บทที่ 4
VECTOR SPACE

การศึกษาเรื่อง Vector Space เป็นการศึกษาถึงเบื้องหลังความเป็นมาของทฤษฎีแมตริกซ์ ซึ่งนับเป็นสิ่งที่สำคัญและจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องทราบ เพราะบ่อยครั้งที่เราพบปัญหาทางแมตริกซ์แล้วเราไม่อาจแก้ได้หรือมองไม่เห็นภาพ ความเข้าใจในเรื่อง Vector Space และหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องทำให้เราสามารถแก้ปัญหาและมองเห็นภาพเกี่ยวกับแมตริกซ์ดีขึ้น ตัวอย่าง Singular Matrix เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ลักษณะใด ? การคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่านั้นมีเหตุผลใดจึงนิยามให้เอาตัวคงค่าคูณแจกให้กับสมาชิกทุกตัว ? ทำไมแมตริกซ์บางรูปจึงมีส่วนกลับและบางรูปจึงไม่มีส่วนกลับ ? ดังนี้เป็นต้น

ความจริงแล้วเราควรจะศึกษาเรื่อง Vector Space ก่อนเรื่องอื่นทั้งหมด แต่เมื่อพิจารณาให้ลึกซึ้งแล้วเห็นว่า การมีพื้นฐานเรื่องแมตริกซ์เป็นอย่างดีแล้วจะช่วยให้สามารถศึกษาถึงเบื้องหลังของมันได้โดยสะดวก ทั้งนี้เพราะเรื่อง Vector Space เป็นเรื่องที่ค่อนข้างจะเข้าใจยากและต้องอาศัยจินตนาการประกอบไปด้วย การได้เห็นภาพกว้าง ๆ ของการนำแมตริกซ์ไปใช้ก่อนจึงอำนวยประโยชน์แก่การศึกษาเรื่อง Vector Space ได้มาก หากนักศึกษาจะลองย้อนไปพิจารณาพีชคณิตในชั้นประถมศึกษาและมัธยมศึกษาจะพบว่าเมื่อเริ่มเรียนเราก็ถูกบังคับให้จำว่า $1+1 = 2$ หรือ $x(y+z) = xy+xz$ หรืออื่น ๆ อีกมากโดยที่ไม่รู้เลยว่าเพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนี้ จนเมื่อศึกษาถึงขั้นสูงจึงได้ศึกษาพบถึงเบื้องหลังของกฎเกณฑ์ดังกล่าว ด้วยเหตุผลประการเดียวกัน การศึกษาความเป็นมาของทฤษฎีแมตริกซ์และแมตริกซ์ชนิดต่าง ๆ จึงน่าที่จะศึกษาเมื่อได้ทำความคุ้นเคยกับการใช้ประโยชน์จากแมตริกซ์แล้วพอสมควร

อนึ่งหากนักศึกษาคิดว่าบทนี้ไม่มีประโยชน์อะไร เจตนาเพียงมุ่งที่จะศึกษาเบื้องหลังความเป็นมาเท่านั้น เรารู้จักใช้แมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ก็เพียงพอแล้ว ? ก็จะขอชี้แจงให้เข้าใจว่า ความรู้ที่ผ่านมานั้นนักศึกษายังคงได้ภาพที่เลือนลางเกี่ยวกับแมตริกซ์อยู่ การศึกษาเรื่อง Vector Space จะช่วยให้เห็นภาพที่กระจ่างขึ้น และที่สำคัญนักศึกษายังจำเป็นต้องรู้จัก Rank, Dimension, Basis และอื่น ๆ อีกมากซึ่งจะกล่าวถึงในบทนี้และจะทรงความสำคัญเป็นอย่างยิ่งต่อการศึกษาทฤษฎีแมตริกซ์ขั้นสูงขึ้นไปเช่น Linear Transformation, Characteristic Value Problem, Quadratic Form, Bilinear Form และอื่น ๆ ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อ ๆ ไป ซึ่งเมื่อศึกษาถึงและผ่านบทนั้น ๆ ไปแล้วนักศึกษาจึงจะสามารถนำแมตริกซ์ไปประยุกต์กับงานต่าง ๆ ได้อย่างแท้จริง อีกประการหนึ่งความรู้เรื่อง Vector Space มิได้มีความสำคัญจำกัดอยู่เพียงเท่าที่กล่าวถึงเท่านั้น ตัวของมันเองยังสามารถนำไปประยุกต์

ได้โดยตรงด้วย เช่นใช้ในการแก้สมการโพลิโนเมียล การประมาณค่าฟังค์ชั่นและอื่น ๆ อีก จึงขอให้พยายามทำความเข้าใจและสนใจให้มากเป็นพิเศษ

4.1 Vector Space และ Subspace

นิยาม 4.1 ให้ $\mathscr{F}$ เป็น Field ของตัวคงค่า (Scalar) $\mathscr{V}$ เป็นเซ็ทของเวคเตอร์ เซ็ท $\mathscr{V}$ จะเป็น Vector Space over $\mathscr{F}$ ก็ต่อเมื่อสมาชิกของ $\mathscr{V}$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. ถ้า $V_i, V_j \in \mathscr{V}$ ดังนั้น $V_i + V_j$ ก็ยังคงเป็นสมาชิกของ (Closure Law)
2. ถ้า $V_i, V_j, V_k \in \mathscr{V}$ ดังนั้น $V_i + (V_j + V_k) = (V_i + V_j) + V_k$: Associative Law
3. ถ้า $V_i, V_j, \in \mathscr{V}$ ดังนั้น $V_i + V_j + V_j + V_i$: Commutative Law
4. ถ้า $\mathbb{0}, V \in \mathscr{V}$ ดังนั้น $V + \mathbb{0} = V$: Identity
5. สมาชิกทุกตัวของ $\mathscr{V}$ จะมีนิเศธ (เวคเตอร์เดิมแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวคเตอร์เดิม) ของมันอยู่นั่นคือ $V \in \mathscr{V}$ และ $(-V) \in \mathscr{V}$ จะพบว่า $V + (-V) = \mathbb{0}$ ($\mathbb{0}$ คือ Zero Vector)

: Inverse

6. ถ้า $\alpha \in \mathscr{F}$ และ $V \in \mathscr{V}$ เวคเตอร์ V ที่เพิ่มขนาด (หรือลดขนาด) ไป α เท่าจากเดิมก็ยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{V}$ นั่นคือ

$V \in \mathscr{V}$ ดังนั้น $\alpha V \in \mathscr{V}$: Closure Law

7. ถ้า $\alpha, \beta \in \mathscr{F}$ และ $V \in \mathscr{V}$

ดังนั้น $\alpha(\beta V) = (\alpha\beta)V$: Associative Law

8. $\alpha V = V\alpha$: Commutative Law
9. ถ้า $\alpha \in \mathscr{F}$ และ $V_i, V_j \in \mathscr{V}$

ดังนั้น $\alpha(V_i + V_j) = \alpha V_i + \alpha V_j$: Distributive Law

10. ถ้า $\alpha, \beta \in \mathscr{F}$ และ $V \in \mathscr{V}$

ดังนั้น $(\alpha + \beta)V = \alpha V + \beta V$: distributive Law

11. ถ้า $0 \in \mathscr{F}$ และ $\mathbb{0}, V \in \mathscr{V}$ $0 \cdot V = \mathbb{0}$: Zero
12. ถ้า $1 \in \mathscr{F}$ และ $V \in \mathscr{V}$ $1 \cdot V = V$: Identity

หมายเหตุ สำหรับข้อ 11 $0 \cdot V = \mathbb{0}$ นั้น 0 ทางซ้ายคือศูนย์ (Zero Ccalar) ส่วน $\mathbb{0}$ ทางขวาคือ Zero Vector นั่นคือ

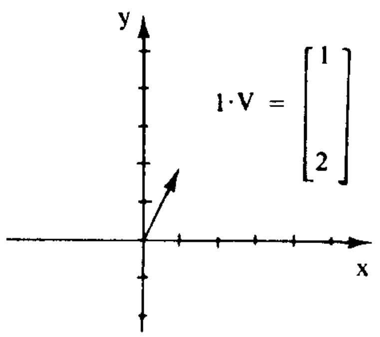
ถ้า

$$V = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

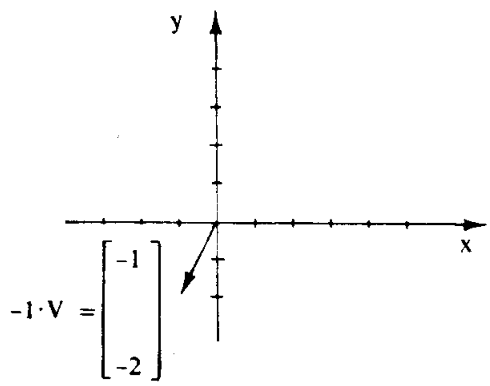
$$0 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

นิยามข้อ 1 ถึงข้อ 5 เป็นส่วนที่เกี่ยวกับการบวก จากข้อ 6 ถึงข้อ 12 เป็นส่วนที่เกี่ยวกับการคูณเวคเตอร์ด้วยตัวคงที่ และขอทบทวนเกี่ยวกับเรื่องเวคเตอร์ว่า การคูณเวคเตอร์ด้วยตัวคงที่ก็คือการเพิ่มหรือลดขนาดของเวคเตอร์เดิมนั่นเอง จะเป็นการเพิ่มหรือลดขนาดนั้นขึ้นอยู่กับค่าของตัวคงที่นั้น กล่าวคือถ้าตัวคงที่มีค่ามากกว่า 1 ก็เป็นการเพิ่มขนาดเวคเตอร์ ถ้าตัวคงที่มีค่าน้อยกว่า 1 ก็เป็นการลดขนาดของเวคะตอร์

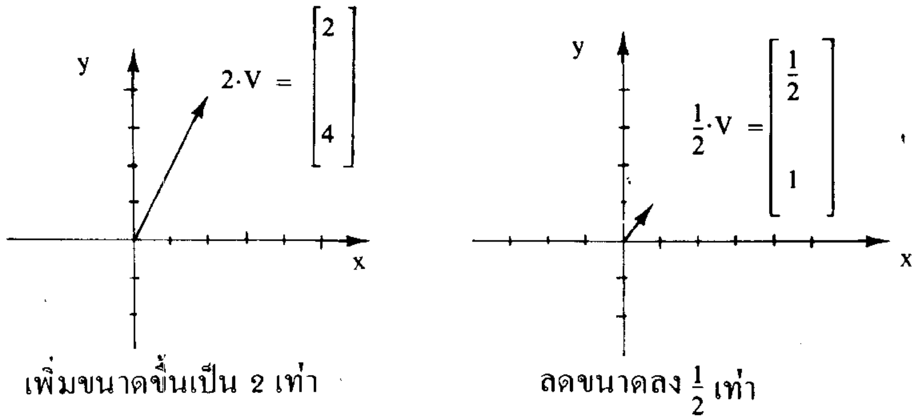
ตัวอย่างเช่น ให้ $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



ขนาดเท่าเดิม



พุ่งถอยหลังไป 1 เท่าตัว



ภาพที่ 4.1 การคูณเวคเตอร์ด้วยตัวคงที่

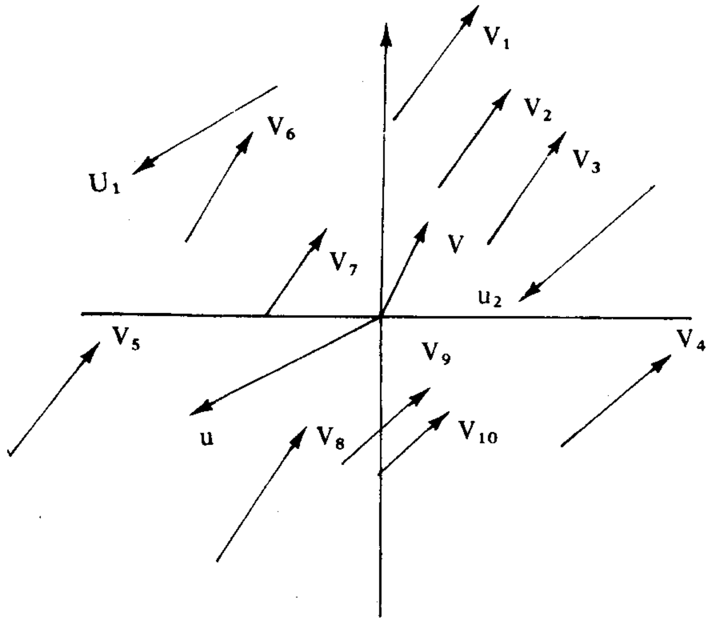
ขอให้สังเกตว่าเมื่อกำหนดให้ $V = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$ แล้ว $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะเป็นค่า Co-ordinate ของจุดปลาย (Terminal point) ของเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเหนิด (Origin) ดังตัวอย่างที่ผ่านมา $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 1, 2 คือจุด Co-ordinate ($x = 1$, $y = 2$) ที่แสดงจุดปลายของเวคเตอร์ที่พุ่งออกจากจุดกำเหนิด

นักศึกษาอาจเริ่มสงสัยว่าทำไมจึงต้องมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเหนิด เวคเตอร์จะพุ่งไปในลักษณะใดใน Space ก็ได้มิใช่หรือ ?

เกี่ยวกับข้อสงสัยข้างต้นจะขอทำความเข้าใจในที่นี้ว่า ในเรื่องเวคเตอร์นั้น "เวคเตอร์ใด ๆ จะเท่ากัน (หรือถือได้ว่าเป็นเวคเตอร์เดียวกัน) ก็ต่อเมื่อเวคเตอร์เหล่านั้นมีขนาด (ความยาว) เท่ากันและมีทิศทาง (Direction) เดียวกัน และถ้ามีเวคเตอร์อื่น ๆ ที่มีขนาดและทิศทางเดียวกันนั้นแต่วางอยู่ในตำแหน่งที่ขนานกัน ก็ถือได้ว่าเป็นเวคเตอร์เดียวกันเพราะเรา "เลื่อนให้มาทับกันได้" ด้วยเหตุนี้เพื่อความสะดวกและความเป็นระเบียบเรียบร้อย

จึงนิยามให้เวคเตอร์พุ่งออกจากจุดกำเหนิดและถือว่าเวคเตอร์นี้เป็นตัวแทนของเวคเตอร์ทั้งหลายที่มีขนาดและทิศทางเดียวกันกับเวคเตอร์นั้น

พิจารณารูปต่อไปนี้ (เพื่อความสะดวกและเห็นภาพได้ง่ายกว่าในมิติอื่นจะขอยกตัวอย่างระนาบในระบบ 2 มิติ)



ภาพที่ 4.2 เวคเตอร์ต่าง ๆ ในระนาบ xy

เวคเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ ขนานและมีขนาดและมีทิศทางเดียวกับเวคเตอร์ v จึงถือได้ว่าเป็นเวคเตอร์เดียวกันและใช้ v เป็นตัวแทนของ $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ และในทำนองเดียวกัน เวคเตอร์ U_1 และ U_2 มีขนาดและทิศทางเดียวกันกับเวคเตอร์ U และใช้ U เป็นตัวแทนของเวคเตอร์ U_1 และ U_2

ก่อนจะศึกษาถึงเรื่องต่าง ๆ ใน Vector Space จะขอยกตัวอย่างเกี่ยวกับ Vector Space เพื่อปูพื้นฐานเรื่องนี้ให้เข้าใจและมองภาพให้เห็นเสียก่อน

ตัวอย่าง 4.1 ให้ $\mathscr{V}$ เป็นเซ็ทของ Column Vector ขนาด 2×1 (เวคเตอร์ที่ประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว) จงแสดงให้เห็นว่า $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space

วิธีทำ $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$; v_i อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix}$ โดย a, b $\in \mathscr{F}$ จะเป็น Vector Space ก็ต่อเมื่อ

สมาชิกของ $\mathcal{V}$ สอดคล้องกับคุณสมบัติของ Vector Space

เราจะเริ่มตรวจสอบคุณสมบัติทีละข้อดังนี้

1\. ให้ $V_i = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, V_j = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad V_i + V_j = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $V_i + V_j$ ยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathcal{V}$ คือเป็น Column Vector ขนาด 2×1

2\. ให้ $V_i = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, V_j = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, V_k = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ โดย $a, b, c, d, e, f, \in \mathcal{F}$

$$V_i + (V_j + V_k) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+e \\ d+f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+c)+e \\ (b+d)+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = (V_i + V_j) + V_k$$

3\. ให้ $V_i = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad V_j = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathcal{F}$

$$V_i + V_j = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+a \\ d+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = V_j + V_i$$

4\. ให้ $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\mathbb{0}+V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+a \\ 0+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = V$$

5. ให้ $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $-V = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

$$V+(-V) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-a \\ b-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$$

6. ให้ $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ α เป็นตัวคงที่

$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ ซึ่งยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{V}$ (คือเป็นเวคเตอร์มีขนาด 2×1)

7. ให้ $\alpha, \beta \in \mathscr{F}$ และ $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\alpha(\beta V) = \alpha \begin{bmatrix} \beta a \\ \beta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a \\ (\alpha\beta)b \end{bmatrix} = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\alpha\beta)V$$

8. ให้ $\alpha \in \mathscr{F}$ และ $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \alpha = V\alpha$$

9. ให้ $\alpha \in \mathscr{F}$ และ $V_i = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $V_j = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

$$\alpha(V_i + V_j) = \alpha\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right\} = \alpha \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a+c) \\ \alpha(b+d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha c \\ \alpha d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \alpha V_i + \alpha V_j$$

10. ให้ $\alpha, \beta \in \mathscr{F}$ และ $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$(\alpha+\beta)V = (\alpha+\beta) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a \\ (\alpha+\beta)b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a \\ \alpha b + \beta b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a \\ \beta b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \alpha V + \beta V$$

11. ให้ $0 \in \mathscr{F}$ และ $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$0\cdot V = 0\cdot\begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot a \\ \\ 0\cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

12. ให้ $1 \in \mathscr{F}$ และ $V = \begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix}$

$$1\cdot V = 1\cdot\begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a \\ \\ 1\cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix} = V$$

จะเห็นได้ว่า $\mathscr{V}$ ซึ่งเป็นเซทของเวคเตอร์ขนาด 2×1 (เวคเตอร์ในระบบ 2 มิติ) สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้ง 12 ประการ ดังนั้น $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space

หมายเหตุ การที่สมาชิกของเวคเตอร์ operate กันได้ก็เพราะสมาชิกของเวคเตอร์เป็นสมาชิกของ Field ขอให้ลองย้อนไปดูวิธีพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ของแมตริกซ์ในบทที่ 1 จะพบว่าการพิสูจน์ยึดถือในแนวเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.2 จงแสดงให้เห็นว่า $\mathscr{V}$ ซึ่งเป็นเซทของแมตริกซ์ขนาด 2×2 เป็น Vector Space

วิธีทำ จะเลือกแสดงให้เห็นเพียง 2 ประการ ที่เหลือขอเว้นไว้ให้ไปตรวจสอบเอง

1. ให้ $V_i = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{bmatrix}$, $V_j = \begin{bmatrix} W & x \\ \\ y & z \end{bmatrix}$

$$V_i + V_j = \begin{bmatrix} a+W & b+x \\ \\ c+y & d+z \end{bmatrix}$$

เห็นได้ว่ายังคงเป็นแมตริกซ์ขนาด 2×2 ดังนั้น $V_i + V_j \in \mathscr{V}$

2. ให้ $\alpha \in \mathscr{F}$ และ $V = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\alpha V = \alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$$ ซึ่งยังคงเป็นแมตริกซ์ขนาด 2×2 ดังนั้น

$\alpha V \in \mathscr{V}$

หมายเหตุ ขอให้สังเกตว่า เมื่อสมาชิกของ $\mathscr{V}$ มีคุณสมบัติสอดคล้องกับคุณสมบัติ 2 ประการนี้ได้ย่อมจะสอดคล้องกับคุณสมบัติประการอื่น ๆ ที่เหลือ

นิยาม 4.2 ให้ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็นเวคเตอร์ใน Vector Space $\mathscr{V}$ over $\mathscr{F}$ ดังนั้น

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k;\ \alpha_i \in \mathscr{F},\ i = 1, 2, \ldots, K$$

จะเป็นเวคเตอร์ใหม่ซึ่งยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{V}$ เวคเตอร์นี้เรียกว่าเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกันเชิงเส้น [2] (Linear Combination) ของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$

ตามความหมายของนิยามนี้ อาจพูดให้เข้าใจง่ายขึ้นได้ว่า ใน Vector Space หนึ่งจะมีเวคเตอร์ใหม่เกิดขึ้นได้เสมอโดยเกิดจากการประกอบกัน (Near Combination) ของเวคเตอร์ที่มีอยู่เดิม และในกลุ่มของเวคเตอร์ที่ประกอบกันนั้น บางเวคเตอร์อาจมีขนาดเพิ่มขึ้นบางเวคเตอร์มีขนาดลดลง บางเวคเตอร์มีขนาดคงที่ และบางเวคเตอร์มีทิศทางพุ่งสวนกับทางเดิม (นิเศธ) แตกต่างกันไป เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวครั้งหนึ่งก็ จะเกิดเวคเตอร์ขึ้นมาใหม่เวคเตอร์หนึ่งเสมอ

ตัวอย่าง 4.3

$$\text{ให้ } \mathscr{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

จงหาเวคเตอร์ใหม่ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ทั้งสามนี้ในลักษณะที่เวคเตอร์ที่หนึ่งมีขนาดเพิ่มขึ้น 2 เท่า เวคเตอร์ที่สองมีขนาดคงที่ และเวคเตอร์ที่สามมี

1/ $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ over $\mathscr{F}$ หมายความว่า $V_1 \in \mathscr{V}$, $V_2 \in \mathscr{V}, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ โดยที่สมาชิกที่ประกอบกัน เป็นเวคเตอร์แต่ละเวคเตอร์เป็นสมาชิกของ $\mathscr{F}$

2/ ต่อไปจะเรียกสั้น ๆ ว่า "การประกอบกัน"

ขนาดคงที่แต่พุ่งสวนกับทิศทางเดิม

วิธีทำ จากโจทย์ $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$

ดังนั้นเวคเตอร์ใหม่ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ชุดเดิมคือ

$$V = (2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้ $\mathscr{V} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ อยากทราบว่าเวคเตอร์ $V = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ เกิดขึ้นจากการประกอบกันในลักษณะใดของเวคเตอร์ใน $\mathscr{V}$

วิธีทำ จากนิยาม $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$ เป็นเวคเตอร์ที่เกิดขึ้นใหม่

$$\text{ดังนั้น} \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

$$\alpha_3 = 4$$

จะพบว่า $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 4$

นั่นก็คือเวคเตอร์ $V = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ เกิดจากการที่เวคเตอร์ V_1 และ V_2 มีขนาดคงเดิม แต่พุ่งสวนทิศทางเดิมและเวคเตอร์ V_3 มีขนาดเพิ่มขึ้น 4 เท่า

ทฤษฎี 4.1 Non-Empty Subset $\mathscr{S}$ ของ $\mathscr{V}$ จะเป็น Vector Space ด้วยก็ต่อเมื่อสมาชิกของ $\mathscr{S}$ Close ภายใต้การบวกและการคูณ

พิสูจน์

1. ให้สมาชิกของ $\mathscr{S}$ Close ภายใต้การบวกและการคูณ เมื่อสมาชิกของ $\mathscr{S}$ Close ภายใต้การบวกและการคูณ สมาชิกของ $\mathscr{S}$ ย่อมมีคุณสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขทุกประการของ Vector Space (ดูนิยามของ Vector Space)

นั่นคือถ้า $\mathscr{S}$ Close ภายใต้การบวกและการคูณแล้ว $\mathscr{S}$ จะเป็น Vector Space

2. ให้ $\mathscr{S}$ เป็น Vector Space เมื่อ $\mathscr{S}$ เป็น Vector Space สมาชิกของ $\mathscr{S}$ ย่อม Close ภายใต้การบวกและการคูณ

จากผลการพิสูจน์ข้อ 1. และ 2. จึงสรุปได้ว่า $\mathscr{S}$ จะเป็น Vector Space ได้ก็ต่อเมื่อสมาชิกของ $\mathscr{S}$ Close ภายใต้การบวกและการคูณ □

เราเรียกอนุเซทที่เป็นจริงตามทฤษฎีนี้ว่า Subspace ของ $\mathscr{V}$ การจะตรวจสอบว่าอนุเซ็ทของ Vector Space ใดว่าเป็น Subspace (Vector Space) หรือไม่จึงตรวจสอบเพียงว่า Close ภายใต้การบวกและการคูณหรือไม่เท่านั้น

Subspace คือส่วนหนึ่งของ Vector Space ดังนั้นถ้า Vector Space คือ Space ของระบบ 3 มิติ (รูปทรงใน Space นี้มีทั้งส่วนกว้าง ส่วนยาวและส่วนหนา) Subspace ก็คือระนาบ xy ระนาบ yz ระนาบ xz และระนาบอื่นใดที่พุ่งผ่านจุดกำเหนิด (?) รวมตลอดถึงเส้นตรงและตัว Vector Space เอง[1]

ดังนั้น Subspace จึงต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. เป็นบางส่วนหรือทั้งหมด (Subset) ของ Vector Space $\mathscr{V}$
2. มีคุณสมบัติทั้ง 12 ประการของ Vector Space $\mathscr{V}$ (ดูการพิสูจน์ทฤษฎี 4.1)

ความรู้เรื่อง Subspace ทรงความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาเรื่อง Basis, Dimension และ Rank การมีความรู้ความเข้าใจในเรื่อง Subspace จะทำให้มองเห็นภาพต่าง ๆ กระจ่างขึ้น

ตัวอย่าง 4.5 ให้ $\mathscr{V}$ เป็น Space ของเวคเตอร์ในระบบ 3 มิติ และให้ $\mathscr{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} ; a, b \in R \right\}$

---

[1] ขอให้ย้อนไปศึกษาและเปรียบเทียบกับเรื่องอนุเซท (Subset) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนที่เกี่ยวกับ all possible subset

จงแสดงให้เห็นว่า $\mathscr{W}$ เป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

วิธีทำ $\mathscr{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} ; a, b \in R \right\}$ คือเซตของเวคเตอร์ที่สมาชิกตัวที่ 1 และตัวที่ 2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ส่วนตัวที่ 3 มีค่าเป็น 0 หรือนัยหนึ่ง $\mathscr{W}$ คือเซตของเวคเตอร์ใน xy - plane

1. ให้ $v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $\mathscr{W}$

จะเห็นได้ว่า $v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{W}$

2. ให้ $k \in \mathscr{R}$, $v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}$

จะเห็นได้ว่า $kv_1 = k \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{W}$

จะเห็นได้ว่าสมาชิกใด ๆ ของ $\mathscr{W}$ Close ภายใต้การบวกและการคูณ (ซึ่งย่อมทำให้สอดคล้องกับคุณสมบัติประการอื่น ๆ ของ Vector Space ด้วย)

ดังนั้น $\mathscr{W}$ จึงเป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

ตัวอย่าง 4.6 ให้ $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space ของแมตริกซ์ขนาด 2×2 และถ้า $\mathscr{W}$ เป็นเซทของแมตริกซ์ที่มีค่าดีเทอร์มิแนนต์เป็น 0 (Singular Matrix) จงแสดงให้เห็นว่า $\mathscr{W}$ ไม่เป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

วิธีทำ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกของ $\mathscr{W}$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

$$A + B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$\det(A+B) = ab \neq 0$

แสดงว่า $\mathscr{W}$ ไม่ Close ภายใต้การบวก

ดังนั้น $\mathscr{W}$ ไม่เป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

หมายเหตุ เมื่อแสดงให้เห็นว่า $\mathscr{W}$ ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง เราก็สรุปได้ทันทีว่า $\mathscr{W}$ ไม่เป็น Subspace โดยไม่จำเป็นต้องตรวจสอบคุณสมบัติข้อที่เหลือ

ในทำนองเดียวกัน การจะแสดงว่าเซทใดเป็น Vector Space หรือไม่นั้น ถ้าเราแสดงให้เห็นว่าเซทนั้นไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติเพียงข้อใดข้อหนึ่งของ Vector Space เราก็สรุปได้แล้ว โดยไม่จำเป็นต้องตรวจสอบคุณสมบัติประการอื่น ๆ

***ตัวอย่าง 4.7** จงแสดงให้เห็นว่าเซทของเวคเตอร์ใหม่ที่เกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

กำหนดให้ $\mathscr{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$

วิธีทำ ให้ $\mathscr{W} = \{W_1, W_2, \ldots\}$ เป็นเซทของเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกันของ $V_1, V_2, \ldots, V_k$

นั่นคือ $W_i = \alpha_1V_1 + \alpha_2V_2 + \ldots + \alpha_kV_k \; ; \; i = 1, 2, \ldots$

1. ให้ $W_1 = \beta_1V_1 + \beta_2V_2 + \ldots + \beta_kV_k \; ; \; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathscr{F}$

และ $W_2 = \gamma_1V_1 + \gamma_2V_2 + \ldots + \gamma_kV_k \; ; \; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathscr{F}$

$W_1 + W_2 = (\beta_1+\gamma_1)V_1 + (\beta_2+\gamma_2)V_2 + \ldots + (\beta_k+\gamma_k)V_k$

จะเห็นได้ว่า $W_1 + W_2$ ยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{W}$

แสดงว่า $\mathscr{W}$ Close ภายใต้การบวก

2. ให้ α เป็นตัวคงที่ใด ๆ

$\alpha W_1 = (\alpha\beta_1)V_1 + (\alpha\beta_2)V_2 + \ldots + (\alpha\beta_k)V_k$

จะเห็นได้ว่า αW_1 ยังคงเป็นสมาชิกของ $\mathscr{W}$

แสดงว่า $\mathscr{W}$ Close ภายใต้การคูณ (Scalar Multiplication) นั่นคือ $\mathscr{W}$ เป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

4.2 การขึ้นอยู่แก่กันเชิงเส้นและความเป็นอิสระเชิงเส้น (Linearly Dependent Vector and Linearly Independent Vector)

ในการศึกษาถึงลักษณะการจับกลุ่มของเวคเตอร์ชุดหนึ่งชุดใดนั้น จะกระทำได้โดยยาก ถ้าไม่กำหนดขอบเขตของการศึกษาให้แคบลง ทั้งนี้เพราะการประกอบกันเป็นเวคเตอร์ใหม่นั้น เวคเตอร์ชุดที่มีอยู่เดิมอาจประกอบกันได้หลายลักษณะ ตัวอย่างเช่น เวคเตอร์ V อาจเกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ได้มากมายหลายลักษณะ[1] เมื่อเป็นเช่นนี้การศึกษาถึงการจับกลุ่มของเวคเตอร์จึงสลับซับซ้อนและหาข้อยุติได้ยาก เพื่อประโยชน์ของการศึกษาจึงจำเป็นต้องจำกัดวงของการศึกษาให้แคบลงโดยมุ่งศึกษาถึงเฉพาะการประกอบกันเป็น Zeor Vector เท่านั้น[2] กล่าวคือจำกัดขอบเขตไว้ว่า ถ้าเวคเตอร์ชุดที่มีอยู่สามารถประกอบกันเป็น Zero Vector ได้หลายลักษณะให้เรียกเวคเตอร์ชุดนั้นว่า "เป็นเวคเตอร์ที่ขึ้นอยู่แก่กันและกัน" (Linear Dependent) แต่ถ้าสามารถประกอบกันเป็น Zero Vector ได้เพียงลักษณะเดียว เรียกเวคเตอร์ชุดนั้นว่า "เป็นเวคเตอร์ที่มีอิสระต่อกัน" (Linear Independent)

นิยาม 4.3 เวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ใน Vector Space $\mathscr{V}$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linear Dependent) ก็ต่อเมื่อ มีตัวคงค่าชุดหนึ่งคือ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ที่ทำให้

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k = \mathbf{0}$$

โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ทุกตัว (α_i not all zero)

ตัวอย่างเช่น เวคเตอร์ $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $V_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

สามารถประกอบกันเป็น Zero Vector ได้มากมายหลายลักษณะเช่น

---

[1] ขอให้เปรียบกับ Unique Solution และ Infinitely Many Solution ของระบบสมการวิวิธพันธ์เชิงเส้น

[2] ขอให้เปรียบเทียบกับ Trivial Solution และ Non-Trivial Solution ของระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้น

$$3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $(-3)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

.

.

.

$(-3t)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-t)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (-4t)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$; t **มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง.**

หรือเวคเตอร์

$W_1 = \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$, $W_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ และ $W_3 = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

สามารถประกอบกันเป็น Zero Vector ได้มากมายหลายลักษณะเช่น

$$0\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ

$$0\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$0\begin{bmatrix}2\\ \\-3\end{bmatrix}+(-2t)\begin{bmatrix}1\\ \\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\ \\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \\0\end{bmatrix}$$; t มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง.

จะเห็นได้จากตัวอย่างทั้งสองว่าเวคเตอร์สามารถประกอบกันเป็น Zero Vector ได้มากมายหลายลักษณะโดยค่าของตัวคงที่ไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ทุกตัว ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าเวคเตอร์ V_1, V_2, V_3 และ V_4 ขึ้นอยู่แก่กันและกันในขณะเดียวกันเวคเตอร์ W_1, W_2 และ W_3 ก็ขึ้นอยู่แก่กันและกันเช่นเดียวกัน

นิยาม 4.4 เวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ใน Vector Space $\mathcal{V}$ จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (Linearly Independent) ก็ต่อเมื่อมีตัวคงค่าชุดหนึ่งคือ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ที่ทำให้

$$\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\ldots+\alpha_kV_k = \mathbf{0}$$

โดย $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ต้องมีค่าเป็นศูนย์ทุกตัว

ตัวอย่าง 4.8 เวคเตอร์ต่อไปนี้เป็นอิสระกันหรือไม่

$$V_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, V_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, V_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, V_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

วิธีทำ V_1, V_2, V_3, V_4 จะเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อมีตัวคงที่ชุดหนึ่งคือ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ที่ทำให้

$$\alpha_1V_1+\alpha_2V_2+\alpha_3V_3+\alpha_4V_4 = \mathbf{0}$$

โดยต้องแสดงให้เห็นว่า $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

ดังนั้นจากนิยาม 4.4

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_3+\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

นั่นคือ V_1, V_2, V_3 และ V_4 เป็นอิสระต่อกัน (Linearly Independent)

ทฤษฎี 4.2 ถ้าเวคเตอร์ V_1, $V_2,\ldots,V_n$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linearly Dependent) แล้วจะต้องมีเวคเตอร์ในเซตนี้อย่างน้อยที่สุด 1 เวคเตอร์ที่สามารถเขียนได้ในรูปการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์ที่เหลืออยู่และโดยนัยกลับกัน ถ้ามีเวคเตอร์ V ใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์ V_1, $V_2,\ldots,V_n$ ได้แล้ว เวคเตอร์ V_1, $V_2,\ldots,V_n$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linear Combination)

พิสูจน์

1. ถ้าเวคเตอร์ V_1, $V_2,\ldots,V_n$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linearly Dependent)

ดังนั้น จะต้องมี Scalar ชุดหนึ่งคือ α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์ทุกตัว ที่ทำให้

$$\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\ldots+\alpha_n V_n = 0$$

สมมุติว่า $\alpha_i \neq 0$

ดังนั้น $\alpha_i V_i = -\alpha_1 V_1 - \alpha_2 V_2 - \ldots - \alpha_n V_n$

$$V_i = (-\alpha_1/\alpha_i)V_1+(-\alpha_2/\alpha_i)V_2+\ldots+(-\alpha_n/\alpha_i)V_n$$

นั่นคือ อย่างน้อยที่สุดก็มีเวคเตอร์ V_i ที่สามารถเสนอได้ในรูปการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์อื่น ๆ ที่เหลืออยู่ (หรืออีกนัยหนึ่ง V_i ขึ้นอยู่กับเวคเตอร์ $V_1, V_2,\ldots,V_{i-1}, V_{i+1},\ldots,V_n$

2. ให้ V เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathcal{V}$

ถ้าให้ V เขียนได้ในรูปการประกอบกันของเวคเตอร์ V_1, $V_2,\ldots,V_n$

นั่นคือ $V = \alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\ldots+\alpha_n V_n$

ดังนั้น $(-1)V+\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\ldots+\alpha_n V_n = \mathbf{0}$

จะเห็นได้ว่าอย่างน้อยก็มีสัมประสิทธิ์ของ V ที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ แสดงว่าค่าของ α, α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ไม่เป็นศูนย์ทุกตัว

ดังนั้นเวคเตอร์ V_1, $V_2,\ldots,V_n$ จึงขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linearly Dependent)

ตัวอย่าง 4.9 ถ้ามีเวคเตอร์คู่หนึ่งคู่ใดของ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ มีค่าเท่ากันหรือเป็นพหุคูณของกันและกันแล้วจงพิสูจน์ว่า $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

วิธีทำ ให้ V_i และ V_j มีค่าเท่ากัน (สมาชิกทุกตัวมีค่าเดียวกัน) นั่นคือ $V_i - V_j = 0$ หรือ $V_i = V_j$

ดังนั้น $V_1, V_2, \ldots, V_k$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันได้ ถ้ามีตัวคงค่า (Scalar) ชุดหนึ่งคือ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ที่ไม่เป็น 0 ทั้งหมด ที่ทำให้

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k = \mathbf{0}$$

สมมุติให้ $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_{i-1} = 0, \alpha_{i+1} = 0, \ldots, \alpha_{j-1} = 0, \alpha_{j+1} = 0, \ldots, \alpha_n = 0$

ดังนั้น $0 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 + \ldots + 0 \cdot V_{i-1} + 1 \cdot V_i + 0 \cdot V_{i+1} + \ldots + 0 \cdot V_{j-1} + 1 \cdot V_j + 0 \cdot V_{j+1} + \ldots + 0 \cdot V_k = \mathbf{0}$

จะเห็นได้ว่า $\alpha_i = 1, \alpha_j = -1$

นั่นคือ ถ้า $V_i = V_j$ แล้ว เวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน

หมายเหตุ กรณีทั่วไปคือ $V_i = kV_j$ จะขอเว้นไว้ให้พิสูจน์เอง

ตัวอย่าง 4.10 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็นเซทของเวคเตอร์ใน $\mathscr{V}$ และ ถ้าในเซทนี้มีเวคเตอร์หนึ่งเป็น Zero Vector แล้ว เซท $V_1, V_2, \ldots, V_k$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน

วิธีทำ ให้ V_i เป็น Zero Vector นั่นคือ $V_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $0 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 + \ldots + 0 \cdot V_{i-1} + k \cdot V_i + 0 \cdot V_{i+1} + \ldots + 0 \cdot V_k = \mathbf{0}$

จะเห็นได้ว่ามี $\alpha_i = k \neq 0$ แต่ทำให้การประกอบกัน

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k = \mathbf{0}$$

ดังนั้น $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

ตัวอย่าง 4.11 จงพิสูจน์ว่าเวคเตอร์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linearly Dependent) ก็ต่อเมื่อระบบสมการ

$$[A_1, A_2, \ldots, A_k] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

มี Non-Trivial Solution

วิธีทำ

1. ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linearly Dependent)

จะมี x บางตัวที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ แต่ทำให้

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_kA_k = \mathbf{0}$$

แสดงว่าค่าของ x ซึ่งเป็น Solution ของระบบสมการ

$$AX = [A_1, A_2, \ldots, A_k] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ไม่ต้องเป็น 0 ทุกค่า

ระบบสมการ $[A_1, A_2, \ldots, A_k] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ มี Non-Trivial Solution

2. ถ้า Solution ของระบบสมการ $[A_1, A_2, \ldots, A_k]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = 0$ มี Nontrivial Solution

สมมุติว่า มี Solution เป็น $(k, 0, 0, \ldots, 0)^T$

$$kA_1 + 0\cdot A_2 + 0\cdot A_3 + \ldots + 0\cdot A_k = \mathbb{0}$$

เวคเตอร์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

จากผลการพิสูจน์ตอน 1 และตอน 2 ทำให้สรุปได้ว่า Column Vector ที่ประกอบกันเป็น Coefficient Matrix ของระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นจะขึ้นอยู่แก่กันและกัน ก็ต่อเมื่อระบบสมการนั้นมี Nontrivial Solution

ตัวอย่าง 4.1 เวคเตอร์ $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ขึ้นอยู่แก่กันและกันหรือไม่ ?

วิธีทำ อาศัยทฤษฎี 4.2 จะพบว่า

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 1 \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 3 \\ \alpha_4 &= 4 \end{aligned}$$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = 4$

นั่นคือ $V_5 = 1\cdot V_1 + (-2)\cdot V_2 + (-1)\cdot V_3 + 4\cdot V_4$

แสดงว่ามีเวคเตอร์หนึ่งในชุดเดียวกันเป็นเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกันของ

เวคเตอร์ที่เหลือ

เวคเตอร์ V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

ข้อสังเกต

คงยังไม่ลืมว่าเราเคยแสดงให้เห็นในตัวอย่าง 4.8 แล้วว่าเวคเตอร์

$$V_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, V_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$ เป็นอิสระแก่กัน

แต่มาถึงตัวอย่างนี้เราเพิ่มเวคเตอร์เข้าไปอีกเวคเตอร์หนึ่งคือ $V_5 = \begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix}$ ปรากฏว่า

V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

จึงเป็นที่น่าสังเกตได้ 2 ประการว่า

1. ถ้า $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็นอิสระต่อกัน เวคเตอร์ใหม่ W จะเกิดขึ้นได้ก็ด้วยการประกอบกันของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เท่านั้น และทำให้เวคเตอร์ $W, V_1, V_2, \ldots, V_k$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

2. ถ้า $\mathcal{V}$ เป็น Vector Space ในระบบ n มิติ เวคเตอร์ใน Space นี้มากกว่า n เวคเตอร์จะขึ้นอยู่แก่กันและกันเสมอ

ทฤษฎี 4.3 ถ้าเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็นอิสระต่อกัน แต่เวคเตอร์ $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k, W$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน แล้วเวคเตอร์ W ก็คือเวคเตอร์ที่เกิดขึ้นจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$

พิสูจน์ เวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k, W$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

ดังนั้น $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k + \alpha W = \mathbf{0}$

ให้ $\alpha \neq 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ อาจเป็นศูนย์หมดทุกตัวก็ได้ แต่ถ้าให้ α เป็นศูนย์ด้วย จะกลายเป็นว่าเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k, W$ เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด

นั่นคือ $W = (-\alpha_1/\alpha)V_1 + (-\alpha_2/\alpha)V_2 + \ldots + (-\alpha_k/\alpha)V_k$

แสดงว่า W เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$

ทฤษฎี 4.4

1. ถ้ามีเวคเตอร์อยู่ k เวคเตอร์คือ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ เวคเตอร์ชุดใหม่ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ชุดนี้คือ $w_1, w_2, w_3, \ldots$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันอยู่เสมอ ถ้าหากเวคเตอร์ชุดใหม่นี้ประกอบได้ด้วยเวคเตอร์มากกว่า k เวคเตอร์

2. ใน Space ที่มี n มิติ เวคเตอร์ชุดหนึ่งชุดใดที่มีจำนวนเวคเตอร์มากกว่า n เวคเตอร์ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันเสมอ

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ข้อแนะนำ ให้อาศัยความรู้เรื่องการแก้ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นเป็นหลักในการพิสูจน์

ตัวอย่าง 4.13 จงแสดงให้เห็นว่าเวคเตอร์ ในระบบ 2 มิติต่อไปนี้คือ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ขึ้นอยู่แก่กันและกันหรือไม่ ?

วิธีทำ 1 อาศัยทฤษฎี 4.4 ทำให้สามารถสรุปได้ว่าเวคเตอร์ v_1, v_2 และ v_3 ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

วิธีที่ 2 ให้ k_1, k_2 และ k_3 เป็นตัวคงค่าใด ๆ ที่ทำให้

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 3k_3 &= 0 \\ 2k_1 \quad\; + 2k_3 &= 0 \end{aligned}$$

จากระบบสมการ จะพบว่า $k_1 = -k_3, k_2 = -2k_3$

แสดงว่าระบบสมการนี้มี Infinitely Many Solution และ k_1, k_2, k_3 ไม่ใช่ศูนย์ทุกตัว

ดังนั้น v_1, v_2, v_3 ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

ตัวอย่าง 4.14 จงตรวจสอบดูว่า Linear Form[1] ต่อไปนี้ขึ้นอยู่แก่กันและกันหรือไม่

ก. $2x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 + 2x_3$

ข. $2x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 + 2x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 + 2x_3$

$x_1 + x_2 + x_3$

---

[1] $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ เรียกว่า Homogeneous Linear Polynomial ในเทอมของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ หรือเรียกสั้น ๆ ว่า Linear Form

วิธีทำ

ก. Homogeneous Linear Polynomial คือ

$$L_1 = 2x_1 + x_2 + x_3,\ L_2 = x_1 + 2x_2 + x_3,\ L_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ ใน $\mathscr{F}$ ที่ทำให้ $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = \mathbf{0}$

นั่นคือ $\alpha_1(2x_1 + x_2 + x_3) + \alpha_2(x_1 + 2x_2 + x_3) + \alpha_3(x_1 + x_2 + 2x_3) = \mathbf{0}$

จะพบว่า $(2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)x_3 = \mathbf{0}$

ซึ่งสมการนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

แก้ระบบสมการเอกพันธ์นี้เพื่อหาค่า α_1, α_2 และ α_3

เห็นว่าเมื่อจัดเป็นรูปแมตริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

พบว่า det A = $4 \neq 0$ แสดงว่าระบบสมการนี้มีเพียง Trivial Solution เท่านั้น

ดังนั้น $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$

นั่นคือ L_1, L_2 และ L_3 ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

ข. ให้ $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ เป็นตัวคงที่ใด ๆ ใน $\mathscr{F}$ ที่ทำให้

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4 = 0$$

นั่นคือ

$$\alpha_1(2x_1 + x_2 + x_3)x_1 + \alpha_2(x_1 + 2x_2 + x_3) + \alpha_3(x_1 + x_2 + 2x_3) + \alpha_4(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x_3 = \mathbf{0}$$

ซึ่งสมการจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จาก Augmented Matrix (A/B) ซึ่งก็คือ (A/0) = A จะพบว่า

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad + \tfrac{1}{4}\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 \quad + \tfrac{1}{4}\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_3 + \tfrac{1}{4}\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

ให้ $\alpha_4 = 4t$ โดย t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น $\alpha_1 = -t,\ \alpha_2 = -t,\ \alpha_3 = -t,\ \alpha_4 = 4t$

จะเห็นได้ว่า $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ \alpha_3 \neq 0,\ \alpha_4 \neq 0$ แต่ทำให้ $\alpha_1L_1 + \alpha_2L_2 + \alpha_3L_3 + \alpha_4L_4 = 0$

L_1, L_2, L_3, L_4 ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

ข้อสังเกต

วิธีที่จะตรวจสอบดูว่าเวคเตอร์ชุดใดเป็นอิสระต่อกันหรือว่าขึ้นอยู่แก่กันและกันนั้น วิธีที่ง่ายและสะดวกที่สุดคือ จัดเวคเตอร์เหล่านั้นเป็นรูปแมตริกซ์ แล้วแปลงรูปให้เป็น Echelon Matrix การแปลงรูปให้อาศัย Elementary Operation กล่าวคือ ถ้าเวคเตอร์ชุดนั้นเป็น Row Vector ให้ใช้ Elementary Row Operation และถ้าเวคเตอร์ชุดนั้นเป็น Column Vector ให้ใช้ Elementary Column Operation อย่าใช้สับสนปนเปกัน เมื่อแปลงรูปไปแล้วจนได้ Echelon Matrix ให้พิจารณาดังนี้

1. ถ้าใน Echelon Matrix นั้นไม่มีเวคเตอร์ใดเปลี่ยนไปเป็น Zero Vector เลย (อย่าลืมลักษณะเดิมของเวคเตอร์ว่ามาจาก Row Vector หรือ Column Vector) ก็แสดงว่าเวคเตอร์ชุดเดิมเป็นอิสระต่อกัน

2. ถ้าใน Echelon Matrix นั้นมี Zero Vector ปรากฏขึ้นแสดงว่าเวคเตอร์ที่เปลี่ยนไปเป็น Zero Vector นั้นเกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ที่เหลืออยู่ นั่นก็คือเวคเตอร์ชุดเดิมขึ้นอยู่แก่กันและกัน เฉพาะ Non-Zero Vector ที่เหลืออยู่เท่านั้นที่เป็นอิสระต่อกัน

วิธีนี้สามารถนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง กล่าวคือนอกจากใช้ตรวจสอบว่าเวคเตอร์ชุดเดิมเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันหรือไม่แล้วยังสามารถใช้หาจำนวนมิติ (Dimension) และฐานที่เกิดของเวคเตอร์ (Basis) ของ Vector Space ตลอดจนการหา Rank ของแมตริกซ์ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อ ๆ ไปด้วย

ตัวอย่าง 4.15 จงตรวจสอบดูว่าเวคเตอร์และแมตริกซ์ต่อไปนี้ขึ้นอยู่แก่กันและกันหรือไม่

(1) (1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

(1) จัด Row Vector เป็นรูปแมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

แปลงรูปให้เป็น Echelon Matrix โดยอาศัย Elementary Row Operation

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

แสดงว่าเวคเตอร์ (1, -2, 1), (2, 1, -1) และ (7, -4, 1) ขึ้นอยู่แก่กันและกัน โดยที่

เวคเตอร์ (7, -4, 1) ขึ้นอยู่กับ 2 เวคเตอร์แรกและ 2 เวคเตอร์แรกคือ (1, -2, -1) กับ (2, 1, -1) เท่านั้นที่เป็นอิสระต่อกัน

(2) จัด Column Vector เป็นรูปแมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

แปลงรูปให้เป็น Echelon Matrix โดยอาศัย Elementary Column Operation

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า Column Vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ เป็นอิสระต่อกัน (Linearly Independent)

ทั้งนี้เพราะไม่มีเวคเตอร์ใดกลายเป็น Zero Vector

(3) จากแมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นแมตริกซ์ใน Vector Space ของแมตริกซ์ขนาด 2×2

ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ ใน $\mathscr{F}$ ที่ทำให้การประกอบกันของแมตริกซ์ทั้งสามเป็น Zero Matrix

นั่นคือ

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \quad + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 \qquad = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

แก้สมการทั้งสี่เพื่อหาค่าของ α_1, α_2 และ α_3 จะพบว่า $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นอิสระต่อกัน}$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงแสดงให้เห็นว่าการประกอบกันของ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ เมื่อ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ ต่างก็เป็น Solution ของระบบสมการ $AX = 0$ ยังคงเป็น Solution ของระบบสมการ $AX = 0$
2. เมื่อ n มีค่าคงที่ จงแสดงให้เห็นว่า

   ก. เซ็ทของ Linear Polynomial ซึ่งมีรูปเป็น

   $$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \text{ เป็น Vector Space}$$

   ข. เซ็ทของ Quadratic Polynomial ซึ่งมีรูปเป็น

   $$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$$
   $$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

   เป็น Vector Space
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็น Solution ของระบบสมการ $AG = GA$ โดยที่ A และ G เป็น Square Matrix ขนาด n n และ G เป็น Fixed Matrix

   จงแสดงให้เห็นว่าเซ็ทของแมตริกซ์ A เป็น Vector Space
4. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของเวคเตอร์ X ที่สอดคล้องกับสมการ $X^TA = 0$ เป็น Vector Space โดยที่ A และ X เป็นเวคเตอร์ในระบบ 3 มิติและ A เป็น Fixed Vector
5. จงหา Solution ของระบบสมการต่อไปนี้แล้วตรวจสอบดูว่าเซ็ทของ Solution นั้นเป็น Vector Space หรือไม่ ?

   ก. $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$

   $5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

   ข. $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

   ค. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

   $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

6. $A_1 \in \mathscr{V}$, $A_2 \in \mathscr{V}$ โดยที่ $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space จงพิสูจน์ว่า A_1 และ A_2 จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน ก็ต่อเมื่อ A_1 และ A_2 เป็นอัตราส่วนต่อกัน ($A_1 = cA_2$)
7. จงพิสูจน์ว่าเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันก็ต่อเมื่อเวคเตอร์ $\alpha_1 V_1, \alpha_2 V_2, \ldots, \alpha_k V_k$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน
8. ให้เวคเตอร์ V_1, V_2 และ V_3 เป็นอิสระต่อกัน จงพิสูจน์ว่าเวคเตอร์ V_1, $V_1 + V_2$, $V_1 + V_2 + V_3$ จะเป็นอิสระต่อกันและกันด้วย
9. จงพิสูจน์ว่า เวคเตอร์ $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน ก็ต่อเมื่อ $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$
10. ใน Space ระบบ n มิติ จงพิสูจน์ว่าเวคเตอร์ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ และ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันก็ต่อเมื่อ $a_i b_j - a_j b_i = 0; 1 < i < j < n$
11. จงพิสูจน์ว่า เวคเตอร์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ใน Real Space ระบบ 3 มิติจะขึ้นอยู่แก่กันและกันก็ต่อเมื่อระบบสมการ

$$(A_1, A_2, \ldots, A_k) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix}$$

มี Non-Trivial Solution และเป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อระบบสมการดังกล่าวมีเพียงเฉพาะ Trivial Solution

12. แมตริกซ์ต่อไปนี้เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ ?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -16 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -4 & 13 \end{bmatrix}$$

13. จงพิสูจน์ว่า

    1. ถ้าสดมภ์ต่าง ๆ ของแมตริกซ์ B ขึ้นอยู่แก่กันและกันแล้ว สดมภ์ต่าง ๆ ของ AB ก็จะขึ้นอยู่แก่กันและกันด้วย

    2. ถ้าสดมภ์ต่าง ๆ ของ AB เป็นอิสระต่อกันแล้วสดมภ์ต่าง ๆ ของแมตริกซ์ B ก็จะเป็นอิสระต่อกันด้วย

14. ถ้าเวคเตอร์ $P_1, P_2, \ldots, P_k$ เป็นอิสระต่อกัน และ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i = P$ แล้วจงพิสูจน์ว่าเวคเตอร์ $P_1 - P, P_2 - P, \ldots, P_k - P$ จะเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ $\Sigma\alpha_i \neq 1$

15. $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็นเวคเตอร์ใน Space ระบบ n มิติและ $W_1, W_2, \ldots, W_k$ เป็นเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบการของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_k$

จงพิสูจน์ว่าเงื่อนไขประการสำคัญ (Necessary and Sufficience Condition) ที่จะทำให้เวคเตอร์ $W_1, W_2, \ldots, W_k$ เป็นอิสระต่อกันก็คือ แมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของ Combination นั้นเป็น Nonsingular Matrix

16. จงแสดงให้เห็นว่าแมตริกซ์ขนาด 2×2 ทุกรูปเกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของแมตริกซ์ต่อไปนี้เสมอ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นตัวคงที่ใด ๆ จงพิสูจน์ว่าเซ็ทของ Linear Form $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ เป็น Vector Space

ข้อสังเกต $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = A^TX = X^TA$

18. ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ เป็นเวคเตอร์ใน Space ระบบ n มิติ จงพิสูจน์ว่า Linear Form $A_1^TX, A_2^TX, \ldots, A_m^TX$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันก็ต่อเมื่อเวคเตอร์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

19. a_{ij} เป็นตัวคงที่ใด ๆ Quadratic Polynomial

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

เรียกว่า Quadratic Form ในเทอมของตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$

1. จงพิสูจน์ว่าเซ็ทของ Quadratic Form เป็น Vector Space
2. ตรวจสอบว่า Quadratic Form ต่อไปนี้ขึ้นอยู่แก่กันและกันหรือไม่ ?

ก. $2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$

ข. $2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$

$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

ข้อสังเกต

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

$$= (x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \ldots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} & \ldots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} & \ldots & \frac{a_{3n}}{2} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \frac{a_{3n}}{2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = X^TAX$$

20. a_{ij} เป็นตัวคงที่ใด ๆ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ และ $y_1, y_2,\ldots,y_n$ เป็นตัวแปร (Variates) Homogeneous Polynomial ในรูป $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$ เรียกว่า Bilinear Form

1. จงพิสูจน์ว่าเซ็ทของ Bilinear Form เป็น Vector Space
2. จงตรวจสอบดูว่าเซ็ทของ Bilinear Form ต่อไปนี้จะขึ้นอยู่แก่กันและกันหรือไม่ ?

$$x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$$
$$-x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$
$$2x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_2y_2$$

21. จงพิสูจน์ว่า ถ้าแถวที่ i ของแมตริกซ์ A เกิดจากการประกอบกันของแถวอื่นแล้ว det A จะมีค่าเป็นศูนย์

22. ระนาบใด ๆ ใน Space ระบบ 3 มิติเป็น Subspace ได้หรือไม่ ? เพราะเหตุใดจึงต้องเป็นได้เฉพาะระนาบที่พุ่งผ่านจุดกำเนิดเท่านั้น ?

4.3 มิติและฐานที่เกิดของเวคเตอร์ (Dimension and Basis)

นิยาม 4.5 $\mathscr{S}$ เป็นอนุเซทของ Vector Space $\mathscr{V}$ ถ้าทุกเวคเตอร์ใน $\mathscr{V}$ เกิดขึ้นจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในเซท $\mathscr{S}$ แล้ว เราเรียก $\mathscr{S}$ ว่าเป็นเซทของเวคเตอร์ที่ก่อให้เกิด (Span หรือ Generate) Vector Space

นิยาม 4.6 $\mathscr{V}$ จะเป็น Space ที่มี n มิติ (Finite Dimensional n Space) ก็ต่อเมื่อมี (There Exists) อนุเซท $\mathscr{S}$ ของ $\mathscr{V}$ ที่ประกอบด้วยสมาชิก n ตัว Span $\mathscr{V}$

นิยาม 4.7 ถ้า $\mathscr{S}$ เป็นอนุเซทของ $\mathscr{V}$ และ $\mathscr{S}$ Span $\mathscr{V}$ โดยที่สมาชิกทุกตัวของ $\mathscr{S}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (Linearly Independent) และ $\mathscr{S}$ ต้องเป็นอนุเซทที่เล็กที่สุดของ $\mathscr{V}$ ที่ Span $\mathscr{V}$ ได้[1] เราเรียกเซท $\mathscr{S}$ ว่าเป็นฐานที่เกิด (Basis) ของเวคเตอร์ใน Vector Space $\mathscr{V}$

นิยามทั้งสามนี้มีความสัมพันธ์ที่เกี่ยวเนื่องกัน กล่าวคือในการศึกษาเรื่อง Vector Space นั้น เราจะพบว่าใน Space หนึ่ง ๆ นั้นจะประกอบไปด้วยเวคเตอร์จำนวนมากจนนับไม่ได้ ปัญหาที่ตามมาคือความยุ่งยากในการศึกษาจำเป็นต้องศึกษาให้ลึกลงไปว่าในบรรดาเวคเตอร์ที่มีมากจนนับไม่ได้นั้นโดยข้อเท็จจริงแล้วเกิดขึ้นได้อย่างไร มีเวคเตอร์ชุดใดบ้างที่เป็นตัวกำเนิดแก่เวคเตอร์อื่น ๆ หรือนัยหนึ่งมีเวคเตอร์ชุดใดบ้างที่การประกอบกันของเวคเตอร์ชุดดังกล่าวนั้น ก่อให้เกิดเวคเตอร์ใหม่ขึ้นใน Space หรือไม่ ถ้ามีก็แสดงว่าเวคเตอร์ชุดนั้นคือฐานที่เกิดของเวคเตอร์ต่าง ๆ ใน Space เราเรียกเวคเตอร์ชุดนั้นว่า Basis ของ Vector Space ที่สำคัญที่สุดก็คือเวคเตอร์ชุดนั้นต้องเป็นอิสระต่อกัน[2]

เวคเตอร์สำคัญ ๆ ที่กล่าวถึงนั้นไม่จำเป็นต้องมีเพียงชุดเดียว อาจจะมีได้หลายชุด ขอเพียงให้เวคเตอร์ในชุดนั้น ๆ เป็นอิสระต่อกันและการประกอบกันของมันก่อให้เกิดเวคเตอร์ต่าง ๆ ใน Space ได้ก็ถือได้ว่าเป็น Basis ของ Vector Space[3]

ปัญหาที่เกี่ยวเนื่องกันก็คือ Basis ของ Vector Space นั้นต้องประกอบไปด้วยเวคเตอร์จำนวนเท่าไร ?

ณ จุดนี้จึงทำให้เราต้องย้อนมาพิจารณาถึงมิติของ Space จากนิยามและทฤษฎีของความเป็นอิสระเชิงเส้นในตอนก่อนทำให้เราทราบว่า ถ้า Space ใดมี n มิติ ฐานที่เกิดของเวคเตอร์ใน Space นั้นก็ประกอบได้ด้วยเวคเตอร์ n เวคเตอร์ และโดยนัยกลับกัน ถ้าทุกเวคเตอร์ใน Space เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์อิสระ n เวคเตอร์ก็แสดงว่า Space นั้นมี n มิติ

---

[1] หรือนัยหนึ่งต้องไม่มี Proper Subset ของ $\mathscr{S}$ ที่สามารถ Span $\mathscr{V}$ ได้ ถ้ามีก็แสดงว่าไม่ใช่ Basis ของ

[2] เซทที่ Span $\mathscr{V}$ คือเซทที่ให้กำเนิดเวคเตอร์ใน $\mathscr{V}$ ถ้าเป็นอิสระต่อกันแล้วจะประหยัดและเหมาะสมกว่า

[3] Basis เป็นเอกพจน์ Bases เป็นพหุพจน์

คำว่า Space หมายถึงอวกาศ ความหมายที่แท้จริงทั้งทางคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ หมายถึงบริเวณที่เวิ้งว้างเปล่า มีมวลขนาดเล็กใหญ่พุ่งผ่านไปมาเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน มวลดังกล่าวจะมีขนาดต่าง ๆ กันและพุ่งผ่านไปในทิศทางต่าง ๆ กัน ซึ่งก็คือเวคเตอร์ตามความหมายทางคณิตศาสตร์นั่นเอง การที่มวลพุ่งผ่านไปมาโดยไม่เกาะกลุ่มกันด้วยเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่ง จึงไม่ทำให้เกิดรูปทรงที่สามารถมองเห็นได้ แต่เมื่อใดที่มวลเหล่านั้นพุ่งเข้ามารวมตัวกันด้วยเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งก็จะเกิดรูปทรงขึ้นเมื่อนั้น เช่น มวลในอวกาศพุ่งเข้ารวมตัวกันประกอบกับมีแรงดึงดูดซึ่งกันและกัน จึงรวมตัวกันเป็นระบบสุริยะ หรือระบบอื่น ๆ ในจักรวาล เป็นต้น

การรวมตัวกันเป็นรูปทรงของมวลหรือเวคเตอร์นั้น จะเกิดรูปทรงในลักษณะใดขึ้นอยู่กับมิติเป็นสำคัญ ถ้ามวลในระบบ 2 มิติรวมตัวกันโดยมีเงื่อนไขว่า ทุก ๆ มวลต้องอยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่ง (จุดศูนย์กลาง) เท่า ๆ กัน รูปทรงที่เกิดขึ้นก็คือวงกลม หรือในระบบ 3 มิติ ถ้าการรวมตัวของมวลมีเงื่อนไขว่าทุก ๆ มวลในแนวเดียวกันต้องอยู่ห่างจากจุดกลาง (จุดศูนย์กลาง) เป็นระยะทางเท่า ๆ กัน ที่จะเกิดรูปทรงกลมขึ้นดังนี้เป็นต้น

4.3.1 ทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับ Basis และ Dimension

ทฤษฎี 4.5

1. ฐานที่เกิดของเวคเตอร์ (Basis) ของ Finite Dimensional Vector Space $\mathscr{V}$ จะต้องประกอบไปด้วยเฉพาะเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเท่านั้น

2. เซทของเวคเตอร์ใด ๆ ก็ตามที่สมาชิกในเซทนั้นเป็นอิสระต่อกันและ Span $\mathscr{V}$ เซทนั้น ๆ ก็เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$

3. ทุก ๆ Finite Dimensional Vector Space $\mathscr{V}$ จะมี Basis อยู่อย่างน้อยที่สุด 1 ชุดเสมอ

พิสูจน์

1. ให้ $\mathscr{S} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ เป็นอนุเซทของ $\mathscr{V}$ และ Span $\mathscr{V}$
สมมุติว่าสมาชิกของ $\mathscr{S}$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Linearly Dependent)
ให้ v เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathscr{V}$
ดังนั้น $\quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$ ....(1)

---

[1] $\mathscr{V}$ ต้องไม่เป็น Zero Space

แต่สมาชิกของ $\mathscr{S}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันแสดงว่าต้องมีเวคเตอร์หนึ่งใดใน $\mathscr{S}$ เกิดขึ้นจากการประกอบกันของเวคเตอร์อื่น ๆ ในเซทเดียวกัน สมมุติว่าเป็น V_k

นั่นคือ $V_k = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \ldots + \beta_{k-1} V_{k-1}$

แทน V_k ลงใน (1)

$$
\begin{aligned}
V &= \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_{k-1} V_{k-1} + \alpha_k(\beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \ldots + \beta_{k-1} V_{k-1}) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_k\beta_1)V_1 + (\alpha_2 + \alpha_k\beta_2)V_2 + \ldots + (\alpha_{k-1} + \alpha_k\beta_{k-1})V_{k-1} \\
&= \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 + \ldots + \gamma_{k-1} V_{k-1}
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่า V ซึ่งเป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathscr{V}$ ก็เกิดขึ้นจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ ได้เช่นกัน

แสดงว่า $\mathscr{S} = \{ V_1, V_2, \ldots, V_k \}$ ไม่เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ทั้งนี้เพราะอนุเซทของ $\mathscr{S}$ คือเซท $\mathscr{S}' = \{ V_1, V_2, \ldots, V_{k-1} \}$ ก็สามารถ Span $\mathscr{V}$ ได้ด้วย

และถ้าสมาชิกของ $\mathscr{S}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันแล้ว จะไม่มีเวคเตอร์ใดใน $\mathscr{S}$ เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์อื่นในชุดเดียวกัน ซึ่งจะทำให้ไม่มีอนุเซทของ $\mathscr{S}$ ที่ Span $\mathscr{V}$ ได้อีก

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า Basis ของ $\mathscr{V}$ ประกอบไปด้วยเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเท่านั้น

2. ให้ $\mathscr{S} = \{ V_1, V_2, \ldots, V_k \}$ Span $\mathscr{V}$ และ $\mathscr{S} \subset \mathscr{V}$ โดยที่สมาชิกทุกตัวใน $\mathscr{S}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

**ซึ่งก็เป็นที่แน่ชัดว่า $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ เช่นเดียวกับเวคเตอร์อื่น ๆ ใน $\mathscr{V}$

สมมุติ $\mathscr{S}$ ไม่เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ซึ่งย่อมแสดงว่าต้องมีอนุเซทของ $\mathscr{S}$ (Proper Subset) ที่สามารถ Span $\mathscr{V}$ ได้

ให้ $\mathscr{S}'$ เป็นอนุเซทของ $\mathscr{S}$ ที่ Span $\mathscr{V}$ โดยที่เซท $\mathscr{S}'$ ไม่รวมเวคเตอร์ V_i ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{S}$ ไว้ด้วย

นั่นคือ $\mathcal{S}'$ = $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k\}$ เนื่องจาก $v \in \mathcal{S}$ ขณะเดียวกัน v_i ก็ถือได้ว่าเป็นสมาชิกใด ๆ ของ $\mathcal{V}$ และ $\mathcal{S}'$ Span $\mathcal{V}$

ดังนั้น $v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_k v_k$

ซึ่งแสดงว่าเวคเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน

แต่เรากำหนดไว้แต่ต้นแล้วว่า เวคเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k$ เป็นอิสระต่อกัน ผลการพิสูจน์จึงเกิดความขัดแย้งกับข้อกำหนด

จึงทำให้สรุปว่าในเซท $\mathcal{S}$ ที่สมาชิกทุกตัว เป็นอิสระต่อกันและ Span $\mathcal{V}$ นั้นจะต้องไม่มี Proper Subset ของมันที่ Span $\mathcal{V}$ ได้อีก

นั่นคือเซท $\mathcal{S}$ ใด ๆ ก็ตามที่สมาชิกทุกตัวเป็นอิสระต่อกันและ Span $\mathcal{V}$ นั้นจะต้องเป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ เสมอ

3. เนื่องจาก $\mathcal{V}$ เป็น Finite Dimensional Vector Space

ดังนั้นจึงมีอนุเซทของ $\mathcal{V}$ (Finite Subset) ที่สามารถ Span $\mathcal{V}$ ได้

ในบรรดาอนุเซทเหล่านี้ ถ้าอนุเซทใดมีสมาชิกที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และยังคง Span $\mathcal{V}$ อนุเซทเหล่านั้นก็เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$

จึงสรุปได้ว่า Finite Dimensonal Vector Space จะมี Basis ได้อย่างน้อยที่สุด 1 ชุดเสมอ

ทฤษฎี 4.6 Basis ทุกชุดของ Finite Dimensional Vector Space $\mathcal{V}$ จะต้องมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

พิสูจน์ ให้ $\mathcal{S}$ และ $\mathcal{S}'$ ต่างก็เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ โดยที่ $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ และ $\mathcal{S}' \subset \mathcal{V}$

ดังนั้นทุกเวคเตอร์ใน $\mathcal{S}$ จึงเกิดขึ้นได้จากการประกอบกันของเวคเตอร์ใน $\mathcal{S}'$

ขณะเดียวกันทุกเวคเตอร์ใน $\mathcal{S}'$ ก็เกิดขึ้นได้จากการประกอบกันของเวคเตอร์ใน $\mathcal{S}$

ถ้า $\mathcal{S}$ มีสมาชิกมากกว่า $\mathcal{S}'$ เวคเตอร์ใน $\mathcal{S}$ (ซึ่งก็คือเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ใน $\mathcal{S}'$) จะขึ้นอยู่แก่กันและกัน (ทฤษฎี) ซึ่งจะทำให้ $\mathcal{S}$ เป็น Basis ไม่ได้ (ขัดแย้งกับความจริงว่า $\mathcal{S}$ เป็น Basis)

ในทำนองเดียวกันถ้า $\mathcal{S}'$ มีสมาชิกมากกว่า $\mathcal{S}$ $\mathcal{S}'$ ก็เป็น Basis ไม่ได้

ดังนั้นอนุเซทใด ๆ ก็ตาม ที่เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ จะต้องมีจำนวนสมาชิกเท่ากันเสมอ ทฤษฎีนี้ย้ำให้เห็นว่าโดยปกติจำนวนสมาชิกที่แสดงมิติของ Vector Space ก็คือจำนวนเวคเตอร์ในเซทที่เป็น Basis นั่นเอง ตัวอย่างเช่นมิติของ Space ที่สมาชิกแต่ละตัวประกอบด้วยตัวประกอบ (Component) 3 ตัว จะมี 3 มิติเพราะเซทนี้มี Basis เป็น E_1, E_2 และ E_3 หรือในเซทที่สมาชิกแต่ละตัวประกอบด้วย n Component จะมี n มิติ เพราะ Basis ของมันประกอบด้วย $E_1, E_2, \ldots, E_n$[1]

อาจสงสัยว่า Zero Space $\mathscr{Z}$ มีกี่มิติ ? Zero Space คือ Space ที่ประกอบด้วย Zero Vector เท่านั้นจึงมีมิติเป็น 0 เพราะไม่มี Basis

ทฤษฎีนี้ยังทำให้สรุปได้อีกว่า มิติ (Dimension) ของ Finite Dimensional Vector Space ก็คือจำนวนสูงสุดของเวคเตอร์ใน $\mathscr{V}$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันโดยในขณะเดียวกันนั้นจำนวนนี้ต้องเป็นจำนวนที่ต่ำที่สุดของเวคเตอร์ใน $\mathscr{V}$ ที่ Span $\mathscr{V}$ ได้

อนึ่งในการศึกษาเรื่อง Dimension และ Basis ของ Vector Space นั้น เราจะพิจารณาเฉพาะ Nonzero Vector เท่านั้น

ทฤษฎี 4.7 $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, V_k$ เป็น Basis ของ Vector Space $\mathscr{V}$ V เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $\mathscr{V}$ นั่นคือ $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k$ ถ้า $\alpha_i \neq 0$ แล้ว เซท $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V, V_{i+1}, \ldots, V_k$ จะเป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ด้วย

พิสูจน์ V เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ของ $\mathscr{V}$ ซึ่งมี Basis เป็น $\{V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, V_k\}$

ดังนั้น $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_i V_i + \ldots + \alpha_k V_k$

ถ้า $\alpha_i \neq 0$

$$V_i = (-\alpha_1/\alpha_i)V_1 + (-\alpha_2/\alpha_i)V_2 + \ldots + (-\alpha_{i-1}/\alpha_i)V_{i-1} + (1/\alpha_i)V + (-\alpha_{i+1}/\alpha_i)V_{i+1} + \ldots + (-\alpha_k/\alpha_i)V_k$$

ให้ W เป็นเวคเตอร์อื่น ๆ ของ $\mathscr{V}$

ดังนั้น $W = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \ldots + \beta_i V_i + \ldots + \beta_k V_k$ ....(1)

แทนค่า V_i ใน (1)

---

[1] E คือ Elementary Vector Basis ของ Vector Space ที่ประกอบด้วย Elementary Vector เรียกว่า Natural Basis หรือ Usual Basis หรือ Ordinary Basis เช่น Basis ของเวคเตอร์ในระบบ 2 มิติ คือ $\{E_1, E_2\}$ โดยที่ $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $$W = \left(\beta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)V_1 + \ldots + \left(\beta_i + \frac{1}{\alpha_i}\right)V + \left(\beta_{i+1} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)V_{i+1} + \ldots + \left(\beta_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\right)V_k$$
$$= \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 + \ldots + \gamma_i V + \ldots + \gamma_k V_k$$
จะเห็นได้ว่า W ซึ่งเป็นเวคเตอร์ใด ๆ ของ $\mathscr{V}$ เกิดขึ้นได้จากการประกอบกันของเวคเตอร์ $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V, V_{i+1}, \ldots, V_k$

นั่นคือ $\{ V_1, V_2, \ldots, V, \ldots, V_k \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ได้เช่นกัน

ทฤษฎีนี้ย้ำให้เห็นเด่นชัดยิ่งขึ้นอีกว่า Basis ของ Vector Space $\mathscr{V}$ นั้นมีได้มากกว่า 1 ชุด และใน Basis ชุดที่มีอยู่เดิมอาจเปลี่ยนไปเป็นชุดใหม่ได้ด้วยการนำเวคเตอร์อื่นไปแทนที่

ตัวอย่าง 4.16 $\{ E_1, E_2, E_3 \}$ เป็น Natural Basis ของ $\mathscr{V}$ ซึ่งเป็น Space ในระบบ 3 มิติ

กล่าวคือ $$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ให้ $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathscr{V}$

จงสร้าง Basis ชุดใหม่ขึ้นมาอีกชุดหนึ่งโดยอาศัยการแทนที่เวคเตอร์เข้าไปใน Basis ชุดเดิม

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $V = 2E_1 + E_2 + 3E_3$ ....(1)

นั่นคือ $$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จาก (1) เราจะพบว่า $\{ E_1, E_2, V \}$ เป็น Basis ชุดใหม่ของ $\mathscr{V}$ การตรวจสอบว่า $\{ E_1, E_2, V \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ หรือไม่นั้นกระทำได้ดังนี้

(1) E_1, E_2 และ V เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ ?

(2) เวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathscr{V}$ เกิดจากการประกอบกันของ E_1, E_2, V หรือไม่ ?

1. ให้ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ ที่ทำให้ $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 V = \mathbf{0}$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\qquad 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

แสดงว่า E_1, E_2, V เป็นอิสระต่อกัน

2. ให้ $W = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ของ $\mathcal{V}$ โดยที่ W ไม่ใช่ Zero Vector

ถ้า $\{ E_1, E_2, V \}$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$

$$W = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 V$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_3 &= a_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= a_2 \\ 3\alpha_3 &= a_3 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \left(a_1 - \tfrac{2}{3}a_3 \right), \ \alpha_2 = \left(a_2 - \tfrac{1}{3}a_3 \right), \ \alpha_3 = \tfrac{1}{3}a_3$$

นั่นคือ $W = \left(a_1 - \tfrac{2}{3}a_3 \right)E_1 + \left(a_2 - \tfrac{1}{3}a_3 \right)E_2 + \left(\tfrac{1}{3}a_3 \right)V$

แสดงว่าเวคเตอร์ใด ๆ ของ $\mathcal{V}$ เกิดขึ้นได้จากการประกอบกันของเวคเตอร์ E_1, E_2, V จึงเห็นได้ว่า $\{ E_1, E_2, V \}$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$

ตัวอย่าง 4.17 สมมุติว่า $\mathscr{S} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ Span $\mathscr{V}$ จงพิสูจน์ว่า

(1) ถ้า w เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathscr{V}$ แล้ว $\mathscr{S} = \{ w, v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ จะขึ้นอยู่แก่กันและกันและ Span $\mathscr{V}$

(2)* ถ้า v_i เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในลำดับก่อน (Preceeding Vectors) แล้ว $\{ v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m \}$ จะยังคง Span $\mathscr{V}$

วิธีทำ

1. $w \in \mathscr{V}$ และ $\mathscr{S}$ Span $\mathscr{V}$ ดังนั้น w จึงเกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ใน $\mathscr{S}$

$\mathscr{S} = \{ w, v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ ขึ้นอยู่แก่กันและกัน

และเพราะว่า $\mathscr{S}$ Span $\mathscr{V}$ ดังนั้น $\mathscr{S}$ จึง $\mathscr{V}$ Span ด้วย

2. $\mathscr{S}$ Span $\mathscr{V}$

สมมุติ v_i เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในลำดับก่อน นั่นคือ

$v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1}$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ เป็นตัวคงที่ใด ๆ

ให้ w เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathscr{V}$ และเนื่องจาก $\mathscr{S}$ Span

$$w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_i v_i + \ldots + \beta_m v_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

แทน v_i ลงในสมการ (1)

$$\begin{aligned} w &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_{i-1} v_{i-1} + (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1}) + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_m v_m \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \ldots + (\alpha_{i-1} + \beta_{i-1}) v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_m v_m \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \beta_m v_m \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า w ซึ่งเป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathscr{V}$ เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$

นั่นคือ $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$ Span $\mathscr{V}$

ดังนั้นในเซทใด ๆ ที่ Span $\mathscr{V}$ นั้น ถ้าเวคเตอร์หนึ่งใดเกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในลำดับก่อนแล้ว เราก็สามารถตัดเวคเตอร์นั้นออกจาก Spanning Set และเวคเตอร์ที่เหลืออยู่ก็ยังคง Span $\mathscr{V}$

4.3.2 การหา Basis ของ Vector Space และ Subspace

คงจำได้ว่าในการตรวจสอบความเป็นอิสระต่อกันของเวคเตอร์ในเซทหนึ่ง ๆ โดยอาศัย Elementary Transformation ในตอนต้นนั้น จะพบว่าถ้าเวคเตอร์ชุดใดไม่เป็นอิสระต่อกัน แล้วจะมีเวคเตอร์จำนวนหนึ่งแปลงรูปไปเป็น Zero Vector ซึ่งเวคเตอร์ที่แปลงรูปไปในลักษณะดังกล่าวก็คือเวคเตอร์ที่ไม่เป็นอิสระหากแต่ขึ้นอยู่กับเวคเตอร์อื่น ๆ นั่นเอง เวคเตอร์อิสระจึงมีเฉพาะ Nonzero Vector ที่เหลืออยู่เท่านั้น โดยนัยเดียวกัน Basis คือเซทของเวคเตอร์อิสระที่สามารถ Span $\mathscr{V}$ ได้ ถ้าเวคเตอร์ใดใน Spanning Set เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในลำดับก่อน ๆ เวคเตอร์นั้นก็จะหายไป (กลายเป็น Zero Vector) เฉพาะ Nonzero Vector ที่เหลืออยู่เท่านั้นที่เป็น Basis (อาจเป็น Basis ของ Vector Space หรือเป็น Basis ของ Subspace เป็นเรื่องที่ที่จะกล่าวถึงกันในภายหลัง) จึงเห็นว่าเราสามารถใช้ Elementary Transformation เป็นเครื่องมือในการตรวจสอบดูว่าเซทใดของเวคเตอร์เป็น Basis ของ Vector Space ได้เป็นอย่างดี

ตัวอย่าง 4.18 จงตรวจสอบว่าเวคเตอร์ต่อไปนี้เป็น Basis ของเวคเตอร์ในระบบ 3 มิติหรือไม่?

1. (1, 1, 1), (1, –1, 5)

2. (1, 2, 3), (1, 0, –1), (3, –1, 0), (2, 1, –2)

3. $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$

วิธีทำ

1. เวคเตอร์ (1, 1, 1), (1, –1, 5) ไม่เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ทั้งนี้เพราะในระบบ 3 มิตินั้น Basis จะต้องประกอบไปด้วยเวคเตอร์ 3 เวคเตอร์

2. จัดเวคเตอร์ (1, 2, 3), (3, –1, 0), (1, 0, –1) และ (2, 1, –2) เป็นแมตริกซ์แล้วแปลงรูปโดยอาศัย Elementary Row Operation

---

หมายเหตุ Column Vector หรือ Row Vector มีความหมายเดียวกัน แต่โดยทั่วไปเรานิยมใช้ Column Vector

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&-1\\3&-1&0\\2&1&-2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-4\\0&-7&-9\\0&-3&-8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&7&9\\0&3&8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&-5\\0&0&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$ [1]

แสดงว่าเวคเตอร์ (1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2) ไม่เป็น Basis ของ Space ในระบบ 3 มิติ จาก Echelon Matrix พบว่า Basis ของ Vector Space คือ { (1, 2, 3), (0, 1, 0), (0, 0, 1) } โดยเวคเตอร์ (2, 1, -2) เกิดจากการประกอบกันของ 3 เวคเตอร์แรก

3. จัดเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$ เป็นรูปแมตริกซ์ แล้วแปลงรูปโดยอาศัยอาศัย Elementary Column Operation

$$\begin{bmatrix}1&1&5\\1&2&3\\2&5&4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-2\\2&3&-6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&3&0\end{bmatrix}$$

แสดงว่าเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$ ไม่เป็น Basis ของ Space ระบบ 3 มิติ

หรือทำได้อีกวิธีหนึ่งโดยการตัดเวคเตอร์ที่ไม่จำเป็นทิ้งเสีย โดยอาศัยความรู้จากตัวอย่าง 4.17 ได้ดังนี้

1. { (1, 1, 1), (1, 1, -5) } ไม่เป็น Basis ของ Space 3 มิติ แต่เป็น Basis ของ Subspace ของระบบ 3 มิติ

---

[1] ขอให้สังเกตว่าทุก Basis สามารถจัดให้เป็น Natural Basis ได้เสมอ หรือนัยหนึ่งทุก Vector Space จะต้องมี Natural Basis

2. { (1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2) } ไม่เป็น Basis ของ Space 3 มิติเนื่อง-จากมีเวคเตอร์มากเกินกว่า 3 เวคเตอร์

การพิจารณาว่าเวคเตอร์ใดบ้างประกอบกันเป็น Basis ของ Space 3 มิติ ให้กระทำดังนี้

ก. เวคเตอร์ (1, 2, 3) และ (1, 0, -1) เป็นอิสระต่อกันทั้งนี้เพราะเวคเตอร์ (1, 0, -1) มิได้เกิดจากการยืดหดของเวคเตอร์ (1, 2, 3)

ข. เวคเตอร์ (1, 2, 3), (1, 0, -1) และ (3, -1, 0) เป็นอิสระต่อกันทั้งนี้เพราะเวคเตอร์ที่ 3 มิได้เกิดจากการประกอบกันของ 2 เวคเตอร์แรก

ค. เวคเตอร์ (1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2) ไม่เป็นอิสระต่อกันทั้งนี้เพราะเวคเตอร์ที่ 4 เกิดจากการประกอบกันของ 3 เวคเตอร์แรก กล่าวคือ

$$(2, 1, -2) = \frac{3}{10}(1, 2, 3) + \frac{29}{10}(1, 0, -1) + \left(-\frac{2}{5}\right)(3, -1, 0)$$

ตัดเวคเตอร์ (2, 1, -2) ออกดังนั้นจึงเหลือ { (1, 2, 3), (1, 0, -1), (1, 0, -1) }[1] เป็นเซทของ Basis ของ Space 3 มิติ

3. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ ไม่เป็น Basis ของ Space 3 มิติ พิจารณาดังนี้

ก. เวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ เป็นอิสระต่อกันเพราะเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ มิได้เกิดจากเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ข. เวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน ทั้งนี้เพราะเวค-เตอร์ที่ 3 เกิดจากการประกอบกันของ 2 เวคเตอร์แรกกล่าวคือ

---

[1] เป็น Basis คนละชุดกับที่ได้โดยวิธีแรก ซึ่งอาศัย Elementary Row Operation แต่สามารถแปลงรูปให้เป็น Natural Basis ได้เช่นเดียวกัน

$$\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$$

ตัดเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$ ออกดังนั้น $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}$ จึงเป็น Basis แต่มิได้เป็น Basis ของ Space 3 มิติ หากแต่เป็น Basis ของ Subspace

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่าเวคเตอร์ในตอน 1 และ 3 ไม่เป็น Basis ของ Space ในระบบ 3 มิติ แต่เป็น Basis ของ Subspace ซึ่งมี 2 มิติ

อาจจะเริ่มสงสัยว่า Vector Space และ Subspace เกี่ยวเนื่องกันอย่างไร ? มีความสำคัญอย่างไร ?

Subspace คืออนุเซท (Nonempty Subset) ของ Vector Space และมีคุณสมบัติของ Vector Space ครบถ้วนทุกประการ

ดังนั้น Subspace จึงหมายถึงส่วนหนึ่งของ Vector Space เช่น Vector Space ในระบบ 3 มิติ Subspace ก็คือระนาบ -xy ระนาบ -yz ระนาบ -xz หรือระนาบใด ๆ ที่ผ่านจุดกำเนิด (?) ตลอดจนเส้นตรงที่พุ่งผ่านจุดกำเนิด (?) Subspace จะมี Basis และ Dimension ของมัน.อง ซึ่งถ้านักศึกษามีความเข้าใจในเรื่อง Basis และ Dimension ดีพอก็ย่อมเข้าใจได้ว่า Subspace เกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์ ในเซทที่เป็น Basis ของมันนั่นเอง อนึ่ง ถ้า Basis ของ Subspace ได้รับเวคเตอร์เพิ่มเข้ามาจนครบจำนวนเวคเตอร์ในเซทที่สามารถเป็น Basis ของ Vector Space ได้ Basis นั้นก็จะกลายไปเป็น Basis ของ Vector Space

ทฤษฎี 4.8 ให้ $\mathscr{S}$ เป็น Non-Empty Subset ของ $\mathscr{V}$ เซทของเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์ใน $\mathscr{S}$ จะเป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 4.19 จงหา Basis และ Dimension ของ Subspace ที่ Span โดยเวคเตอร์ต่อไปนี้

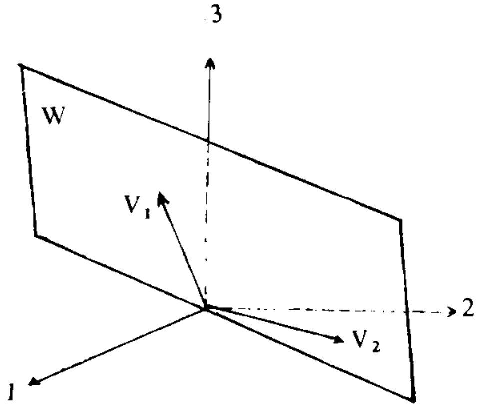
$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}2\\8\\0\end{bmatrix}$$

วิธีทำ จัดเวคเตอร์เป็นรูปแมตริกซ์แล้วแปลงรูปโดยอาศัย Elementary Column Operation

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น Basis ของ Subspace คือ $\mathscr{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ และ Dimension ของ Subspace เท่ากับ 2

จะเห็นได้ว่า Subspace นี้ก็คือระนาบที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าระนาบนี้คือรูปทรง 2 มิติ (มีเพียงส่วนกว้างและส่วนยาว แต่ไม่มีส่วนลึก) ดังภาพ



ภาพที่ Subspace ของ Space 3 มิติ

Subspace W เป็นระนาบที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ใน Basis V_1, V_2 เป็นระนาบที่พุ่งผ่านจุดกำเหนิดลาดเฉียงไปตามสภาพของ V_1 และ V_2 เวคเตอร์ทั้งหลายที่เกิดจากการประกอบกันของ V_1 และ V_2 จะประสานกันเป็นระนาบ W ซึ่งเป็น Subspace ของ Space 3 มิติ

ตัวอย่าง 4.20 ให้ W เป็น Subspace ของ Vector Space $\mathcal{V}$ ระบบ 4 มิติซึ่ง Span โดยเวคเตอร์ (1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4) และ (3, 8, -3, -5)

(1) จงหา Basis และ Dimension ของ W

(2) จงขยาย Basis ของ W จนกลายเป็น Basis ของ $\mathcal{V}$

วิธีทำ จัดเวคเตอร์ (1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4) และ (3, 8, -3, -5) เป็นรูปแมตริกซ์แล้วแปลงรูปให้เป็น Echelon Matrix โดยอาศัย Elementary Row Operation

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

(1) Basis ของ W คือ { (1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2) } และ dim. W = 2[1]

(2) เลือกเวคเตอร์อิสระมา 2 เวคเตอร์โดยเวคเตอร์ทั้งสองนั้นต้องเป็นอิสระต่อกันกับเวคเตอร์ (1, -2, 5, -3) และ (0, 7, -9, 2) วิธีที่ง่ายที่สุดควรเลือกใช้ Elementary Vector ในที่นี้เลือกใช้เวคเตอร์ (0, 0, 1, 0) และ (0, 0, 0, 1)

ดังนั้น { (1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) } เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ ที่เกิดจากการขยาย Basis ของ Subspace โดยการแทนที่เวคเตอร์อิสระเข้าไปจนครบกับจำนวนเวคเตอร์ที่สามารถเป็น Basis ของ Vector Space ได้

จากตัวอย่างนี้เรามีทฤษฎีหนึ่งเรียกว่า Steinitz Replacement Theorem ที่ยืนยันให้เห็นว่าเราสามารถขยาย Basis ชุดเดิม (ของ Subspace) ให้เป็น Basis ของ Vector Space ได้ และเราสามารถเปลี่ยน Basis ของ Vector Space เป็นชุดใหม่ได้โดยนำเวคเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันแทนที่ลงใน Basis ชุดเดิม ดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.9 ให้ $V_1, V_2, \ldots, V_k$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ และ $W_1, W_2, \ldots, W_p$ เป็นเวคเตอร์ชุดหนึ่งใน $\mathcal{V}$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ($p \leq k$) เราสามารถเลือกเวคเตอร์บางส่วนจาก

---

[1] dim. W ย่อมาจาก dimension of W dim. W = 2 หมายความว่า W มี 2 มิติ

$\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ มา k - p เวคเตอร์คือ $v_{i_{p+1}}, v_{i_{p+2}}, \ldots, v_{i_k}$ เพื่อประกอบเข้ากับเซท $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ให้เป็น Basis ชุดใหม่ของ $\mathscr{V}$

นั่นคือ $w_1, w_2, \ldots, w_p, v_{i_{p+1}}, v_{i_{p+2}}, \ldots, v_{i_k}$ เป็น Basis ชุดใหม่ที่ต้องการ

พิสูจน์ $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ Span $\mathscr{V}$

ดังนั้น $\mathscr{S}' = \{ w_1, v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ Span $\mathscr{V}$ ด้วยแต่ไม่เป็นอิสระต่อกัน (Linearly Dependent) ซึ่งแสดงว่าจะต้องมีเวคเตอร์หนึ่งเวคเตอร์ใดใน $\mathscr{S}'$ เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในลำดับก่อน สมมุติว่าเวคเตอร์นั้นคือ v_i ดังนั้นเราจึงสามารถตัดเวคเตอร์ v_i ออกจาก $\mathscr{S}'$

ดังนั้น $\mathscr{S}'' = \{ w_1, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$

ในทำนองเดียวกัน

$\mathscr{S}''' = \{ w_1, w_2, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \}$ Span $\mathscr{V}$ แต่ไม่เป็นอิสระต่อกัน สมมุติว่าเวคเตอร์ v_{i+1} เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ในลำดับก่อน เราจึงตัดเวคเตอร์ v_{i+1} ออกจากเซท $\mathscr{S}'''$

$\mathscr{S}^{IV} = \{ w_1, w_2, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+2}, \ldots, v_k \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$

ดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะพบว่า $\{ w_1, w_2, \ldots, w_p, v_{i_{p+1}}, v_{i_{p+1}}, \ldots, v_{i_k} \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$

หมายเหตุ $v_{i_{p+1}}, \ldots, v_{i_k}$ หมายถึงเวคเตอร์ใด ๆ ในเซท $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ ที่ถูกเลือกให้เข้ามา รวมกับเซท $\{ w_1, w_2, \ldots, w_p \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$

ตัวอย่าง 4.21 ให้ $\mathscr{W}$ เป็น Subspace ของ $\mathscr{V}$ ซึ่งเป็น Vector Space ระบบ n มิติ จงพิสูจน์ว่า dim. $\mathscr{W} \leqslant n$ และถ้า dim. $\mathscr{W} = n$ แล้ว $\mathscr{W} = \mathscr{V}$ (นั่นคือ ถ้า Subspace $\mathscr{W}$ มีจำนวนมิติเท่ากับจำนวนมิติของ $\mathscr{V}$ แล้ว $\mathscr{W}$ ก็คือ Space เดียวกันกับ $\mathscr{V}$)

วิธีทำ

เพราะว่า $\mathscr{V}$ เป็น Space n มิติ

ดังนั้นเซทของเวคเตอร์ตั้งแต่ n + 1 เวคเตอร์ขึ้นไปจะไม่เป็นอิสระต่อกัน

$\mathscr{W}$ เป็น Subspace ของ Vector Space $\mathscr{V}$ ($\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$)

ดังนั้น Basis ของ $\mathscr{W}$ จึงประกอบด้วยเวคเตอร์ได้ไม่เกิน n เวคเตอร์

นั่นคือ dim. $\mathscr{W} \leqslant n$

สมมุติว่า $\{ w_1, w_2, \ldots, w_n \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{W}$

ดังนั้น dim. $\mathscr{W} = n$

จึงเห็นได้ว่า { $w_1, w_2, \ldots, w_n$ } เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ด้วย
ดังนั้น ถ้า dim. $\mathscr{W}$= n แล้ว $\mathscr{W} = \mathscr{V}$

ข้อสังเกต อย่าลืมว่า Vector Space ใด ๆ ที่ไม่ใช่ Zero Space ($\mathscr{V} \neq \mathscr{Z}$) จะมี Basis อยู่มากมายหลายชุดจนนับไม่ถ้วน (Infinitely Many Bases) ดังนั้น ถ้า $\mathscr{V}$ เป็น Space n มิติ แล้ว Basis ชุดใดที่ประกอบไปด้วยเวคเตอร์ n เวคเตอร์ ก็จะเป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ด้วยเสมอ

ตัวอย่าง 4.22 $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space ของแมตริกซ์ขนาด $m \times n$[1] ให้ E_{ij} เป็นแมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็น 1 และ 0 เท่านั้น โดย 1 ปรากฏอยู่ในตำแหน่งที่ ij และ 0 ปรากฏอยู่ในตำแหน่งอื่น ๆ จงแสดงให้เห็นว่า { $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$ } เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ dim. $\mathscr{V}$ = mn

วิธีทำ

(1) ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ใน $\mathscr{V}$

ดังนั้น $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ ซึ่งแสดงว่า { $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$ } Span $\mathscr{V}$

(2) ให้ การประกอบกันของแมตริกซ์ E_{ij} ; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ มีค่าเท่ากับ 0_{mn} $\sum\limits_{i}^{m} \sum\limits_{j}^{n} \alpha_{ij}E_{ij} = 0_{ij}$; α_{ij} เป็นตัวคงค่าใด ๆ ใน Field

จะเห็นได้ว่า $\alpha_{ij} = 0$ ในทุกค่าของ i, j ; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$
ดังนั้นแมตริกซ์ E_{ij} จึงเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน
จากผลการพิสูจน์ในทั้งสองตอนทำให้สรุปได้ว่า { $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$ } เป็น Basis (Natural Basis) ของ $\mathscr{V}$

จะเห็นได้ว่า Basis ของ $\mathscr{V}$ คือ { $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}$ } ประกอบด้วยสมาชิกทั้งสิ้น mn แมตริกซ์ ดังนั้น dim. $\mathscr{V}$ = mn

ตัวอย่างเช่น ให้ $\mathscr{U}$ เป็น Vector Space ของแมตริกซ์ขนาด 2×3
ดังนั้น { $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{23}$ } เป็น Basis ของ $\mathscr{U}$

---

1 แมตริกซ์นับได้ว่าเป็นเวคเตอร์เช่นกันเรียกว่า Pseudo Vector

โดยที่ $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $, E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $, E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า $\dim. \mathscr{U} = 6 = 2 \times 3$

4.3.3 Row Space, Column Space และ Rank ของแมตริกซ์

ตัวอย่างข้างต้นจะชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างเวคเตอร์และแมตริกซ์ดีขึ้น และได้เคยกล่าวแล้วมาแต่ต้นว่า แมตริกซ์นั้นเกิดจากการรวมกันของเวคเตอร์ สดมภ์หนึ่งของแมตริกซ์คือ Column Vector หรือแถวหนึ่งของแมตริกซ์คือ Row Vector นักศึกษาอาจเริ่มเกิดความสับสนว่าถ้าพบแมตริกซ์ใด ๆ จะทราบได้อย่างไรว่าเกิดจากการรวมตัวของ Row Vector หรือ Column Vector และถ้าแมตริกซ์นั้นเกิดจากการรวมตัวของ Column Vector แต่เรากลับใช้ Elementary Row Operation เพื่อหา Basis จะผิดพลาดหรือไม่ การจะตอบคำถามดังกล่าวได้ และเพื่อให้เห็นภาพที่กระจ่างชัดขึ้น จำเป็นที่ต้องทำความรู้จักกับ Row Space และ Column Space ของแมตริกซ์ รวมถึง Coordinate Vector และ Rank ของแมตริกซ์เสียก่อน

นิยาม 4.8 ให้ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ขนาด $m \times n$ นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = [\, C_1, C_2, \dots, C_n \,]$$

จะเห็นได้ว่า $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})$, $R_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}) \dots R_m = (a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn})$ เป็นเวคเตอร์ใน Space ระบบ n มิติ Subspace[1] ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $R_1, R_2, \dots, R_m$ เรียกว่า Row Space ของ A

---

[1] โดยปกติ Subspace อาจหมายถึงตัว Vector Space เองหรือส่วนหนึ่งของ Vector Space

ในทำนองเดียวกัน

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

เป็นเวคเตอร์ใน Space ระบบ m มิติ Subspace ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ เรียกว่า Column Space ของ A

จากความรู้ที่ผ่านมาจะพบว่า เราสามารถใช้ Elementary Operation เป็นเครื่องมือที่ใช้หา Basis ของ Row Space และของ Column Space ได้ ทั้งนี้เพราะ Elementary Operation ทำให้ได้ Equivalent Matrix (โดยปกติจะทำให้เป็น Echelon Matrix จึงจะทำให้ทราบ Basis ของ Row Space หรือ Column Space ของแมตริกซ์ได้ นอกจากนี้เรายังทราบต่อไปด้วยว่า Vector Space ต่าง ๆ จะเป็น Space เดียวกันได้ถ้า Reduced Echelon Matrix ของมันมี Non-zero Vector เดียวกันหรือ Equivalent กับ Echelon Matrix[2] เดียวกัน

ตัวอย่าง 4.23 Space $\mathscr{U}$ Span โดยเวคเตอร์

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad U_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

และ Space $\mathscr{V}$ Span โดยเวคเตอร์ $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$ และ $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$

จงแสดงให้เห็นว่า Space ทั้งสองเป็น Space เดียวกัน

วิธีทำ จัดเวคเตอร์ในทั้งสอง Space เป็นรูปแมตริกซ์ แล้วแปลงรูปให้เป็น Echelon Matrix โดยใช้ Elementary Column Operation

---

2 โดยทั่วไปเราเรียก Echelon Matrix ว่า Cannonical Form จะเป็น Row Cannonical Form หรือ Column Cannonical Form ก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่าเราจะพูดถึง Row Space หรือ Column Space

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \\ 3 & -8 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -4 & -5 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -4 & 3 \\ 11 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -4 & -3 \\ 11 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

เห็นได้ว่า Nonzero Vector ของ $\mathscr{U}$ และ $\mathscr{V}$ เป็นเวคเตอร์เดียวกันแสดงว่า $\mathscr{U}$ และ $\mathscr{V}$ มี Basis เดียวกัน หรือนัยหนึ่ง $\mathscr{U}$ และ $\mathscr{V}$ เป็น Space เดียวกัน ($\mathscr{U} = \mathscr{V}$)

นิยาม 4.9 ให้ A เป็นแมตริกซ์ขนาด $m \times n$ Row Space ของ A คือ Subspace ของ Vector Space ในระบบ n มิติซึ่ง Span โดยแถวต่าง ๆ ของ A และ Column Space ของ A คือ Subspace ของ Vector Space ในระบบ m มิติซึ่ง Span โดยสดมภ์ต่าง ๆ ของ A Dimension ของ Row Space และของ Column Space เรียกว่า Row Rank และ Column Rank ของ A ตามลำดับ

จากนิยามพอจะอธิบายเพิ่มเติมได้ดังนี้ โดยปกติแมตริกซ์หนึ่ง ๆ จะเกิดจากการรวมกันของเวคเตอร์ เช่น แมตริกซ์ขนาด 2×3 จะเกิดจากการรวมกันของ Row Vector 2 เวคเตอร์ จาก Vector Space ในระบบ 3 มิติ หรือเกิดจากการรวมกันของ Column Vector 3 เวคเตอร์จาก Vector Space ในระบบ 2 มิติ ดังนั้น Row Space ของแมตริกซ์จึงเป็น Subspace ของ Vector Space ในระบบ 3 มิติที่ Span ด้วย Row Vector ทั้งสองนั้น และถ้าเวคเตอร์คู่ดังกล่าวเป็นอิสระต่อกันก็หมายความว่าเวคเตอร์คู่นั้นคือ Basis ของ Subspace ของ Vector Space ในระบบ 3 มิติดังกล่าว และเนื่องจากจำนวนที่บ่งบอก Dimension ของ Subspace (จำนวนเวคเตอร์ในเซทที่เป็น Basis) เรียกว่า Row Rank ของแมตริกซ์ ดังนั้น Dimension ของ Subspace ที่เท่ากับ 2 นี้จึงเป็น Row Rank ของแมตริกซ์ และโดยนัยเดียวกัน Dimension ของ Column Space เรียกว่า Column Rank ของแมตริกซ์ เมื่อเข้าใจดังนี้แล้วปัญหาที่ว่าเมื่อพบแมตริกซ์แล้วจะแปลงรูปอย่างไร ? จะใช้ Elementary Row Operation หรือ Elementary Column Operation ก็จะหมดไป ทั้งนี้เพราะเราสามารถใช้วิธีใดก็ได้แต่ผลที่ได้รับจะแตกต่างกันและอภิปรายผลต่างกัน

ตัวอย่าง 4.24 จงหา Rank ของแมตริกซ์ต่อไปนี้

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

ก. แปลงรูปโดยใช้ Elementary Row Operation

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Row Rank ของ A = 3 แสดงว่า Basis ของ Subspace ของ Vector Space ในระบบ 3 มิติ ซึ่งประกอบกันเป็น Row Space ของแมตริกซ์ A คือ $\{(1, 2, -3), (0, 1, -2), (0, 0, 1)\}$

ข. แปลงรูปโดยใช้ Elementary Column Operation

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Column Rank ของ A = 3 แสดงว่า Basis ของ Subspace ของ Vector Space ในระบบ 4 มิติ ซึ่งประกอบกันเป็น Column Space ของแมตริกซ์ A คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\\7\end{bmatrix}\right\}$$

(2)

$$B = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 4 & 3\\2 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

ก. แปลงรูปโดยใช้ Elementary Row Operation

$$B = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 4 & 3\\2 & 3 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & -3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

แสดงว่า Row Rank ของ B = 2 Basis ของ Subspace ของ Vector Space ในระบบ 3 มิติ ที่ประกอบกันเป็น Row Space ของ B คือ { (1, 3, 1), (0, 1, 2) }

ข. แปลงรูปโดยใช้ Elementary Column Operation

$$B = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\1 & 4 & 3\\2 & 3 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 2\\2 & -3 & -6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

แสดงว่า Column Rank ของ B = 2 Basis ของ Subspace ของ Vector Space ในระบบ 3 มิติที่ประกอบกันเป็น Column Space ของ B คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}\right\}$$

จากตัวอย่างนี้นักศึกษาจะสังเกตเห็นได้ว่า Row Rank และ Column Rank ของแมตริกซ์มีค่าเท่ากัน ดังนั้นการหา Rank ของแมตริกซ์จึงอาจใช้วิธีใดก็ได้และใช้คำรวมว่า "Rank ของแมตริกซ์" เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ r(·)

ทฤษฎี 4.10 Row Rank และ Column Rank ของแมตริกซ์ A มีค่าเท่ากันเสมอ ทฤษฎีนี้ยืนยันให้เห็นว่า Basis ของ Row Space หรือ Column Space จะประกอบด้วยเวคเตอร์ในจำนวนที่เท่ากันแต่เป็น Basis ของคนละ Subspace ถ้าแมตริกซ์นั้นเป็น Square Matrix Basis ของ Row Space และ Column Space นอกจากจะประกอบด้วยจำนวนเวคเตอร์เท่ากันแล้ว ยังเป็น Basis ของ Subspace มิติเดียวกันด้วย แต่อาจเป็นคนละ Subspace ยกเว้นเมื่อแมตริกซ์นั้นเป็น Symmetric Matrix ที่ทั้ง Row Space และ Column Space จะเกิดจาก Basis ชุดเดียวกัน

4.3.4 การเปลี่ยน Basis (Change of Basis)

เมื่อศึกษาถึงตอนนี้แล้ว อย่างน้อยที่สุดก็ทำให้เราเข้าใจธรรมชาติของแมตริกซ์แบบต่าง ๆ ได้บ้างแล้ว เช่น Symmetric Matrix เกิดจากการรวมตัวกันของเวคเตอร์ที่ Row Vector และ Column Vector เป็นเวคเตอร์ชุดเดียวกัน Singular Matrix เกิดจากการรวมตัวกันของ Dependent Vector Nonsingular Matrix เกิดจากการรวมตัวกันของ Independent Vector Identity Matrix เกิดจากการรวมตัวกันของ Natural Basis ของ Vector Space เป็นต้น

บ่อยครั้งที่เรามีความจำเป็นที่จะต้องทราบว่าเซทของแมตริกซ์หนึ่ง ๆ นั้นเป็นอิสระต่อกันหรือไม่ ? จะเปลี่ยนเวคเตอร์ซึ่งอ้างอิง Basis หนึ่งไปสู่เวคเตอร์ซึ่งอ้างอิงอีก Basis หนึ่งได้อย่างไร ? เวคเตอร์ใหม่นั้นมีรูปร่างลักษณะเหมือนเวคเตอร์เดิมหรือไม่ ? มีความแตกต่างกันอย่าง ?

ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาของการเปลี่ยน Basis (Change of Basis) ซึ่งมีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับ Linear Transformation อยู่อย่างลึกซึ้ง ในชั้นต้นนี้จำเป็นต้องทำความรู้จักกับ Coordinate Vector เสียก่อน

นิยาม 4.10 ให้ $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ เป็น Natural Basis ของ $\mathscr{V}$ ซึ่งเป็น Vector Space ที่มี n มิติ V เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ของ $\mathscr{V}$ ดังนั้น

$$V = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \ldots + \alpha_n E_n \; ; \; \alpha_i \in \mathscr{F}$$

และเนื่องจาก $E_1, E_2, \ldots, E_n$ เป็นอิสระต่อกัน และการเสนอเวคเตอร์ใด ๆ ในรูปการประกอบกันของ $E_1, E_2, \ldots E_n$ นั้นสามารถเสนอได้เพียงรูปเดียวเท่านั้น[1] ดังนั้นตัวคงที่ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ จึงเกิดขึ้นได้ (หรือหาได้) เพราะความสัมพันธ์ระหว่างเวคเตอร์ V และ Basis E เราเรียก $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ว่า Coordinate Vector ของ V ที่อ้างอิง Basis E = $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ ใช้สัญญลักษณ์ $(V)_E$

นั่นคือ $(V)_E = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ เมื่อ V และ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ เป็น Row Vector

หรือ

$$(V)_E = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$ เมื่อ V และ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ เป็น column Vector

ตัวอย่าง 4.25 ใน Space 3 มิติ จงหา Coordinate Vector ของเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ โดยที่ Basis ของ Space นี้คือ

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

วิธีทำ

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathscr{V}$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แก้สมการ

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3 \end{aligned}$$

---

[1] ดูตัวอย่างที่ 4.27

ได้ $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$

ดังนั้น Coordinate Vector ของ $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ที่อ้างอิง B $= \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

คือ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ หรือ $(V)_B = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

หมายเหตุ Coordinate และ Coordinate Vector มีความหมายแตกต่างกันเล็กน้อย Coordinate คือจุดที่แสดงจุดปลายของเวคเตอร์ สมาชิกหนึ่ง ๆ ของ Coordinate เป็นสมาชิกของ Field $\mathscr{F}$ ส่วน Coordinate Vector เป็นเวคเตอร์ใน Vector Space $\mathscr{F}^n$ ($\mathscr{F}^n$ คือ Space n มิติ อาจเป็น Space ใหม่หรือ Space เดียวกันกับ $\mathscr{V}$ ก็ได้ แต่เนื่องจากเพื่อมุ่งให้เห็นความแตกต่าง เราจึงใช้สัญลักษณ์แทน Vector Space คนละตัว) โดยต้องมี Basis อ้างอิง เราจึงต้องใช้คำว่า "ที่อ้างอิง Basis..." กำกับอยู่เสมอ

ขอให้เข้าใจเสมอว่าโดยปตกิเราจะใช้ Natural Basis เป็นหลักในการวาดเส้นแสดงเวคเตอร์อยู่แล้ว เช่นเวคเตอร์ $V = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ เราจะ plot จุดหลายของ $V = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ โดยนับระยะทางจากแกนนอน (แกน x) 1 หน่วย และห่างจากแกนตั้ง (แกน y) 3 หน่วย จะเห็นว่าเราใช้ Natural Basis[1] เป็นแนวเทียบ กล่าวคือ V เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ โดย $V = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้นทุกเวคเตอร์จึงมี Basis อ้างอิงเป็น Natural Basis เสมอ ถ้าไม่ระบุให้เป็นอย่างอื่น

---

[1] Natural Basis คือ Basis ที่เวคเตอร์หนึ่ง ๆ วางอยู่บนแกน Eucledian Coordinate โดยมีระยะห่างจากจุดกำเหนิด 1 หน่วย หรือจะกล่าวว่า Natural Basis คือแกน Coordinate ของ Space นั้น ๆ ก็ไม่ผิด

ในตัวอย่างที่ผ่านมาเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ต่างก็เป็นเวคเตอร์ที่มี Natural Basis เป็น Basis อ้างอิง ซึ่งถ้าจะเขียนอย่างถูกต้อง เป็นทางการแล้วจะต้องเขียนทุกเวคเตอร์โดยมี Basis อ้างอิงกำกับไว้ด้วยเสมอคือ $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ เขียนเป็น $\left[\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right]_E$

$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ เขียนเป็น $\left[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]_E$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ เขียนเป็น $\left[\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right]_E$ และ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ เขียนเป็น $\left[\begin{bmatrix}0\\ \\1\end{bmatrix}\right]_E$

เมื่อกำหนดให้หาเวคเตอร์ที่มี Basis อ้างอิงเป็นอย่างอื่น (ไม่ใช่ Natural Basis) เวคเตอร์เดิมที่อ้างอิง Natural Basis จึงเปลี่ยนไปเป็น Coordinate Vector ของเวคเตอร์นั้น ดังนั้น $V \in \mathscr{V}$ (ซึ่งก็คือ V_E) จะเปลี่ยนไปเป็น $(V)_B$ โดย $(V)_B \in \mathscr{F}^n_B$ เป็น Basis อ้างอิง $\mathscr{F}^n$ เป็น Vector Space ของ Coordinate Vector

จากตัวอย่าง 4.25 โจทย์ต้องการให้หา Coordinate Vector ของ $V = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ที่อ้าง-อิง Basis B (นั่นก็คือต้องการให้เปลี่ยนเวคเตอร์ $V = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ที่มี E เป็น Basis อ้างอิงไปเป็นเวคเตอร์ใหม่ที่มี Basis B เป็น Basis อ้างอิง)

ปรากฏว่า $(V)_B = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ จึงมีปัญหาว่า V และ $(V)_B$ คือเวคเตอร์เดียวกันหรือไม่?

ต่อข้อสงสัยนี้เราสามารถตอบได้ทันทีว่า V และ $(V)_B$ คือเวคเตอร์เดียวกัน แต่การที่มีสมาชิกภายในต่างกันก็เนื่องด้วยมี Basis อ้างอิงคนละชุด

จะขอยกตัวอย่างเวคเตอร์ใน Space 2 มิติ พร้อมทั้งวาดภาพแสดงให้เห็นดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.26 จงหา Coordinate Vector ของ $V = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ที่อ้างอิง Basis $T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่า V และ $(V)_T$ คือเวคเตอร์เดียวกัน

วิธีทำ เนื่องจาก $T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็น Basis (ที่ไม่ใช่ Natural Basis) ของ $\mathcal{V}$ และ $V \in \mathcal{V}$

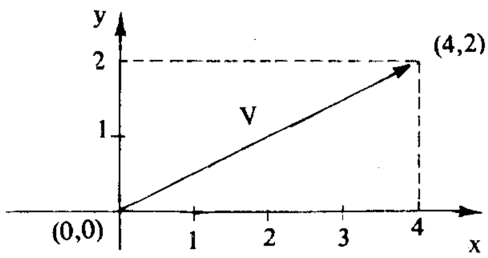
ดังนั้น $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$

นั่นคือ $(V)_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

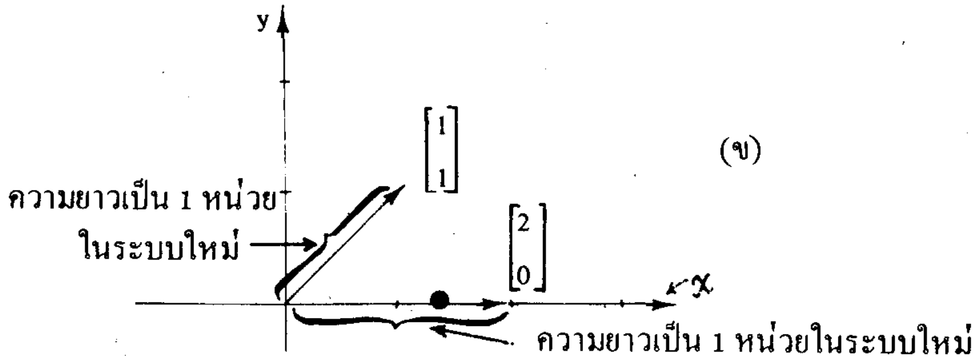
พิจารณาภาพต่อไปนี้

เวคเตอร์ $V = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ มี Basis อ้างอิงเป็น Natural Basis สามารถเสนอเวคเตอร์ V ได้ดังภาพ



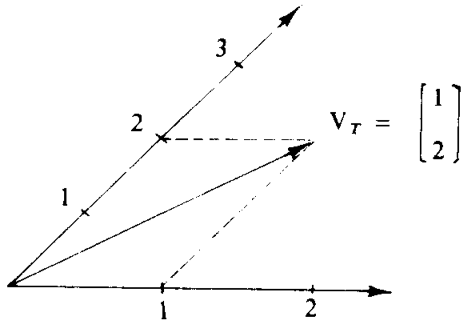
(ก)

และเนื่องจากเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ มี Basis อ้างอิงเป็น Natural Basis เช่นเดียวกันดังนั้นจึงเสนอเวคเตอร์ทั้งสองได้ดังภาพ (ข)



(ข)

$(V)_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวคเตอร์ใหม่ที่มี Basis อ้างอิงเป็น $T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ดังนั้นเวคเตอร์ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ จึงทำหน้าที่เป็นแกน Coordinate ของ $(V)_T$ เราจึงเสนอเวคเตอร์ $(V)_T$ ได้ดังภาพ



(ค)

เมื่อเปรียบเทียบรูป (ก) และ (ค) จะพบว่า V และ $(V)_T$ เป็นเวคเตอร์เดียวกัน การที่มีสมาชิก (Component) ต่างกันก็เนื่องด้วยมี Basis อ้างอิงคนละชุด (ขอให้สังเกตแกน Coordinate ซึ่งแสดงฐานที่เกิดของเวคเตอร์) เรื่องนี้พอจะเทียบได้กับการหมุนแกน (Rotation of Axis) ในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์

เนื่องจากความคุ้นเคยกับ Natiral Basis ซึ่งเป็นเซทของเวคเตอร์ที่ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกันและต่างก็มีความยาวเป็น 1 หน่วย (เป็น Unit Vector) เมื่อพบ Basis อ้างอิงที่มิได้ตั้งฉากซึ่งกันและกันและมิได้มีความยาว (Length หรือ Norm) เป็น 1 จึงอาจสับสนได้ เกี่ยวกับเรื่องนี้เรามี Basis อีกรูปหนึ่งซึ่งแต่ละเวคเตอร์ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกันและมีความยาวเป็น 1 (อาจเป็นคนละชุดกับ Natural Basis) เรียกว่า Orthonormal Basis ซึ่งจะกล่าวถึงในตอนต่อไป

ตัวอย่าง 4.27 เมื่อ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ ซึ่งเป็น Space n มิติ จงพิสูจน์ว่าเวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathcal{V}$ สามารถเสนอ (เกิดขึ้น) ได้ในรูปของการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์ที่เป็น Basis นั้นได้เพียงรูปหนึ่งรูปเดียวเท่านั้น (Unique)

วิธีทำ ให้ V เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Space

ดังนั้น $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n \; ; \; \alpha_i \in \mathcal{F}$ ....(1)

สมมุติว่าเราสามารถเสนอเวคเตอร์ V ในรูปการประกอบกันของ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ได้อีกชุดหนึ่งคือ

$$V = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \ldots + \beta_n V_n ; \beta_i \in \mathscr{F} \qquad \ldots\ldots..(2)$$

แต่เนื่องจากเวคเตอร์ V ที่เสนอในรูป (1) และในรูป (2) ก็คือเวคเตอร์ V เดียวกัน

ดังนั้น $V - V = \mathbf{0}$; $\mathbf{0} \in \mathscr{V}$ ซึ่ง $\mathbf{0} \in \mathscr{V}$ แสดงว่า $\mathbf{0} = 0 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 + \ldots + 0 \cdot V_n$

ดังนั้น $\mathbf{0} = V - V = (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n) - (\beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \ldots + \beta_n V_n)$

$= (\alpha_1 - \beta_1)V_1 + (\alpha_2 - \beta_2)V_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)V_n$

นั่นคือ $(\alpha_i - \beta_i) = 0; i = 1, 2, \ldots, n$

หรือ $\alpha_i = \beta_i ; i = 1, 2, \ldots, n$

จะเห็นได้ว่าการที่เราสมมุติให้ V สามารถเสนอออกมาในรูปการประกอบกันของ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ได้อีกรูปหนึ่งนั้น ผลการพิสูจน์ยืนยันให้เห็นว่า $\alpha_i = \beta_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ หรือนัยหนึ่ง Scalar ชุดใหม่นั้นก็คือ Scalar ชุดเดิม

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า การประกอบกันของเวคเตอร์ที่เป็น Basis หนึ่งครั้งจะให้กำเหนิดเวคเตอร์ใหม่ใน Space ได้เพียงหนึ่งเวคเตอร์เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.28 $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space ของโพลีโนเมียลที่มีดีกรีไม่เกิน 2 นั่นคือ

$$\mathscr{V} = \{ at^2 + bt + c ; a, b, c \in \mathscr{F} \}$$

ให้ $T = \{ V_1 = 1, V_2 = t - 1, V_3 = t^2 - 2t + 1 \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$

จงหา Coordinate Vector ของ $V = 2t^2 - 5t + 6$ ที่อ้างอิง Basis $T = \{ V_1, V_2, V_3 \}$

วิธีทำ

$T = \{ V_1 = 1, V_2 = t - 1, V_3 = t^2 - 2t + 1 \}$ เป็น Basis ของ $\hat{\mathscr{V}}$

ดังนั้น $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$

นั่นคือ

$$2t^2 - 5t + 6 = \alpha_1(1) + \alpha_2(t - 1) + \alpha_3(t^2 - 2t + 1)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 6$$

$$\alpha_2 - 2\alpha_3 = -5$$

$$\alpha_3 = 2$$

ดังนั้น $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 2$

นั่นคือ $V = 3V_1 - V_2 + 2V_3$

ดังนั้น $(V)_T = (3, -1, 2)$

นั่นคือ Coordinate Vector ของ V ที่อ้างอิง Basis $T = \{ V_1, V_2, V_3 \}$ คือ $(V)_T = (3,-1,2)$

จากตัวอย่างต่าง ๆ ที่ผ่านมาจะสังเกตได้ว่า เวคเตอร์หนึ่งของ Vector Space $\mathscr{V}$ จะประสานกับ Basis ของ $\mathscr{V}$ แล้วให้กำเหนิด Coordinate Vector ของเวคเตอร์นั้น ๆ ขึ้นมา 1 เวคเตอร์เสมอหรือนัยกลับกัน ถ้าทราบ Coordinate Vector ของเวคเตอร์ใด ๆ เราก็สามารถย้อนหาตัวเวคเตอร์นั้น (ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathscr{V}$) โดยผ่านการประสานงานกับ Basis ของ $\mathscr{V}$ ได้เช่นกัน

ดังนั้น Basis ของ $\mathscr{V}$ จึงเป็นสื่อกลางให้เกิด One-to-One Correspondence ระหว่างเวคเตอร์ใน Space $\mathscr{V}$ และ Coordinate Vector ใน $\mathscr{F}^n$ และยังทราบเพิ่มเติมอีกว่า Correspondence ดังกล่าวสอดคล้องกับ Closure Law for Addition และ Closure Law for Scalar Multiplication กล่าวคือ

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n \qquad (V)_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$W = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \ldots + \beta_n V_n \qquad (W)_B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

$$V + W = (\alpha_1 + \beta_1)V_1 + (\alpha_2 + \beta_2)V_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)V_n \qquad (V+W)_B = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

และ $kV = k\alpha_1 V_1 + k\alpha_2 V_2 + \ldots + k\alpha_n V_n \qquad k(V)_B = k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

จากความสัมพันธ์ในลักษณะดังกล่าวและคุณสมบัติทั้งสองประการนี้ เราจึงกล่าวได้ว่า Vector Space $\mathscr{V}$ และ $\mathscr{F}^n$ มีรูปแบบเดียวกัน (Isomorphic) สามารถนำวิธีการต่าง ๆ ในการดำเนินการมาใช้ร่วมกันได้ หรือนัยหนึ่งสามารถยืมรูปแบบและวิธีการตลอดจนการอภิปรายผลมาใช้ร่วมกัน หรือแทนกันได้ เราใช้สัญญลักษณ์ $\mathscr{V} \cong \mathscr{F}^n$ หรือ $\mathscr{V} \leftrightarrow \mathscr{F}^n$ แทนคำว่า " $\mathscr{V}$ และ $\mathscr{F}^n$ มีรูปแบบเดียวกัน " ($\mathscr{V}$ and $\mathscr{F}^n$ are isomorphic)

ทฤษฎี 4.11 ถ้า $\mathscr{V}$ เป็น Vector Space n มิติที่แต่ละ Component ของ $V \in \mathscr{V}$ ได้มาจาก $\mathscr{F}^n$ แล้ว $\mathscr{V}$ และ $\mathscr{F}^n$ จะมีรูปแบบเดียวกัน

จะขอเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีนี้ไปแต่จะอธิบายให้เข้าใจถึงความหมายของทฤษฎีและการนำไปใช้ประโยชน์ ก่อนอื่นขอให้ทำความเข้าใจในความหมายของคำว่า Isomorphic เสียก่อน iso = อย่างเดียวกัน, morphic = แบบหรือรูปแบบ หมายความว่า ถ้า $\mathscr{V}$ และ $\mathscr{F}^n$ มีรูปแบบเดียวกันแล้วเราสามารถจัดรูปแบบของสมาชิกของ $V \in \mathscr{V}$ เป็นรูปของ $F \in$ หรือจัดรูปของ $F \in \mathscr{F}^n$ เป็น $V \in \mathscr{V}$ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนก็คือ Isomorphism ระหว่าง Row Space และ Column Space ของแมตริกซ์ หรือระหว่าง Scalar และ Scalar Matrix เมื่อเป็นเช่นนี้ถ้าหากเรามีวิธีดำเนินการ (operate) ที่ใช้สำหรับ $\mathscr{V}$ เราก็สามารถเปลี่ยนรูปของ $F \in \mathscr{F}^n$ มาเป็นรูปของ $V \in \mathscr{V}$ แล้วอาศัยวิธีดำเนินการและวิธีอภิปรายผลของ $\mathscr{V}$ มา

อภิปรายและอนุมานสู่ $\mathscr{F}^n$ และในทำนองเดียวกันเราสามารถเปลี่ยนรูปจาก $v \in \mathscr{V}$ เป็น $F \in \mathscr{F}^n$ แล้วอาศัยวิธีดำเนินการและวิธีอภิปรายผลของ $\mathscr{F}^n$ มาใช้และสรุปหรืออนุมานสู่ $\mathscr{V}$ ได้

ตัวอย่าง 4.29 จงตรวจสอบดูว่าแมตริกซ์ต่อไปนี้เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

เนื่องจาก Basis ของ Vector Space ของแมตริกซ์ขนาด 2×2 คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสำหรับแมตริกซ์ A จะพบว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2$$

ดังนั้นโดยอาศัย Isomorphism จะพบว่า

$A \leftrightarrow (A)_E = (1, 1, 1, 2)$ (หรือจะใช้ $(A)_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ก็ได้)

ในทำนองเดียวกัน

$$B \leftrightarrow (B)_E = (4, 1, 1, 0)$$

$$C \leftrightarrow (C)_E = (3, -2, -2, 1)$$

$$D \leftrightarrow (D)_E = (1, 0, 1, 1)$$

จัด Coordinate Vector เป็นรูปแมตริกซ์แล้วแปลงรูปโดยอาศัย Elementary Row Operation

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $(A)_E, (B)_E, (C)_E, (D)_E$ เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า A, B, C, D เป็นอิสระต่อกัน

นิยาม 4.11 $E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ และ $F = \{ f_1, f_2, \ldots, f_n \}$ ต่างก็เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ ซึ่งเป็น Space n มิติ

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + + a_{2n}e_n \\ & \qquad \qquad \ldots\ldots(1) \\ f_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{n3} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นแมตริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่ง (Transpose) ของ Coefficient Matrix ของของระบบสมการ (1) จะเป็นแมตริกซ์ที่ทำหน้าที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F เราเรียกแมตริกซ์ P ว่า Transition Matrix หรือ Change of basis Matrix

และเนื่องจาก $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แมตริกซ์ P^{-1} จึงมีค่าปรากฏ P^{-1} จะเป็นแมตริกซ์ที่ทำหน้าที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E

ทฤษฎี 4.11 ให้ P เป็น Transition Matrix ที่เปลี่ยนเวคเตอร์จาก Basis เดิม (E) ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis ใหม่ (F)

ให้ v เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathcal{V}$ (นั่นคือ $v \in \mathcal{V}$) เราสามารถเปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ $P(V)_F = (V)_E$ และเปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ $(V)_F = P^{-1}(V)_E$

ตัวอย่าง 4.30 จงหา Coordinate Vector ของ $(2, 1, 5)^T$ ในระบบที่มี Basis อ้างอิงเป็น $f_1 = (1,0,1)^T$ $f_2 = (2, 1, 3)^T$, $f_3 = (2, -1, 2)^T$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 จาก Basis F = $\{ (1, 0, 1)^T, (2, 1, 3)^T, (2, -1, 2)^T \}$

ดังนั้น Coordinate Vector ของเวคเตอร์ (2, 1, 5) เมื่ออ้างอิง Basis F จะหาได้จาก

$$(2, 1, 5)^T = \alpha_1(1, 0, 1)^T + \alpha_2(2, 1, 3)^T + \alpha_3(2, -1, 2)^T$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 1$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 5$$

$$\alpha_1 = -8, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2$$

นั่นคือ $(2, 1, 5)^T = -8(1, 0, 1)^T + 3(2, 1, 3)^T + 2(2, -1, 2)^T$

ดังนั้น Coordinate Vector ของเวคเตอร์ $(2, 1, 5)^T$ เมื่ออ้างอิง Basis F คือ $(-8, 3, 2)^T$ หรือนัยหนึ่งเวคเตอร์ $(2, 1, 5)^T$ ซึ่งมี Natural Basis เป็น Basis อ้างอิง จะสามารถเสนอในรูปใหม่ได้เป็น $(-8, 3, 2)^T$ เมื่อใช้ F เป็น Basis อ้างอิง

วิธีที่ 2 อาศัย Transition Matrix และความรู้ตามทฤษฎี 4.11

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

P เป็นแมตริกซ์ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่มี E เป็น Basis อ้างอิงไปเป็นเวคเตอร์ที่มี F เป็น Basis อ้างอิงและ P^{-1} เป็นแมตริกซ์ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่มี F เป็น Basis อ้างอิงไปเป็นเวคเตอร์ที่มี E เป็น Basis อ้างอิง

จากทฤษฎี 4.11 $P(V)_F = (V)_E;\ P^{-1}(V)_E = (V)_F$

และ $V = (2, 1, 5)^T = 2(1, 0, 0)^T + 1(0, 1, 0)^T + 5(0, 0, 1)$

$$(V)_E = (2, 1, 5)^T$$

ดังนั้น Coordinate Vector ของเวคเตอร์ $(2, 1, 5)^T$ คือ

$$(V)_F = P^{-1}(V)_E = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$ เมื่ออ้างอิง Basis F

ตัวอย่าง 4.31 อาศัย Basis F ในตัวอย่าง 4.30 จงเปลี่ยนรูปของสมการของ Surface ต่อไปนี้ คือ $6x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 11x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$ ให้เป็นรูปที่อ้างอิง F

วิธีทำ

วิธีที่ 1 ให้ (x_1', x_2', x_3') เป็นจุด Coordinate ที่อ้างอิง Basis F

จาก $P(V)_F = (V)_E$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, (V)_F = (x_1', x_2', x_3')^T, (V)_E = (x_1, x_2, x_3)^T$$

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_1' + 2x_2' + 2x_3', \; x_2 = x_2' - x_3', \; x_3 = x_1' + 3x_2' + 2x_3'$$

แทนค่าลงในสมการ Surface เดิม

จะได้สมการ Surface ที่อ้างอิง Basis F (หรือนัยหนึ่งเรียกว่า F - Coordinate System)

$$x_3'^2 - x_1'x_2' = 0$$

วิธีที่ 2 จากสมการ $6x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 11x_1x_3 - 4x_2x_3$

จัดรูปเป็น Quadratic Form $X^TAX = 0$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 6 & 2 & -\frac{11}{2} \\ 2 & 1 & -2 \\ -\frac{11}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{.......(1)}$$

หรือ $(V)_E^T A(V)_E = 0$

จาก $P(V)_F = (V)_E$ เมื่อ $(V)_F = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}, (V)_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

แทนค่า $(V)_E^T = (x_1, x_2, x_3) = (V)_F^T P^T = (x_1', x_2', x_3')\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ลงใน (1)

$$(V)_E^T A(V)_E = (V)_F^T P^T AP(V)_E$$

$$= (x_1', x_2', x_3') \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & -\frac{11}{2} \\ 2 & 1 & -2 \\ -\frac{11}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = 0$$

$$(x_1', x_2', x_3') \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = 0$$

$$x_3'^2 - x_1'x_2' = 0$$

ตัวอย่าง 4.32 จงหา Transition Matrix ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis ตามตัวอย่าง 4.30 ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis G

$$G = \{ (1, 1, 0)^T, (1, 0, 2)^T, (2, 1, 1)^T \}$$

วิธีทำ

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ เป็น Transition Matrix ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E (Natural Basis) ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ เป็น Transition Matrix ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ ที่อ้างอิง Basis E (Natural Basis) ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis G

พิจารณาไดอะแกรมต่อไปนี้

$$E \xrightarrow{P} F, \; E \xrightarrow{Q} G \qquad F \xrightarrow{P^{-1}} E, \; E \xrightarrow{Q} G$$

ดังนั้น $F \xrightarrow{P^{-1}Q} G$

นั่นคือ Transition Matrix ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis G

คือ $P^{-1}Q = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 4.33 ให้ $E = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ และ $F = \{ f_1, f_2, f_3 \}$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ ซึ่งเป็น Space 3 มิติ ดังนั้น

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \\ e_2 &= \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 \qquad \text{........(1)} \\ e_3 &= \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$

เป็น Transition Matrix ที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis F ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E ถ้า $V \in \mathscr{V}$ จงแสดงให้เห็นว่าเราสามารถหา Coordinate Vector ของ V ที่อ้างอิง Basis F ได้จากความสัมพันธ์

$$(V)_E P = (V)_F$$

และสามารถหาเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E ได้จากความสัมพันธ์

$$(V)_E = (V)_F P^{-1}$$

วิธีทำ V เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Space $\mathscr{V}$

สมมุติว่า $V = re_1 + se_2 + te_3$ นั่นคือ $(V)_e = (r, s, t)$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ (1) จะพบว่า

$$\begin{aligned} V &= r(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) + s(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3) + t(\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 f_3) \\ &= (r\alpha_1 + s\beta_1 + t\gamma_1) f_1 + (r\alpha_2 + s\beta_2 + t\gamma_2) f_2 + (r\alpha_3 + s\beta_3 + t\gamma_3) f_3 \end{aligned}$$

$$(V)_f = (r\alpha_1 + s\beta_1 + t\gamma_1,\ r\alpha_2 + s\beta_2 + t\gamma_2,\ r\alpha_3 + s\beta_3 + t\gamma_3)$$

หรืออาศัยแมตริกซ์ P ก็จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน คือ

$$\begin{aligned} (V)_e P &= (r, s, t) \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \\ &= (r\alpha_1 + s\beta_1 + t\gamma_1,\ r\alpha_2 + s\beta_2 + t\gamma_2,\ r\alpha_3 + s\beta_3 + t\gamma_3) \\ &= (V)_f \end{aligned}$$

ดังนั้น $(V)_e P = (V)_f$

และถ้าเรา Transpose สมการ $(V)_e P = (V)_f$ จะพบว่า $P^T (V)_e^T = (V)_f^T$ หรือ $Q(V)_e = (V)_f$

เมื่อ Q, $(V)_f$ และ $(V)_f$ จัดในรูป Column Vector**

กล่าวคือ

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 + s\beta_1 + t\gamma_1 \\ r\alpha_2 + s\beta_2 + t\gamma_2 \\ r\alpha_3 + s\beta_3 + t\gamma_3 \end{bmatrix}$$

ขอให้สังเกตจากความสัมพันธ์ที่ (1) ในตัวอย่าง จะพบว่าแมตริกซ์ P หรือ Q เป็น Transition Matrix ที่ทำหน้าที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis f ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis e

พิจารณา $(V)_e P = (V)_f$ หรือ $Q(V)_e = (V)_f$

จะพบว่า $(V)_e = (V)_f P^{-1}$ หรือ $(V)_e = Q^{-1}(V)_f$

กล่าวคือ ถ้าต้องการเปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis f ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis e แล้วแมตริกซ์ P^{-1} หรือ Q^{-1} จะทำหน้าที่เป็น Transition Matrix

ตัวอย่าง 4.34

ให้ $E = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ และ $T = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$

(1) จงหา Transition Matrix ที่ทำหน้าที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis T

(2) จงหา Transition Matrix ที่ทำหน้าที่เปลี่ยนเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis T ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis E

วิธีทำ

(1) $T_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 1\cdot E_1 + 1\cdot E_2 + 1\cdot E_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ดังนั้น $(T_1)_E = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$T_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 1\cdot E_1 + 1\cdot E_2 + 0\cdot E_3 = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ดังนั้น $(T_2)_E = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$T_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$ $1\cdot E_1 + 0\cdot E_2 + 0\cdot E_3 = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ดังนั้น $(T_3)_E = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

ดังนั้น Transition Matrix ที่ทำหน้าที่เปลี่ยนเวคเตอร์จากที่อ้างอิง Basis E ไปเป็นเวคเตอร์ที่อ้างอิง Basis T คือ

$$Q = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2)

$$E_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0\cdot T_1 + 0\cdot T_2 + 1\cdot T_3 = 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (E_1)_T = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 0\cdot T_1 + 1\cdot T_2 - 1\cdot T_3 = 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (E_2)_T = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 1\cdot T_1 - 1\cdot T_2 + 0\cdot T_3 = 1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (E_3)_T = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

ดังนั้น Transition Matrix จาก Basis T ไปยัง Basis E คือ

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

หรือหา Transition Matrix Q^{-1} จากแมตริกซ์ Q โดยตรงก็ได้คือ

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right] = [I \mid Q^{-1}]$$

$$\text{นั่นคือ} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

เราจะศึกษาถึงเรื่องนี้อีกครั้งในบทหลังที่เกี่ยวเนื่องกับ Similarity, Characteristic Value Problems และอื่น ๆ ซึ่งจะเป็นการนำความรู้เรื่อง Transition Matrix ไปใช้ประโยชน์โดยตรง

4.3.5 Orthonormal Basis

ความรู้เรื่องเกี่ยวกับ Vector Space นับว่าเป็นพื้นฐานขั้นสำคัญในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่น เรขาคณิตวิเคราะห์ (Solid Analytic Geometry) อนุกรมฟูริเออร์ หรือในวิชาสถิติเช่น Multivariate Analysis เป็นต้น นอกจากนี้ความรู้เกี่ยวกับ Vector Space ยังอำนวยประโยชน์โดยตรงต่อความรู้ความเข้าใจใน Matrix Algebra ตลอดจนนำไปใช้เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาเรื่อง Linear Transformation, Characteristic Value Problems, Quadratic Form, Bilinear Form และ Hermitian Form ซึ่งจะกล่าวถึงในบทหลัง

อย่างไรก็ตาม ก่อนที่จะผ่านบทนี้ไปจำเป็นอย่างยิ่งที่จะกล่าวถึง Orthonormal Basis ซึ่งมีความเกี่ยวเนื่องกับ Vector Space (โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องมิติและฐานที่เกิดของเวคเตอร์) ตลอดจนความรู้เรื่อง Linear Transformation (โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนที่เกี่ยวกับ Orthogonal Transformation, Characteristic Value Problems และ Quadratic Form) ดังกล่าว

นิยาม 4.12 ถ้า X เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathscr{V}$ ความยาว (Length หรือ Norm) ของเวคเตอร์ X คือ

$$|X| = (X^TX)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} \text{ เมื่อ } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

และเวคเตอร์ใด ๆ ที่มีความยาวเท่ากับ 1 เราเรียกเวคเตอร์นี้เรียกนั้นว่า Unit Vector

ตัวอย่าง 4.35 จงหาความยาวของเวคเตอร์ต่อไปนี้

(1) $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, (2) $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (4) $E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$

วิธีทำ ความยาวของเวคเตอร์ V_1, V_2, E_1, E_2 มีค่าดังนี้

(1) $|V_1| = \sqrt{V_1^T V_1} = \sqrt{(2, 1, 1)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

(2) $|V_2| = \sqrt{V_2^T V_2} = \sqrt{(1, 0, 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

(3) $|E_1| = \sqrt{E_1^T E_1} = \sqrt{(1, 0, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{1+0+0} = \sqrt{1} = 1$

(4) $|E_2| = \sqrt{E_2^T E_2} = \sqrt{(1, 0, \ldots, 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{1+0+\ldots+0} = \sqrt{1} = 1$

เห็นได้ว่า E_1, E_2 เป็น Unit Vector

ข้อสังเกต Elementary Vector เป็น Unit Vector เสมอ

นิยาม 4.13 ถ้า X เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Vector Space $\mathscr{V}$ เวคเตอร์ $\frac{X}{|x|}$ เรียกว่า Normalized Vector เป็นเวคเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันกับเวคเตอร์ X แต่มีความยาวเป็น 1 กระบวนการที่ทำให้เวคเตอร์ใด ๆ เป็น Unit Vector เรียกว่า Normalization

ตัวอย่าง 4.36 จงทำให้เวคเตอร์ต่อไปนี้เป็น Unit Vector

(1) $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$

วิธีทำ

(1) $|V_1| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Zero Vector มีความยาวเท่ากับ 0

ดังนั้น Normalized V_1 คือ $V_1/|V_1|$ = $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ เป็น Unit Vector

จะเห็นว่า $\sqrt{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}} = \sqrt{1/3+1/3+1/3} = 1$

(2) $|V_2| = \sqrt{(4, 1, 0, 1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{16+1+0+1} = \sqrt{18}$

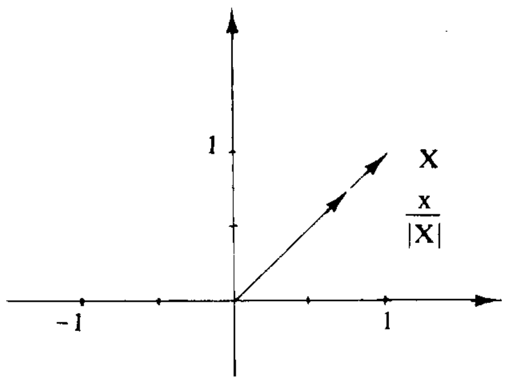
$$\text{Normalized } V_2 = \frac{V_2}{|V_2|} = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 0 \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix} \text{ เป็น Unit Vector}$$

(3) $|V_3| = \sqrt{(1, 1, \ldots, 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{1+1+1+\ldots+1} = \sqrt{n}$

$$\text{Normalized } V_3 = \frac{V_3}{|V_3|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{n} \\ 1/\sqrt{n} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{bmatrix} \text{ เป็น Unit Vector}$$

Normalized X จะทับอยู่บนเวคเตอร์ X หรือนัยหนึ่งวางอยู่บนเส้นเดียวกัน (Colinear) ดังนั้นทิศทางของ Normalized X จึงชี้ไปในทิศทางเดียวกันกับเวคเตอร์ X ต่างกันตรงที่ Normalized X เป็น Unit Vector

ตัวอย่างเช่นเวคเตอร์ X = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ Normalized X = $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ จะมีตำแหน่งและทิศทางดังภาพ



นิยาม 4.14 มุม θ ระหว่างเวคเตอร์ X และ Y หาได้จากสมการ

$$\text{Cos}\ \theta = \frac{X^TY}{|X|\cdot|Y|} \quad \text{โดยที่} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

ส่วนมุม θ_i ระหว่างเวคเตอร์ใด ๆ (เวคเตอร์ X) กับ Elementary Vector E_i, $i = 1,2,\ldots,n$ เรียกว่ามุมแสดงทิศทางของเวคเตอร์ X (Direction Angle) หาได้จากสมการ

$$\text{Cos}\ \theta_i = \frac{X^TE_i}{|X|\cdot|E_i|} = \frac{x_i}{|X|}, \ i = 1,2,\ldots,n$$ [1]

ตัวอย่าง 4.37 จงหามุมระหว่างเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ และเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

วิธีทำ

จากนิยาม $\qquad \text{Cos}\ \theta = \dfrac{X^TY}{|X|\cdot|Y|}$

ให้ $X = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad |X| = \sqrt{X^TX} = 1$

ให้ $Y = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad |Y| = \sqrt{Y^TY} = \sqrt{3}$

---

[1] E_i คือ Elementary Vector ที่มี 1 ปรากฏอยู่ในตำแหน่งที่ i ส่วนสมาชิกในตำแหน่งอื่น ๆ จะมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{(1,0,0)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = .57735 = \text{Cos}\,54°52 \text{ ดังนั้น } \theta = 54°52'$$

นั่นคือมุมระหว่างเวคเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ มีค่าเท่ากับ 54° 52

จากนิยาม 4.14 จะเห็นได้ว่าเวคเตอร์คู่ใด ๆ จะตั้งฉาก (Orthogonal) กันได้ก็ต่อเมื่อมุมระหว่างเวคเตอร์ทั้งสองนั้นเป็น 90° ดังนั้น เมื่อแทนค่า $\theta = 90°$ เราจะได้เงื่อนไขของการตั้งฉากกันระหว่างเวคเตอร์ (Orthogonal Condition) ดังนี้

$$\text{จาก Cos}\,\theta = \frac{X^TY}{|X|\cdot|Y|}$$

$$\text{แทน } \theta = 90°$$

$$\text{Cos}\,90° = \frac{X^TY}{|X|\cdot|Y|}$$

ดังนั้น $X^TY = 0$

นั่นคือเวคเตอร์คู่ใด ๆ (X และ Y) จะตั้งได้ฉากกัน (Orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $X^TY = 0$

นิยาม 4.15 เซท $\mathscr{S} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ ของเวคเตอร์ใน Vector Space $\mathscr{V}$ จะเป็น Orthogonal Set ได้เมื่อ V_i และ V_j ตั้งได้ฉากกัน $(i \neq j)$ หรือนัยหนึ่งถ้าเวคเตอร์ต่าง ๆ ของตั้งฉากซึ่งกันและกันแล้ว เราจะเรียกเซท $\mathscr{S}$ ว่าเป็น Orthogonal Set

ถ้า $\mathscr{S} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ โดยที่แต่ละเวคเตอร์ในเซทนี้เป็น Unit Vector และตั้งฉากซึ่งกันและกัน เราเรียกเซท $\mathscr{S}$ ว่าเป็น Orthonormal Basis ของ $\mathscr{V}$

จากนิยามเราสรุปได้ว่า ถ้า $\mathscr{S} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ เป็น Basis ใด ๆ ของ Vector Space $\mathscr{V}$ และถ้า $V_i^TV_j = 0$; $i \neq j$ และ $|V_i| = V_i^TV_j = 1$; $i = j$, $i, j = 1,2,\ldots,n$

เซท $\mathscr{S}$ จะเป็น Orthonormal Basis ของ $\mathscr{V}$ ปัญหาต่อไปก็คือถ้า $\mathscr{S}$ ไม่เป็น Orthonormal Basis เราจะทำให้ Basis นั้นเป็น Orthonormal Basis ได้อย่างไร ?

วิธีการที่ใช้เปลี่ยน Basis ใด ๆ ให้เป็น Orthonormal Basis คือ "กระบวนการของแกรม–ชมิดท์" (Gram-Schmidt Process)[1] เป็นกระบวนการที่ทำให้เวคเตอร์ต่าง ๆ ตั้งได้ฉาก (Orthogonal) ซึ่งกันและกัน แล้วเปลี่ยน Orthogonal Vector เหล่านั้นให้แต่ละเวคเตอร์เป็น Unit Vector อีกครั้งหนึ่ง ผลลัพธ์ก็คือ Orthonormal Basis

ขั้นตอนดำเนินการของกระบวนการ แกรม–ชมิดท์ มีดังนี้

1. เลือกเวคเตอร์ใด ๆ จาก $\mathscr{S}$ (โดยทั่วไปจะเลือก V_1) แล้วทำให้เป็น Unit Vector ได้เวคเตอร์ U_1 (เวคเตอร์แรก) ของ Orthonormal Basis

นั่นคือ $U_1 = \dfrac{V_1}{|V_1|}$

2. ทำเวคเตอร์ V_2 ให้ตั้งฉากกับ U_1 นั่นคือ

$$W_2 = V_2 - (V_2^T U_1)U_1$$

แล้วทำ W_2 ให้เป็น Unit Vector ได้ U_2

3. ทำเวคเตอร์ V_3 ให้ตั้งฉากกับ U_1 และ U_2 นั่นคือ

$$W_3 = V_3 - (V_3^T U_1)U_1 - (V_3^T U_2)U_2$$

แล้วทำ W_3 ให้เป็น Unit Vector ได้ U_3

.
.
.

n. ทำเวคเตอร์ V_n ให้ตั้งฉากกับ $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ นั่นคือ

$$** \quad W_n = V_n - (V_n^T U_1)U_1 - (V_n^T U_2)U_2 - \ldots - (V_n^T U_{n-1})U_{n-1}$$

แล้วทำ W_n ให้เป็น Unit Vector ได้ U_n

ดังนั้นเซท $\mathscr{S} = \{ U_1, U_2, \ldots, U_n \}$ เป็น Orthonormal Basis

ตัวอย่าง 4.38 $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็น Basis ของ Space 3 มิติ

จงเปลี่ยน Basis T ไปเป็น Orthonormal Basis

วิธีทำ

(1) $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ |V_1| = \sqrt{(1, 1, 1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{3}$

---

[1] ตั้งชื่อตาม J.P.Gram และ Erhard Schmidt นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ซึ่งเสนอวิธีการไว้ราวปลายคริสศตวรรษที่ 19

$$U_1 = \frac{V_1}{|V_1|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(2) ทำเวคเตอร์ $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ให้ตั้งได้ฉากกับเวคเตอร์ U_1 นั่นคือ

$$W_2 = V_2 - (V_2^T U_1)U_1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left[(0, 1, 1) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$|W_2| = \sqrt{4/9 + 1/9 + 1/9} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$U_2 \frac{W_2}{|W_2|} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

การตรวจสอบดูว่า U_1 และ U_2 ตั้งฉากกันจริงหรือไม่นั้นเราเพียงตรวจสอบดูว่า $U_1^T U_2 = 0$ หรือไม่ (หรือจะใช้ $U_2^T U_1 = 0$ ก็ได้)

จะเห็นได้ว่า $U_1^T U_2 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = -2/\sqrt{18} + 1/\sqrt{18} + 1/\sqrt{18} = 0$

(3) ทำเวคเตอร์ V_3 ให้ตั้งฉากกับเวคเตอร์ U_1 และ U_2 นั่นคือ

$$W_3 = V_3 - (V_3^T U_1)U_1 - (V_3^T U_2)U_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left[(0, 0, 1) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} - \left[(0, 0, 1) \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $W_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$|W_3| = 1/\sqrt{2}$$

$$= \frac{W_3}{|W_3|}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบดูจะพบว่า

$$U_1^T U_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

$$U_2^T U_3 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

ซึ่งแสดงว่า U_3 ตั้งได้ฉากกับ U_1 และ U_2 จริง

ดังนั้น $T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ เป็น Orthonormal Basis ของ $\mathcal{V}$

***แมตริกซ์ที่เกิดจากการรวมตัวกันของ Orthonormal Basis ของ Vector Space เรียกว่า Orthogonal Matrix แมตริกซ์ดังกล่าวจะมีคุณสมบัติสอดคล้องตามคุณสมบัติของ Orthonormal Set ทุกประการคือ $U_i^T U_j = 0$; $i \neq j$ และ $U_i^T U_j = 1$; $i = j$

***ดังนั้น แมตริกซ์ P จะเป็น Orthogonal Matrix ก็ต่อเมื่อ $P^TP = I$ ดังนั้นตามตัวอย่าง 4.38 นี้

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ Natural Basis ของ Vector Space เป็น Orthonormal Basis เสมอ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าในทุก ๆ Vector Space หรือ Subspace จะมี Orthonormal Basis อย่างน้อย 1 ชุดเสมอ อนึ่งคำว่า Orthonormal น่าจะมาจากการผสมความหมายและวิธีการของ Orthogonalization และ Normalization

ตัวอย่าง 4.39 ถ้า $\{ U_1, U_2, \ldots, U_k \}$ เป็น Orthonormal Basis ของ Subspace ของ $\mathscr{E}^n$ ($\mathscr{E}^n$ คือ Eucledian Space ที่มี n มิติ) และถ้า X เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Subspace นี้นั่นคือ

$$X = \alpha_1U_1 + \alpha_2U_2 + \ldots + \alpha_kU_k$$

จงพิสูจน์ว่า $|X|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} |X| &= \sqrt{X^TX} \\ &= \sqrt{(\alpha_1U_1^T + \alpha_2U_2^T + \ldots + \alpha_kU_k^T)(\alpha_1U_1 + \alpha_2U_2 + \ldots + \alpha_kU_k)} \\ &= \sqrt{\alpha_1U_1^T\alpha_1U_1 + \alpha_1U_1^T\alpha_2U_2 + \ldots + \alpha_1U_1^T\alpha_kU_k + \alpha_2U_2^T\alpha_1U_1 + \alpha_2U_2^T\alpha_2U_2 + \ldots + \alpha_kU_k^T\alpha_kU_k} \\ &= \sqrt{\alpha_1^2U_1^TU_1 + 0 + \ldots + 0 + \alpha_2^2U_2^TU_2 + 0 + \ldots + 0 + \alpha_3^2U_3^TU_3 + \ldots + 0 + \alpha_k^2U_k^TU_k} \\ & \qquad : U_i^TU_j = 0,\ i \neq j \\ &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2} : U_i^TU_j = 1,\ i = j \end{aligned}$$

ดังนั้น $|X| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2}$

นั่นคือ $|X|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2$

หมายเหตุ เวคเตอร์ที่เกี่ยวเนื่องกับ Length ของเวคเตอร์ เช่น Normalized Vector Orthogonal Vector และ Orthonormal Vector นั้นเราจัดไว้ในอีก Space หนึ่งต่างหาก Space ดังกล่าวเรียกว่า Eucledian Space (หรือ Inner Product Space)

Eucledian Space เป็น Space ของเวคเตอร์ที่นำความยาวของเวคเตอร์มาร่วมเป็น

เงื่อนไข

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

ถ้า A, B และ C เป็นเวคเตอร์ใน Real Vector Space แล้ว

(1) ระยะทางระหว่างเวคเตอร์ A และ B จะมีค่าเป็นบวกเสมอ นั่นคือ

$$d(A, B) \geqslant 0$$

(2) ระยะทางระหว่างเวคเตอร์ A และ B จะเป็นศูนย์ได้เฉพาะเมื่อ A และ B คือเวคเตอร์เดียวกัน

นั่นคือ $d(A, B) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

(3) ระยะทางระหว่างเวคเตอร์ A และ B ก็คือระยะทางระหว่างเวคเตอร์ B และ A

นั่นคือ $d(A, B) = d(B, A)$

(4) ผลบวกระหว่าง d(A, B) และ d(B, C) จะมีค่าไม่น้อยกว่า d(A, C)

นั่นคือ

$d(A,B) + d(B, C) \geqslant d(A,C)$ (เรียกว่า Triangle Inequality)

โดยที่ระยะทางระหว่างเวคเตอร์คู่ใด ๆ สมมุติเป็นเวคเตอร์ A และ B มีค่าดังนี้

***$d(A, B) = |A - B| = \sqrt{(A - B)^T(A - B)} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$

ตัวอย่าง 4.40 $\{ U_1, U_2, \ldots, U_k \}$ เป็น Orthonormal Basis ของ Subspace ของ $\mathscr{E}^n$ ถ้า X เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน Subspace นี้ นั่นคือ

$$X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i$$

จงพิสูจน์ว่า $U_i^T X = \alpha_i$; $i = 1, 2, \ldots, k$ พร้อมทั้งยกตัวอย่างแสดงให้เห็นการนำไปใช้ประโยชน์

วิธีทำ $\{ U_1, U_2, \ldots, U_k \}$ เป็น Orthonormal Basis ของ Subspace ของ $\mathscr{E}^n$

$X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_k U_k$ เป็นเวคเตอร์ใน Subspace นี้

ดังนั้น
$$\begin{aligned} U_i^T X &= U_i^T(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_k U_k) \\ &= \alpha_1 U_i^T U_1 + \alpha_2 U_i^T U_2 + \ldots + \alpha_i U_i^T U_i + \ldots + \alpha_k U_i^T U_k \\ &= 0 + 0 + \ldots + \alpha_i \cdot 1 + \ldots + 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ
$$U_i^T X = \alpha_i$$

ดังนั้น
$$X = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U_i = \sum_{i=1}^{k} (U_i^T X) U_i \;***$$

ตัวอย่างเช่น $= \left\{ U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$ เป็น Orthonormal Basis ของ $\mathscr{E}^n$ จาก Basis เดิม $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ให้ $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathscr{E}$

จะเห็นได้ว่า X เกิดจากการประกอบกันของ U_1 และ U_2)

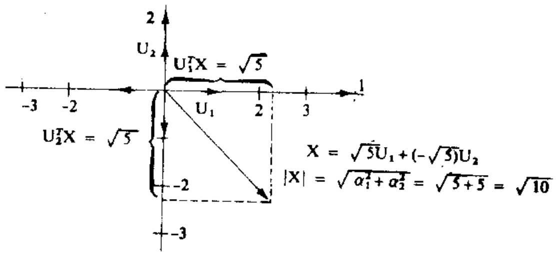
นั่นคือ $X = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$

โดยที่ $\alpha_1 = U_1^T X = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3/\sqrt{5} + 2/\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$$\alpha_2 = U_2^T X = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} -6/\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

นั่นก็คือ $X = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + (-\sqrt{5}) \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ หรือเวคเตอร์ X เกิดจากการที่เวคเตอร์ U_1 เพิ่มขนาดออกไป $\sqrt{5}$ เท่า และเวคเตอร์ U_2 พุ่งถอยหลังไป $\sqrt{5}$ เท่า

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้มีประโยชน์มากในเรื่องการฉายภาพของเวคเตอร์ (Projection of X on the Unit Vector U_i) ค่า $U_i^T X$ ก็คือเงาของเวคเตอร์ X ที่ทาบลงบนแกนที่ U_i ปรากฏอยู่ หรือถ้ามองย้อนกัน $U_i^T X$ ก็คือ Coordinate ของเวคเตอร์ X ที่ห่างจากจุดกำเหนิดไปตามแกนที่ U_i วางอยู่ (อย่าลืมว่า U_i เป็น Unit Vector) ดังภาพ



เรื่องนี้ขอให้ลองทบทวนเปรียบเทียบกับ Coordinate Vector ในตอนก่อนดู จะทำให้เห็นภาพกระจ่างขึ้น โดยเปรียบเทียบดูว่า แกน 1 และแกน 2 เป็นแกนเดียวกับแกน x และแกน y ในกรณีที่ใช้ Natural Basis หรือไม่ ? และในขณะเดียวกันเป็นแกนเดียวกับ Basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ซึ่งเป็น Basis เดิมของ { U_1, U_2 } หรือไม่ ? เวคเตอร์ X ในแกนทั้ง 3 แบบเป็นเวคเตอร์เดียวกันหรือไม่ ? และ Orthonormal Basis เป็นเรื่องเดียวกันกับการ

หมุนแกน (Rotation of Axis) ในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์หรือไม่ ? โดยทั่วไปมุมระหว่างเวคเตอร์ X และ U_1 มีค่าเท่าไร ? ในกรณีของตัวอย่างนี้มุมดังกล่าวมีค่าเท่าไร ? และถ้ากำหนด Cos θ_i มาให้ เราจะหาค่า α_i (หรือ $U_i^T X$) ได้อย่างไร?

ตัวอย่าง 4.41 จงหาเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของเวคเตอร์

$$V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ และตั้งได้ฉากกับเวคเตอร์ V_1

วิธีทำ ให้เวคเตอร์ W คือเวคเตอร์ใหม่ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ V_1 และ V_2

นั่นคือ $W = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$; α_1, α_2 เป็นตัวคงค่าใด ๆ ใน Field $\mathscr{F}$

W จะตั้งได้ฉากกับเวคเตอร์ V_1 เมื่อ $W^T V_1 = 0$

ดังนั้นเราจึงหาเวคเตอร์ใหม่ได้จากการแก้สมการ $W^T V_1 = 0$

$$W = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$W^T V_1 = (-\alpha_1, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$5\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0$$

$\alpha_1 = t,\ \alpha_2 = -5/4t$ เมื่อ t เป็น Parameter มีค่าเป็นจำนวนจริง

ถ้าให้ $t = 4$ จะได้ $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = -5$

ดังนั้น $W = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ คือเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ V_1 และ V_2 และตั้งได้ฉากกับเวคเตอร์ $V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต จะสังเกตได้ว่าเวคเตอร์ W มีได้มากมาย (Infinitely Many) แตกต่างกันไปตามค่าของ t ซึ่งความเป็นจริงก็เป็นเช่นนั้นเพราะเวคเตอร์ที่เกิดจากการประกอบกันของ V_1 และ V_2 มีได้เป็นจำนวนมาก

ตัวอย่าง 4.42 จงพิสูจน์ว่าเซทของ Orthogonal Vector และ Orthonormal Vector จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเสมอ

วิธีทำ ในที่นี้จะพิสูจน์เฉพาะกรณีของ Orthogonal Set เท่านั้น ส่วนกรณีของ Orthonormal Set ขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ให้ $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k$ เป็น Orthogonal Vector ใน $\mathscr{E}^n$

ซึ่ง $V_i^TV_j = 0$ เมื่อ $i \neq j$ และ $V_i^TV_j = c_i \neq 0$; $i = j$

การที่แต่ละเวคเตอร์สอดคล้องกับคุณสมบัติดังกล่าว เมื่อจัดรวมเวคเตอร์เข้าเป็นแมตริกซ์ $B = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$

จะต้องได้

$$B^TB = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^TV_1 & V_1^TV_2 & \ldots & V_1^TV_k \\ V_2^TV_1 & V_2^TV_2 & \ldots & V_2^TV_k \\ V_3^TV_1 & V_3^TV_2 & \ldots & V_3^TV_k \\ \vdots & & & \vdots \\ V_k^TV_1 & V_k^TV_2 & \ldots & V_k^TV_k \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(B^TB) = \det \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_k \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{k} c_i \neq 0$$

แสดงว่า $\det(B^TB) \neq 0$

แต่ $\det(B^TB) = \det B^T \cdot \det B = \det B \cdot \det B$

นั่นคือ $\det B \cdot \det B \neq 0$ $\det B \neq 0$ แสดงว่าเวคเตอร์ที่ประกอบเป็นแมตริกซ์ B เป็นอิสระต่อกัน

จึงสรุปได้ว่า $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ซึ่งเป็น Orthogonal Vector เป็นอิสระต่อกันเสมอ

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงพิสูจน์ว่า $T = \{ E_1, E_1 + E_2, E_1 + E_2 + E_3, \ldots, E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{V}$ ซึ่งเป็น Space n มิติ

2. ก. $T = \{ E_1+E_2, E_2+E_3, E_3+E_4, \ldots, E_{n-1}+E_n, E_n+E_1 \}$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ หรือไม่ (ให้พิจารณาทั้งเมื่อ n เป็นเลขคู่และเมื่อ n เป็นเลขคี่)

ข. $T = \{ E_1+E_2, E_2+E_3, E_3+E_4, \ldots, E_{n-1}+E_n, E_n \}$ เป็น Basis ของ $\mathcal{V}$ หรือไม่ ?

3. เมื่อ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นอิสระต่อกัน (Linearly Independent) จงแสดงให้เห็นว่า $A_1,\ A_1+2A_2,\ A_1+2A_2+3A_3,\ A_1+2A_2+3A_3+4A_4, \ldots, A_1+2A_2+3A_3+4A_4+\ldots+kA_k$ ก็เป็นอิสระต่อกันด้วย โดยที่ A_i เป็นเวคเตอร์ใน Space n มิติ

4. จงพิสูจน์ว่าเซทของ Real Upper Triangular Matrices เป็น Vector Space และจงหา Basis และ Dimension ของเซทดังกล่าว (แนะนำ–อาศัย Isomorphism และ Natural Basis ของ Pseudo Vector)

5. ถ้า E_{ij} เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่ ณ ตำแหน่งที่ ij สมาชิกของ E_{ij} มีค่าเป็น 1 และ ณ ตำแหน่งอื่น ๆ มีค่าเป็น 0 จงแสดงให้เห็นว่า Vector Space ของ E_{ij} มี Dimension เป็น n^2

6. จงแสดงให้เห็นว่า

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

เป็น Basis ของ Space 3 มิติ แล้วจงแสดงให้เห็นว่าเวคเตอร์ $V = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ เกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของ $\mathcal{S}$ จากนั้นจงตรวจสอบดูว่าเราสามารถนำ V เข้าไปแทนที่เวคเตอร์ใดของ $\mathcal{S}$ ได้บ้างและเซทใหม่จะยังคงเป็น Basis ของ Space เดิมหรือไม่ ?

7. ให้ $Y, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ เป็นเวคเตอร์ใน $\mathcal{V}$ ซึ่งเป็น Space n มิติ ถ้า Y เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ แต่ไม่เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ จงพิสูจน์ว่า X_n เกิดจากการประกอบกันของเวคเตอร์ $Y, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$

8. ใน Space ใด ๆ ที่ไม่ใช่ Zero Space ($\mathcal{V} \neq \mathcal{F}$) จงพิสูจน์ว่า Space นั้นจะสามารถมี Basis ได้มากมายจนนับไม่ถ้วน (Infinitely Many Basis)

9. เวคเตอร์

$$V = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ \cdot \\ \cdot \\ a \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

มี a อยู่ k ตัว อีก n-k ตัวเป็น 0 อยากทราบว่า a จะต้องมีค่าเท่าไรจึงจะทำให้ V เป็น Unit Vector

10. จงสร้าง Basis ของ Space 4 มิติที่ต้องมีเวคเตอร์ $V = (-1, 2, 0)^T$ รวมอยู่ด้วย (แนะนำ –ใช้ Steinitz Replacement Theorem)

11. จงอาศัยกระบวนการของแกรม–ชมิดท์ สร้าง Orthonormal Basis ของ Subspace ของ Space 4 มิติที่มี Basis ดังต่อไปนี้

ก. $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

ข. $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ค. $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

12. ถ้า $U_1, U_2, \ldots, U_r$ เป็นเซทของ Orthonormal Vector ใน $\mathscr{E}^n$ แล้วจงพิสูจน์ว่าเราสามารถหาเวคเตอร์ $U_{r+1}, U_{r+2}, \ldots, U_n$ ที่ทำให้ $\{ U_1, U_2, \ldots, U_n \}$ เป็น Basis ของ $\mathscr{E}^n$ ได้

(คำแนะนำ ให้ใช้ความรู้จากกระบวนการของแกรม-ชนิดท์)

13. X เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน $\mathscr{E}^n$ เวคเตอร์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเวคเตอร์ใน $\mathscr{E}^n$ ที่เป็นอิสระต่อกัน ถ้า X ตั้งได้ฉากกับทุกเวคเตอร์ A_i ($X^TA_i = 0;\ i = 1,2,\ldots,k$) จงพิสูจน์ว่า $X, A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นอิสระต่อกัน

14. จงแสดงให้เห็นว่าเซทของเวคเตอร์ X (ขนาด 4×1) ที่ตั้งฉากกับทุกเวคเตอร์ต่อไปนี้

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะก่อให้เกิด Vector Space ใน $\mathscr{E}^4$ หลังจากนั้นจงหา Orthonormal Basis ของ Space ดังกล่าว

(แนะนำ – ให้ X เป็นเวคเตอร์ใด ๆ เมื่อ X ตั้งได้ฉากกับ V_1, V_2 และ V_3 เราจะพบว่า

$$X^TV_1 = 0 \qquad \ldots\ldots..(1)$$

$$X^TV_2 = 0 \qquad \ldots\ldots..(2)$$

$$X^TV_3 = 0 \qquad \ldots\ldots..(3)$$

แก้สมการทั้งสาม เราจะได้รูปทั่วไปของเวคเตอร์ X ตรงตามเงื่อนไขที่ต้องการ)

*15. ในระบบสมการ AX = B จงพิสูจน์ว่าระบบสมการนี้จะมีคำตอบ (Consistent) ก็ต่อเมื่อ $r(A) = r(A \mid B)$

(แนะนำ – อาศัยความรู้เรื่อง Rank และ Gauss - Jordan Elemination)

*16. A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n\times n$ จงพิสูจน์ว่า A จะเป็น Singular Matrix ก็ต่อเมื่อ $r(A) < n$

17. A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n\times n$ จงพิสูจน์ว่า $\det A \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $r(A) = n$

18. ให้ $\mathscr{V}$ เป็น Space ของ Symmetric Matrix ขนาด 2×2 จงพิสูจน์ว่า dim. $\mathscr{V} = 3$

19. กำหนดให้เวคเตอร์ให้ 3 เวคเตอร์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จงหาเวคเตอร์ที่ 4 ที่ทำให้เวคเตอร์ทั้ง 4 กลายเป็น Basis ของ Space 4 มิติ