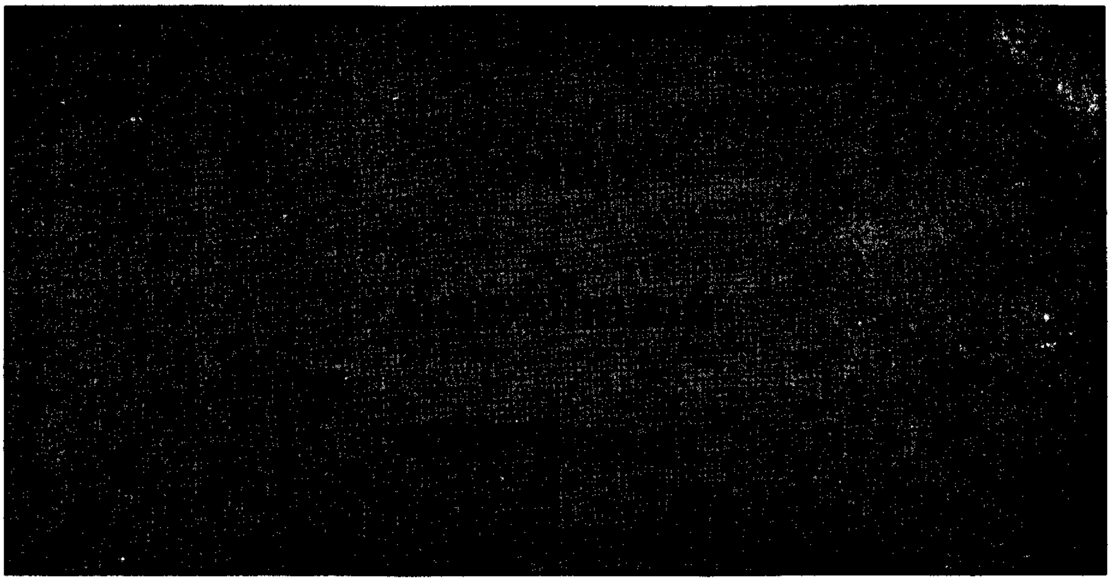


3. ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

3.1 การจัดลำดับและดีเทอร์มิแนนต์ (Permutation and Determinant)

เราจะเริ่มศึกษาเรื่องดีเทอร์มิแนนต์จากเรื่องการจัดลำดับ (Permutation) ของจำนวนเต็ม ทั้งนี้เพราะการจัดลำดับของจำนวนมีความหมายและทรงความสำคัญต่อการศึกษาเรื่องดีเทอร์มิแนนต์เป็นอย่างยิ่ง

นิยาม 3.1 การจัดลำดับ (Permutation) คือ One-to-one mapping ของเซต $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ไปยังตัวมันเอง หรือนัยหนึ่งการจัดลำดับคือ การจัดที่หรือสลับลำดับกันของจำนวนเต็ม $1, 2, 3, \ldots, n$ ใช้สัญญลักษณ์ π แทน "การจัดลำดับ" (บางแห่งใช้ v)

ดังนั้น

$$\pi = j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$$

โดยที่ $j_1\ j_2\ j_3 \ldots j_n$ เป็นจำนวนเต็มที่เกิดจากการเรียงลำดับใหม่ (Rearrang) ของจำนวนเต็ม $1, 2, 3, \ldots, n$

การจัดลำดับใหม่ของจำนวนเต็ม n จำนวน จะสามารถกระทำได้ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ วิธี เช่น มีจำนวนเต็มอยู่ 3 จำนวน จะสามารถจัดลำดับได้ $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่างเช่น มีจำนวนเต็มอยู่ 3 จำนวนคือ 1, 2, 3 เราสามารถจัดเรียงลำดับจำนวนทั้ง 3 นี้ได้ $3! = 6$ วิธีคือ

1, 2, 3	1, 3, 2	2, 3, 1	2, 1, 3	3, 1, 2	3, 2, 1

หรือมีจำนวนอยู่ 4 จำนวนคือ 1, 2, 3, 4 เราสามารถจัดเรียงลำดับจำนวนทั้ง 4 นี้ได้ $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ วิธีคือ

1, 2, 3, 4	1, 2, 4, 3	1, 3, 4, 2	1, 3, 2, 4	1, 4, 3, 2	1, 4, 2, 3
2, 1, 3, 4	2, 1, 4, 3	2, 3, 4, 1	2, 3, 1, 4	2, 4, 3, 1	2, 4, 1, 3
3, 1, 2, 4	3, 1, 4, 2	3, 2, 1, 4	3, 2, 4, 1	3, 4, 1, 2	3, 4, 2, 1
4, 1, 2, 3	4, 1, 3, 2	4, 2, 1, 3	4, 2, 3, 1	4, 3, 1, 2	4, 3, 2, 1

จากกลุ่มจำนวนเต็มที่จัดเรียงลำดับกันนี้ สิ่งหนึ่งที่เรามีความจำเป็นต้องทราบคือ การจัดลำดับนั้นมีค่าเป็นเลขคู่ (Even Permutation) หรือว่ามีค่าเป็นเลขคี่ (Odd Permutation) ทั้งนี้เพราะการเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ของการจัดลำดับมีอิทธิพลต่อเครื่องแบบประจำกลุ่มของแต่ละกลุ่มเป็นอย่างมาก ดัชนีที่ใช้วัดค่าของการจัดลำดับคือ μ โดยค่าของ μ คำนวณหาได้จาก "**ผลรวมของจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า (ซึ่งโดยปกติต้องวางอยู่ในตำแหน่งที่ต่ำกว่า) จำนวน**

เต็มแต่ละตัวใน Permutation นั้น ๆ แต่กลับถูกจัดให้อยู่ในลำดับสูงกว่า" ตัวอย่างเช่น ต้องการทราบว่าการจัดลำดับ $\pi = 3, 1, 2$ มีค่าเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ ให้พิจารณาทีละตัวเริ่มจากตัวแรกคือ 3 จะเห็นว่าจำนวนเต็ม 1, 2 มีค่าน้อยกว่า 3 ซึ่งโดยปกติควรจะอยู่ข้างหน้า 3 (คืออยู่ในลำดับต่ำกว่า) แต่ปรากฏว่า 1 และ 2 ถูกวางอยู่ในตำแหน่งสูงกว่า ดังนี้เพิ่มพิจารณาสมาชิกตัวแรกของ π คือ 3 จึงมีจำนวนที่เรียงผิดลำดับปกติอยู่ 2 ตัว ต่อไปพิจารณาสมาชิกตัวที่สองของ π คือ 1 พบว่า 2 เป็นจำนวนที่มีค่ามากกว่า 1 ควรวางอยู่ในลำดับที่สูงกว่า ในที่นี้เลข 2 วางอยู่ถูกลำดับปกติแล้ว ดังนั้นเมื่อพิจารณาสมาชิกตัวที่สองของ π จึงมีจำนวนที่เรียงผิดลำดับปกติอยู่ 0 ตัว ต่อไปพิจารณาสมาชิกตัวที่สามของ π คือ 2 พบว่าไม่มีจำนวนเต็มใดเรียงต่อจากเลข 2 ดังนั้น เมื่อพิจารณาสมาชิกตัวที่สามของ π จึงมีจำนวนที่เรียงผิดลำดับปกติอยู่ 0 ตัว ดังนั้น ดัชนีการจัดลำดับ (Measure of Permutation) ของ $\pi = 3, 1, 2$ คือ $\mu(3, 1, 2) = 2+0+0 = 2$ ถ้าดัชนีการจัดลำดับ $\mu(\pi)$ มีค่าเป็นเลขคู่ แสดงว่าการจัดลำดับนั้นเป็น Even Permutation แต่ถ้าดัชนีการจัดลำดับ $\mu(\pi)$ เป็นเลขคี่จะเป็น Odd Permutation

จึงเห็นได้ว่า การจะทราบว่า การจัดลำดับ π เป็น Even Permutation หรือ Odd Permutation นั้นจำเป็นต้องหาค่าดัชนีการจัดลำดับ $\mu(\pi)$ เสียก่อน และหลักการสำคัญของการหาดัชนีการจัดลำดับก็คือ การหาผลรวมของจำนวนเต็มที่เรียงผิดลำดับปกติของจำนวนในแต่ละลำดับนั้นเอง

หมายเหตุ ลำดับปกติ (Normal Order) คือ ลำดับของจำนวนเต็มที่เรียงจากน้อยไปหามาก คือ $1, 2, 3, \ldots, (n-2), (n-1), n$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาดัชนีการจัดลำดับของ $\pi = 2, 1, 4, 3$

วิธีทำ

ให้เริ่มพิจารณาจำนวนเต็มแต่ละตัวตั้งแต่ตัวแรกจนถึงตัวสุดท้ายของ π ว่าจำนวนเต็มแต่ละลำดับนั้นมีจำนวนเต็มกี่ตัวที่มีค่าน้อยกว่าแต่วางอยู่ในตำแหน่งที่สูงกว่า (ผิดลำดับปกติ)

เริ่มพิจารณาทีละตัวดังนี้

ก. 2 มีจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า 2 แต่วางอยู่ในตำแหน่งที่สูงกว่าหนึ่งตัวคือ 1 ดังนั้นจึงมีจำนวนที่วางผิดลำดับ 1 ตัว

ข. 1 ไม่มีจำนวนใดวางผิดลำดับ เพราะทุกตัวที่อยู่ในตำแหน่งสูงกว่า 1 มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้นจึงมีจำนวนที่วางผิดลำดับเท่ากับ 0 ตัว

ค. 4 มีจำนวนที่น้อยกว่า 4 แต่วางอยู่ในตำแหน่งที่สูงกว่าหนึ่งตัวคือ 3 ดังนั้น จึงมีจำนวนที่วางผิดลำดับเท่ากับ 1 ตัว

ง. 3 ไม่มีจำนวนใดเรียงต่อจาก 3 ดังนั้นจึงมีจำนวนที่วางผิดลำดับเท่ากับ 0 ตัว ดังนั้น

$$\mu(2, 1, 4, 3) = 1+0+1+0 = 2$$

ตัวอย่าง 3.2 จงหาดัชนีจัดลำดับของ

π_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6 π_2 = 6, 4, 1, 3, 2, 5 π_3 = 4, 1, 6, 3, 5, 2

วิธีทำ

$\mu(\pi_1) = \mu(1, 2, 3.4, 5, 6) = 0+0+0+0+0+0 = 0$

$\mu(\pi_2) = \mu(6, 4, 1, 3, 2, 5) = 5+3+0+1+0+0 = 9$

$\mu(\pi_3) = \mu(4, 1, 6, 3, 5, 2) = 3+0+3+1+1+0 = 8$

ตัวอย่าง 3.3 จากจำนวนเต็ม 3 จำนวนคือ 1, 2, 3 จงจัดลำดับพร้อมทั้งหาค่าดัชนี การจัดลำดับ (Measure of Permutation) พร้อมทั้งระบุให้เห็นว่ากลุ่มของ π หนึ่ง ๆ เป็น Even Permutation หรือ Odd Permutation

วิธีทำ

จำนวนเต็ม 3 จำนวน จะสามารถจัดลำดับได้ $3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$ วิธี ดังนั้น

$\pi_1 = 1, 2, 3$ $\mu(\pi_1) = 0+0+0 = 0$ π_1 เป็น Even Permutation

$\pi_2 = 1, 3, 2$ $\mu(\pi_2) = 0+1+0 = 1$ π_2 เป็น Odd Permutation

$\pi_3 = 2, 1, 3$ $\mu(\pi_3) = 1+0+0 = 1$ π_3 เป็น Odd Permutation

$\pi_4 = 2, 3, 1$ $\mu(\pi_4) = 1+1+0 = 2$ π_4 เป็น Even Permutation

$\pi_5 = 3, 1, 2$ $\mu(\pi_5) = 2+0+0 = 2$ π_5 เป็น Even Permutation

$\pi_6 = 3, 2, 1$ $\mu(\pi_6) = 2+1+0 = 3$ π_6 เป็น Odd Permutation

ข้อสังเกต ลำดับปกติ (Normal Order) ของจำนวนต่าง ๆ จะเป็น Even Permutation เสมอ

ค่าของดัชนีการจัดลำดับนี้เรียกว่า Parity Index ถ้า Parity Index เป็นเลขคู่ แสดงว่าการจัดลำดับนั้นสลับที่ต่างไปจากลำดับปกติเป็นจำนวนคู่ ถ้า Parity Index เป็นเลขคี่ แสดงว่าการจัดลำดับนั้นสลับที่ต่างไปจากลำดับปกติเป็นจำนวนคู่ และการจัดลำดับคู่ใดมี Parity Index เป็นเลขคู่หรือเลขคี่ด้วยกันแสดงว่ามี Parity เหมือนกัน (Same Parity) ถ้ามีค่าต่างกันเราเรียกว่ามี Parity เป็นตรงกันข้าม (Opposite Parity)

ความรู้เรื่อง Parity Index นี้จะมีประโยชน์อย่างสำคัญต่อพัฒนาการของดีเทอร์-มิแนนต์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนที่เกี่ยวกับคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ซึ่งจะพบในลำดับต่อไป

นิยาม 3.2 ให้ A เป็น Square Matrix ขนาด $n \times n$ ที่สมาชิกของ A เป็นจำนวนใน field $\mathscr{F}$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A ก็คือกลุ่มของสมาชิกของ A ที่จัดเรียงกันอย่างมีระเบียบในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรอบของเส้นดิ่ง 2 เส้น นั่นคือ

$$\text{ถ้า } A = \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right|$$

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\text{all } \pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} a_{3_{j_3}} \ldots a_{n_{j_n}}$$

โดย $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ เป็น Permutation ของจำนวนเต็ม $1, 2, \ldots, n$ และผลรวมนี้รวมตลอดในทุกค่าของ π ซึ่งมีอยู่ $n!$ ชุด

หมายเหตุ

1. ใช้สัญญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|$ แทนคำว่า "ดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A" เส้นดิ่งที่เขียนขนาบ A ไว้นั้นอ่านว่า "ดีเทอร์มิแนนต์ของ" มิใช่เครื่องหมายของค่าสมบูรณ์ (Absolute Value)

2. Square Matrix เท่านั้นที่สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้

จากนิยามของดีเทอร์มิแนนต์ ขอให้นักศึกษาพิจารณาตามข้อสังเกตต่อไปนี้

1. $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ คือผลคูณของสมาชิก n ตัวของแมตริกซ์ A Subscript ตัวแรกของ a แต่ละตัวแสดงว่า a มาจากแถวใด ขอให้สังเกตว่าในผลคูณนี้ Subscript ตัวแรกจะเรียงอยู่ในลำดับปกติคือ $1, 2, \ldots, n$ เสมอ ส่วน Subscript ตัวหลังจะแปรไปตามการจัดลำดับของจำนวนเต็ม $1, 2, 3, \ldots, n$ ซึ่งก็คือ $j_1, j_2, \ldots, j_n$ การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ตามวิธีนี้เรียกว่า Row Expansion ($\pi = j_1, j_2, \ldots, j_n$ มิได้หมายถึงอักษร j เรียงอยู่ในลำดับปกติ $1, 2, \ldots, n$ แต่หมายถึงการจัดลำดับของจำนวนเต็ม $1, 2, \ldots, n$)

ถ้าหากผลคูณของสมาชิกของแมตริกซ์ A เป็น $a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$ จะเห็นว่า Subscript

ตัวหลังเรียงอยู่ในลำดับปกติ 1, 2,..., n เสมอ แต่ Subscript ตัวแรกแปรไปตามการจัดลำดับใหม่ของจำนวนเต็ม 1, 2,...,n คือ $i_1, i_2, \ldots, i_n$ การหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ตามวิธีนี้เรียกว่า Column Expansion ซึ่งค่าของดีเทอร์มิแนนต์ตามวิธีทั้งสองนี้จะเท่ากันเสมอ

2. จากนิยาม $\det A = \sum_{\text{all } \pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$

$\sum_{\text{all } \pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ แสดงให้เห็นว่าผลรวมนี้รวมตลอดในทุกชุดของ π (all Possible Permutation) ซึ่งมีอยู่ n ! ชุด ส่วน $(-1)^{\mu(\pi)}$ จะเป็นตัวบ่งบอกเครื่องหมายของผลคูณแต่ละเทอม ถ้าผลคูณ $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ นั้นมี Parity Index ของ $\pi = j_1, j_2, \ldots, j_n$ เป็นเลขคี่ เครื่องหมายประจำเทอมจะเป็นลบเพราะ $(-1)^{\mu(\pi)}$ เป็นลบ ถ้า Parity Index เป็นเลขคู่ เครื่องหมายประจำเทอมจะเป็นบวกเพราะ $(-1)^{\mu(\pi)}$ ให้ผลลัพธ์เป็นบวก

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

ในที่นี้จะพบว่า n = 3 แสดงว่าต้องมีการจัดลำดับของจำนวนเต็ม 3 จำนวนคือ 1, 2, 3 ดังนั้น การจัดลำดับของจำนวนเต็ม 1, 2, 3 ดัชนีการจัดลำดับ และกลุ่มผลคูณของสมาชิกของแมตริกซ์ ซึ่งผันแปรตามการจัดลำดับจะปรากฏดังนี้

$\pi_1 = 1, 2, 3$; $\mu(1, 2, 3) = 0+0+0 = 0$; $(-1)^{\mu(\pi_1)} = (-1)^0 = 1$; $a_{1(1)}a_{2(2)}a_{3(3)}$

$\pi_2 = 1, 3, 2$; $\mu(1, 3, 2) = 0+1+0 = 1$; $(-1)^{\mu(\pi_2)} = (-1)^1 = -1$; $a_{1(1)}a_{2(3)}a_{3(2)}$

$\pi_3 = 2, 3, 1$; $\mu(2, 3, 1) = 1+1+0 = 2$; $(-1)^{\mu(\pi_3)} = (-1)^2 = 1$; $a_{1(2)}a_{2(3)}a_{3(1)}$

$\pi_4 = 2, 1, 3$; $\mu(2, 1, 3) = 1+0+0 = 1$; $(-1)^{\mu(\pi_4)} = (-1)^1 = -1$; $a_{1(2)}a_{2(1)}a_{3(3)}$

$\pi_5 = 3, 1, 2$; $\mu(3, 1, 2) = 2+0+0 = 2$; $(-1)^{\mu(\pi_5)} = (-1)^2 = 1$; $a_{1(3)}a_{2(1)}a_{3(2)}$

$\pi_6 = 3, 2, 1$; $\mu(3, 2, 1) = 2+1+0 = 3$; $(-1)^{\mu(\pi_6)} = (-1)^3 = -1$; $a_{1(3)}a_{2(2)}a_{3(1)}$

ข้อสังเกต ขอให้สังเกต Subscript ของ a ในผลคูณแต่ละเทอม จะเห็นว่า Subscript ตัวแรกเรียงกันตามลำดับปกติ แต่ Subscript ตัวหลังแปรเปลี่ยนไปตามการจัดลำดับของจำนวนเต็ม 1, 2, 3 ซึ่งก็คือ $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ และ π_6 (สังเกต Subscript ที่มีวงกลมล้อมรอบ) ดังนั้น

$$\mathbf{det}\ A = \sum_{\text{all } \pi} (-1)^{\mu(\pi)}\ a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ a_{nj_n}$$

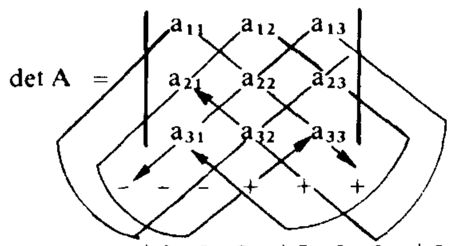
$$= \sum_{\pi}^{6} (-1)^{\mu(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

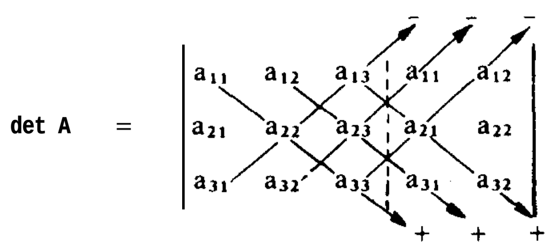
จะด้วยความบังเอิญหรือด้วยความพยายามทำเรื่องยากให้เป็นง่ายหรือเหตุผลอื่นใดก็ตาม ทำให้เรามีเทคนิคสำหรับหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้กฎการคูณไขว้ ซึ่งได้คำตอบตรงกันกับวิธีที่ใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ตามนิยามดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



$$= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

หรือใช้เทคนิคอื่น คือนำสดมภ์ที่ 1 และ 2 ของแมตริกซ์ A มาเรียงต่อท้ายสดมภ์ที่ 3 แล้วใช้กฎการคูณไขว้โดยคูณไล่มาเป็นลำดับไม่ต้องคูณวนย้อนดังข้างต้น การคูณไขว้กระทำได้ดังนี้



$$= +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

วิธีคูณไขว้และคูณวนย้อนนี้จะได้ผลตรงกับวิธีที่ใช้ตามนิยาม แต่ขอเตือนให้ระมัดระวังไว้ ณ ที่นี้ว่า วิธีคูณไขว้และคูณวนย้อนนี้จะได้ผลตรงกับวิธีตามนิยามสำหรับการ

หาดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ ขนาด 3×3 หรือ 2×2 เท่านั้น ถ้าแมตริกซ์มีขนาดโตกว่า 3×3 คือมีขนาดตั้งแต่ 4×4 ขึ้นไปจะใช้เทคนิคทั้งสองนี้ไม่ได้[1] ต้องอาศัยวิธีตามนิยาม วิธีขององค์ประกอบร่วม (Cofactor Expansion) หรือเทคนิคอื่น ๆ เช่น Pivotal Condensation Method หรือ Laplace Expansion ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \det A &= (1 \cdot 2 \cdot 7) + (1 \cdot 3 \cdot 0) + (0 \cdot -1 \cdot 0) - (0 \cdot 2 \cdot 0) - (1 \cdot 0 \cdot 7) - (1 \cdot -1 \cdot 3) \\ &= 14 - (-3) \\ &= 17 \end{aligned}$$

3.2 คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์มีคุณสมบัติดังนี้

ทฤษฎี 3.1 ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่งของแมตริกซ์ A มีค่าเป็น 0 ทั้งหมด แล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นแมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวในสดมภ์ที่ k เป็น 0 ทั้งหมด นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1,k-1} & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2,k-1} & 0 & a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & 0 & a_{3,k+1} & & a_{3n} \\ \\ \\ . & & & & . & & & . \; . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[1] ความจริงแล้วการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ขนาด 4×4, 5×5,... จะใช้วิธีคูณวนย้อนก็ได้แต่ลักษณะการคูณวนย้อนจะแตกต่างจากวิธีที่ใช้กับแมตริกซ์ขนาด 3×3 และ 2×2 ตัวอย่างเช่น แมตริกซ์ขนาด 4×4 จะมีเทอมของผลคูณจึง $4! = 24$ เทอม ถ้าจะคูณวนย้อนจะต้องกระทำถึง 24 ครั้ง

ดังนั้น $\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_{k-1} k-1} a_{i_{k+1} k+1} \ldots a_{i_n n}$

แต่ $a_{i_k k} = 0$ ($a_{i_k k}$ เป็นสมาชิกของสดมภ์ที่ k ของแมตริกซ์ A)

ดังนั้น $\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_{k-1} k-1}\, 0\, a_{i_{k+1} k+1} \ldots a_{i_n n}$

$= 0$

ข้อสังเกต การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ในที่นี้ใช้ Column Expansion นักศึกษาจะใช้ Row Expansion ก็ได้ แต่ควรจะกำหนดให้สมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งของ A เป็น 0 ทั้งหมด ทั้งนี้เพื่อป้องกันความสับสน

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นความเป็นจริงของทฤษฎีดังกล่าวโดยจะแสดงทั้งแบบ Row Expansion และ Column Expansion

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

จัดลำดับของเลข 3 จำนวนคือ 1, 2 และ 3 จะได้ Permutation และ Parity Index ดังนี้

$\pi_1 = (1, 2, 3)$; $\mu(1, 2, 3) = 0$, $\pi_2 = (1, 3, 2)$; $\mu(1, 3, 2) = 1$

$\pi_3 = (2, 3, 1)$; $\mu(2, 3, 1) = 2$, $\pi_4 = (2, 1, 3)$; $\mu(2, 1, 3) = 1$

$\pi_5 = (3, 1, 2)$; $\mu(3, 1, 2) = 2$, $\pi_5 = (3, 2, 1)$; $\mu(3, 2, 1) = 3$

ดังนั้น

1. ก. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$= (1 \cdot 0 \cdot 7) + (0 \cdot 4 \cdot 3) + (3 \cdot 2 \cdot 0) - (1 \cdot 4 \cdot 0) - (0 \cdot 2 \cdot 7) - (3 \cdot 0 \cdot 4)$

$= 0$

วิธีนี้เป็น Row Expansion (ทำให้ Subscript ตัวที่ 2 ซึ่งแสดงสดมภ์เปลี่ยนแปลงไปตามกลุ่ม π) ขอให้สังเกตวงกลมรอบ Subscript ตัวที่ 2 ของ a ซึ่งแสดงว่ามาจากการจัดลำดับ

ในกรณีนี้ค่าของ a ที่เท่ากับ 0 จะกระจัดกระจายไปในทุกตำแหน่งของกลุ่มผลคูณ

ข. $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$

$= (1\cdot 0\cdot 7)+(2\cdot 0\cdot 3)+(3\cdot 0\cdot 4)-(1\cdot 0\cdot 4)-(2\cdot 0\cdot 7)-(3\cdot 0\cdot 3)$

$= 0$

กรณีนี้เป็นการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A ตามแบบ Column Expansion จะเห็นได้ว่า ค่า $a = 0$ วางอยู่ในตำแหน่งที่สองของทุกกลุ่มผลคูณ

2. $$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0+0+0+0+0+0 = 0$$

ทฤษฎี 3.2 A เป็น Square Matrix ใด ๆ $\det A^T = \det A$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ดังนั้น $A^T = [a_{ji}]_{n\times n}$

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \qquad \text{(Row Expansion ของ A)}$$

$$\det A^T = \sum_{\pi} (-1)^{\mu(\pi)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \qquad \text{(Column Expansion ของ } A^T\text{)}$$

แต่ Column Expansion ของ A^T ก็คือ Row Expansion ของ A

ดังนั้น $\det A^T = \det A$ □

ตัวอย่าง 3.5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\det A$ และ $\det A^T$

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2+36+0-12-0-0 = 26$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2+0+36-12-0-0 = 26$$

โดยปกติใน Permutation หนึ่งจะมี Parity Index คงที่เสมอ แต่ถ้าหากใน Permutation

นั้นมีจำนวนเต็มคู่หนึ่งคู่ใดสับที่กัน Parity Index จะเปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม ดูตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $(\pi) = 5, 1, 4, 6, 3, 2$

ดังนั้น $\mu(\pi) = 4+0+2+2+1+0 = 9$ แสดงว่า π เป็น Odd Permutation

ถ้าสลับจำนวนเต็มคู่ใด ๆ สมมุติสลับ 1 กับ 3 ทำให้ได้

$$\pi_1 = 5, 4, 3, 6, 1, 2$$

ดังนั้น $\mu(\pi_1) = 4+2+2+2+0+0 = 10$ แสดงว่า π_1 เป็น Even Permutation

ความรู้ดังกล่าวสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎี 3.3 การสลับจำนวนเต็มคู่ใด ๆ ใน Permutation จะทำให้ Permutation นั้นมี Parity Index เปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม (Opposite Parity)

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎี 3.4 การสลับแถว (สดมภ์) คู่ใด ๆ ของแมตริกซ์ A จะทำให้เกิดแมตริกซ์ใหม่เสมอและค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ใหม่จะเป็นนิเสธ (Negative) ของดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์เดิม

นั่นคือ

ถ้า B เกิดจากการสลับแถว (สดมภ์) คู่ใด ๆ ของ A แล้ว $\det B = -\det A$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ โดยแถวที่ i อยู่เหนือแถวที่ k (คือ $i < k$)

สลับแถวที่ i กับแถวที่ k ทำให้ได้แมตริกซ์ใหม่คือ แมตริกซ์ B

นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \dots & a_{in} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & \dots & a_{kn} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & \dots & a_{kn} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \dots & a_{in} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า

$$\det A = \Sigma\ (-1)^{\mu\ (j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_k, \dots, j_n)}\ a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{kj_k} \dots a_{nj_n} \qquad (1)$$

$$\det B = \Sigma\ (-1)^{\mu\ (j_1, j_2, \dots, j_k, \dots, j_i, \dots, j_n)}\ a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_k} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n} \qquad (2)$$

และโดยอาศัยความรู้จากทฤษฎี 3.3

จาก (2) สลับที่จำนวนเต็ม j_k กับ j_i ใน $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_k, \dots, j_i, \dots, j_n)$ ซึ่งจะมีผลให้ $\mu(\pi)$ มี Opposite Parity

ดังนั้น

$$\det B = \Sigma\ -(-1)^{\mu\ (j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_k, \dots, j_n)}\ a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{kj_k} \dots a_{nj_n} = -\det A$$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A และ B เมื่อแมตริกซ์ B เกิดขึ้นจากการสลับที่แถวที่ 1 กับแถวที่ 3 ของแมตริกซ์ A กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

1 การสลับที่ของจำนวนเต็ม j_i กับ j_k ใน $\pi = j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_k, \dots, j_n$ ทำให้ได้ $\pi_1 = j_i, j_2, \dots, j_k, \dots, j_n$ $\mu(\pi)$ และ $\mu(\pi_1)$ จะมี Opposite Parity แต่แมตริกซ์ที่ได้ใหม่คือ B ซึ่งเกิดจากการสลับแถวที่ i กับแถวที่ k ก็ยังคงเป็นแมตริกซ์ A ดังเดิมเพราะ $a_{ij} = a_{kj} : j = 1, 2, \dots, n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{ดังนั้น} \ \det A = -15+8+0-3-0-(-4) = -6$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ดังนั้น} \ \det B = 3+(-4)+0-(-15)-0-8 = -(-6)$$

$$= -\det A$$

ทฤษฎี 3.5 ในแมตริกซ์ A ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถว (หรือสดมภ์) หนึ่งมีค่าเท่ากับสมาชิกทุกตัวในอีกแถว (หรือสดมภ์) หนึ่งแล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นแมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวในแถว i มีค่าเดียวกันกับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ k นั่นคือ $a_{i1} = a_{k1}, a_{i2} = a_{k2}, \ldots, a_{in} = a_{kn}$ ดังนั้นถ้าสลับที่ i กับแถวที่ k แมตริกซ์ใหม่ที่ได้ (B) ก็ยังคงเป็นแมตริกซ์เดิม (นั่นคือ B = A)[1] จะเห็นได้ว่า

$$\det A = \Sigma \ (-1)^{\mu(j_1, j_2, \ldots, j_i, \ldots, j_k, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{ij_i} \ldots a_{kj_k} \ldots a_{nj_n}$$

$$\det B = \det A = \Sigma \ -(-1)^{\mu(j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots, j_i, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{kj_k} \ldots a_{ij_i} \ldots a_{nj_n}$$

$$= -\det A$$

นั่นคือเมื่อแมกตริกซ์ A มีแถวคู่ใด ๆ (หรือสดมภ์คู่ใด ๆ) ที่มีสมาชิกเหมือนกันแล้ว $\det A = -\det A$

แต่เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์เป็นจำนวนคงที่ ดังนั้น $\det A = -\det A$ ได้ก็ต่อเมื่อ $\det A = 0$

จึงสรุปได้ว่าถ้าแมตริกซ์ใด ๆ มีสมาชิกทุกตัวในแถว (สดมภ์) หนึ่งแถวใดเหมือนกับสมาชิกทุกตัวในแถว (สดมภ์) อื่น ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์นั้นจะเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 3.7 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A และ B โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

[1] การสลับที่ของจำนวนเต็ม j_i กับ j ใน $\pi = j_1, j_2, \ldots, j_i, \ldots, j_k, \ldots, j_n$ ทำให้ได้ $\pi_1 = j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots, j_i, \ldots, j_n$ $\mu(\pi)$ และ $\mu(\pi_1)$ จะมี Opposite Parity แต่แมตริกซ์ที่ได้ใหม่คือ B ซึ่งเกิดจากการสลับแถวที่ i กับแถวที่ k ก็ยังคงเป็นแมตริกซ์ A ดังเดิมเพราะ $a_{ij} = a_{kj}$; j = 1, 2, ..., n

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0+0+(-6)-0-0-(-6) = 0$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -15+0+0-(-15)-0-0 = 0$$

ข้อสังเกต ขอให้สังเกตสมาชิกในแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ A และสมาชิกในสดมภ์ที่ 1 กับสดมภ์ที่ 3 ของ B

ทฤษฎี 3.6 ถ้าแมตริกซ์ B เกิดขึ้นจากการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่ง) ของแมตริกซ์ A ด้วยตัวคงที่ k แล้ว $\det B = k \cdot \det A$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็น Square Matrix ใด ๆ นำตัวคงที่ k ไปคูณเข้ากับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ทำให้สมาชิกแถวที่ i ของแมตริกซ์ที่ได้ใหม่ (สมมุติว่าเป็นแมตริกซ์ B) มีค่าเป็น $ka_{i1}, ka_{i2}, \ldots, ka_{in}$

นั่นคือ

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\det B = \Sigma (-1)^{\mu(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} \ldots a_{nj_n}$

$$= \Sigma (-1)^{\mu(\pi)} k(a_{1_{j_1}} a_{2_{j_2}} \ldots a_{i-1,}{}^{j_{i-1}} a_{ij_i} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n})$$

$$= k\, \Sigma (-1)^{\mu(\pi)} a_{1_{j_1}} a_{1j_2} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{ij_i} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n}$$

$$= k \cdot \det A$$

ตัวอย่าง 3.8 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ B เมื่อ B เกิดจากการคูณสมาชิกทุกตัวในสดมภ์ที่ 2 ของแมตริกซ์ A ด้วย 3 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24+4+0-0-12-(-2) = 18$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3\times 1 & 0 \\ 3 & 3\times 3 & 1 \\ 4 & 3\times(-1) & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 72+12+0-0-36-(-6) = 54 = 3\cdot(18)$$

ข้อสังเกต การคูณดีเทอร์มิแนนต์ด้วยตัวคงค่านั้นแตกต่างกับการคูณแมตริกซ์ด้วยค่าคงค่า (Scalar Multiplication) ทั้งนี้เพราะการคูณดีเทอร์มิแนนต์ด้วยตัวคงค่าตัวหนึ่ง จะเท่ากับการคูณด้วยตัวคงค่าตัวนั้นกับสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่ง) เท่านั้น แต่การคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่าตัวหนึ่งจะเท่ากับการคูณแจกด้วยตัวคงค่าตัวนั้นให้กับสมาชิกทุกตัวในแมตริกซ์ ข้อแตกต่างข้อนี้เป็นสิ่งที่นักศึกษาจะต้องระมัดระวังให้มากเป็นพิเศษมิฉะนั้นอาจเข้าใจไขว้เขวได้

ตัวอย่างเช่น

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าในสดมภ์ที่ 2 เป็นพหุคูณ (multiple) ของ 4 เราสามารถดึงตัวร่วม 4 ออกจากสดมภ์ที่ 2 ได้

นั่นคือ

$$\det A = 4\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \det A = 8\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำตัวร่วมคูณกลับเข้าไปในสดมภ์เก่า ก็จะได้ผลเช่นเดิม โดยปกติการคูณดีเทอร์มิแนนต์ด้วยตัวคงค่าตัวหนึ่งนั้นเราจะคูณเข้ากับแถวใดแถวหนึ่งหรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่งก็ได้ เพราะค่าของดีเทอร์มิแนนต์จะเท่ากันเสมอ ความรู้จากทฤษฎีนี้อำนวยประโยชน์ต่อการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์เป็นอย่างมากเพราะช่วยให้ไม่ต้องคำนวณกับเลขจำนวนมาก ๆ

ตัวอย่าง 3.9 จงหาค่าของ

fl. $\begin{vmatrix} 12 & -23 & 36 \\ I & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ ข. $\begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 12 & -24 & 36 \\ 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$: ดึงตัวร่วม 12 ออกจากแถวที่ 1

$$= 12 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$: ดึงตัวร่วม 2 ออกจากแถวที่ 3

$$= 12 \cdot 2 \cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$: ดึงตัวร่วม 3 ออกจากสดมภ์ที่ 3

$$= 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-5+9-12)+2-10-4-3)$$

$$= -2304$$

ข.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}$$: ดึงตัวร่วม $\frac{1}{6}$ ออกจากแถวที่ 1

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$: ดึงตัวร่วม $\frac{1}{2}$ ออกจากแถวที่ 2

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$: ดึงตัวร่วม 2 ออกจากสดมภ์ที่ 2

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-1)$$
$$= \frac{1}{6}$$

หมายเหตุ นักศึกษาอาจใช้วิธีดึงตัวร่วมหรือวิธีการคูณเข้าแล้วหารออกก็ได้

ตัวอย่าง 3.10 จงแสดงให้เห็นว่า (โดยไม่ต้องกระจายเทอมออกมา)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\frac{1}{\gamma}\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta\gamma \\ \beta & \beta\cdot\beta & \beta\cdot\gamma\alpha \\ \gamma & \gamma\cdot\gamma & \gamma\cdot\alpha\beta \end{vmatrix}$$

: คูณแถวที่ 1 ด้วย $\frac{\alpha}{\alpha}$

: คูณแถวที่ 2 ด้วย $\frac{\beta}{\beta}$

: คูณแถวที่ 3 ด้วย $\frac{\gamma}{\gamma}$

$$= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha\beta\gamma \\ \beta & \beta^2 & \alpha\beta\gamma \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha\beta\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix}$$

; ดึงตัวร่วม $\alpha\beta\gamma$ ออกจากสดมภ์ที่ 3

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \beta^2 & \beta \\ 1 & \gamma^2 & \gamma \end{vmatrix}$$

; สลับสดมภ์ที่ 1 กับที่ 3 ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์มีเครื่องหมายเป็นลบ

$$= (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

; สลับสดมภ์ที่ 2 กับสดมภ์ที่ 3

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.11 จงพิสูจน์ว่า $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ เมื่อ A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n\times n$ และ λ เป็น

ตัวคงที่ (Scalar) ใด ๆ

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

ดังนั้น $A = [\lambda a_{ij}]_{n \times n}$

นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\det(\lambda A) = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \lambda \cdots \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$: ดึงตัวร่วม λ ออกจากแถว (หรือสดมภ์) ที่ 1, 2,....,n

$$= \lambda^n \det A$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$: ดึงตัวร่วม 5 ออกจากแถว (สดมภ์) ที่ 1, 2 และ 3

$$= 125 \det I_3 = 125$$

สำหรับตัวอย่างหลังที่ยกมาให้ดูนี้เป็นตัวอย่างที่น่าสนใจ

เพราะมีนักศึกษาเป็นจำนวนมากเข้าใจสับสนระหว่างการคูณดีเทอร์มิแนนต์ด้วยตัวคงค่า และการคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า คือสงสัยว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 125 \text{ หรือว่า เนื่องจาก } A = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\det A = 5 \det I_3 = 5$

ขอให้นักศึกษาย้อนกลับไปทบทวนเรื่องแมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์อีกครั้ง แล้วจะพบเหตุผล เรื่องนี้เป็นเรื่องที่ต้องระมัดระวังเป็นพิเศษ เพราะหากไขว้เขวจะทำให้ได้ผลลัพย์ผิดพลาดไปเป็นอย่างมาก

ทฤษฎี 3.7 ถ้าสมาชิกในแถว (สดมภ์) ใด ๆ ของ A เป็นสัดส่วน (Proportional) กับสมาชิกในอีกแถว (สดมภ์) หนึ่งแล้ว $\det A = 0$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 3.12 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 20 \\ -1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ -1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 = 0$$

หรือ เนื่องจากสมาชิกที่อยู่ในสดมภ์ที่ 2 กับสดมภ์ที่ 3 เป็นสัดส่วนกัน ดังนั้น $\det A = 0$

ข้อสังเกต ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ใด ๆ นั้นเราจะใส่เครื่องหมายลงไปทันที หลังจากนั้นจึงค่อย ๆ พิจารณาว่าจะใช้เทคนิคใดมาช่วยเพื่อให้การคำนวณง่ายเข้า ประการที่สำคัญที่สุดคือ เป็นการปิดโอกาสมิให้เกิดความสับสนระหว่างแมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

3.3 องค์ประกอบร่วมของสมาชิกของแมตริกซ์ (Cofactor of an Element of A)

จาก

$$\det A = \Sigma\ (-1)^{\mu(\pi)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \qquad : \text{Row Expansion}$$

หรือ

$$\det A = \Sigma (-1)^{\mu(\pi)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} \qquad : \text{Column Expansion}$$

ผลคูณแต่ละกลุ่มของ det A จะมีสมาชิกแต่ละตัวของ A ปรากฏอยู่เพียงครั้งเดียว โดยเหตุนี้เราจึงสามารถจัดแบ่งกลุ่มผลคูณเข้าด้วยกันแล้วดึงตัวร่วมออกมาได้ จำนวนที่เหลืออยู่หลังจากดึงตัวร่วมออกมาเรียกว่าองค์ประกอบร่วม (cofactor) ของตัวร่วมนั้น

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ถ้าจะหาค่า det A ตามแบบ Row Expansion จะได้ดังนี้

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

จัดกลุ่มผลคูณที่มีสมาชิกร่วมกัน

$$\begin{aligned} \det A &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

$(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$ เป็นองค์ประกอบร่วมของ a_{11} ใช้สัญญลักษณ์ A_{11}

$-(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$ เป็นองค์ประกอบร่วมของ a_{12} ใช้สัญญลักษณ์ A_{12}

$(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$ เป็นองค์ประกอบร่วมของ a_{13} ใช้สัญญลักษณ์ A_{13}

ดังนั้น $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

เมื่อพิจารณาองค์ประกอบร่วม A_{11}, A_{12} และ A_{13} จะพบว่า

$$A_{11} = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

จึงเห็นได้ว่า

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A โดยอาศัยองค์ประกอบร่วมของสมาชิกในแถวที่ 1 โดยนัยเดียวกัน

$$\det A = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ x_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A โดยอาศัยองค์ประกอบร่วมของสมาชิกในแถวที่ 2 และ

$$\det A = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A โดยอาศัยองค์ประกอบร่วมของสมาชิกในแถวที่ 3

โดยทำนองเดียวกันเราสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยอาศัยองค์ประกอบร่วมของสมาชิกในสดมภ์ที่ 1, 2 และ 3 ได้เช่นกัน

จากตัวอย่างเราจึงสามารถนิยามองค์ประกอบร่วมได้ดังนี้

นิยาม 3.3 องค์ประกอบร่วมของ a_{ij} คือ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ โดยที่ M_{ij} คือค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ย่อย (Submatrix) ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ ที่เกิดจากการตัดสมาชิกทุกตัวที่อยู่ในแถวและสดมภ์เดียวกับ a_{ij} ทิ้ง และ $i+j$ คือผลบวกของ Subscript ที่แสดงตำแหน่งของ a_{ij} เรียก M_{ij} ว่า Minor Determinant ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ ของ A เรียกสั้น ๆ ว่ Minor

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

องค์ประกอบร่วมของ a_{11} คือ

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ เรียกว่า Minor ของ a_{11}

องค์ประกอบร่วมของ a_{ij} คือ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\,j-1} & a_{2,\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ a_{i-1,\,1} & a_{i-2,\,2} & \cdots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \cdots & a_{i+1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & a_{i+2,\,2} & \cdots & a_{i+1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \cdots & a_{i+1,\,n} \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,\,j-1} & a_{n,\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ตามนิยามของององค์ประกอบร่วม เราสามารถนิยามดีเทอร์มิแนนต์ของ $A_{n \times n}$ ได้ดังนี้

$$\det A = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{เป็น Cofactor Expansion ของแถวที่ } i \text{ ของแมตริกซ์ } A \\ \text{หรือ} & \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{เป็น Cofactor Expansion ของสดมภ์ที่ } j \text{ ของแมตริกซ์ } A \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.13 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

เราสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้องค์ประกอบร่วมและการกระจายตามแถว (สดมภ์) ใดก็ได้ ในที่นี้จะใช้วิธีกระจายตามแถวที่ 2

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -7 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -5 & -7 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$-2 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot 9 + 3 \cdot (51) - (1) \cdot (83) - (2) \cdot (7)$$

$$= 153 - 115$$

$$= 38$$

ทฤษฎี 3.8 ถ้ากระจายดีเทอร์มิแนนต์ตามสมาชิกของแถว (หรือสดมภ์) หนึ่งของแมตริกซ์ A แต่ใช้องค์ประกอบร่วมของสมาชิกในอีกแถว (หรือสดมภ์) หนึ่ง ค่าที่ได้จะเป็นศูนย์

นั่นคือ

ถ้า $i \neq k,\ j \neq k$ แล้ว

$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}+\ldots+a_{in}A_{kn} = 0$: กระจายตามแถวที่ i แต่ใช้องค์ประกอบร่วมของสมาชิกในแถวที่ k

และ

$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+a_{3j}A_{3k}+\ldots+a_{nj}A_{nk} = 0$: กระจายตามสดมภ์ที่ j แต่ใช้องค์ประกอบร่วมของสมาชิกในสดมภ์ที่ k

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ เราจะหาค่า Cofactor Expansion ของ A

โดยจะกระจายตามสดมภ์ที่ 2 แต่ใช้องค์ประกอบร่วมของสมาชิกในสดมภ์อื่น สมมุติว่าเป็นสดมภ์ที่ 3 ดังนั้นตามทฤษฎีข้างต้น

$a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33} = 0$ ทั้งนี้เพราะ $j = 2, k = 3, j \neq k$

ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นดังนี้

$$a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

แต่ถ้ากระจายตามสดมภ์ที่ 2 แล้วใช้องค์ประกอบร่วมของสมาชิกในสดมภ์ที่ 2 $(j = k = 2)$ ค่าของ Cofactor Expansion ที่ได้จะเป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A นั่นคือ

$$\det A = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-3)+(1)(7-9)+0$$

$$= 4$$

หมายเหตุ การกระจายเพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ตามแถว (สดมภ์) หนึ่ง แต่กลับใช้องค์ประกอบร่วมของสมาชิกในแถว (สดมภ์) อื่นนั้นเปรียบเสมือนการบังคับให้แมตริกซ์นั้นมีสมาชิกทุกตัวในแถว (สดมภ์) คู่ใดคู่หนึ่งมีค่าเดียวกัน ซึ่งจากทฤษฎีที่ผ่านมาแมตริกซ์ใดที่มีลักษณะดังกล่าวย่อมมีค่าดีเทอร์มิแนนต์เป็นศูนย์ (0) เสมอและขอให้คำนึงไว้อย่างหนึ่งว่า ค่าดีเทอร์มิแนนต์นั้นเป็นจำนวนใด ๆ ก็ได้ในบางกรณีก็อาจจะมีค่าเป็นศูนย์ได้ ขออย่าได้นำมาสับสนกับกรณีนี้

ทฤษฎี 3.9 ถ้าสดมภ์ (แถว) ใด ๆ ของแมตริกซ์ A ประกอบไปด้วยผลบวกของสดมภ์ (แถว) ต่าง ๆ หลายสดมภ์ (แถว) นั่นคือ

$$A = [A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n] \text{ โดย } A_i = \sum_{k=1}^{p} B_k$$

แล้ว $\det A = \sum_{k=1}^{p} \det [A_1, A_2, \ldots, B_k, \ldots, A_n]$

ตัวอย่าง 3.13 ให้ $A = \begin{bmatrix} b_{11}+b_{12} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21}+b_{22} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31}+b_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จงหา $\det A$

วิธีทำ

$$A = [A_1, A_2, A_3] \text{ โดยที่ } A_1 = \begin{bmatrix} b_{11}+b_{12} \\ b_{21}+b_{22} \\ b_{31}+b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

อาศัย Cofactor Expansion ตามสดมภ์ที่ 1 (หรือจะกระจายตามสดมภ์ใดหรือแถวใดก็ได้)

$$\det A = (b_{11}+b_{12}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (b_{21}+b_{22}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (b_{31}+b_{32}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$+ b_{12} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_{32} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} & a_{13} \\ b_{22} & a_{22} & a_{23} \\ b_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \det [B_1, A_2, A_3] + \det [B_2, A_2, A_3]$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \det [B_k, A_2, A_3]$$

การพิสูจน์ทฤษฎี 3.9 จะดำเนินการคล้ายตัวอย่างข้างต้น ขอเว้นไว้ให้พิสูจน์เองเป็น

แบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 3.14 จงคำนวณหา $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$

วิธีทำ อาศัยความรู้จากทฤษฎี 3.9

$$\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & a+b \\ b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a & -b \end{vmatrix} \right\} + \left\{ \begin{vmatrix} -b & a \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & b \\ b & -b \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{ 0 + (-ab-ab) \} + \{ (-ab-ab) + (b^2 - b^2) \}$$

$$= (-2ab) + (-2ab) = -4ab$$

หมายเหตุ สำหรับการหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ขนาดเล็ก นักศึกษาจะใช้วิธีคูณไขว้หรือวิธีคูณวนย้อนตามที่เคยศึกษามาในตอนต้น หรืออาศัยวิธีขององค์ประกอบร่วมก็ได้ ทฤษฎี 3.9 อำนวยประโยชน์และเหมาะแก่งานที่ซับซ้อนและเป็นแมตริกซ์ขนาดใหญ่

ตัวอย่าง 3.15 กำหนดให้

$$A_j = \begin{bmatrix} a_j & d & g \\ b_j & e & h \\ c_j & f & k \end{bmatrix} ; j = 1, 2, \ldots, p$$

จงพิสูจน์ว่า $\det \sum_{j=1}^{p} A_j = p^2 \sum_{j=1}^{p} (\det A_j)$

วิธีทำ

$$A_j = \begin{bmatrix} a_j & d & g \\ b_j & e & h \\ c_j & f & k \end{bmatrix} ; j = 1, 2, \ldots, p$$

ดังนั้น

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & d & g \\ b_1 & e & h \\ c_1 & f & k \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & d & g \\ b_2 & e & h \\ c_3 & f & k \end{bmatrix}, \ldots, A_p = \begin{bmatrix} a_p & d & g \\ b_p & e & h \\ c_p & f & k \end{bmatrix}$$

$$\det \sum_{j=1}^{p} A_j = \det\left\{\begin{bmatrix} a_1 & d & g \\ b_1 & e & h \\ c_1 & f & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & d & g \\ b_2 & e & h \\ c_2 & f & k \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_p & d & g \\ b_p & e & h \\ c_p & f & k \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_1+a_2+\ldots+a_p & pd & pg \\ b_1+b_2+\ldots+b_p & pe & ph \\ c_1+c_2+\ldots+c_p & pf & pk \end{bmatrix}$$

$$= p \cdot p \det \begin{bmatrix} a_1+a_2+\ldots+a_p & d & g \\ b_1+b_2+\ldots+b_p & e & h \\ c_1+c_2+\ldots+c_p & f & k \end{bmatrix}$$

$$= p^2 \left\{\begin{vmatrix} a_1 & d & g \\ b_1 & e & h \\ c_1 & f & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & d & g \\ b_2 & e & h \\ c_2 & f & k \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_p & d & g \\ b_p & e & h \\ c_p & f & k \end{vmatrix}\right\}$$

$$= p^2 (\det A_1 + \det A_2 + \ldots + \det A_p)$$

$$= p^2 \sum_{j=1}^{p} \det A_j$$

ทฤษฎี 3.10 ถ้าแมตริกซ์ B เกิดจากการนำ k เท่าของแถว (สดมภ์) หนึ่งของแมตริกซ์ A ไปบวกกับอีกแถว (สดมภ์) หนึ่งแล้ว ดีเทอร์มิแนนต์ของ B จะมีค่าเท่ากับดีเทอร์มิแนนต์ของ A หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า Elementary Operation ต่อไปนี้ จะไม่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์เปลี่ยนแปลง

ก. บวก(ลบ) แถว(สดมภ์) หนึ่ง เข้ากับอีกแถว(สดมภ์) หนึ่ง

ข. บวก(ลบ) แถว(สดมภ์) หนึ่งด้วย k เท่าของอีกแถว(สดมภ์) หนึ่ง

พิสูจน์ ให้ $A_{n \times n} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ [1]

นำ k เท่าของสดมภ์ที่ j ไปบวกกับสดมภ์ที่ i

ดังนั้น $\det B = \det [A_1, A_2, \ldots, A_i + kA_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n]$

อาศัยทฤษฎี 3.9

---

[1] หรือจะให้ $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_n \end{bmatrix}$ ก็ได้ถ้าต้องการพิสูจน์โดยอาศัยการแบ่งแมตริกซ์ตามแถว

ดังนั้น $\det B = \det[A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n] + \det[A_1, A_2, \ldots, kA_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n]$

$= \det A + k\det[A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n]$

$= \det A + 0$

$= \det A$

หมายเหตุ $\det[A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n] = 0$ เพราะมี 2 สดมภ์เหมือนกัน

ตัวอย่าง 3.16 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -17 & -8 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} : R_1 - 5R_4 \\ : R_2 - 2R_4 \\ : R_3 + 5R_4 \\ \end{matrix}$$

อาศัย Cofactor Expansion ตามสดมภ์ที่ 1

ดังนั้น $\det A = 0+0+0-(1)\begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix} = 38$

โดยปกติ (อาศัยทฤษฎี 3.10) ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A นั้น เราจะพยายามทำให้สมาชิกของแมตริกซ์ A มีค่าเป็น 0 มากที่สุดเท่าที่จะมากได้เพื่อว่า เมื่อใช้ Cofactor Expansion การคำนวณจะสะดวกรวดเร็ว โดยทั่วไปจะพยายามลดรูปให้เป็น Triangular form หรือ Diagonal form เพราะการคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ง่ายที่สุด กล่าวคือถ้า A เป็น Lower Triangular Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

อาศัย Cofactor Expansion จะได้ $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$

ตัวอย่าง 3.17 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{5}{4} & -2 & 4 \\ -\frac{3}{4} & 6 & 8 \end{vmatrix} \qquad : \text{ทำให้ } a_{11} = 1$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & \frac{41}{4} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} : C_2 - 2C_1 \\ : C_3 - 3C_1 \end{matrix}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & \frac{369}{2} \end{vmatrix} \qquad : \frac{18}{18} \times C_3$$

$$= \frac{4}{18}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{9}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & \frac{384}{2} \end{vmatrix} \qquad : C_3 + C_2$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{18}\left(1 \cdot -\frac{9}{2} \cdot \frac{384}{2}\right)$$

$$= -192$$

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยอาศัยวิธีการกำจัดสมาชิกเพื่อลดรูปให้เป็น Triangular form (ในที่นี้แปลงรูปให้เป็น Lower Triangular form) นักศึกษาจะแปลงรูปให้เป็น Upper Triangular form ก็ได้ จะได้คำตอบตรงกัน การแปลงรูปให้เป็น Triangular form หรือให้มี 0 ปรากฏในแถวหรือสดมภ์ต่าง ๆ ให้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เรียกว่า Sweepout Process เป็นวิธีที่ช่วยประหยัดแรงงานในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์เป็น

อย่างมาก สิ่งหนึ่งที่ขอฝากไว้ให้คิดก็คือขอให้จำแนกความคล้ายคลึงและความแตกต่างระหว่างวิธีการดังกล่าวที่ใช้กับแมตริกซ์และที่ใช้กับดีเทอร์มิแนนต์ไว้ให้ชัดเจน มิฉะนั้นจะเกิดความผิดพลาดได้

3.4 Pivotal Condensation Method

Pivotal Condensation Method เป็นวิธีการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์อีกวิธีหนึ่งเป็นวิธีที่พัฒนามาจาก Cofactor Expansion และความรู้ทางทฤษฎีประการต่าง ๆ ซึ่งกล่าวถึงมาแล้วในตอนต้น การคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ตามวิธีนี้ง่ายและสะดวกรวดเร็ว แต่อาจรู้สึกสับสนในตอนต้น ขอให้พยายามติดตามสังเกตการพิสูจน์ทฤษฎีและขั้นตอนต่าง ๆ โดยใกล้ชิด

ทฤษฎี 3.11 ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ เป็น Square Matrix ขนาด $n\times n$ โดยที่ $n \geqslant 2$ และ $a_{11} \neq 0$ และ $E = [d_{ij}]_{(n-1)\times(n-1)}$ เป็น Square Matrix ขนาด $(n-1)\times(n-1)$ โดยที่ $d_{ij} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} : i = 1, 2,.., n ; j = 1, 2,..., n$ ดังนั้น $\det A = a_{11}^{2-n} \cdot \det E$ (หรือ $\det A = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \det E$)

พิสูจน์

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{ให้ } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \cdots & a_{11}a_{2n} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \cdots & a_{11}a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{11}a_{1n} & a_{11}a_{n2} & a_{11}a_{n3} & \cdots & a_{11}a_{nn} \end{bmatrix}$$: คูณแถวที่ 2, 3, ..., n ของแมตตริกซ์ A ด้วย a_{11}

ดังนั้น

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \cdots & a_{11}a_{2n} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \cdots & a_{11}a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{11}a_{n1} & a_{11}a_{n2} & a_{11}a_{n3} & \cdots & a_{11}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}^{n-1} \det A$ (ทฤษฎี 3.6)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \cdots & a_{12}a_{2n} \\ a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \cdots & a_{11}a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{11}a_{n2} & a_{11}a_{n3} & \cdots & a_{11}a_{nn} \end{bmatrix}$$

: คูณสดมภ์ที่ 1 ของแมตริกซ์ B ด้วย $\frac{1}{a_{11}}$

ดังนั้น $a_{11}\det C = \det B = a_{11}^{n-1}\det A$ (ทฤษฎี 3.6)

$\det C = a_{11}^{n-2}\det A$

** ให้ $D = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$

: (แถวที่ 2 ของ C) - a_{21} (แถวที่ 1 ของ C)
: (แถวที่ 3 ของ C) - a_{31} (แถวที่ 1 ของ C)
:
:
:
: (แถวที่ n ของ C) - a_{n1} (แถวที่ 1 ของ C)

โดยที่

** $d_{ij} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} : i = 2, 3, \ldots, n; \; j = 2, 3, \ldots, n$

$\det D = \det C$ (ทฤษฎี 3.10)

โดยวิธี Cofactor Expansion ตามสดมภ์ที่ 1 ของ D

$$\det D = 1 \cdot \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} + 0 + 0 + \cdots + 0 = \det E$$

โดยที่ $E = \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\det E = \det D = \det C = a_{11}^{n-2} \det A$

$$\det A = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \det E = a_{11}^{2-n} \det E$$

หมายเหตุ 1.

จาก $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$\det A = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \det \begin{bmatrix} d_{22} & d_{23} & \cdots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \cdots & d_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$d_{ij} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} : i = 2, 3, \ldots, n ; j = 2, 3, \ldots, n$$

พิจารณา d_{ij} **จะเห็นได้ว่า**

$$d_{ij} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{vmatrix}$$

เช่น

$$d_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$d_{23} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$d_{32} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$d_{35} = a_{11}a_{35} - a_{31}a_{15} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{31} & a_{35} \end{vmatrix}$$

2. Pivotal Condensation Method เป็นวิธีที่ใช้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์โดยลดขนาดของแมตริกซ์เดิมให้มีขนาดเล็กลงคือจากขนาด $n \times n$ เป็นขนาด $(n-1) \times (n-1)$, $(n-2) \times (n-2), \ldots, 3 \times 3$, 2×2 ตามลำดับ

3. การที่ $a_{11} \neq 0$ นั้นมิได้หมายความว่า Pivotal Condensation Method จะใช้กับแมตริกซ์ที่มี $a_{11} = 0$ ไม่ได้ ถ้าแมตริกซ์ใดมี $a_{11} = 0$ ให้สลับแถว (สดมภ์) ที่ 1 นั้นกับแถว (สดมภ์) อื่นที่สมาชิกตัวที่ 1 มีค่าไม่เป็นศูนย์ โดยต้องไม่ลืมว่า เมื่อสลับแถว (สดมภ์) แล้วจะทำให้เครื่องหมายของดีเทอร์มิแนนต์เปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม ดังนั้นเพื่อมิให้ต้องพะวงกับเครื่องหมายของดีเทอร์มิแนนต์ที่เปลี่ยนแปลงไปในทางปฏิบัติเราจึงนิยมสลับแถว (สดมภ์) 2 ครั้งซึ่งจะมีผลให้เครื่องหมายของดีเทอร์มิแนนต์มีค่าคงเดิม

ตัวอย่าง 3.18 จงคำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

สมมุติว่า $a_{11} \neq 0$

$$\det A = \frac{1}{a_{11}^{3-2}} \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

โดยที่ $d_{ij} = a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} : i = 2, 3 ; j = 2, 3$

$$\det A = \frac{1}{a_{11}^{3-2}} \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \\ a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \{ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) \}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{12}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13} +$$
$$a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{12}a_{21}a_{13}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

ข้อสังเกต 1.

$$\det A = \frac{1}{a_{11}^{3-2}} \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

ขอให้สังเกตการคูณไขว้เพื่อหาค่า d_{22}, d_{23}, d_{32} และ d_{33} ดังนี้

$d_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ คำนวณได้จากการคูณไขว้ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$d_{23} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$ คำนวณได้จากการคูณไขว้ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$d_{32} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$ คำนวณได้จากการคูณไขว้ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$d_{33} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \quad \text{คำนวณได้จากการคูณไขว้} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. จะเห็นได้ว่าเราใช้ a_{11} และสมาชิกที่อยู่ในแถวและสดมภ์เดียวกันเป็นหลักในการคูณไขว้โดยที่ผลการคูณไขว้เกิดจากการนำ a_{11} ไปคูณกับ a_{ij} (Subscript ตรงกับ d_{ij}) หักลบด้วยผลคูณของสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวและสดมภ์เดียวกับ a_{11} ณ ตำแหน่งของแถวและสดมภ์ตรงกันกับที่ d_{ij} ปรากฏอยู่

3. ขนาดของแมตริกซ์ลดลงจาก 3×3 เป็น 2×2

ตัวอย่าง 3.19 จงคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 ใช้ Cofactor Expansion โดยการกระจายตามสดมภ์ที่ 2 (เลือกใช้แถวหรือสดมภ์ที่มีสมาชิกที่มีค่าเป็น 0 ปรากฏอยู่มากกว่าแถวหรือสดมภ์อื่น)

$$\det A = -0+0-0-(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-1) = -3$$

วิธีที่ 2 ใช้ Pivotal Condensation Method

$$\det A = \frac{1}{2^{3-2}}\begin{vmatrix} (2\times 0)-(3\times 0) & (2\times -1)-(3\times -1) \\ (2\times -3)-(4\times 0) & (2\times 7)-(4\times -1) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(-6) = -3$$

ตัวอย่าง 3.20 จงคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 ใช้ Pivotal Condensation Method

$$\det A = \frac{1}{3^{3-2}}\begin{vmatrix} (3\times 0)-(1\times 2) & (3\times -2)-(1\times -4) \\ (3\times 3)-(-2\times 2) & (3\times 3)-(-2\times -4) \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 24 = 8$$

วิธีที่ 2 ใช้ Cofactor Expansion โดยอาศัย Sweepout Process เข้าช่วย เพื่อให้มี 0

ปรากฏในแถว (หรือสดมภ์) ใดแถวหนึ่งมากที่สุดเท่าที่จะมากได้ หรือให้เข้ารูป Triangular Form เพื่อการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์จะได้ง่ายและสดวกรวดเร็วขึ้น

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad : C_3+2C_1$$

ใช้ Cofactor Expansion โดยการกระจายตามแถวที่ 2 ดังนั้น

$$|A| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = (-1)(-8) = 8$$

ตัวอย่าง 3.21 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

วิธีที่ 1. ใช้ Cofactor Expansion โดยพยายามแปลงรูปให้เป็น Triangular Form หรือ Diagonal Form

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} \quad : R_1+R_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 18 & 0 \\ 0 & 8 & 11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ : R_2+5R_1 \\ : R_3+2R_1 \\ : R_4-2R_1 \end{matrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 8 & 11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 6 \end{vmatrix} \quad : \frac{12}{12} R_2$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ : R_3 - 8R_2 \\ : R_4 + 7R_2 \end{array}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ : R_4 + \frac{3}{2}R_3 \end{array}$$

$$= 12 \cdot (1 \cdot 1 \cdot -1 \cdot \frac{9}{2})$$

$$= -\frac{108}{2}$$

$$= -54$$

นักศึกษาไม่จำเป็นต้องทำตามวิธีที่ 1 นี้ก็ได้อาจจะใช้วิธีแปลงรูปให้แถวหรือสดมภ์ใดมี 0 ปรากฏอยู่มากที่สุดแล้วใช้ Cofactor Expansion กระจายตามแถวหรือสดมภ์นั้น หรือจะแปลงรูปเป็น Diagonal Form ก็ได้

วิธีที่ 2. ใช้ Pivotal Condensation Method

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{3^{4-2}} \begin{vmatrix} (3 \cdot 2) - (-5 \cdot -2) & (3 \cdot 8) - (-5 \cdot -5) & (3 \cdot 5) - (-5 \cdot 4) \\ (3 \cdot 4) - (-2 \cdot -2) & (3 \cdot 7) - (-2 \cdot -5) & (3 \cdot -3) - (-2 \cdot 4) \\ (3 \cdot -3) - (2 \cdot -2) & (3 \cdot -5) - (2 \cdot -5) & (3 \cdot 8) - (2 \cdot 4) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^2} \begin{vmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 8 & 11 & -1 \\ -5 & -5 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{(-4)^{3-2}} \begin{vmatrix} (-4 \cdot 11) - (8 \cdot -1) & (-4 \cdot -1) - (8 \cdot 5) \\ (-4 \cdot -5) - (-5 \cdot 1) & (-4 \cdot 16) - (-5 \cdot 5) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{(-4)} \begin{vmatrix} -36 & -36 \\ 15 & -39 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-4)} \begin{vmatrix} -12 & -12 \\ 5 & -13 \end{vmatrix}$$

$= -54$

ข้อสังเกต

1. การใช้ Pivotal Condensation Method ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์นั้น เรามีวิธีตรวจสอบว่าที่ดำเนินมาแต่ต้นมีอะไรผิดพลาดบ้าง กล่าวคือ ในเทอม $\frac{1}{a_{11}^{n-2}}$ นั้นตัวคงที่ a_{11} จะต้องหารสมาชิกทุกตัวของแมตริกซ์ขนาด $(n-2)\times(n-2)$ ได้ลงตัว ถ้าหารไม่ลงตัวแสดงว่าเราคูณไขว้ผิด (ขอให้สังเกตว่า $(n-2)$ คือกำลังของ a_{11}

ดังตัวอย่างที่ผ่านมาตัวคงที่ 3 ในเทอม $\frac{1}{3^2}$ จะต้องหารสมาชิกทุกตัวในแมตริกซ์ขนาด 2×2

คือ $\begin{vmatrix} -36 & -36 \\ 15 & -39 \end{vmatrix}$ ได้ลงตัว

2. การใช้ Pivotal Condensation Method นั้นไม่จำเป็นต้องลดรูปแมตริกซ์เดิมจนกระทั่งถึงแมตริกซ์ขนาด 2×2 เสมอไป ถ้าลดรูปจนเหลือแมตริกซ์ขนาด 3×3 แล้วสามารถคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้ง่ายก็ไม่จำเป็นต้องลดรูปต่อไป แต่นิยมลดรูปจนเหลือขนาด 2×2 เพราะเป็นขนาดที่คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้สะดวกที่สุด

ตัวอย่าง 3.22 จงหาค่า $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ โดยวิธี Pivotal Condensation Method

วิธีทำ

ในที่นี้ $a_{11} = 0$

สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^{3-2}} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \quad (42+12)$$

$$= 18$$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. จงคำนวณหา

   ก. ค่า $\mu(\pi)$ ของการจัดเรียงลำดับทุกชุด เมื่อกำหนดให้ $n = 4$

   ข. $\mu(2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \ldots, 2n, 2n-1)$

   ค. $\mu(n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1)$

2. จงคำนวณหา

ก. $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$

ข. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

ค. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

ง. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

จ. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

ฉ. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 21 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{vmatrix}$

ช. $\begin{vmatrix} 0 & i & -i & 1+i \\ i & 0 & i & -1 \\ 1+i & -1 & i & 0 \end{vmatrix}$

ช. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_i & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$

ฌ. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

3. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ต่อไปนี้โดยวิธี Sweepout Process Pivotal Condensation Method

ก. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

ข. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & -6 & 4 & 1 & 10 \\ -3 & 7 & 2 & -7 & -16 \end{vmatrix}$

ค. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}$

ง. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ c & b & a & 1 \end{vmatrix}$

4. จงคำนวณหา

ก. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$

ข. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ข้อแนะนำ ให้ทดลองหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ขนาดเล็กดูก่อน

5. จงหาค่าของดีเทอร์มิแนนต์ต่อไปนี้โดยเสนอผลออกมาในรูปผลคูณของเทอมต่าง ๆ (Factored Form)

ก. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ข. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

6. จงพิสูจน์ว่า ถ้าแถวที่ i ของแมตริกซ์ A เกิดจากการประกอบกันของแถวอื่น ๆ แล้ว det A จะมีค่าเป็นศูนย์

ข้อแนะนำ ถ้ายังทำไม่ได้ให้ข้ามไปศึกษาบทที่ 4 ก่อนแล้วค่อยย้อนกลับมาพิสูจน์

7. ถ้า A และ B ต่างก็เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$

ก. จงพิสูจน์ว่า $\det A^T B = \det AB^T = \det A^T B^T = \det AB$

ข. จงพิสูจน์ว่า $\det A^* B^* = \overline{\det AB}$

8. กำหนดให้

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

จงคำนวณหา $[A_{ij}]^T_{3\times 3}$ เมื่อ A_{ij} คือองค์ประกอบร่วมของ a_{ij} หลังจากนั้น จงคำนวณหาผลคูณ $A \cdot [A_{ij}]^T$ และ $A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot [A_{ij}]^T$ ถ้า $\det A \neq 0$

9. ก. จงพิสูจน์ว่า

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}_{n\times n} = 0$$

ข. จงพิสูจน์ว่า

$$\begin{vmatrix} x+\lambda & x & x & \dots & x \\ x & x+\lambda & x & \dots & x \\ x & x & x+\lambda & \dots & x \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ x & x & x & \dots & x+\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} = \lambda^{n-1}(nx+\lambda)$$

ข้อแนะนำ ให้ทดลองพิสูจน์กับแมตริกซ์ขนาดเล็กดูก่อน อนึ่ง โจทย์ข้อนี้มีประโยชน์มากสำหรับนำไปใช้ในทางทฤษฎีสถิติ

10. จงพิสูจน์ว่า

$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

ทั้งนี้ให้กระทำโดยมิต้องกระจายค่าดีเทอร์มิแนนต์ออกมา

11. จงกระจายดีเทอร์มิแนนต์ต่อไปนี้แล้ววาดรูปแสดงรูปทรงทางเรขา

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

12. จาก Vandermonde Matrix

$$V = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \dots & x_3 & 1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

จงพิสูจน์ว่า $\det V = \underset{i<j}{\pi} (x_i - x_j) ; i, j = 1, 2, \dots, n$

13. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็น Skew-Symmetric ขนาด $n \times n$ โดยที่ n เป็นเลขคี่ แล้ว $\det A = 0$

14. A เป็น Square Matrix ของจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงให้เห็นว่า

$$\det A^* = \det \overline{A} = \overline{\det A}$$

15. A เป็น Square Matrix แมตริกซ์ B เกิดขึ้นจากการนำ (-1) เข้าไปคูณกับสมาชิกของ A เฉพาะตัวที่ผลรวมของ Subscript มีค่าเป็นเลขคี่ จงแสดงให้เห็นว่า $\det B = \det A$

16. จงพิสูจน์ว่าแมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ จะมีคุณสมบัติสอดคล้องกับกฎ

การสลับที่สำหรับการคูณ (Commutative Law for Multiplication) **ก็ต่อเมื่อ**

$$\det\begin{bmatrix} b & a-c \\ \beta & \alpha-\gamma \end{bmatrix} = 0$$

17. **ก. จงยกตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นว่า** $\det(A+B) \not\equiv \det A + \det B$

ข. ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

จงแสดงให้เห็นว่า $\det(A+B) = \det A + \det B$ **ก็ต่อเมื่อ**

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = 0$$

18. **จงคำนวณหา**

ก. $$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ b & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & b & a & \cdots & a & a \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

ข. $$\begin{Vmatrix} a & a & & & & 0 \\ b & a & a & & & \\ & b & a & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & b & a & a \\ & & & & b & a \end{Vmatrix}_{n\times n}$$

หมายเหตุ แมตริกซ์ในข้อ ข. เรียกว่า Tridiagonal Matrix

19. **จงแสดงให้เห็นว่าสมการ**

$$\begin{vmatrix} 0 & (I-x & p-x \\ -\alpha-x & 0 & y-x \\ -p-x & -y-x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

จะมี Real Root **ได้อย่างน้อย** 1 **ค่า เมื่อใดจะมี** Real Root **ได้มากค่า** (Multiple Root)

20. **สมการกำลังสอง** (Quadratic Equation)

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0 \; ; \; a_0 \neq 0$$

$$\text{และ } b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0 \; ; \; b_0 \neq 0$$

จะมีจุดตัดร่วมกัน (รากของระบบสมการ) ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

จงอาศัยความเป็นจริงข้างต้นนี้หาค่า α และ β ที่ทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มีจุดตัดร่วมกัน

$$\alpha x^2 + x + (1-\alpha) = 0$$

$$(1-\beta) x^2 + x + \beta = 0$$

3.5 ดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณของเมตริกซ์

(Determinant of Product of Matrices)

3.51 ดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Square Matrix

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Square Matrix ขอให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ ซึ่งมีส่วนเชื่อมโยงไปถึงทฤษฎีหรือเทคนิคการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณของแมตริกซ์ดังกล่าวโดยตรง

ตัวอย่าง 3.23 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณ AB เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ให้ $C = AB$

ดังนั้น

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det C &= (-6)(-24)(35) \\ &= (3 \cdot -2)(4 \cdot -6)(5 \cdot 7) \\ &= (3 \cdot 4 \cdot 5)(-2 \cdot -6 \cdot 7) \\ &= \det A \cdot \det B \end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.23 จะเห็นได้ว่าค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Diagonal Matrix มีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ Diagonal Matrix คู่นั้น

นั่นคือถ้า A และ B ต่างก็เป็น Diagonal Matrix ขนาดเดียวกันแล้ว

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

อย่างไรก็ตาม ข้อสรุปนี้มิได้จำกัดอยู่ในวงแคบที่กระทำได้เฉพาะกับ Diagonal Matrix เท่านั้น Square Matrix ใด ๆ ก็สามารถใช้ผลสรุปดังกล่าวได้ ทั้งนี้เพราะเราสามารถแปลงรูปให้ Square Matrix ใด ๆ เป็น Diagonal Matrix ได้โดยอาศัย Elementary Operation (จะใช้ Elementary Row Operation หรือ Elementary Column Operation ก็ได้)

ตัวอย่าง 3.24 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณ AB เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \underset{R_3 - 3R_1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} \underset{R_2 - R_1}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \quad : \text{(ทฤษฎี 3.10)}$$

$$= \det \underset{R_1 + R_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}} \underset{R_1 + 3R_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \quad : \text{(ทฤษฎี 3.10)}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 2 = (-2)(-1) = \det A \cdot \det B$$

---

1 Elementary Matrix คือแมตริกซ์ที่เกิดจากการใช้ Elementary Operation กระทำกับ Identity Matrix 1 ครั้ง (Single Operation on I) เช่น

จาก $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : R_1 \leftrightarrow R_2, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} : R_2 - R_1,$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : R_1 + 3R_2$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.24 จะสังเกตเห็นได้ว่าเราได้ใช้ Elementary Operation แปลงรูปแมตริกซ์เดิมให้เป็น Diagonal Form

อนึ่ง ถ้าสังเกตให้ดีจะเห็นว่าการแปลงรูปครั้งหนึ่งก็คือการนำ Elementary Matrix[1] ไปคูณกับแมตริกซ์เดิมครั้งหนึ่งนั่นเอง

ดังนั้น ตามตัวอย่าง 3.24 จะเห็นได้ว่า

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎี 3.12 $\det EA = \det E \cdot \det A$ โดยที่ E เป็น Elementary Matrix และ A เป็น Square Matrix

พิสูจน์ Elementary Matrix คือแมตริกซ์ที่เกิดจากการใช้ Elementary Operation กระทำกับ Identity Matrix เพียง 1 ครั้ง

สมมุติ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ขนาด 3×3 และ Identity Matrix คือ

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ก. เมื่อสลับแถว (หรือสดมภ์) คู่ใด ๆ ของ A สมมุติแถวที่ 1 กับแถวที่ 3

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E_1A$$

$$\det EA = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det E_1 \cdot \det A$$

ข. เมื่อคูณแถว (หรือสดมภ์ใด ๆ) ด้วยตัวคงที่ k สมมุติคูณแถวที่ 2 ด้วย k ดังนั้น

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E_2A$$

$$\det E_2A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det E_2 \cdot \det A$$

ค. เมื่อบวก k เท่าของแถวใด ๆ (สดมภ์) เข้ากับอีกแถว (สดมภ์) หนึ่ง สมมุติ นำ k เท่าของแถวที่ 2 ไปบวกเข้ากับแถวที่ 1

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= E_3A$$

ดังนั้น

$$\det A = (1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det E_3 \cdot \det A \; ; \det E_3 = 1$$

จากกรณีเฉพาะข้างต้น สามารถขยายสู่กรณีทั่วไปสำหรับแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ได้ ดังนั้น

$$\det EA = \det E \cdot \det A$$

ผลจากทฤษฎีนี้ทำให้มองเห็นได้ว่าเราสามารถแปลงรูปแมตริกซ์เดิมให้เป็น Diagonol Matrix หรือ Identity Matrix ได้

นั่นคือ

$D_A \sim E_k E_{k-1} E_{k-2} \ldots E_2 E_1 A$ (อาศัย Elementary Row Operation)

หรือ $D_A \sim A E_1 E_2 \ldots E_{k-2} E_{k-1} E_k$ (อาศัย Elementary Column Operation)

และ

$$\det D_A = \det E_k \cdot \det E_{k-1} \cdot \det E_{k-2} \ldots \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det A = \det A$$

หรือ

$$\det D_A = \det A \cdot \det E_1 \ldots \det E_{k-2} \cdot \det E_{k-1} \cdot \det E_k = \det A$$

ความรู้ตอนนี้จะช่วยให้เข้าใจทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.13 ดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณของแมตริกซ์คู่ใด ๆ จะมีค่าเท่ากับผลคูณของดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์คู่นั้น นั่นคือ

$\det AB = \det A \cdot \det B$ เมื่อ A และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$

พิสูจน์

$D_A = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$ หรือ $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} D_A$

$$D_B = E_r E_{r-1} \ldots E_2 E_1 B \text{ หรือ } B = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{r-1}^{-1} E_r^{-1} D_B$$

D_A และ D_B คือ Diagonal Matrix ที่เกิดจากการแปลงรูป (อาศัย Elementary Operation) ของแมตริกซ์ A และ B ตามลำดับ

$$\begin{aligned}
AB &= (E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} D_A)(E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{r-1}^{-1} R_r^{-1} D_B) \\
\det AB &= \det E_1^{-1} \det E_2^{-1} \cdots \det E_{k-1}^{-1} \det E_k^{-1} \det D_A \cdot \det E_1^{-1} \det E_2^{-1} \cdots \\
&\quad \det E_r^{-1} \det D_B \\
&= \det D_A \cdot \det D_B
\end{aligned}$$

แต่ $\det D_A = \det A$ และ $\det D_B = \det B$ ($\because D_A \sim A$ และ $D_B \sim B$)

ดังนั้น

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

ทฤษฎี 3.14 ถ้า A, B, C, ..., M, N เป็น Square Matrix ขนาดเดียวกันแล้ว $\det(ABC \cdots MN)$ $= \det A \cdot \det B \cdot \det C \cdots \det M \cdot \det N$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 3.25 กำหนดให้

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5I$$

จงคำนวณหา $\det A$

วิธีทำ

จาก $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5I$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \det A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(5I) : \text{(ทฤษฎี 3.13)}$$

$$5 \cdot \det A \cdot 5 = 125$$

$$\det A = 5$$

ทฤษฎี 3.15 ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็น Square Matrix (ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเดียวกัน) แล้ว

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_n$$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

หมายเหตุ แมตริกซ์ทุกรูปสามารถแปลงรูปให้เป็น Diagonal Matrix ได้โดยที่จะไม่ทำให้ค่าดีเทอร์มิแนนต์เปลี่ยนแปลง โดยนัยนี้ เราจึงสามารถทำให้แมตริกซ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็น Diagonal Matrix และสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้โดยง่าย

ตัวอย่าง 3.26 จงคำนวณหา

$$\det \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

วิธีทำ เราจะต้องสลับแถว (หรือสดมภ์) จนกระทั่งแมตริกซ์ย่อย (Submatrix) ในแนวทแยงปรากฏลักษณะตามทฤษฎี
ดังนั้น

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| = (-1) \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \quad : R_1 \leftrightarrow R_4$$

$$= (-1)(-1)\left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \qquad : R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1$$

$$= 1$$

3.5.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Rectangular Matrix

การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Rectangular Matrix มีส่วนแตกต่างไปจากในกรณีที่เป็น Square Matrix อยู่บ้าง ในบางกรณีจำเป็นต้องนิยามแมตริกซ์บางลักษณะขึ้นเพื่อสนับสนุนการศึกษาดังกล่าว แต่อย่างไรก็ตามการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Rectangular Matrix นี้ ยังมีความจำเป็นต้องข้องเกี่ยวหรืออ้างอิงถึง Square Matrix อยู่มาก

ในการศึกษาเรื่องการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่าง Rectangular Matrix นั้น เราจะแยกศึกษาเป็น 2 ส่วน ตามลักษณะและขนาดของแมตริกซ์ที่มาคูณกันคือ

ก. $C = A_{m \times n} B_{n \times m}$ เมื่อ $m > n$

ข. $C = A_{m \times n} B_{n \times m}$ เมื่อ $m \leqslant n$

อนึ่ง ขอให้สังเกตเกี่ยวกับเรื่องนี้ไว้ 2 ประการคือ ประการแรก การคูณระหว่าง A กับ B ต้อง define หรือสอดคล้องกับนิยามการคูณ และประการที่สอง ผลคูณระหว่างแมตริกซ์ A และ B ต้องเป็น Square Matrix

ทฤษฎี 3.16 ถ้า A เป็นแมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times m$ โดยที่ $m > n$ แล้ว $\det AB = 0$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{jk}]_{n \times m}$ โดยที่ $m > n$

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

ทำให้แมตริกซ์ A และ B เป็น Square Matrix ขนาดเดียวกัน $(m \times m)$ โดยเพิ่ม 0 ให้แมตริกซ์ A m - n สดมภ์ และเพิ่ม 0 ให้แมตริกซ์ B m - n แถว

ดังนั้น

$$\det AB = \det [A \mid 0] \begin{bmatrix} B \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$$\det AB = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{m-n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{matrix}}\right\} m-n$$

$$= 0$$

ตัวอย่าง 3.27 จงคำนวณหา

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เพิ่ม 0 ให้แก่แมตริกซ์ A 1 สดมภ์และเพิ่ม 0 ให้แก่แมตริกซ์ B 1 แถว ซึ่งจะทำให้แมตริกซ์ A และ B กลายเป็นแมตริกซ์ขนาด 3×3 ทั้งคู่

ดังนั้น
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 0 \cdot 0$$
$$= 0$$

หมายเหตุ

ถ้าคำนวณจากแมตริกซ์เดิมโดยตรงก็จะได้ผลลัพธ์ตรงกัน

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= 0$$

3

สำหรับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณ AB เมื่อ A เป็นแมตริกซ์มีขนาด $m \times n$ และ B เป็นแมตริกซ์มีขนาด $n \times m$ โดยที่ $m \leqslant n$ นั้นจำเป็นต้องมีพื้นความรู้หลายประการ ที่สำคัญและจำเป็นยิ่งคือ Major Determinant และ Corresponding Major

นิยาม 3.4 Major Determinant ของแมตริกซ์ขนาด $p \times q$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของ Square Submatrix ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด

ตัวอย่างเช่น A เป็นแมตริกซ์ขนาด 3×2 Square Submatrix ของแมตริกซ์ A จะมีได้ 2 ขนาดคือ ขนาด 2×2 และ 1×1 Square Submatrix ของ A ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด

คือ 2×2

B เป็นแมตริกซ์ขนาด 5×3 Square Submatrix จะมีได้ 3 ขนาดคือ 3×3, 2×2 และ 1×1 ขนาดใหญ่ที่สุดคือ 3×3

C เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ Square Submatrix จะมีได้ n ขนาดคือ $n \times n$, $(n-1) \times (n-1), \ldots, 2 \times 2$, 1×1 ขนาดใหญ่ที่สุดก็คือ $n \times n$ ซึ่งก็คือตัวแมตริกซ์ C เอง

ดังนั้น

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Major Determinant ของ A จะมีได้ 3 ค่าคือ

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ และ } \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

หมายเหตุ ถ้า A เป็นแมตริกซ์ขนาด $p \times q$; $p \geqslant q$ จำนวน Major Determinant จะมีได้รวมทั้งสิ้น $\binom{p}{q} = p!/(p-q)!q!$ ค่า ดังเช่น A เป็นแมตริกซ์ขนาด 3×2 จะมี Major Determinant ได้ทั้งสิ้น $\binom{3}{2} = 3!$ ค่า

นิยาม 3.5

A และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $n \times m$ ตามลำดับ โดยที่ $m \leqslant n$ Major Determinant ของแมตริกซ์ A และแมตริกซ์ B จะเป็น Corresponding Major ของกันและกันก็ต่อเมื่อลำดับที่ของสดมภ์ที่ประกอบกันเป็น Major Determinant ของแมตริกซ์ A กับลำดับที่ของแถวที่ประกอบกันเป็น Major Determinant ของแมตริกซ์ B สอดคล้องซึ่งกันและกัน

ตัวอย่าง 3.28 จงหา Corresponding Major ระหว่างแมตริกซ์ A และ B กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & B_3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \text{ มี Major Determinant ดังนี้คือ}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \text{ และ } \det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

และ $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$ มี Major Determinant ดังนี้คือ

$$\det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \text{ และ } \det\begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น Corresponding Major ของแมตริกซ์ A และแมตริกซ์ B คือ

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \text{ กับ } \det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \text{ กับ } \det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

และ

$$\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \text{ กับ } \det\begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎี 3.17 ถ้า A เป็นแมตริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times m$ โดย $m \leqslant n$ แล้ว $\det AB$ จะมีค่าเท่ากับผลรวมของผลคูณระหว่างแต่ละ Corresponding Major ของแมตริกซ์ A และแมตริกซ์ B

จะขอเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีนี้ไปเพราะค่อนข้างจะซับซ้อนแต่จะยกตัวอย่างวิธีนำมาใช้ให้เป็นสักสองสามตัวอย่างหากสนใจวิธีพิสูจน์หรือความเป็นมาผู้อ่านสามารถหาอ่านได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม

ตัวอย่าง 3.29 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากทฤษฎี 3.17

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \text{ผลรวมของผลคูณระหว่างแต่ละ Corresponding Major}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \right\}$$

ตัวอย่าง 3.30 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \right\}$$

$$= (1)(1) + (c)(c) + (-b)(-b) + (a)(a) = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

ตัวอย่าง 3.31 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

จงหา $\det AA^T$

วิธีทำ

$$\det AA^T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix} + \dots +$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_n & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ a_4 & 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 \\ a_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \cdots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \cdots + (a_2 - a_n)^2$$
$$+ (a_3 - a_4)^2 + (a_3 - a_5)^2 + \cdots + (a_3 - a_n)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2$$
$$= (a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + (a_1^2 - 2a_1a_3 + a_3^2) + \cdots + (a_1^2 - 2a_1a_n + a_n^2) + (a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2)$$
$$+ (a_2^2 - 2a_2a_4 + a_4^2) + \cdots + (a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}a_n + a_n^2)$$
$$= (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) - 2\ (a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n)$$
$$= (n-1)\sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{i<j}^{n} a_ia_j$$

หมายเหตุ ถ้าจะดูง่ายให้นักศึกษาลองทำกับแมตริกซ์ขนาดเล็กลงเช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6 การหาส่วนกลับของแมตริกซ์ (Matrix Inversion)

ได้กล่าวถึงการหาส่วนกลับของแมตริกซ์มาแล้วในตอนต้นซึ่งเรามีวิธีหาโดยอาศัยความรู้เรื่องการแก้ระบบสมการ, การแปลงรูป Augmented Matrix โดยอาศัย Elementary Row Operation และการแบ่งแมตริกซ์เป็นแมตริกซ์ย่อย (Partitioned Matrix) ในตอนนี้จะกล่าวถึงการหาส่วนกลับของแมตริกซ์โดยอาศัยความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์

เกี่ยวกับการหาส่วนกลับของแมตริกซ์นั้น ได้เคยกล่าวไว้แล้วว่าแมตริกซ์ใดจะมีส่วนกลับได้ก็ต่อเมื่อแมตริกซ์นั้นเป็น Nonsingular Matrix และได้เคยกล่าวมาแล้วเช่นกันว่าถ้าศึกษาถึงเรื่องดีเทอร์มิแนนต์แล้วก็จะรู้จัก Nonsingular Matrix ดีขึ้น ต่อไปนี้เราจะศึกษาเรื่องต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้นเป็นลำดับต่อเนื่องกันไป

ทฤษฎี 3.18 A^{-1} จะมีค่าปรากฏ (Exist) ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$[1]

พิสูจน์ 1. ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏ

ดังนั้น $AA^{-1} = I$

$$\det AA^{-1} = \det I$$
$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

แต่ $\det A$ และ $\det A^{-1}$ คือตัวคงที่ (Scalar) ซึ่งตัวคงที่ 2 ตัวคูณกันได้ 1 ย่อมยืนยันว่าตัวคงที่คู่นั้นมิใช่ 0 นั่นคือ $\det A \neq 0$

ดังนั้นถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏ $\det A$ จะไม่เท่ากับ 0

1 A เป็น Nonsingular Matrix ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

2. ในทางกลับกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว A^{-1} จะมีค่าปรากฏ ทฤษฎีนี้อำนวยประโยชน์อย่างสำคัญแก่งานมาก เพราะในหลายครั้งการแก้ปัญหาต้องอาศัยส่วนกลับของแมตริกซ์เข้าช่วย เช่นในการแก้ระบบสมการ การกะประมาณพารามิเตอร์ในการวิเคราะห์การถดถอย ฯลฯ

การหาส่วนกลับของแมตริกซ์เป็นขั้นตอนที่สำคัญและกินเวลากว่าขั้นตอนอื่น เราอาจเสียเวลาไปเปล่า ๆ เพราะเมื่อดำเนินไปถึงขั้นสุดท้ายจึงทราบว่าส่วนกลับของแมตริกซ์มีค่าไม่ปรากฏ ทฤษฎีนี้จะช่วยได้มาก โดยก่อนหาส่วนกลับเราลองเสียเวลาสักเล็กน้อยหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์นั้นดูก่อนว่ามีค่าเป็น 0 หรือไม่ ถ้าเป็น 0 จะได้ไม่ต้องเสียเวลาหาส่วนกลับเพราะจะไม่มีค่าปรากฏ

นิยาม 3.6 A เป็น Square Matrix ขนาด $n \times n$ A_{ij} ; i, j = 1, 2,...,n เป็นองค์ประกอบร่วม (Cofactor) ของสมาชิก a_{ij} ของแมตริกซ์ A

แมตริกซ์ $[A_{ij}]^T_{n\times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$

เรียกว่า Adjoint Matrix ของ A ใช้สัญลักษณ์ adj A

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้ Cofactor ของ $a_{11}, a_{12},\dots,a_{33}$ ดังนี้

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\ ,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\ ,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

ดังนั้น $\quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

ทฤษฎี 3.19 ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 3.32 จงหาส่วนกลับของแมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 2 \neq 0$ แสดงว่า A^{-1} มีค่าปรากฏ

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 3.33 กำหนดให้ $a^3+b^3 = 1$ จงหาส่วนกลับของแมตริกซ์ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$\det A = a^3+b^3+0-0-0-0 = a^3+b^3 = 1$ (โจทย์กำหนด)

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} a^2 & -ab & ab \\ b^2 & a^2 & -ab \\ ab & -b^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{a^3+b^3} \cdot \operatorname{adj} A = 1 \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} a^2 & -ab & ab \\ b^2 & a^2 & -ab \\ ab & -b^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

3.7 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยอาศัยดีเทอร์มิแนนต์

ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยอาศัยความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ ขอสรุปความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ในส่วนที่จะเชื่อมโยงกับการนำดีเทอร์มิแนนต์ไปใช้ประโยชน์ในลักษณะดังกล่าวเสียก่อน แม้ว่าจะมีบางเรื่องที่นักศึกษายังไม่เคยศึกษามาก่อนเช่น rank ของแมตริกซ์และเรื่อง Vector Space เกี่ยวข้องอยู่ด้วย แต่ด้วยเหตุที่เรื่องดังกล่าวนั้นต่อเนื่องกับเรื่องของดีเทอร์มิแนนต์จึงถือโอกาสนำมากล่าวเสียก่อน การศึกษาถึงรายละเอียดของเรื่องนั้น ๆ จะกล่าวในบทต่อ ๆ ไป

ถ้า A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $\det A \neq 0$ แล้ว จะทำให้ทราบว่า

ก. A^{-1} มีค่าปรากฏ

ข. A เป็น Singular Matrix

ค. $r(A) = n$ กล่าวคือแมตริกซ์ a มี Full Rank

ง. แถวต่าง ๆ ของ A เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

จ. สดมภ์ต่าง ๆ ของ A เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

ฉ. ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีเพียง Trivial Solution เท่านั้น

ช. ระบบสมการ $AX = B$ จะมี Unique Solution (คือมีคำตอบเพียงชุดเดียว)

หมายเหตุ

สำหรับข้อสรุป ค. ง. และ จ. เป็นเรื่องของ Vector Space เราจะศึกษาเรื่องนี้โดยละเอียดในบทที่ 4

ทฤษฎี 3.20 ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้น $A_{n\times n} X_{n\times 1} = 0_{n\times 1}$ จะมี Nontrivial Solution ก็ต่อเมื่อ $\det A = 0$

พิสูจน์ การพิสูจน์จำเป็นต้องอาศัยความรู้เรื่อง rank ของแมตริกซ์ จึงจะยังไม่พิสูจน์ในขณะนี้เมื่อศึกษาถึงเรื่องนั้นแล้วนักศึกษาอาจย้อนมาพิสูจน์ได้เองโดยง่าย

ทฤษฎี 3.21 (Cramer's Rule)

ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏระบบสมการวิวิธพันธ์เชิงเส้น $A_{n\times n} X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ จะให้คำตอบได้เพียงชุดเดียว (Unique Solution) คำตอบชุดนั้นคือ

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot \det [A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots, A_n] \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

พิสูจน์ จากระบบสมการ $A_{n\times n} X_{n\times n} = B_{n\times 1}$

ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏ

$$X = A^{-1} B$$

$$= \left(\frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \right) \cdot B \qquad \textbf{(ทฤษฎี 3.19)}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}) \\ (b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_j = \frac{1}{\det A} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}) \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$

โดยอาศัยความรู้เรื่อง Cofactor Expansion ที่กระจายตามสดมภ์ที่ j [1]

$$x_j = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,j-1} & b_1 & a_{1,\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,j-1} & b_2 & a_{2,\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,j-1} & b_n & a_{n,\,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \det [A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}, B, A_{j+1}, \ldots, A_n] \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

---

[1] A เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A ที่ได้จากการใช้ Cofactor Expansion ที่กระจายตามสดมภ์ที่ j คือ

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

หมายเหตุ ถ้า $\det A = 0$ ไม่ได้หมายความว่าระบบสมการจะไม่มี Solution แต่หมายความว่าจะแก้สมการตามวิธีนี้ไม่ได้

ตัวอย่าง 3.34 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x+3y+z &= 0 \\ 2x-y-3z &= 0 \\ 3y+5z &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ จัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแมตริกซ์ $AX = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\det A = 0$ แสดงว่าระบบสมการนี้มี Nontrivial Solution และถ้า $\det A \neq 0$ แสดงว่าระบบสมการนี้มีเพียง Trivial Solution

ในที่นี้

$\det A = -5+0+6-0-30-(-9) = -20 \neq 0$ แสดงว่าระบบสมการนี้มีเพียง Trivial Solution เท่านั้น นั่นคือ $x = y = z = 0$

ถ้านักศึกษามีความสงสัยในผลสรุป หรืออาจหลงลืมเรื่องการแก้ระบบสมการเอกพันธ์ดังที่เคยกล่าวไว้ในบทที่ 1 และ 2 ก็จะแสดงให้เห็นว่าผลสรุปนี้เป็นจริงโดยอาศัย Cramer's Rule ดังต่อไปนี้

$$x = \frac{1}{\det A}\cdot\det[B, A_2, A_3] = \frac{1}{-20}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \frac{0}{-20} = 0$$

$$y = \frac{1}{\det A}\cdot\det[A_1, B, A_3] = \frac{1}{-20}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{0}{-20} = 0$$

$$z = \frac{1}{\det A}\cdot\det[A_1, A_2, B] = \frac{1}{-20}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{0}{-20} = 0$$

ตัวอย่าง 3.35 ระบบสมการต่อไปนี้

$$tx+y+z = 0$$

$$x+ty+z = 0$$

$$x+y+tz = 0$$

จะมี Trivial Solution และ Nontrivial Solution ได้เมื่อใด ?

วิธีทำ

จัดระบบสมการให้เป็นรูปแมตริกซ์ $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ก. ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้น $AX = 0$ จะมี Nontrivial Solution ได้เมื่อ $\det A = 0$ นั่นคือ

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0$$

$$t^3-3t+2 = 0$$

$$(t+2)(t-1)^2 = 0$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้จะมี Nontrivial Solution เมื่อ $t = -2$ และ $t = 1$

ข. ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้น $AX = 0$ จะมี Trivial Solution เมื่อ $\det A \neq 0$ นั่นคือ

$$(t+2)(t-1)^2 \neq 0$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้จะมีเพียง Trivial Solution เมื่อ $t \neq -2$ และ $t \neq 1$

ตัวอย่าง 3.36 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$2x+y+z = 2$$

$$4x-2y-3z = 0$$

$$6x+3y-2z = 6$$

วิธีทำ

จัดระบบสมการให้อยู่ในรูปแมตริกซ์ $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \frac{80}{2} = 40$$ (อาศัย Pivotal Condensation Method)

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \det [\, B, A_2, a_3 \,]$$

$$= \frac{1}{40} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \cdot 20 = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{\det A} \cdot \det [\, A_1, B, A_3 \,]$$

$$= \frac{1}{40} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 6 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \cdot 40 = 1$$

$$z = \frac{1}{\det A} \cdot \det [\, A_1, A_2, B \,]$$

$$= \frac{1}{40} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2^{3-2}} \begin{vmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{40} \cdot 0 = 0$$

นั่นคือ $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 0$

3.8 การกระจายเพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ตามวิธีของลาปลาซและดีเทอร์มิแนนต์ของผลบวกของแมตริกซ์

ในตอนท้ายของบทนี้ ก่อนที่จะผ่านเรื่องดีเทอร์มิแนนต์ไปสู่เรื่องอื่น (ความจริงแล้วเรายังมีทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์อีกมาก บางทฤษฎีและบางหัวข้อก็จัดไว้เป็นแบบฝึกหัด บางเรื่องก็ข้ามไป ทั้งนี้ก็ต้องพิจารณาถึงความจำเป็นที่จะนำมาใช้เป็นประโยชน์เป็นประการสำคัญ นักศึกษาที่มีความสนใจเรื่องนี้เป็นพิเศษสามารถค้นคว้า

เพิ่มเติมได้จากหนังสือตามรายการ หนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม) จะขอกล่าวถึง Laplace's Expansion และดีเทอร์มิแนนต์ของผลบวกของแมตริกซ์ตามลำดับ

3.8.1 การกระจายเพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ตามวิธีของลาปลาซ

ทฤษฎี 3.22 (Laplace's Expansion)

A เป็น Square Matrix ขนาด $n \times n$ ให้ $(i) = i_1, i_2, \ldots, i_r$ เป็นเซตของแถวต่าง ๆ ของแมตริกซ์ A ที่เรียงกันตามลำดับปกติ $(k) = i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_n$ เป็น Complementary Set ของ (i) และให้ $(j) = j_1, j_2, \ldots, j_r$ เป็นเซตของสดมภ์ต่าง ๆ ของแมตริกซ์ A ที่เรียงตามลำดับปกติ $(p) = j_{r+1}, j_{r+2}, \ldots, j_n$ เป็น Complementary Set ของ (j)

ดังนั้น

$$\det A = \sum_{(j)} A_{(i)\,(j)} M_{(k)\,(p)}$$

โดยที่

- $M_{(k)\,(p)}$ เป็น Minor Determinant ที่เกิดจากการตัดแถวและสดมภ์ต่าง ๆ ของแมตริกซ์ A ทิ้งไป (i) แถวและ (j) สดมภ์ตามลำดับ หรือนัยหนึ่ง M เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ขนาด $(k) \times (p)$

และ

$$A_{(i)(j)} = (-1)^{\Sigma i + \Sigma j} M_{(i)\,(j)}$$

ทฤษฎีของลาปลาซเป็นทฤษฎีที่กล่าวถึงการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ โดยกระจายตามแถวที่ $i_1, i_2, \ldots, i_r$ หรือสดมภ์ที่ $j_1, j_2, \ldots j_r$ หรือนัยหนึ่งเป็นการหาค่าดีเทอร์-มิแนนต์โดยการกระจายทีละ r แถว (หรือ r สดมภ์) เช่นกระจายตามแถวที่ 1, 2, 5, 6 เซต (i) ก็คือ (1, 3, 5, 6) ดังนี้เป็นต้น (Cofactor Expansion ที่เราศึกษาผ่านมาแล้วในตอนต้น ซึ่งเป็นการกระจายเพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ตามแถวใดแถวหนึ่งหรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่งนั้นเป็นเพียงกรณีเฉพาะของทฤษฎีนี้เท่านั้น) ทฤษฎีนี้จึงมีประโยชน์มาก และถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวาง (ส่วนมากจะนำกรณีเฉพาะของทฤษฎีคือกรณี Cofactor Expansion ไปใช้) เหมาะสำหรับนำไปใช้ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ขนาดใหญ่ การพิสูจน์ค่อนข้างซับซ้อนจึงขอเว้นการพิสูจน์ไว้ แต่จะขอยกตัวอย่างวิธีใช้ให้ดูหลาย ๆ ตัวอย่าง

นักศึกษาอาจสงสัยและยังมองไม่เห็นภาพว่า $A_{(i)\ (j)}$[1] และ $M_{(k)\ (p)}$ มีรูปร่างลักษณะอย่างไร จึงจะขออธิบายเพิ่มเติมดังนี้

สมมุติต้องการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ขั้นแรกให้ตัดสินใจเลือกเสียก่อนว่าจะหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามแถวหรือสดมภ์ (เทคนิคการเลือกคงปฏิบัติเช่นเดียวกันกับกรณี Cofactor Expansion)

สมมุติต้องการกระจายตามแถวที่ 1 และแถวที่ 3

$$(i) = 1, 3$$

ดังนั้น Complementary Set ของแถวที่ 1 และ 3 คือแถวที่ 2 นั่นคือ $(k) = 2$

หลังจากนั้นจึงเริ่มดึงสมาชิกในแถวที่ 1 และแถวที่ 3 ที่อยู่ในตำแหน่งตรงกันมาแถวละ 2 ตัว

เหตุที่ต้องดึงมาแถวละ 2 ตัวก็เพราะเราเริ่มต้นด้วยการเลือกกระจายทีละ 2 แถว เพื่อสร้างดีเทอร์มิแนนต์ $A_{(i)\ (j)}$ ซึ่งต้องเป็น Square Matrix จึงจำเป็นต้องดึงสมาชิกในแถวที่เลือกไว้มาแถวละ 2 ตัว

จึงได้ $A_{(i)\ (j)}$ รวมทั้งสิ้น $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ ชุดคือ[2]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

สดมภ์ของ A ที่สอดคล้องกับสมาชิกของแถวที่ 1 และแถวที่ 3 หรือสดมภ์ที่ (1, 2) สดมภ์ที่ (1, 3) และ (2, 3) ซึ่งมี Complementary Column เป็นสดมภ์ที่ 3 สดมภ์ที่ 2 และสดมภ์ที่ 1 ตามลำดับ นั่นคือ $(i) = (1, 3), (k) = 2 ; (j) = (1, 2), (1, 3)$ และ $(2, 3)$ ตามลำดับ และ (p) ซึ่งเป็น Complementary Set ของ (j) คือ $(3), (2), (1)$ ตามลำดับ

---

[1] อย่าเข้าใจว่า $A_{(i)\ (j)}$ คือ Major Determinant เพราะ Major Determinant คือ det ของ Square Submatrix ที่มีขนาดใหญ่ที่สุด $A_{(i)\ (j)}$ ในที่นี้ทำหน้าที่เช่นเดียวกับ a_{ij} ในเรื่อง Cofactor Expansion จึงมีขนาดใดก็ได้

[2] แถวหนึ่ง ๆ มีสมาชิก 3 ตัว เลือกมาครั้งละ 2 ตัว จึงกระทำได้ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ วิธี

สดมภ์ที่ 1 ตามลำดับ นั่นคือ (i) = (1, 3), (k) = 2 ; (j) = (1, 2), (1, 3) และ (2, 3) ตามลำดับ และ (p) ซึ่งเป็น Complementary Set ของ (j) คือ (3), (2), (1) ตามลำดับ

ดังนั้น $A_{(i)(j)}$ และ $M_{(k)(p)}$ จึงมีค่าดังนี้

$$A_{(1,3)(1,2)} = (-1)^{(1+3)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{(2)(3)} = |a_{23}|^{1}$$

$$A_{(1,3)(1,3)} = (-1)^{(1+3)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{(2)(2)} = |a_{22}|$$

$$A_{(1,3)(2,3)} = (-1)^{(1+3)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{(2)(1)} = |a_{21}|$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{(j)} A_{(i)(j)} M_{(k)(p)} \\
&= (-1)^{(1+3)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} |a_{23}| + (-1)^{(1+3)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} |a_{22}| \\
&\quad + (-1)^{(1+3)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} |a_{21}| \\
&= (-1)(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{23}) + (1)(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})(a_{22}) \\
&\quad + (-1)(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})(a_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าได้ผลเช่นเดียวกับวิธีที่ใช้ตามนิยามของดีเทอร์มิแนนต์

ตัวอย่าง 3.37 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ A โดยกระจายตามแถวที่ 2 และ 4 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

---

[1] $A_{(1,3)(1,2)}$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของแมตริกซ์ A ณ ตำแหน่งของแถวที่ 1 และ 3 กับสดมภ์ที่ 1 และ 2 ตัดกัน $M_{(2)(3)}$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ที่เหลือจากการตัดสมาชิกในแถวที่ 1 และ 3 กับสดมภ์ที่ 1 และ 2 ทิ้ง ซึ่งก็คือ สมาชิกของแมตริกซ์ A ณ ตำแหน่งของแถวที่ 2 และสดมภ์ที่ 3 ตัดกันนั่นเอง

วิธีทำ เมื่อกระจายตามแถวที่ 2 และ 4 ดังนั้นจาก

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{5} \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} \end{vmatrix}$$

$$A_{(2,4)(1,2)} = (-1)^{(2+4)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Minor ของ $A_{(2,4)(1,2)}$ คือ det ของแมตริกซ์ที่เกิดจากการตัดสมาชิกในแถว 2, 4 และสดมภ์ 1, 2 ทิ้ง

นั่นคือ Minor ของ $A_{(2,4)(1,2)}$ คือ $M_{(1,3)(3,4)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

ในทำนองเดียวกัน

$$A_{(2,4)(1,3)} = (-1)^{(2+4)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{(1,3)(2,4)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{(2,4)(1,4)} = (-1)^{(2+4)+(1+4)} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{(1,3)(2,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{(2,4)(2,3)} = (-1)^{(2+4)+(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad M_{(1,3)(1,4)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{(2,4)(2,4)} = (-1)^{(2+4)+(2+4)} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{(1,3)(1,3)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{(2,4)(3,4)} = (-1)^{(2+4)+(3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_{(1,3)(1,2)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \det A = {} & (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{11} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{12} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{13} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = {} & -24 - 4 - 6 + 24 + 60 - 0 = 50 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.38 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ โดยวิธีของ Laplace's Expansion เราเลือกกระจายตามแถวที่ 1 และ 2 ดังนั้น จาก

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-2} \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = {} & (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot |0| + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot |4| \\ & + (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot |0| \\ = {} & -20 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต วิธีของลาปลาซ (Laplace's Expansion) เป็นกรณีทั่วไปของการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยวิธีกระจายตามแถวหรือสดมภ์ (Cofactor Expansion)

ถ้ากระจายเฉพาะตามแถวใดแถวหนึ่ง เพียงแถวเดียว หรือเฉพาะสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่งเพียงสดมภ์หนึ่ง เพียงสดมภ์เดียว Laplace's Expansion จะลดรูปเป็น Cofactor Expansion ตามแถวหรือสดมภ์นั้นตามลำดับ

จากตัวอย่างข้างต้น หากกระจายตามแถวที่ 1 จะได้ค่าดีเทอร์มิแนนต์ดังนี้

$$\begin{aligned} \det A = {} & (-1)^{(1+0)+(1+0)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot |1| + (-1)^{(1+0)+(2+0)} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot |0| \\ & + (-1)^{(1+0)+(3+0)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot |-2| \\ = {} & 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ = {} & -4 + 0 - 16 \\ = {} & -20 \end{aligned}$$

หมายเหตุ ที่นิยมกระจายทีละ 2 แถว (สดมภ์) เพราะการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ง่ายและสะดวกกว่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ขนาดอื่น

3.8.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของผลบวกของแมตริกซ์

ทฤษฎี 3.23 ถ้า A และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเหมือนกันยกเว้นในแถวที่ k เท่านั้นที่ต่างกันแล้ว

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \neq n}$ โดยที่

$a_{ij} = b_{ij}$; $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$: $j = 1, 2, \ldots, n$

และ

$a_{kj} \neq b_{kj}$; $j = 1, 2, \ldots, n$

นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ให้ $C = A + B$

ดังนั้น

$$\det C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \cdots & a_{kn}+b_{kn} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ข้อสังเกต ทฤษฎีนี้ยึดถือทฤษฎีของดีเทอร์มิแนนต์ที่ว่า ถ้า $B_k = \sum_{j=1}^{p} A_i$

แล้ว $\det[A_1, \ldots, A_{k-1}, B_k, A_{k+1}, \ldots, A_n] = \sum_{i=1}^{p} \det[A_1, \ldots, A_{k-1}, A_j, A_{k+1}, \ldots, A_n]$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det A + \det B$$

ตัวอย่าง 3.39 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -9 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา $\det(A+B)$

วิธีทำ จากทฤษฎี 3.23

$$\det(A+B) = \det\left\{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -9 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -9 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 18 + 36$$

$$= 54$$

หรือ

$$\det(A+B) = \det\left\{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -9 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 54$$

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของผลคูณระหว่างแมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. กำหนดให้

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5 I_3$$

จงหา det A

3. กำหนดให้

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

จงแสดงให้เห็นว่า $(X^T X)(Y^T Y) - (X^T Y)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}^2$

ข้อแนะนำ อาศัยทฤษฎี 3.17

4. จงคำนวณหา

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

5. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

จงอาศัยผลคูณ AA^T พิสูจน์ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 > \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2$$

6. ก. ถ้า $a^3+b^3 = 1$ จงหาส่วนกลับของแมตริกซ์ C โดยอาศัยวิธีดีเทอร์มิแนนต์

$$C = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

ข. จงหาส่วนกลับของ A โดยอาศัยดีเทอร์มิแนนต์

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. ค่า t, a, b จะต้องเป็นเท่าไรจึงจะทำให้แมตริกซ์ต่อไปนี้ไม่มีส่วนกลับ

ก. $\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & b \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}$

8. ก. ถ้า $ABA = I$ โดยที่ A, B และ I เป็นแมตริกซ์ขนาดเดียวกัน จงแสดงให้เห็นว่า A^{-1} และ B^{-1} มีค่าปรากฏ

ข. จากข้อ ก. จงแสดงให้เห็นว่า $(A^2B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1})^2$

ค. ถ้า $RAC = I$ โดยที่ R, A และ C เป็นแมตริกซ์ขนาดเดียวกัน จงพิสูจน์ว่า A^{-1} จะมีค่าปรากฏ และ $A^{-1} = CR$

9. α และ β เป็นเลขจำนวนจริง จงหาส่วนกลับของแมตริกซ์

$$K = \alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยให้เสนอส่วนกลับออกมาในลักษณะเดียวกับ K

10. ถ้ากำหนดให้ $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ โดยที่ a, b, c และ d เป็นเลขจำนวนจริง จงหา

ส่วนกลับของ A

$$A = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$$

11. กำหนดให้

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & i\alpha \\ 0 & 0 & i\alpha & \alpha \\ \alpha & i\alpha & 0 & 0 \\ i\alpha & \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ; i^2 = -1$$

และกำหนดให้ $A^* = A^{-1}$ จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ α

12. ก. T เป็น Nonsingular Upper Triangular Matrix จงพิสูจน์ว่า ส่วนกลับของ T ก็ยังคงเป็น Triangular Matrix อยู่เช่นเดิมแต่สมาชิกของ T^{-1} จะเป็นส่วนกลับของสมาชิกของ T

ข. $D = [\ d_{ii}\ ]_{n\times n}$ เป็น Diagonal Matrix จงพิสูจน์ว่า $D^{-1} = [\ \frac{1}{d_{ii}}\ ]_{n\times n}$

13. จงหาส่วนกลับของ Tridiagonal Matrix ต่อไปนี้

ก. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & & \\ 0 & -1 & 2 \\ & 2 & -1 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

14. จงแก้สมการต่อไปนี้โดยอาศัย Cramer's Rule

ก. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$

ข. $x_1 + x_2 = 3$

$x_1 + 2x_3 = 2$

$x_3 + 3x_4 = 1$

$4x_1 + x_4 = 0$

15. ก. ค่า t ต้องเป็นเท่าไรจึงจะทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มี Unique Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ข. จงอาศัย Cramer's Rule เพื่อหาค่าของ t จากระบบสมการต่อไปนี้ ค่า t ควรเป็นเท่าไรคำตอบของระบบสมการจึงจะสมเหตุสมผล ? ค่า t ควรเป็นเท่าไรจึงจะทำให้ $x_3 = 0$

$$tx_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + tx_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + tx_3 = 1$$

16. จงแสดงให้เห็นว่า

$$\begin{bmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ y_0 & 0 & 1 & 2x_0^2 \\ y_0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

คือสมการของพาราโบล่าที่ผ่านจุด (x_0, y_0) มีความลาดเอียง (Slope) เป็น y_0' และอนุพันธ์ที่สองเป็น y_0''

17. จงอาศัยทฤษฎีของลาปลาซคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ต่อไปนี้

ก. กระจายโดยอาศัย 2 แถวแรก

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ข. กระจายโดยอาศัย 2 สดมภ์หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \text{[illegible]} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

18. โดยอาศัยการกระจายของลาปลาซ ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็น Square Submatrix และ 0 คือ Zero Matrix ที่ประกอบกันเป็นแมตริกซ์ A

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \ddots & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \det A_3 \ldots \det A_n$

19. ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ และ A_{ij} คือ Cofactor ของ a_{ij} จงแสดงให้เห็นว่า

$$\det [a_{ij} + x]_{n \times n} = \det A + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

20. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

จงหา $\det A$

21. จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมตริกซ์ต่อไปนี้โดยอาศัย Pivotal Condensation Method

ก. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & -8 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$