสู่ Space เดิม

นิยาม 6.5 การส่งผ่านจาก S_1 ไป S_2 จะเรียกว่าการส่งผ่านเชิงเส้น (Linear Transformation) ถ้าการส่งผ่านดังกล่าวมีคุณสมบัติดังนี้

1. $A(\alpha X_1) = \alpha Y_1$
2. $A(X_1 + X_2) = Y_1 + Y_2$

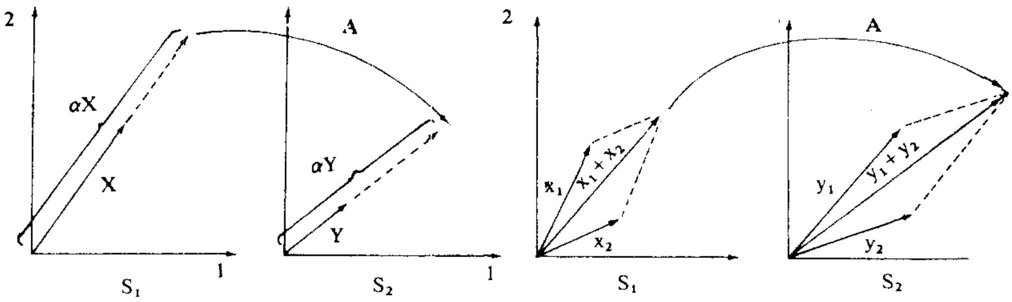
และถ้าการส่งผ่านจาก S_1 ไป S_2 โดย S_1 และ S_2 มีมิติเดียวกัน (นั่นคือ A เป็น Square Matrix) และสอดคล้องกับการส่งผ่านเชิงเส้น เรียกการส่งผ่านนั้นว่า "การส่งผ่านแบบเอกพันธ์เชิงเส้น" (Linear Homogeneous Transformation)

เราอาจอธิบายความหมายของนิยามนี้ให้เข้าใจง่ายขึ้นดังนี้ :-

A ทำหน้าที่เชื่อมโยงหรือส่งผ่านเวคเตอร์จาก S_1 ไปยังเวคเตอร์ใน S_2 ในลักษณะที่

ก. ถ้าเวคเตอร์จาก S_1 ยืดหดไป α เท่าแล้ว A จะทำหน้าที่ ส่งผ่านเวคเตอร์นั้นไปยังเวคเตอร์ใน S_2 ที่ยืดหดไป α เท่าเช่นกัน และ

ข. A จะส่งผ่านผลรวมของเวคเตอร์จาก S_1 ไปยังผลรวมของเวคเตอร์ใน S_2 ดังภาพ



นิยาม 6.6 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็น Nonsingular Matrix λ เป็นตัวคงที่ (Scalar Variable) แมตริกซ์ $[A - \lambda I_n]$ เรียกว่า Characteristic Matrix of A, det $[A - I_n]$ เรียกว่า Characteristic Determinant of A, $f(\lambda) = \det[A - \lambda I_n] = 0$ เรียกว่า Characteristic Equation of A, ค่า λ ที่ได้จาก $f(\lambda) = 0$ เรียกว่า Characteristic Root และเวคเตอร์ X ที่สอดคล้องกับสมการ $AX = \lambda X$ หรือ $[A - \lambda I_n]X = 0$ เรียกว่า Characteristic Vector และแมตริกซ์ที่เกิดจากการรวมกันของ Characteristic Vector เรียกว่า Modal Matrix

ตัวอย่าง 6.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา Characteristic Vector

วิธีทำ Characteristic Matrix ของ A คือ

$$A-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Characteristic Equation ของ A คือ

$$\det(A - I_3) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)+0-1-1-0+2 = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

นั่นคือ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ เป็น Characteristic Root

แสดงว่าเงื่อนไขการส่งผ่าน A จะส่งผ่านเวคเตอร์ X ไปได้ 3 ลักษณะคือ ส่งผ่านไปยังเวคเตอร์ $\lambda_1 X$, $\lambda_2 X$ และ $\lambda_3 X$ ตามลำดับ

Characteristic Vector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_1 = 2$ สามารถหาได้จากระบบสมการ $(A-\lambda_1 I)X = 0$ หรือ $AX = \lambda_1 X$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 1 \\ 1 & 1-2 & 1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2I_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Characteristic Value Problems เป็นเรื่องของการส่งผ่านเวคเตอร์จากเซท S สู่เวคเตอร์ในเซท S ดังเดิมโดยอาศัยเงื่อนไขการส่งผ่าน A และมุ่งสนใจว่าเมื่อกำหนดเงื่อนไขการส่งผ่าน A ให้แล้ว A จะส่งผ่านเวคเตอร์ X ไปในลักษณะใด ? โดยปกติ A จะส่งผ่านเวคเตอร์ X ไปยังเวคเตอร์ X ดังเดิม แต่อาจมีได้หลายลักษณะซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปก็เป็นการส่งผ่านไปยังเวคเตอร์ X ที่ยืดหดไป λ เท่า ค่า λ จึงเป็นค่าที่แสดงลักษณะ Image ของเวคเตอร์ X มีชื่อเรียกว่า Characteristic Value หรือ Characteristic Root.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

แก้สมการได้ $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 0$

ถ้าให้ $t = 1$ จะได้ $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็น Characteristic Vector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_1 = 2$

หมายความว่าเงื่อนไขการส่งผ่าน A จะส่งผ่านเวคเตอร์ $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ไปยังเวคเตอร์

$2X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Characteristic Vector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_2 = 1$ หาได้จากระบบสมการ

$(A - 1 \cdot I_3) X = 0$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$-x_2 + x_3 = 0$$

แก้สมการได้ $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = t$

ถ้าให้ $t = 1$ จะได้ $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็น Characteristic Vector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_2 = 1$

ในทำนองเดียวกันจะสามารถหาได้ว่า

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ เป็น Characteristic Vector ที่สอดคล้องกับ $\lambda_3 = 3$

ดังนั้น Modal Matrix คือ $(X_1, X_2, X_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P$

6.3 Definite Quadratic Form

นิยาม 6.7 จาก Quadratic Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX$

1. ถ้า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ ในทุกค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เรียก f ว่า Nonnegative Quadratic Form หรือ Positive Semi-Definite Quadratic Form
2. ถ้า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ในทุกค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เรียก f ว่า Positive Definite Quadratic Form
3. ถ้า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$ ในทุกค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เรียก f ว่า Negative Semi-Definite Quadratic Form
4. ถ้า $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ ในทุกค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เรียก f ว่า Negative Definite Quadratic Form

ตัวอย่างเช่น

1. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2$ เป็น Positive Definite Quadratic Form เพราะไม่ว่าจะกำหนดค่าของ x_1, x_2 เป็นเท่าใดก็ตาม (ยกเว้น $x_1 = x_2 = 0$) $f(x_1, x_2)$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

2. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2^2) + x_3^2$ เป็น Positive Semi-Definite Quadratic Form เพราะ f มีค่าเป็นบวกเสมอ แต่เป็นศูนย์ได้เมื่อ $x_1 = 2t, x_2 = t, x_3 = 0$

3. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ เป็น Negative Definite Quadratic Form เพราะไม่ว่า x_1, x_2, x_3 จะมีค่าเท่าใด f จะมีค่าเป็นลบเสมอ

4. $f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 - 3x_2)^2 - x_3^2$ เป็น Negative Semi-Definite Quadratic Form เพราะ f จะมีค่าเป็นลบเสมอ แต่มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $x_1 = 3t, x_2 = t, x_3 = 0$

ข้อสังเกต เราจะไม่กำหนดทุกค่าของ x ใน f ให้เป็นศูนย์ แต่สามารถกำหนดให้เป็นศูนย์ได้ในบางค่า

อย่างไรก็ตาม การตรวจสอบจาก f โดยตรงอาจทำให้มองเห็นภาพที่เลือนลางและเสียเวลาในการพิจารณามาก จึงต้องอาศัยวิธีอื่น วิธีที่ใช้กันโดยทั่วไปคือการตรวจสอบ

เครื่องหมายของ Characteristic Root ของ A ซึ่งเป็น Matrix of Quadratic Form (และควรตรวจสอบค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย) กล่าวคือ

1. ถ้า $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเป็น Positive Definite Quadratic Form
2. ถ้า $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเป็น Positive Semi-Definite Quadratic Form
3. ถ้า $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเป็น Negative Definite Quadratic Form
4. ถ้า $\lambda_1 \leqslant 0, \lambda_2 \leqslant 0, \ldots, \lambda_n \leqslant 0$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเป็น Negative Semi-Definite Quadratic Form

ขอให้สังเกตค่า Characteristic Root ของ Quadratic Form ข้างต้นดังต่อไปนี้

1.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X^T A X$$

$$\det(A - I_2) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

ดังนั้น

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

จะเห็นได้ว่า $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ ดังนั้น $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ เป็น Positive Definite Quadratic Form

และเมื่อตรวจสอบ det A พบว่า det A = 2 นั่นคือ det A > 0

ดังนั้น

ก. ถ้า $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$ หรือ

ข. ถ้า det A > 0 กล่าวคือ A เป็น Nonsingular Matrix แล้ว f จะเป็น Positive Definite Quadratic Form

2.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2$$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T AX$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2-4) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\lambda(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 5$$

เห็นได้ว่า $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 > 0$ แสดงว่า f เป็น Positive Semi-Definite Quadratic Form

หรือตรวจสอบ det A พบว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

ดังนั้น

ก. ถ้า $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ หรือ

ข. det A = 0 นั่นคือ A เป็น Singular Matrix

แล้ว $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเป็น Positive Semi-Definite Quadratic Form

3. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T AX$$

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1+\lambda)^3 = 0$$

ดังนั้น $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$

เห็นได้ว่า $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

หรือตรวจสอบ det A พบว่า det A $= -1$

ดังนั้น

ก. ถ้า $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ หรือ

ข. $\det A \neq 0$ $(\det A = \pm k)$

แล้ว f จะเป็น Negative Definite Quadratic Form

4. $$f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 - 3x_2)^2 - x_3^2$$

$$= -x_1^2 - 9x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T A X$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -9-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1+\lambda)(9+\lambda)(1+\lambda) + 9(1+\lambda) = 0$$

$$(1+\lambda)[-(9+\lambda)(1+\lambda) + 9] = 0$$

$$(1+\lambda)(-9 - 10\lambda - \lambda^2 + 9) = 0$$

$$(1+\lambda)(-\lambda^2 - 10\lambda) = 0$$

$$-(1+\lambda)\lambda(\lambda + 10) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 10$$

นั่นคือ $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$

ตรวจสอบ det A พบว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$$

ดังนั้นถ้า

ก. $\lambda_1 \leqslant 0, \lambda_2 \leqslant 0, \ldots, \lambda_n \leqslant 0$ หรือ

ข. $\det A = 0$ หรือ A เป็น Singular Matrix แล้ว f จะเป็น Negative Semi-Definite

หมายเหตุ จากการตรวจสอบค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A ใน $f = X^TAX$ พบว่า ถ้า A เป็น Nonsingular Matrix f จะเป็น Definite Form แต่ถ้า A เป็น Singular Matrix f จะเป็น Semi-Definite Form จึงเห็นได้ว่าการตรวจสอบค่าดีเทอร์มิแนนต์จะช่วยให้เห็นภาพได้กระจ่างขึ้น แต่มิได้ชี้ลงไปอย่างเด่นชัดว่าเป็น Positive หรือ Negative

6.4 การหาค่าของ Multiple Integration

ทฤษฎี 6.1 ให้ a_0 และ b_0 เป็นค่าคงที่ a และ b เป็นเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ของค่าคงที่ แมตริกซ์ A เป็น Symmetric Matrix ของค่าคงที่ B เป็น Positive Definite Matrix ของค่าคงที่ X เป็นเวคเตอร์ขนาด $n \times 1$ ของตัวแปร

Multiple Integration I จะมีค่าดังนี้

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(X^TAX + X^Ta + a_0)\, e^{-(X^TBX + X^Tb + b_0)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{2}\pi^{\frac{n}{2}}\,|B|^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{4}(b^TB^{-1}b) - b_0}\left[\,tr(AB^{-1}) - b^TB^{-1}a + \frac{1}{2}b^TB^{-1}AB^{-1}b + 2a_0\,\right]$$

ตัวอย่าง 6.4 จงหาค่าของ

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2)}\, dx_1\, dx_2$$

วิธีทำ

$$I = \int^{\infty}\int^{\infty} e^{-(3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2)}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^TBX}\, dx_1\, dx_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad a_0 = 1,\ n = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad b_0 = 0$$

$$|B| = 2,\ |B|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎี 6.1

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}\pi^{\frac{n}{2}}\,|B|^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{4}(b^TB^{-1}b) - b_0}\cdot\left[\,tr(AB^{-1}) - b^TB^{-1}a + \frac{1}{2}b^TB^{-1}AB^{-1}b + 2a_0\,\right]$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4}(0)-0}\left[0-0+\frac{1}{2}\cdot 0+2(1)\right]\\
&= \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 6.5 จงหาค่าของ $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2(x_1-2)\,e^{-(3x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2)}\,dx_1\,dx_2$

วิธีทำ

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2(x_1-2)\,e^{-(3x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2)}\,dx_1\,dx_2$$

จะเห็นว่า

$$n = 2$$

$$X^TAX = x_1x_2 = (x_1, x_2)\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \text{ ดังนั้น} A = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$X^Ta = 2x_2 = (x_1, x_2)\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix} \qquad \text{ดังนั้น } a = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0$$

$$X^TBX = 3x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \text{ ดังนั้น} B = \begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$|B| = 2,\ |B|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$X^Tb = 0 = (x_1, x_2)\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } b = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$b_0 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } I = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{4}(0)-0}\left[1-0+0+0\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

ตัวอย่าง 6.6 จงหาค่าของ $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2-2x_1x_4)\,e^{-\frac{1}{2}Q}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$

โดยที่ $Q = 3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_3x_4-6x_1-2x_2-6x_3-2x_4+8$

วิธีทำ $n = 4$

$$X^T A X = x_1^2 - 2x_1x_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$X^T a = 0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0$$

$$X^T B X = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$X^T b = -6x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 2x_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b_0 = 8$$

$$|B| = 5,\ B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ |B|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b^T B^{-1} b = (-6, -2, -6, -2)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = 32$$

$$\operatorname{tr}(AB^{-1}) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{tr}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$b^T B^{-1} a = (-6, -2, -6, -2)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$b^T B^{-1} A B^{-1} b = (-6, -2, -6, -2)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= (-6, -2, -6, -2)\begin{bmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -2, 4\right) \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= 12$$

ดังนั้น

$$I = \frac{1}{2}\pi^{\frac{n}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}(b^T B^{-1} b) - b_0} \left[tr(AB^{-1}) - b^T B^{-1} a + \frac{1}{2} b^T B^{-1} A B^{-1} b + 2a_0 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot e^{\frac{1}{4}(32) - 8} \left(\frac{2}{5} - 0 + \frac{1}{2} \cdot 12 + 2(0) \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2\sqrt{5}} \cdot e \left(\frac{2}{5} - 0 + 6 + 0 \right)$$

$$= \frac{16\pi^2}{5\sqrt{5}}$$

ตัวอย่าง 6.7 **ตัวแปรสุ่ม** X **มี** Probability Distribution ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} ; -\alpha < x < \alpha, -\alpha < \mu < \alpha, \sigma \geq 0$$

จงหาค่า $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ และ $V(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2 = \int_{\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$

วิธีทำ

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)}$$

จะเห็นได้ว่า

$n = 1$

$X^T AX = 0$ **ดังนั้น** $A = 0$

$X^T a = x$ **ดังนั้น** $a = 1$

$a_0 = 0$

$X^T BX = \frac{x^2}{2\sigma^2}$ **ดังนั้น** $B = \frac{1}{2\sigma^2}, |B| = \frac{1}{2\sigma^2}, |B|^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sigma, B^{-1} = 2\sigma^2$

$X^T b = \frac{-\mu x}{\sigma^2}$ **ดังนั้น** $b = -\frac{\mu}{\sigma^2}, b^T = -\frac{\mu}{\sigma^2}$

$b_0 \quad = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$

ดังนั้น

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} \cdot \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}\sigma \cdot e^{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{\sigma^2} \cdot 2\sigma^2 \cdot \frac{\mu}{\sigma^2}\right) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \left[0 - \left(-\frac{\mu}{\sigma^2}\right) \cdot 2\sigma^2 \cdot 1 + 0 + 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{2}} \cdot e^0 \cdot 2\mu = \mu$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

จะเห็นได้ว่า

$X'AX \quad = x^2 \cdot \quad A = 1$

$X'a \quad = 0 \quad a = 0$

$a_0 \quad = 0$

$B \quad = \dfrac{1}{2\sigma^2}, \ |B| = \dfrac{1}{2\sigma^2}, \ |B|^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sigma, \ B^{-1} = 2\sigma^2$

$b \quad = \dfrac{-\mu}{\sigma^2}, \ b^T = \dfrac{-\mu}{\sigma^2}$

$b_0 \quad = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$

ดังนั้น

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} \cdot \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}\sigma \cdot e^{\frac{1}{4}\left(\frac{-\mu}{\sigma^2} \cdot 2\sigma^2 \cdot \frac{-\mu}{\sigma^2}\right) - \frac{\mu^2}{\sigma^2}}$$

$$\left[2\pi^2 - 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-\mu}{\sigma^2} \cdot 2\sigma^2 \cdot 1 \cdot 2\sigma^2 \cdot \frac{-\mu}{\sigma^2} + 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^0 (2\sigma^2 + 2\mu^2)$$

$$= \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

หมายเหตุ 1. ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) คือเงื่อนไขการส่งผ่านหรือเงื่อนไขการแปลงรูปที่เชื่อมโยงจากจุด (Sample Point) ใน Sample Space ไปยังค่าจำนวนจริงใน Real Line

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; \ -\infty < x < \infty, \ -\infty < \mu < \infty, \ \sigma^2 \geqslant 0$

เรียกว่า Normal Distribution หรือ Normal Density Function เป็น Distribution ที่ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในวิชาสถิติและเศรษฐศาสตร์ $E(X) = \mu$ คือค่าคาดหมาย (Expected Value) หรือค่าเฉลี่ย $V(X) = \sigma^2$ เรียกว่าความแปรปรวน (Variance) σ เรียกว่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) μ และ σ^2 เป็นค่าคงที่ $-\infty < \mu < \infty$ หมายความว่าค่าของ μ เป็นบวกหรือลบก็ได้ $\sigma^2 \geqslant 0$ หมายความว่าค่าของ σ^2 ต้องเป็นบวก

6.5 การหาอนุพันธ์ของฟังค์ชั่น

6.5.1 การหาอนุพันธ์ของฟังค์ชั่นเมื่อคิดเทียบกับเวคเตอร์

(Derivertive of a Function with respect to a Vector)

นิยาม 6.8 ให้ f เป็นฟังค์ชั่นของตัวแปรอิสระ (Real Independent Variable) $x_1, x_2, \ldots, x_k$

อนุพันธ์ของฟังค์ชั่น f เมื่อคิดเทียบกับเวคเตอร์ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix}$ คือ

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎี 6.2 ให้ $l(X)$ เป็น linear function ของตัวแปรอิสระ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ กล่าวคือ $l(X) = X^T a = a^T X = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k$

โดยที่ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \end{bmatrix}$ เป็นเวคเตอร์ของเทอมคงที่

ดังนั้น $\frac{\partial l(X)}{\partial X} = a$

พิสูจน์ จากนิยาม สมาชิกตัวที่ i ของ $\frac{\partial f}{\partial X}$ คือ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i ; i = 1, 2, \ldots, k$

ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial X} = a$

ตัวอย่าง 6.8 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x_1+2x_2-3x_3$ เมื่อคิดเทียบกับเวคเตอร์

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$f(x) = x_1+2x_2-3x_3 = (1, 2, -3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎี 6.3 ให้ q เป็น quadratic form ของตัวแปรอิสระ (real variable) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ กล่าวคือ $q = X^TAX$; A เป็น Symmetric Matrix ขนาด $k \times k$

ดังนั้น $\frac{\partial q}{\partial X} = 2AX$

พิสูจน์ q เป็น Quadratic Form ของตัวแปรอิสระ (Real Variable) $x_1, x_2, \ldots, x_k$

$$q = X^TAX \text{ ; A เป็น Symmetric Matrix ขนาด } k \times k$$

$$= \sum_i^n \sum_j^n a_{ij}x_ix_j$$

สมาชิกตัวที่ t ของ $\frac{\partial q}{\partial X}$ คือ

$$\frac{\partial q}{\partial x_t} = \frac{\partial}{\partial x_t} X^TAX = \frac{\partial}{\partial x_t}\Big(\sum_i^k a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^k \sum_j^k a_{ij}a_ix_j\Big)$$

$$= 2a_{tt}x_t + 2\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{k} a_{tj}x_j = 2\sum_{j=1}^{k} a_{tj}x_j$$

ดังนั้น $\frac{\partial q}{\partial x_t} = 2\sum_{j=1}^{k} a_{tj}x_j \; ; \; t = 1, 2, \ldots, k$

$$= 2AX$$

ตัวอย่างเช่น

$$q = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 2x_1 + (3x_2 + 3x_2) + (2x_3 + 2x_3) = 2a_{11}x_1 + 2\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{3} a_{1j}x_j$$

$$= 2x_1 + 2(3x_2) + 2(2x_3) = 2\sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = 2x_2 + 2(3x_1) + 2(0\cdot x_3) = 2\sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_3} = 2x_3 + 2(0\cdot x_2) + 2(2x_1) = 2\sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j$$

ดังนั้น $\frac{\partial q}{\partial X} = \begin{bmatrix}\frac{\partial q}{\partial x_1}\\ \frac{\partial q}{\partial x_2}\\ \frac{\partial q}{\partial x_3}\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}2x_1 + 2(3x_2) + 2(2x_3)\\ 2(3x_1) + 2x_2 + 2(0\cdot x_3)\\ 2(2x_1) + 2(0\cdot x_2) + 2x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j\\ 2\sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j\\ 2\sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j\end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} x_1+3x_2+2x_3 \\ 3x_1+x_2+0\cdot x_3 \\ 2x_1+0\cdot x_2+x_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2AX$$

ตัวอย่าง 6.9 จาก General Linear Model $Y = X\beta+u$ **โดยที่** Y **เป็นเวคเตอร์ขนาด** $n\times 1$ X **เป็นแมตริกซ์ขนาด** $n\times k$ β **เป็นเวคเตอร์ของพารามิเตอร์มีขนาด** $k\times 1$ u **เป็นเวคเตอร์ของ** Disterbance Term **มีขนาด** $n\times 1$

จงหาตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ β **ที่ทำให้** $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ **มีค่าน้อยที่สุด** (e_i **คือตัว**ประมาณค่าของ u_i)

วิธีทำ

จาก $Y = X\beta+u$

ในทางสถิตินั้น งานหลักประการที่สำคัญคือการคาดหมายคุณลักษณะของกลุ่มประชากร เช่น ถ้ากลุ่มประชากรคือวัวนมในประเทศไทย คุณลักษณะที่น่าสนใจของประชากรกลุ่มนี้คือ จำนวนวัวนมทั้งหมดที่มีอยู่ภายในประเทศ ปริมาณน้ำนมที่ผลิตได้ในวันหนึ่ง ๆ หรือ ขนาดและน้ำหนักของวัว หรือถ้ากลุ่มประชากรคือผู้ประกอบอาชีพรับราชการ คุณลักษณะที่น่าศึกษาของประชากรกลุ่มนี้คือ รายได้ต่อปี จำนวนข้าราชการที่มีบ้านและที่ดินของตนเอง จำนวนข้าราชการที่มีรายได้ต่ำกว่า 1,000 บาทต่อเดือน หรืออื่น ๆ คุณลักษณะของกลุ่มประชากรเรียกว่า **พารามิเตอร์** งานทางสถิติจึงเป็นงานที่ข้องเกี่ยวกับพารามิเตอร์อยู่ตลอดเวลา เช่น กะประมาณค่าของพารามิเตอร์ หรือทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ วิธีการดำเนินการดังกล่าวกระทำได้โดยการสุ่มตัวอย่าง ประชากรขึ้นมาจำนวนหนึ่ง แล้วอาศัยผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างไปอภิปรายผลสู่กลุ่ม ประชากรอีกต่อหนึ่ง ผลลัพธ์ที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างเรียกว่า **ตัวประมาณค่า**

ให้ $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}$ เป็นตัวประมาณค่าของ $\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}_{k-1} \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$Y = X\hat{\beta} + e$; e คือตัวประมาณค่าของ u , $\hat{\beta}$ คือตัวประมาณค่าของ β

นั่นคือ $e = Y - X\hat{\beta}$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} = e^T e$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e^T e = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta})$

$$= (Y^T - \hat{\beta}^T X^T)(Y - X\hat{\beta})$$

$$= Y^T Y - Y^T X\hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T Y + \hat{\beta}^T x^T X\hat{\beta}$$

$\therefore$ $\hat{\beta}^T X^T Y$ และ $Y^T X\hat{\beta}$ เป็นแมตริกซ์ขนาด 1×1 จึงเป็น Scalar สามารถรวมกันได้

ดังนั้น $e^T e = Y^T Y - 2\hat{\beta}^T X^T Y + \hat{\beta}^T X^T X\hat{\beta}$

ต้องการหา $\hat{\beta}$ ที่ทำให้ $e^T e$ มีค่าน้อยที่สุด (Least Square Estimate)

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial} e^T e = \frac{\partial}{\partial} (Y^T Y - 2\hat{\beta}^T X^T Y + \hat{\beta}^T (X^T X)\hat{\beta}) = 0$$

ดังนั้น $0 - 2X^T Y + 2(X^T X)\hat{\beta} = 0$

ข้อสังเกต

$\hat{\beta}^T (X^T Y)$ เป็น Linear Form ของ $\hat{\beta}$, $\hat{\beta}^T (X^T X)\hat{\beta}$ เป็น Quadratic Form ของ $\hat{\beta}$

ดังนั้น $(X^T X)\hat{\beta} = X^T Y$

จาก Assumption $r(X^T X) = k$ แสดงว่า $r(X^T X) = k$ หรือนัยหนึ่ง $(X^T X)^{-1}$ มีค่า

ปรากฏ

ดังนั้น

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

ตัวอย่าง 6.10 ต้องการคาดหมายว่าในอนาคตประเทศไทยจะสั่งสินค้าและบริการจากต่างประเทศเข้ามามากน้อยเพียงใด จากการศึกษาเรื่องสินค้านำเข้าพบว่าตัวแปรที่จะควบคุมหรือมีอิทธิพลให้จำนวนการสั่งเข้าผันแปรไปก็คือรายได้ประชาชาติของประเทศไทย และอัตราราคาเปรียบเทียบระหว่างสินค้าที่สั่งเข้ากับสินค้าที่ผลิตได้เอง (สินค้าประเภทเดียวกัน)

ให้ Y = ปริมาณสินค้าสั่งเข้า

X_1 = รายได้ประชาชาติ

X_2 = อัตราเปรียบเทียบระหว่างราคาสินค้านำเข้าและสินค้าที่ผลิตได้เอง

สมมุติ Y, X_1, X_2 มีความสัมพันธ์กัน (Functional Relationship) ดังนี้

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u$$

จงกะประมาณ β_0, β_1 และ β_2 (β_1 แสดงระดับอิทธิพลของ X_1 ที่มีต่อ Y β_2 แสดงระดับอิทธิพลของ X_2 ที่มีต่อ Y β_0 เป็นระดับการสั่งสินค้าเข้าโดยเฉลี่ย) ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ มีค่าน้อยที่สุด (e_i คือค่าประมาณของ u_i) โดยอาศัยข้อมูลต่อไปนี้

ปี พ.ศ.	สินค้าสั่งเข้า (Y) (ดัชนีเทียบกับปี พ.ศ. 2500)	รายได้ประชาชาติ (X_1) (ดัชนีเทียบกับปี พ.ศ. 2500)	อัตราเปรียบเทียบราคาสินค้า (X_2) (ดัชนีเทียบกับปี พ.ศ. 2500)
2500	100	100	100
2501	106	104	99
2502	107	106	110
2503	120	111	126
2504	110	111	113
2505	116	115	103
2506	123	120	102
2507	133	124	103
2508	137	126	98

1 แมตริกซ์ $(X^T X)^{-1} X^T$ เรียกว่า Moore-Penrose Pseudo Inverse

วิธีทำ

จาก $Y_i = \beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+u_i \ ; \ i = 1, 2, \ldots, 9$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 106 \\ 107 \\ 120 \\ 110 \\ 116 \\ 123 \\ 133 \\ 137 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 1 & 104 & 99 \\ 1 & 106 & 110 \\ 1 & 111 & 126 \\ 1 & 111 & 113 \\ 1 & 115 & 103 \\ 1 & 120 & 102 \\ 1 & 124 & 103 \\ 1 & 126 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix}$$

หรือ $\quad Y = X \beta + u$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 9 & 1,017 & 954 \\ 1,017 & 115,571 & 107,690 \\ 954 & 107,690 & 101,772 \end{bmatrix}$$

$$\det (X^T X) = 3,677,904$$

$$\operatorname{adj} (X^T X) = \begin{bmatrix} 164,755,172 & 765,864 & -734,004 \\ 765,864 & 5,832 & -1,008 \\ -734,004 & -1,008 & 5,850 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 44.79608821 & 0.20823382 & -0.19957128 \\ 0.20823382 & 0.00158569 & -0.00027407 \\ -0.19957128 & -0.00027407 & 0.00159058 \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1,052 \\ 119,750 \\ 111,433 \end{bmatrix}$$

$$= (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 49,822.65852 \\ 378.40755 \\ -65.52566 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นระดับอิทธิพลของรายได้ประชาชาติ อัตราส่วนระหว่างราคาสินค้านำเข้าและราคาสินค้าที่ผลิตภายในประเทศ และ อัตราเฉลี่ยของปริมาณสินค้านำเข้า จึงมีค่าดังนี้

$$\hat{\beta}_1 = 378,40755, \hat{\beta}_2 = -65.52566, \beta_0 = 49,822.65852$$

ดังนั้น แบบจำลองที่สามารถใช้คาดหมายปริมาณสินค้านำเข้าสำหรับช่วงเวลาต่อไปก็คือ

$$Y = 49,822.65852 + 378.40755X_1 - 65.52566X_2$$

6.5.2 **การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นเมื่อคิดเทียบกับแมตริกซ์**

(Derivertive of a Function with respect to a Matrix)

นิยาม 6.9 ให้ f เป็นฟังก์ชั่นตัวแปรอิสระ mn ตัวคือ $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{mn}$ นั่นคือ

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

และสมมุติว่า $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}$ มีค่าปรากฏ

ดังนั้น

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{21}} & \frac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{m2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎี 6.4 ให้ $f(x) = a^T X b$ โดยที่ a และ b เป็นเวคเตอร์ของตัวคงที่และมีขนาด $m \times 1$ และ $n \times 1$ ตามลำดับ X เป็นแมตริกซ์ของตัวแปรอิสระมีขนาด $m \times n$

ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial X} = ab^T$

พิสูจน์ $f(x) = a^T X b = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j X_{ij}$

สมาชิกที่ st ของ $\frac{\partial f}{\partial X}$ คือ $\frac{\partial f}{\partial x_{st}} = a_s b_t$

ดังนั้น

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} (b_1, b_2, \ldots, b_n) = ab^T$$

ตัวอย่าง 6.11 จงหา $\frac{\partial f}{\partial X}$ เมื่อ $f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_1 + 4x_2^2 + 3x_3x_1 + 6x_3x_2$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1x_1} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1x_2} = 4 \; ; X_1^2 = x_1x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2x_1} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2x_2} = 4 \; ; x_2^2 = x_2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3x_1} = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3x_2} = 6$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} (1, 2) = ab^T$$

หรือ $$f(x) = (2, 2, 3) \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a^TXb$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} (1,2) = ab^T$$

ทฤษฎี 6.5 a เป็นเวคเตอร์ของตัวคงที่ที่มีขนาด $k \times 1$ X เป็น Symmetric Matrix ของตัวแปร มีขนาด $k \times k$ ให้ $u(x) = a^TXa$ เป็นฟังก์ชั่นของ $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}, \ldots, x_{kk}$

ดังนั้น $\frac{\partial u(x)}{\partial X} = 2aa^T - D_{aa}T$

โดย D_{aa^T} เป็น Diagonal Matrix ขนาด $k \times k$ ที่สมาชิกของ D_{aa^T} เป็นสมาชิกของแมตริกซ์ aa^T

พิสูจน์ $u(x) = a^TXa = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_ia_jx_{ij}$

ถ้า $i = j \Rightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial x_{ij}} = a_ia_i = a_i^2 \; ; i = j = 1, 2, \ldots, k$

ดังนั้น เมื่อ $i = j = 1,2,\ldots,k$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial X} = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k^2 \end{bmatrix}$$

และถ้า $i \neq j$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial X_{ij}} = a_ia_j + a_ja_i = 2a_ia_j \because x_{ij} = x_{ji}$$

ดังนั้น เมื่อ $i \neq j$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0 & 2a_1a_2 & 2a_1a_3 & \ldots & 2a_1a_k \\ 2a_2a_1 & 0 & 2a_2a_3 & \ldots & 2a_2a_k \\ 2a_3a_1 & 2a_3a_2 & 0 & \ldots & 2a_3a_k \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2a_ka_1 & 2a_ka_2 & 2a_ka_3 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\frac{\partial u(x)}{\partial X} = \frac{\partial u(x)}{\partial X; i = j} + \frac{\partial u(x)}{\partial X ; i \neq j}$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2 & 2a_1a_2 & 2a_1a_3 & \ldots & 2a_1a_k \\ 2a_2a_1 & a_2^2 & 2a_2a_3 & \ldots & 2a_2a_k \\ 2a_3a_1 & 2a_3a_2 & a_3^2 & \ldots & 2a_3a_k \\ \vdots & & & & \vdots \\ 2a_ka_1 & 2a_ka_2 & 2a_ka_3 & \ldots & a_k^2 \end{bmatrix}$$

จาก

$$aa^T = (a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \ldots & a_1a_k \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 & \ldots & a_2a_k \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 & \ldots & a_3a_k \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_ka_1 & a_ka_2 & a_ka_3 & \ldots & a_k^2 \end{bmatrix}$$

และ

$$D_{aa^T} = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ldots & a_k^2 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า

$$\frac{\partial u(x)}{\partial X} = 2aa^T - D_{aa^T}$$

ทฤษฎี 6.6 (การหาอนุพันธ์ของดีเทอร์มิแนนต์)

ให้ X เป็นแมตริกซ์ของตัวแปรอิสระ (Real Independent Variable) มีขนาด $k \times k$ ดังนั้น

$$\frac{\partial |X|}{\partial X} = [X_{ij}]_{k\times k}$$

โดยที่ X_{ij} คือองค์ประกอบร่วม (Cofactor) ของ x_{ij}

พิสูจน์ จากนิยามถ้า A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n\times n$ ดังนั้น $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$; $j = 1, 2,\ldots,n$ โดยที่ A_{ij} เป็นองค์ประกอบร่วมของ a_{ij} (กระจายตามสดมภ์ที่ j)

ในที่นี้ $|X| = \sum_{i=1}^{k} x_{ij}X_{ij}$; $j = 1,2,\ldots,k$ หรือนัยหนึ่ง $|X| = x_{1j}X_{1j}+x_{2j}X_{2j}+\ldots+x_{nj}X_{nj}$ (เมื่อกระจายสดมภ์ที่ j) $j = 1,2,\ldots,k$

ดังนั้น สมาชิกตัวที่ t ของ $\frac{\partial |X|}{\partial X}$ คือ $\frac{\partial |X|}{\partial x_{ij}} = X_{ij}$

นั่นคือ $\frac{\partial X}{\partial X} = [X_{ij}]_{k\times k}$

ตัวอย่าง 6.12 $X = \begin{bmatrix} x_{11}+2 & x_{12}+5 \\ x_{21} & x_{22}-9 \end{bmatrix}$ จงหา $\frac{\partial}{\partial X}|X|$

วิธีทำ $|X| = (x_{11}+2)(x_{22}-9)-x_{21}(x_{12}+5)$

$= x_{11}x_{22}-9x_{11}+2x_{22}-18-x_{21}x_{12}-5x_{21}$

$\frac{\partial X}{\partial x_{11}} = x_{22}-9$, $\frac{\partial X}{\partial x_{12}} = -x_{21}$

$\frac{\partial X}{\partial x_{21}} = -x_{12}-5 = -(x_{12}+5)$, $\frac{\partial X}{\partial x_{22}} = x_{11}+2$

ดังนั้น $\frac{\partial |X|}{\partial X} = \begin{bmatrix} x_{22}-9 & -x_{21} \\ -(x_{12}+5) & x_{11}+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $(x_{22}-9)$ คือ Cofactor ของ $(x_{11}+2)$

$-x_{21}$ คือ Cofactor ของ $(x_{12}+5)$

$-(x_{12}+5)$ คือ Cofactor ของ x_{21}

$(x_{11}+2)$ คือ Cofactor ของ $x_{22}-9$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \end{bmatrix}$$

จงแสดงให้เห็นว่า $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

2. ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \\ 8 & 1 & 7 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

จงคำนวณหา AB, BA, r(A), r(B), r(A + B), r(AB)

3. ถ้า C เป็นแมตริกซ์ใด ๆ แต่ A เป็น Symmetric Matrix จงพิสูจน์ว่า C^TAC เป็น Symmetric Matrix

4. ให้ q = $\frac{1}{2}x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_3^2$ จงแสดงให้เห็นว่า q เป็น Positive Definite Quadratic Form

5. ให้ $P = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

จงแสดงให้เห็นว่า PP^T เป็น Positive Definite Matrix แต่ P^TP เป็น Positive Semi-Definite Matrix

6. ถ้า A และ B ต่างก็เป็น Orthogonal Matrix จงพิสูจน์ว่า AB ก็เป็น Orthogonal Matrix ด้วย

7. ถ้า A เป็น Positive Definite Matrix จงพิสูจน์ว่า A^T และ A^{-1} ก็เป็น Positive Definite Matrix ด้วย

8. ถ้า D เป็น Diagonal Matrix จงพิสูจน์ว่าสมาชิกของ D^{-1} คือ $\frac{1}{d_{ii}}$; $d_{ii} \neq 0$

9. กำหนดให้ $q = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + x_4^2 + x_1x_4 + 2x_2x_4 + x_5^2$

จงหาค่าของ $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1^2 + x_5^2 + 2x_3 + 7)e^q dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5$

หาค่าได้หรือไม่ ? เพราะเหตุใด ?

10. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ก. จงแสดงให้เห็นว่า A เป็น Idempotent Matrix

ข. จงหา Characteristic Root ของ A

ค. จงหา tr.A

ง. จงหา r(A)

11. ถ้า $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ จงหาแมตริกซ์ A ของ Quadratic Form $X^TAX = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

12. ก. จงจัดให้ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ เป็น Linear Form

ข. จงจัดให้ $s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]$ เป็น Quadratic Form

ค. จาก $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ จงจัดให้ $n\bar{x}^2$ เป็น Quadratic Form

14. กำหนดให้

$$q_1 = 6x_1^2 + 49x_1x_2 + 51x_3^2 - 82x_1x_2 + 20x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$q_2 = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_3x_1 + x_4^2$$

ก. จงตรวจสอบดูว่า q_1 และ q_2 เป็น Positive Definite Quadratic Form หรือไม่ ?

ข. ถ้า q_1 เป็น Positive Definite Quadratic Form จงคำนวณหา

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (q_2 + 2x_1 + 3x_4 + 6)e^{-(q_1+x_1+x_2-x_4+8)}\, dx_1dx_2dx_3dx_4$$

ค. จงคำนวณหา $\frac{\partial q_1}{\partial X}$ และ $\frac{\partial q_2}{\partial X}$

15. ถ้า A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ของฟังก์ชั่นของตัวแปร t จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\frac{d}{dt}a_{ij}$$

16. จงแสดงให้ความเป็นจริงตามข้อ 15. เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} x+1 & x & x-3 \\ x-1 & x-2 & x-3 \\ x+1 & x & x+7 \end{bmatrix}$$

17. จงหาค่า K ที่ทำให้ฟังก์ชั่นต่อไปนี้เป็น Normal Density Function

ก. $f(x_1,x_2) = K\, e^{\frac{1}{2}(2x_1^2 + 4x_2^2 - 1x_1 x_2 - 6x_1 - 4x_2 + 8)}$

ข. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = K\, e^{-\frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 + 2x_1 x_2 + 2x_3 x_4 - 6x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 8)}$

ข้อแนะนำ f **จะเป็น** Normal Density **ก็ต่อเมื่อ** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$