บทที่ 2

ระบบสมการเชิงเส้น

SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS

2. ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

2.1 การแก้สมการในระบบสมการเชิงเส้น

หลักการขั้นพื้นฐานของพีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) นั้นเริ่มต้นมาจากการศึกษาระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equation) ถ้านักศึกษาใช้ความสังเกตเทคนิคการแก้ระบบสมการต่าง ๆ เช่น การลบสมการหนึ่งออกจากอีกสมการหนึ่ง การคูณสมการคู่ใด ๆ ด้วยตัวคงค่าแล้วบวกลบกัน การคูณสมการหนึ่งด้วยตัวคงค่า หรือการสลับที่ของสมการ จะพบว่าเทคนิคเหล่านี้ล้วนเป็นหลักการขั้นต้นที่นำไปสู่หลักการของพีชคณิตเชิงเส้นทั้งสิ้น

ระบบสมการเชิงเส้นมีรูปทั่วไปมีดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

เป็นระบบสมการที่ประกอบด้วย m สมการและ n ตัวแปรโดย a_{ij} : $i = 1, 2, \ldots, m$; $= 1, 2, \ldots, n$ และ b_i เป็นตัวคงที่ (เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้) และ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่า (Unknown)

อาศัยหลักการคูณแมตริกซ์ เราสามารถจัดระบบสมการเป็นรูปแมตริกซ์ได้ดังนี้

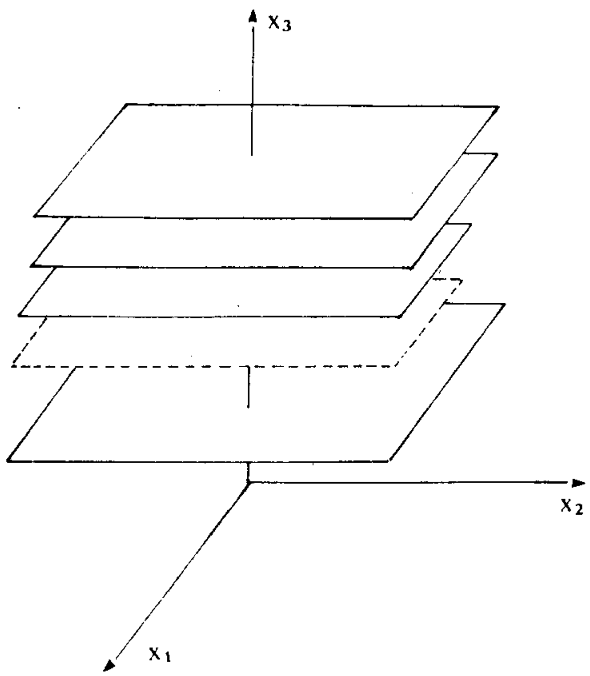
$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$$

โดยที่

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}
$$

หลักการแก้สมการดังกล่าวอาจกระทำโดยการลดรูปสมการ หรือกำจัดตัวแปร (Systematic Elemination) หรืออาศัย Determinant หรือวิธีหนึ่งวิธีใด ซึ่งจะพบในลำดับต่อ ๆ ไป ในการแก้สมการนั้นจะพบว่าบางครั้งระบบสมการไม่ให้คำตอบ (Solution) ซึ่งหากมองในแง่เรขาคณิตก็ตอบได้ว่าเพราะเส้นตรงหรือระนาบเหล่านั้น**ไม่มีจุดตัดร่วมกัน**ระบบสมการที่ไม่มีคำตอบหรือไม่มีจุดตัดร่วมกัน เรียกว่า Inconsistent ถ้ามองในแง่เซตก็คือ Solution Set นั้นเป็น Empty Set หากระบบสมการ**มีคำตอบหรือมีจุดตัดร่วมกัน** เรียกว่า Consistent ซึ่งระบบสมการที่ Consistent นั้นอาจมีคำตอบหรือจุดตัดร่วมกันเพียงจุดเดียว (Unique Solution) หรือมากมายหลายจุด (Infinitely many Solution) ก็ได้

พิจารณาภาพและตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งแสดงระบบสมการในระบบ 3 ตัวแปร



ภาพที่ 2.1 ระนาบแต่ละระนาบ (plane) พุ่งขนานกัน ไม่มีจุดตัดร่วมกัน ระบบสมการดังภาพ เป็นระบบที่ Inconsistent

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \quad \ldots (1)$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \quad \ldots (2)$$

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \ldots (3)$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 1 และ 2

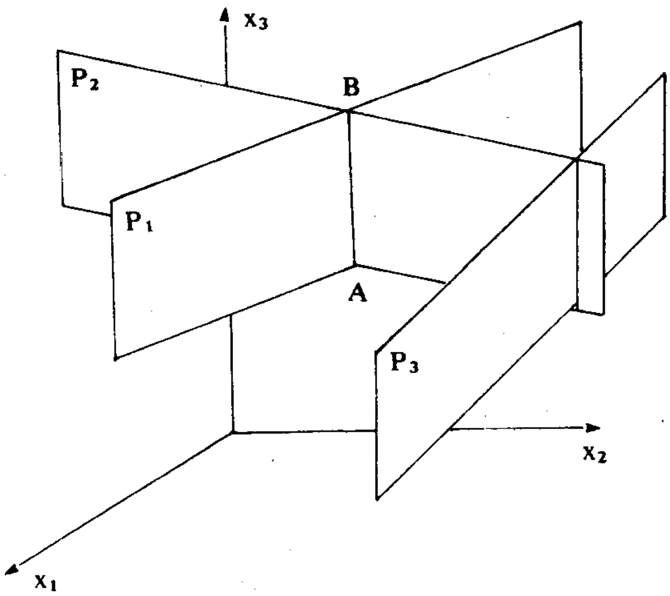
(1) + (2) $\quad 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$

จากสมการที่ 3 $\quad 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

จากสมการทั้งสองนี้ยืนยันว่า $3 = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นจริงในระบบจำนวน จึงสรุปได้ว่า ระบบสมการนี้ Inconsistent หรือไม่มีคำตอบ

ระบบสมการจะ Consistent ได้นั้นจะต้องมีจุดหนึ่งหรือมากมายหลายจุดที่ทุกสมการในระบบ (ที่กำหนดให้) พุ่งผ่านร่วมกัน หากมีบางสมการในระบบนั้นมีจุดตัดร่วมกัน แต่ขณะเดียวกันก็มีอีกบางสมการในระบบเดียวกันไม่ผ่านจุดนั้น จะเกิดกรณี Inconsistent ดังตัวอย่างข้างต้น

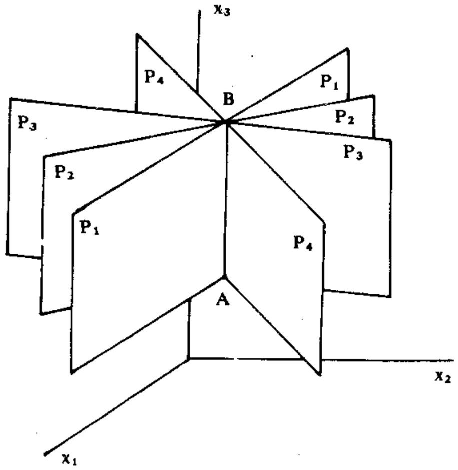
พิจารณาภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 2.2 ระบบสมการ Inconsistent

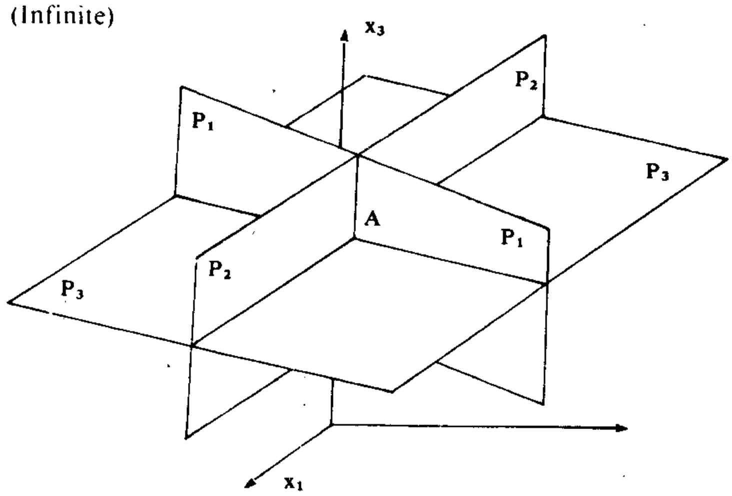
จากภาพ 2.2 จะเห็นว่าระบบสมการนี้ประกอบด้วยสมการ 3 สมการ คือ P_1, P_2 และ P_3 พุ่งผ่านในทิศทางต่างกัน แต่ไม่มีจุดร่วมที่ทั้ง 3 สมการต่างก็พุ่งผ่าน ระบบสมการนี้จึง inconsistent แต่ถ้าระบบสมการนี้มีเพียง 2 สมการ เช่น P_1 และ P_2 หรือ P_2 และ P_3 ระบบสมการนั้นจะ Consistent กล่าวคือ ถ้าระบบสมการประกอบด้วย P_1 และ P_2 เท่านั้น จุดตัดร่วมกันคือจุดบนเส้น AB ซึ่งเส้น AB จะประกอบด้วยจุดต่าง ๆ ที่มีจำนวนมากจน

นับไม่ได้ คำตอบ (Solution) ในกรณีนี้ จึงเป็น Infinitely many Solution และโดยนัยเดียวกัน ถ้าระบบสมการประกอบไปด้วย P_2 และ P_3 หรือ P_1 และ P_3 เท่านั้น ก็จะได้ Infinitely many Solution เช่นกัน



ภาพที่ 2.3 ระบบสมการมี Infinitely many Solution

ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการ (ระนาบ) P_1, P_2, P_3 และ P_4 พุ่งผ่านและตัดร่วมกันที่เส้น AB ดังนั้นระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการทั้งสี่จึง Consistent และมี Infinitely many Solution คำตอบ (Solution) ก็คือค่า Coordinate ของจุดบนเส้นตรง AB ซึ่งมีจำนวนที่ไม่จำกัด (Infinite)



ภาพที่ 2.4 ระบบสมการมี Unipue Solution

สมการ P_1, P_2 และ P_3 พุ่งผ่านในทิศทางต่าง ๆ และมีจุดตัดร่วมกันที่จุด A ลักษณะนี้หมายความว่าระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการ (ระนาบ) P_1, P_2 และ P_3 ให้คำตอบได้ และมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว (Unique Solution) คือค่า Coordinate ของจุด A

ตัวอย่าง 2.2 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3 &= -2 \\ x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ -x_1+x_2+2x_3 &= 3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ สลับสมการ 1 กับสมการ 2 เพื่อให้สมการแรก (Leading Equation) ของระบบนี้มีสัมประสิทธิ์ของ x_1 เป็นเลข 1 (หากไม่มีสมการใดในระบบสมการมีสัมประสิทธิ์ของ x_1 เป็นเลข 1 สมมุติว่าเป็น c ให้เอา c หารตลอด)

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ 3x_1+2x_2-x_3 &= -2 \\ -x_1+x_2+2x_3 &= 3 \\ 3x_1+4x_2+2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ใช้สมการที่ 1 กำจัด x_1 ในสมการถัดลงมาตามลำดับ

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0 \\ -x_2-4x_3 &= -2 \\ 2x_2+3x_3 &= 3 \\ x_2-x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ในสมการที่ 2 ของระบบใหม่นี้ ทำสัมประสิทธิ์ของ x_2 ให้เป็น 1 (หารตลอดด้วย -1) แล้วใช้กำจัด x_2 ในสมการอื่น

$$\begin{aligned} x_1 \quad -3x_3 &= -2 \\ x_2+4x_3 &= 2 \\ -5x_3 &= -1 \\ -5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

จากสมการ (3) ในระบบที่ได้ใหม่นี้ ทำสัมประสิทธิ์ของ x_3 ให้เป็น 1 (หารตลอดด้วย -5) แล้วกำจัด x_3 ในสมการอื่น ๆ

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{5} \\ x_2 &= \frac{6}{5} \\ x_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

คำตอบ (Solution) ของระบบสมการนี้คือ จุด $(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{1}{5})$

กระบวนการแก้สมการโดยวิธีกำจัดตัวแปรตามลำดับขั้น (Systematic Elemination) ดังที่แสดงให้เห็นในตัวอย่างนี้เรียกว่า Sweepout Process เป็นวิธีการที่อาศัยหลักของ Equivalent System of Equation[1] ซึ่งอาศัยขั้นตอนปฏิบัติการทั่วไป 3 ประการ (Elementary Operation) คือ

ก. สลับที่ของสมการคู่ใด ๆ

ข. คูณตลอดด้วยตัวคงที่ใด ๆ แก่สมการใดสมการหนึ่ง (เท่าที่ต้องการ)[2]

ค. การบวก (หรือลบ) k เท่าของสมการหนึ่งเข้ากับ r เท่าของอีกสมการหนึ่ง

โดยปกติเราจะพยายามกำจัดตัวแปรจากสมการต่าง ๆ ออกให้เหลือสมการละ 1 ตัวแปร (หรือให้เหลือน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้) เช่นสมการที่ 1 เหลือ x_1 สมการที่ 2 เหลือ $x_2, \ldots,$ สมการที่ n เหลือ x_n โดยอาศัยการปฏิบัติการ (Operation) ข้างต้นข้อใดข้อหนึ่ง (หรือทั้งหมด) เท่าที่จำเป็นแก่สถานะการณ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการที่มีรูปง่ายที่สุด (Simplest Form) และระบบสมการล่าสุดดังกล่าวจะ Equivalent กับระบบเดิมเสมอ คำว่า equivalent ในที่นี้หมายถึงการมีคำตอบเดียวกันแต่มีรูปสมการต่างกัน ตามตัวอย่างข้างต้น ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Equivalent กับระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{5} \\ x_2 &= \frac{6}{5} \\ x_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

1 ระบบสมการสองระบบจะ Equivalent กันเมื่อคำตอบเฉพาะ (Particular Solution) ของระบบหนึ่งเป็นคำตอบของอีกระบบหนึ่งด้วย หรือนัยหนึ่งทั้งสองระบบมีคำตอบเฉพาะอย่างเดียวกัน ใช้สัญญลักษณ์ $\sim$ แทนคำว่า "Equivalent"

2 การหารตลอดด้วย c ก็คือการคูณตลอดด้วย 1/c

ตัวอย่าง 2.3 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \quad \ldots (2)$$

วิธีทำ

จากระบบสมการที่กำหนดให้

กำจัด x_1 จากสมการที่ 2 ได้โดย (2) - 2(1)

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad \ldots (3)$$

$$7x_2 - 3x_3 = 4 \quad \ldots (4)$$

จากสมการ (4) คูณตลอดด้วย $\frac{1}{7}$ แล้วกำจัด x_2 จากสมการ (3)

$$x_1 \quad + \frac{1}{7}x_3 = \frac{8}{7} \quad \ldots (5)$$

$$x_2 - \frac{3}{7}x_3 = \frac{4}{7} \quad \ldots (6)$$

ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการ (5) และ (6) Equivalent กับระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการ (1) และ (2) และจากระบบสมการ

$$x_1 \quad + \frac{1}{7}x_3 = \frac{8}{7}$$

$$x_2 - \frac{3}{7}x_3 = \frac{4}{7}$$

เป็นระบบสมการที่ประกอบด้วย 2 สมการ แต่ละสมการประกอบด้วย 3 ตัวแปรจำเป็นต้องจัดให้เป็น Parametric Form โดยกำหนดให้ตัวไม่ทราบค่าตัวใดตัวหนึ่ง (หรือหลายตัวทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนตัวไม่ทราบค่าว่ามากกว่าจำนวนสมการอยู่กี่ตัว) เป็นพารามิเตอร์

ให้ $x_3 = t$ โดยที่ t เป็น Parameter ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ $(t \in R)$

$$x_1 = -\frac{1}{7}t + \frac{8}{7}$$

$$x_2 = \frac{3}{7}t + \frac{4}{7}$$

$$x_3 = t$$

จัดเป็นรูปแมตริกซ์ได้ Solution ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการ (1), (2) Consistent และมี Infinitely many Solution โดยที่แต่ละคำตอบ (Solution) ขึ้นอยู่กับค่าของ t

เช่นให้ $t = 0$ คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$

$t = 1$ คำตอบของระบบสมการคือ $(1, 1, 1)$

$t = \frac{1}{2}$ คำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{15}{14}, \frac{11}{14}, \frac{1}{2}\right)$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.4 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้ (c เป็นจำนวนจริงใด ๆ)

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \quad \ldots (1)$$
$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 4 \quad \ldots (2)$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = c \quad \ldots (3)$$

วิธีทำ

ใช้ x_1 ในสมการแรกเป็นหลักในการกำจัด x_1 ในสมการอื่น ๆ

$$(1) \quad : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \quad \ldots (4)$$
$$(2) - 2(1) : \quad x_3 - x_4 = 6 \quad \ldots (5)$$
$$(3) + (1) : \quad 2x_3 - 2x_4 = c - 1 \quad \ldots (6)$$

จากระบบสมการใหม่ ใช้ x_3 จากสมการ (5) ไปกำจัด x_3 ในสมการอื่น ๆ

$$(4) - (5) : x_1 - 2x_2 = -7 \quad \ldots (7)$$
$$(4) \quad : \quad x_3 - x_4 = 6 \quad \ldots (8)$$
$$(6) - 2(5) : \quad 0 = c - 13 \quad \ldots (9)$$

จะพบว่าระบบสมการจะ Consistent หรือไม่นั้นพิจารณาได้จากสมการที่ (9) ถ้า $c \neq 13$ ระบบสมการจะ Inconsistent เพราะจะทำให้ได้ว่า $0 = -13$ ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นจริงในระบบจำนวน แต่ถ้า $c = 13$ ทำให้ได้ $0 = 0$ ซึ่งเป็นจริงและระบบสมการจะ Consistent เนื่องจากไม่มีสมการใดในระบบเดียวกันขัดแย้ง (Contradict) กับความจริงในระบบจำนวน

ดังนั้น เมื่อ $c = 13$ จะได้ว่าระบบสมการ

$$x_1 - 2x_2 = -7$$
$$x_3 - x_4 = 6$$

เนื่องจากมีสมการเพียง 2 สมการแต่มีตัวไม่ทราบค่าถึง 4 ตัว จึงจำเป็นต้องทำให้

ระบบสมการมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่า

โดยกำหนดให้ตัวไม่ทราบค่าคู่ใด ๆ เป็น Parameter[1] ซึ่งสามารถแทนค่าได้ด้วยเลขจำนวนจริงใด ๆ

ให้ $x_2 = t_1, x_4 = t_2 : t_1 \in R, t_2 \in R$

$$x_1 = 2t_1 - 7$$

$$x_2 = t_1$$

$$x_3 = t_2 + 6$$

$$x_4 = t_2$$

จัดเป็นรูปแมตริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

t_1, t_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ เมื่อแทนค่า t_1, t_2 ด้วยจำนวนใด ๆ (ไม่จำเป็นต้องใช้ค่าเดียวกัน) จะได้ Particular Solution หนึ่ง ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมาก (Infinitety many Solution) ขึ้นอยู่กับค่าของ t_1 และ t_2 ซึ่งสามารถกำหนดให้เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในระบบจำนวน

2.2 Echelon Form [2] ของระบบสมการเชิงเส้น

จากการศึกษาเรื่องระบบสมการเชิงเส้นที่ผ่านมา จะพบว่ามีขั้นตอนโดยสรุปดังนี้

1. ทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวแรกของสมการที่ 1 ให้เป็น 1 โดยกระทำได้ 2 วิธีคือ ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกเป็น c, $c \neq 0$ ให้หารตลอดสมการนั้นด้วย c หรืออีกวิธีหนึ่งคือนำสมการอื่นในระบบเดียวกันที่สัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกเป็น 1 อยู่แล้วมาสับที่กัน (สลับสมการ)

2. ใช้ตัวแปรที่ได้จากขั้นที่ 1 ไปกำจัดตัวแปรเดียวกันในสมการถัดลงมา

3. จากระบบสมการในขั้นที่ 2 ทำตัวแปรแรกในสมการที่ (2) ให้มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 แล้วนำไปกำจัดตัวแปรตัวเดียวกันในสมการอื่น ๆ ที่อยู่ในลำดับถัดลงมา

---

1 จะกล่าวถึงอีกครั้งในเรื่อง Rank of Matrix

2 อ่านว่า เอฌ-อะ-ลอน

4. ดำเนินการเช่นเดิมกับสมการที่ 3, 4, 5,...,n จนกระทั่งได้ระบบสมการที่อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุด แล้วแแก้ระบบสมการจะได้ Solution ตามต้องการ

เช่นในตัวอย่างที่ 2.2

จากระบบสมการ

$$3x_1+2x_2-x_3 = -2$$

$$x_1+x_2+x_3 = 0$$

-x,+x*+2x3 = 3

$$3x_1+4x_2+2x_3 = 1$$

กำจัดตัวแปรจนได้ Equivalent System ดังนี้

$$x_1 = -\frac{7}{5}$$

$$x_2 = \frac{6}{5}$$

$$x_3 = \frac{1}{5}$$

หรือในตัวอย่างอื่น ๆ ต่อไปนี้

ก. กำจัดตัวแปรในระบบสมการเดิมจนได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3+4x_5+5x_6+6x_7 &= 1 \\ x_3+x_4-3x_5+2x_6 &= -3 \\ x_6+2x_7 &= 0 \\ -5x_7 &= 0 \end{aligned}$$

ข. กำจัดตัวแปรในระบบสมการเดิมจนได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 2 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ค. กำจัดตัวแปรในระบบสมการเดิมจนได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 \quad +5x_3 \quad +2x_5 &= 1 \\ x_2 \quad +2x_3 \quad +4x_5 &= 2 \\ x_4+7x_5 &= 4 \end{aligned}$$

ง. กำจัดตัวแปรในระบบสมการเดิมจนได้ระบบสมการ

$$x_1 \quad -\frac{7}{2}x_3+\frac{5}{2}x_4 = 3$$

$$x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1$$

จากตัวอย่างของระบบสมการข้างต้นจะพบว่าระบบสมการดังกล่าวมีลักษณะดังนี้

*** 1. สัมประสิทธิ์ตัวแรกที่ไม่ใช่ศูนย์ (Nonzero Coefficient) ของแต่ละสมการมีค่าเป็น 1 (อาจเป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ได้)

2. ในทุก ๆ สมการที่อยู่ในลำดับถัดลงมานับจากสมการที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรแรกเป็น 1 สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเดียวกันกับตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 นั้นจะต้องมีค่าเป็นศูนย์

3. ตัวไม่ทราบแต่ละตัวจะปรากฏในระบบสมการเพียงครั้งเดียว กล่าวคือปรากฏได้เพียงในสมการเดียว และไม่ปรากฏในสมการอื่นอีกเลย

เช่นในระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= -\frac{7}{5} \\ x_2 \qquad &= \frac{6}{5} \\ x_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

จะพบว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวแรกในแต่ละสมการมีค่าเป็น 1 สัมประสิทธิ์ของ x_1 ในสมการที่ 2 และสมการที่ 3 จะเป็นศูนย์เมื่อนับจากสมการที่ 1 ลงมาและสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในสมการที่ 3 เป็นศูนย์เมื่อนับจากสมการที่ 2 ลงมา และทั้งระบบสมการซึ่งมีตัวแปรอยู่ 3 ตัว ตัวแปรแต่ละตัวจะปรากฏอยู่ในแต่ละสมการเท่านั้น ไม่ปรากฏในสมการอื่นอีก

หรือในระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

จะพบว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรของตัวแปรแรกในแต่ละสมการมีค่าเป็น 1 และสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในสมการที่ 2 มีค่าเป็นศูนย์เมื่อนับจากสมการที่ 1 ลงมา แต่มีตัวไม่ทราบค่าที่ปรากฏได้ในทั้งสองสมการคือ x_3 ปรากฏทั้งในสมการที่ 1 และสมการที่ 2

ดังนั้น

**** ถ้าระบบสมการใดสอดคล้องกับคุณสมบัติทั้งสามข้อ (1, 2 และ 3) เรียกว่า Reduced Echelon Form[1]

**** ถ้าระบบสมการใดสอดคล้องกับคุณสมบัติข้อ 1 และ 2 เรียกว่า Echelon Form[2]

ตามตัวอย่างข้างต้น ระบบสมการ ก และ ข เป็น Echelon Form ระบบสมการ ค, ง และตัวอย่าง 2.2 เป็น Reduced Echelon Form

นิยาม 2.1 จากระบบสมการ $A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$ โดยที่ A เป็น Coefficient Matrix และ B เป็นเทอมคงที่

$$\text{แมตริกซ์ } (A \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \text{ เรียกว่า Augmented Matrix}$$

บางครั้งอาจใช้สัญลักษณ์ (A, B)

ตัวอย่างเช่น จากระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

จัดเป็นรูปแมตริกซ์ $AX = B$

$$\text{ดังนั้น} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1 การแก้ระบบสมการจาก Reduced Echelon Form เรียกว่า Gauss-Jordan Reduction

2 การแก้ระบบสมการจาก Echelon Form เรียกว่า Gaussian Elemination

3 Augmented Matrix ของระบบสมการ คือ แมตริกซ์ที่ประกอบด้วย Coefficient Matrix และ Column Vector ของเทอมคงที่ของระบบสมการ

ดังนั้น Augmented Matrix คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad 1$$

นิยาม 2.2 แมตริกซ์ A จะเรียกว่า Echelon Matrix เมื่อ A มีคุณลักษณะสอดคล้องกับ Echelon Form ของระบบสมการเชิงเส้น

พิจารณาแมตริกซ์ต่อไปนี้

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$: Echelon Matrix

ข. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: Echelon Matrix

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: Reduced Echelon Matrix

ง. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$: Reduced Echelon Matrix

จ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: Reduced Echelon Matrix

---

1 จากระบบสมการ AX = B จัดเป็น Augmented Matrix (A | B) ในขณะเดียวกัน จาก (A | B) ก็สามารถจัดย้อนกลับเป็นระบบสมการ AX = B ได้เช่นกัน

ฉ. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: Echelon Matrix

หมายเหตุ ขอให้สังเกตสมาชิกของแต่ละแมตริกซ์ที่เขียนวงกลมล้อมรอบไว้.

ดังนั้นเราจึงสามารถสรุปคุณสมบัติของ Echelon Matrix โดยอธิบายในแง่ Matrix ได้ดังนี้

**** 1. สมาชิกตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 (นับจากซ้ายไปขวา ในแถวต่าง ๆ มีค่าเป็น 1 (สมาชิกตัวอื่นหลังจากตัวนี้จะเป็นจำนวนใด ๆ ก็ได้)

2. สมาชิกที่มีค่าเป็น 0 ในแถวถัดลงมาก่อนที่จะถึง 1 (ตัวแรก) มีจำนวนมากกว่าในแถวก่อนเสมอ

ถ้าแมตริกซ์ใดสามารถจัดรูป (โดยอาศัย Elementary Operation) ได้สอดคล้องคุณสมบัติ 2 ประการข้างต้นนี้ได้ เรียกว่า Echelon Matrix หากสอดคล้องกับคุณสมบัติข้อที่ 3 ที่เพิ่มเข้ามาดังต่อไปนี้ แมตริกซ์นั้นจะเรียกว่า Reduced Echelon Matrix

3. สมาชิกตัวอื่น ๆ ทุกตัวในทุกสดมภ์ที่มี 1 (ตัวแรก) ปรากฏอยู่มีค่าเป็น 0

พิจารณาแมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า

(1) สมาชิกตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 ในแต่ละแถวมีค่าเป็น 1 (ถ้าไม่ใช่ 1 สมมุติเป็น c สามารถทำให้เป็น 1 ได้ โดยหารตลอดด้วย c)

(2) จำนวน 0 ก่อนหน้าที่จะมาถึง 1 (ตัวแรก) ในแถวล่างมีจำนวนมากกว่าในแถวบน สังเกตจำนวน 0 ก่อนที่จะถึง 1 ในแถวที่ 2 มี 3 ตัว มากกว่าในแถวที่ 1 จำนวน 0 ในแถวที่ 3 ก่อนหน้าที่จะมาถึง 1 มี 4 ตัว มากกว่าของในแถวที่ 2 เช่นกันกับจำนวน 0 ในแถวที่ 4 ก็มากกว่าในแถวที่ 3 และจะมีจำนวน 0 เท่ากันได้เฉพาะในกรณีที่เป็น 0 ด้วยกันหมดตลอดแถว เช่นแมตริกซ์ในตัวอย่าง ฉ. ข้างต้น

(3) ในสดมภ์ที่มี 1 (ตัวแรก) ของแต่ละแถวปรากฏอยู่นั้น สมาชิกอื่น ๆ จะเป็น 0 ทั้งหมด

ดังนั้นแมตริกซ์ตามตัวอย่างนี้เป็น Reduced Echelon Matrix

นิยาม 2.3 แมตริกซ์ B จะเรียกว่ามี Row Equivalent กับแมตริกซ์ A ถ้าหากแมตริกซ์ B เกิดจากการแปลงรูปของแมตริกซ์ A โดยผ่านกระบวนการ Elementary Row Operation ต่อไปนี้

1. สลับแถวที่ i กับแถวที่ j ของแมตริกซ์ A นั่นคือ $R_i \leftrightarrow R_j$
2. คูณแถวที่ i ด้วยตัวคงที่ k นั่นคือ $R_i \rightarrow kR_i$
3. แทนที่แถว i ด้วยผลบวกของ r เท่าของแถวที่ i และ k เท่าของแถวที่ j นั่นคือ

$$R_i \rightarrow rR_i + kR_j \; ; \; r \neq 0, k \neq 0$$ □

ในการแก้ระบบสมการ การหาส่วนกลับของแมตริกซ์ และบทประยุกต์อื่น ๆ นั้นนิยมแปลงรูปแมตริกซ์เดิมให้เป็น Echelon Matrix โดยผ่านกระบวนการ Elementary Row Operation หรือ Elementary Column Operation เพราะง่ายและสะดวกรวดเร็วกว่าวิธีอื่น ๆ แต่ต้องใช้ความถี่ถ้วนระมัดระวังมากเป็นพิเศษเพราะอาจผิดพลาดได้ง่าย

พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จัดระบบสมการเป็นรูปแมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Augmented Matrix (A | B) คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

หมายเหตุ ถ้าใช้ Elementary Operation กระทำกับ Row ของแมตริกซ์ เรียกวิธีการนั้นว่า Elementary Row Operation ถ้ากระทำกับ Column ของแมตริกซ์เรียกว่า Elementary Column Operation

แปลงรูปให้เป็น Echelon Matrix โดยอาศัย Elementary Row Operation ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : R_2 - 2R_1 \\ : R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{6}{7} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : R_2 \times \frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{21} \end{array}\right] \begin{array}{l} : R_1 + 2R_2 \\ \\ : R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{45}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{21} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-10}{21} \end{array}\right] \begin{array}{l} : R_1 - R_3 \\ : R_2 + 4R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{45}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-12}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-30}{21} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ : R_3 \times 3 \end{array}$$

จัด Augmented Matrix ย้อนสู่ระบบสมการในรูปแมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{45}{21} \\ \frac{-12}{21} \\ \frac{-30}{21} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$x_1 = \frac{45}{21}, \; x_2 = \frac{-12}{21}, \; x_3 = \frac{-30}{21}$$

หมายเหตุ สัญญลักษณ์ $\sim$ แทนคำว่า "Equivalent"

2.3 ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้น (System of Linear Homogeneous Equations)

นิยาม 2.4 ระบบสมการเชิงเส้นที่ทุกสมการมีเทอมคงที่มีค่าเป็น 0 เรียกว่า ระบบสมการ เอกพันธ์เชิงเส้นมีรูปทั่วไปดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n &= 0\\
&\;\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_m &= 0
\end{aligned}
$$

ซึ่งจัดเป็นรูปแมตริซ์ได้ดังนี้

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$$

ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นทุกระบบจะมีคำตอบ (Solution) อย่างน้อยหนึ่งคำตอบเสมอคือ (0, 0,...,0) เรียกว่า Trivial Solution หรือ Zero Solution ดังนั้นระบบสมการดังกล่าวจึง Consistent เสมอ ปัญหาสำหรับระบบสมการเช่นนี้จึงมีอยู่ว่า ระบบสมการมีเพียง Trivial Solution เท่านั้นหรือว่ามีคำตอบอื่น ๆ อีกที่ไม่ใช่ 0 ทั้งหมด (Nontrivial Solution)

วิธีการหาคำตอบของระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นกระทำเช่นเดียวกับระบบสมการวิวิธพันธ์เชิงเส้น[1] (System of Linear Nonhomogeneous Equation) ที่นักศึกษาได้พบมาแล้วในตอนต้น กล่าวคือ พยายามจัดรูปสมการเป็นรูปแมตริกซ์แล้ว แปลงรูปให้เป็น Reduced Echelon Form คำตอบจะปรากฏออกมาทันที

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.6 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
x_1-x_2+x_3 &= 0\\
2x_1-3x_2+4x_3 &= 0\\
3x_1+x_2-5x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

จัดระบบสมการเป็นรูปแมตริกซ์ $AX = 0$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}
$$

---

1 ระบบสมการวิวิธพันธ์เชิงเส้นคือ ระบบสมการ $AX = B$ ดังนั้น ระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นคือระบบสมการ $AX = B$ ที่ $B = 0$ นั่นเอง

จาก Augmented Matrix (A | B) คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

แปลงรูปให้เป็น Reduced Echelon Matrix ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 \times (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ \\ R_3 - 4R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad R_1 \times \frac{1}{11}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 4R_3 \\ R_2 + 4R_3 \\ \\ \end{array}$$

จัดย้อนกลับเป็นระบบสมการในรูปแมตริกซ์

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

คำตอบของระบบสมการนี้คือ (0, 0, 0) แสดงว่าระบบสมการนี้มีเพียง Trivial Solution เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.7 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 &= 0\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0\\
x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0\\
x_1 + 14x_2 - 8x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

จัดเป็นรูปแมตริกซ์แล้วจัดเข้าเป็น Augmented Matrix (A | B) ได้ดังนี้

$$
(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -2 & 0\\ 1 & 14 & -8 & 0 \end{array}\right]
$$

แปลงรูปให้เป็น Reduced Echelon Matrix

$$
\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -2 & 0\\ 1 & 14 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 5 & -3 & 0\\ 0 & 15 & -9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : R_2 - 2R_1\\ : R_1 - R_1\\ : R_4 - R_1 \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ : R_3 - R_2\\ : R_4 - 3R_2 \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ : R_2 \times \frac{1}{5}\\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} : R_1 + R_2\\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จัดย้อนเข้าสู่ระบบสมการ $x_1+\frac{2}{5}x_3 = 0$

$$x_3-\frac{3}{5}x_3 = 0$$

เห็นว่ามีเหลือเพียง 2 สมการ แต่มีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว จัดให้เหลือจำนวนสมการและจำนวนตัวไม่ทราบค่าเท่ากัน โดยกำหนดให้ตัวไม่ทราบค่าตัวใดตัวหนึ่งอยู่ในรูปของ Parameter t

ให้ $x_3 = t$, t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้นจะได้ Parametric Equation ดังนี้

$$x_1 = -\frac{2}{5}t$$

$$x_2 = \frac{3}{5}t$$

$$x_3 = t$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ระบบสมการเส้นตรงเอกพันธ์มี Nontrivial Solution เป็นจำนวนมากมายหลายค่า (Infinitely Many Solution) โดยขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าให้แก่ t

ข้อสังเกต

1. ใน Augmented Matrix ของระบบสมการเอกพันธ์เชิงเส้นคือ $(A \mid 0)$ นั้น เมื่อใช้ Elementary Operation แปลงรูปให้เป็น Reduced Echelon Matrix เทอมคงที่จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ กล่าวคือ ยังคงเป็น 0 อยู่เช่นเดิม ดังนั้น เมื่อเข้าใจเรื่องนี้ดีพอแล้ว การ

หา Row Equivalent Matrix ของระบบสมการ $AX = 0$ จะกระทำกับแมตริกซ์ A อย่างเดียวก็ได้

2. การหา Row Equivalent Matrix โดยการแปลงรูปให้แมตริกซ์เดิมเป็น Reduced Echelon Matrix นั้น ไม่จำเป็นต้องกระทำเป็นขั้น ๆ ดังที่ปรากฏในตัวอย่าง เราสามารถลัดขั้นตอนบางขั้นไปได้ แต่ต้องเพิ่มความระมัดระวังให้มากขึ้นเพราะอาจผิดพลาดได้ง่าย

3. การแก้ระบบสมการนั้น ไม่จำเป็นต้องแปลงรูป Augmented Matrix ให้เป็น Reduced Echelon Matrix เสมอไป การแปลงรูป Augmented Matrix ให้เป็น Echelon Matrix ก็สามารถหาคำตอบของระบบสมการนั้นได้

จากตัวอย่างข้างต้นจะสามารถหาคำตอบจาก Echelon Matrix ได้ดังต่อไปนี้

จาก Echelon Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$5x_2 - 3x_3 = 0$$

ให้ $x_3 = t$

แทนค่า $x_3 = t$ ในสมการที่ 2

$$x_2 = \frac{3}{5}t$$

แทนค่า $x_3 = t$ และ $x_2 = \frac{3}{5}t$ ในสมการที่ 1

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - x_3 \\ &= \frac{3}{5}t - t \\ &= -\frac{2}{5}t \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$x_1 = -\frac{2}{5}t$$

$$x_2 = \frac{3}{5}t$$

$$x_3 = t$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าคำตอบตรงกัน

จะพบว่าโดยวิธีนี้เราหาคำตอบย้อนจากสมการล่างไปหาสมการบน โดยกำหนดค่า x_3 ก่อน แล้วหาค่า x_2 จากนั้นนำค่า x_2 และ x_3 ย้อนขึ้นไปหาค่า x_1 ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากเป็นคุณสมบัติของ Echelon Matrix ที่ทำให้จำนวนตัวไม่ทราบค่าในสมการล่างมีจำนวนน้อยกว่าในสมการบน การหาค่าของตัวแปรค่าจึงกระทำย้อนทิศทางกันคือ หาค่า $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, n_{n-3}, \ldots$, แล้วจึงหาค่า x_3, x_2, x_1 ตามลำดับ

วิธีการแก้สมการโดยนัยนี้เรียกว่า Gaussian Elimination

2.4 การหาส่วนกลับของแมตริกซ์ (Matrix Inversion)

นิยาม 2.5 Elementary Vector $E_1, E_2, \ldots, E_n$ คือสดมภ์ที่ 1, 2,...,n ของ I_n ตามลำดับ

$$\text{นั่นคือ } I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = [E_1, E_2, \ldots, E_n]$$

$$\text{โดยที่ } E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จากความรู้เรื่อง Echelon Matrix ในตอนก่อนและความรู้เรื่อง Elementary Vector ตามนิยามข้างต้น นักศึกษาจะสามารถหาส่วนกลับของแมตริกซ์ได้โดยง่าย ในที่นี้จะเริ่มต้นด้วยตัวอย่างก่อนแล้วจึงจะศึกษาความเป็นมาของวิธีดังกล่าวในภายหลัง

ตัวอย่าง 2.8 จงหาส่วนกลับของแมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

การหาส่วนกลับของแมตริกซ์นั้นจะเริ่มต้นที่ Augmented Matrix (A | I) โดยใช้ Elementary Row Operation แปลงรูปส่วนที่เป็น A ใน Augmented Matrix (A | I) ให้เป็น Reduced Echelon Matrix ซึ่งจะเป็นการทำให้ส่วนที่เป็น I ของ (A | I) กลายเป็นแมตริกซ์รูปใหม่ซึ่งก็คือ A^{-1} นั่นเอง *

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \quad : R_2 - 3R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \quad : R_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \quad : R_1 - 2R_2$$

$$(I \mid A^{-1})$$

นั่นคือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบคำตอบ ถ้า $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ เป็นส่วนกลับของ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จริง ผลคูณของแมตริกซ์ทั้งสองต้องได้ I_2

จะเห็นได้ว่า $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ เป็นส่วนกลับของ A จริง

ตัวอย่าง 2.9 จงหาส่วนกลับของ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จาก $$(A \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

พยายามแปลงรูปส่วนที่เป็น A ให้เป็น Reduced Echelon Matrix (ในที่นี้คือ I_3) ถ้าไม่สามารถจัดให้เป็น Reduced Echelon Matrix I_3 ได้ (หลังจากที่ได้พยายามทำในทุกวิถีทางแล้ว) ก็หมายความว่าแมตริกซ์ A นั้นไม่มีส่วนกลับ

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad : R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ : R_2 - 3R_1 \\ : R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ : R_2 \times \left(-\frac{1}{7}\right) \\ : R_3 \times \left(-\frac{1}{7}\right) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} : R_1 - 4R_2 \\ \\ : R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ : R_3 \times \frac{7}{3} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} : R_1 - 2R_3 \\ : R_2 + R_3 \\ \end{array}$$

$$\sim \quad (I_3 \mid A^{-1})$$

นั่นคือ $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างทั้งสองแสดงให้เห็นว่าเราได้ใช้ความรู้เกี่ยวกับ Reduced Echelon Matrix โดยอาศัย Elementary Row Operation เพื่อจัดให้ $(A \mid I) \sim \sim \ldots \sim (I \mid A^{-1})$ กล่าวคือพยายามแปลงรูปแมตริกซ์ A ใน Augmented Matrix $(A \mid I)$ ให้เป็น Reduced Echelon Matrix I ซึ่งจะทำให้ส่วนที่เป็น I ใน Augmented Matrix $(A \mid I)$ กลายเป็น A^{-1} โดยอัตโนมัติ วิธีการดังกล่าวมีที่มาดังต่อไปนี้

จากระบบสมการ $A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$, Augmented Matrix ของระบบสมการคือ $(A \mid B)$

ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏ

ดังนั้น $A^{-1}AX = A^{-1}B$: คูณตลอด (Premultiply) ด้วย A^{-1}

$I_n X = A^{-1}B$

จะได้ Augmented Matrix เป็น $(I_n|A^{-1}B)$

ถ้ามีระบบสมการอยู่ n ระบบ แต่ละระบบมี Coefficient Matrix A เดียวกัน ต่างกันเพียงแมตริกซ์ของเทอมคงที่ B นั่นคือ

$$AX = B_1, AX = B_2, \ldots, AX = B_n$$

Augmented Matrix รวมของระบบสมการทั้ง n ระบบคือ

$$(A \mid B_1, B_2, \ldots, B_n)$$

ดังนั้น ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏระบบสมการทั้งหลายจะกลายเป็น $I_n X = A^{-1}B_1$, $I_n X = A^{-1}B_2, \ldots, I_n X = A^{-1}B_n$ และมี Augmented Matrix รวมของทั้ง n ระบบเป็น

$$(I_n \mid A^{-1}B_1, A^{-1}B_2, \ldots, A^{-1}B_n)$$

ให้ $B_j = E_j$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ กล่าวคือ ให้ B_j เป็น Elementary Vector ดังนั้น Augmented Matrix รวมจะกลายเป็น

$$(A \mid E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n) = (A \mid I_n)$$

และเมื่อ A^{-1} มีค่าปรากฏ Augmented Matrix รวมจะเป็น

$$(I_n \mid A^{-1}E_1, A^{-1}E_2, \ldots, A^{-1}E_n) : A^{-1}E_j = A_j^{-1} = \text{สดมภ์ที่ } j \text{ ของ } A^{-1}$$

$$= (I_n \mid A_1^{-1}, A_2^{-1}, A_3^{-1}, \ldots, A_n^{-1})$$

$$= (I_n \mid A^{-1})$$

หมายเหตุ ขอให้สังเกตตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งแสดงให้เห็นความเป็นจริงว่า $BE_j = B_j$ คือ สดมภ์ที่ j ของ B

$$\text{ให้} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = [B_1, B_2, B_3]$$

$$BE_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = B_1$$

$$BE_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = B_2$$

$$BE_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = B_3$$

2.5 การหาส่วนกลับของแมตริกซ์โดยวิธีแบ่งกลุ่มสมาชิก

(Matrix Inversion by Partitioning)

การหาส่วนกลับของแมตริกซ์โดยวิธีที่แบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์เดิมออกเป็นส่วน ๆ นั้นมีประโยชน์เป็นอย่างสูงทั้งในทางทฤษฎีและปฏิบัติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการศึกษาวิชาเศรษฐมิติ (Econometrics) วิชาการวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) แบบจำลองเชิงเส้น (Linear Statistical Model) การวิเคราะห์มัลติแวริเอท (Multivariate

Analysis) ทฤษฎีสถิติ (Theory of Statistics) และในวิชาฟิสิกส์บางสาขา ได้นำวิธีการหาส่วนกลับดังกล่าวไปใช้อย่างกว้างขวาง

การหาส่วนกลับของแมตริกซ์โดยวิธีแบ่งกลุ่มของสมาชิกให้เป็นแมตริกซ์ย่อยนั้นกระทำได้กับ Symmetric Matrix หรือแมตริกซ์ที่ทำให้เป็น Symmetric Matrix แล้วเท่านั้น (มิได้หมายความว่าวิธีการหาส่วนกลับตามวิธีนี้จะกระทำกับแมตริกซ์ทั่ว ๆ ไปที่มิใช่ Symmetric Matrix ไม่ได้ Square Matrix ทุกรูปที่เป็น Nonsingular Matrix สามารถหาส่วนกลับตามวิธีนี้ได้เสมอ แต่เราต้องปรับรูปให้เป็น Symmetric Matrix เสียก่อนถ้าหากรูปเดิมมิใช่ Symmetric Matrix วิธีปรับรูปแมตริกซ์ให้เป็น Symmetric Matrix จะกล่าวถึงในตอนท้ายของตอน 2.5 นี้)

หลักการขั้นพื้นฐานในการหาส่วนกลับของแมตริกซ์ตามวิธีนี้ คือแบ่งแมตริกซ์เดิมให้เป็นแมตริกซ์ย่อย และหลักการแบ่งที่สำคัญที่ต้องคำนึงถึงอยู่ตลอดเวลาคือ ต้องแบ่งให้แมตริกซ์ย่อย A_{11} เป็น Square Matrix ที่ A_{11}^{-1} มีค่าปรากฏ ดังนั้น ในการปฏิบัติงานเพื่อหาส่วนกลับของแมตริกซ์ตามวิธีนี้จึงอาจจำเป็นต้องทดลองแบ่งแมตริกซ์เดิมดูหลาย ๆ ครั้ง จนกว่าจะได้แมตริกซ์ A_{11}^{-1} มีค่าปรากฏ (A_{11} จึงต้องมีขนาด $k \times k$ เสมอ)

จากระบบสมการ $A_{n \times n} X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$

A เป็น Symmetric Matrix

แบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์ A ออกเป็น 4 แมตริกซ์ย่อย

ดังนั้น ระบบสมการ $AX \times B$ จะมีลักษณะดังนี้

$$
\begin{array}{c}
k\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
n-k\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\
\hdashline
a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\
a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,k} & a_{k+2,k+1} & \cdots & a_{k+2,n} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right] \\
\underbrace{\hphantom{a_{11}\;a_{12}\;\cdots\;a_{1k}}}_{k}\;\underbrace{\hphantom{a_{1,k+1}\;\cdots\;a_{1n}}}_{n-k}
\end{array}
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \hdashline x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
b_1 \\ b_1 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \\ \hdashline b_{k+1} \\ b_{k+2} \\ \vdots \\ b_n
\end{array}\right]
$$

$$\begin{array}{c} k \\ n-k \end{array}\begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$
$$\qquad k \qquad\quad n-k$$

จากการแบ่งแมตริกซ์ที่เกี่ยวข้องคือ A, X และ B เป็นแมตริกซ์ย่อยจะเห็นได้ว่า A_{11} และ A_{22} เป็น Square Matrix

$A_{12}^T = A_{21}$ และ $A_{21}^T = A_{12}$

X_1 และ B_1 มีขนาด $k \times 1$ X_2 และ B_2 มีขนาด $(n-k) \times 1$

หมายเหตุ พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -7 \\ \hdashline 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -7 & 9 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ \hdashline 4 \\ 11 \end{array}\right]$$

$$A_{12}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = A_{21},\ A_{21}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = A_{12}$$

ดังนั้น จะได้สมการ 2 สมการคือ

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1 \quad \ldots (1)$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2 \quad \ldots (2)$$

จากสมการที่ (1) = คูณด้านหน้าตลอดด้วย A_{11}^{-1} ได้[1]

$$X_1 + A_{11}^{-1}A_{12}X_2 = A_{11}^{-1}B_1$$

$$X_1 = A_{11}^{-1}B_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2 \qquad *$$

แทนค่า X_1 ในสมการที่ (2)

$$A_{21}(A_{11}^{-1}B_1 - A_{11}^{-1}A_{12}X_2) + A_{22}X_2 = B_2$$

---

1 การคูณตลอด (Premultiply) ด้วย A_{11}^{-1} ย่อมแสดงให้เห็นว่าส่วนกลับของ A_{11} ต้องมีค่าปรากฏ ดังนั้น ในทางปฏิบัติเราจึงพยายามแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์เพื่อให้ A_{11} มีขนาดที่ส่วนกลับของมันมีค่าปรากฏ นักศึกษาจึงต้องพยายามแบ่งกลุ่มสมาชิกแมตริกซ์ A ดูก่อนแล้วลองหาส่วนกลับของ A_{11} ถ้าหาก A_{11}^{-1} ไม่มีค่าปรากฏก็แบ่งกลุ่ม A ดูใหม่จนกว่า A_{11}^{-1} จะมีค่าปรากฏ

$$A_{21}A_{11}^{-1}B_1 - (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})X_2 + A_{22}X_2 = B_2$$

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})X_2 = B_2 - A_{21}A_{11}^{-1}B_1$$

$$X_2 = [-(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}]B_1 + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}B_2 \quad **$$

แทนค่า X_2 ใน **

$$X_1 = A_{11}^{-1}B_1 - (A_{11}^{-1}A_{12})[-(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}B_1 + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_2]$$

$$= A_{11}^{-1}B_1 + (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}B_1 - (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}B_2$$

$$= [A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}]B_1 -$$
$$[(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]B_2 \quad ***$$

นั่นคือ

$$X_1 = [A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}]B_1 -$$
$$[A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]B_2$$

$$X_2 = [-(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}]B_1 + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}B_2$$

จัด X_1, X_2 เป็นรูปแมตริกซ์

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}$$

จัดรูปให้ง่ายได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})^T & -(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ [-(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]^T & (A_{22} - A_{21}A_{21}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}$$

และจากระบบสมการ $AX = B$

ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏ ดังนั้น $A^{-1}AX = A^{-1}B$

นั่นคือ $X = A^{-1}B$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})^T & -(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21} - A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ [-(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]^T & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ก. $(A_{11}^{-1}A_{12})^T = A_{12}^T(A_{11}^{-1})^T = A_{21}(A_{11}^T)^{-1} = A_{21}A_{11}^{-1}$

$A_{11}^T = A_{11}$, $A_{12}^T = A_{21}$, $A_{21}^T = A_{12}$

ข. $[-(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]^T = -[(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]^T(A_{11}^{-1}A_{12})^T$

$= -[(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^T]^{-1}A_{12}^T(A_{11}^{-1})^T$

$$= -[A_{22}^T - (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^T]^{-1}(A_{21}(A_{11}^T)^{-1}$$

$$= -[A_{22} - A_{12}^T(A_{11}^{-1})^T A_{21}^T]^{-1} A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$= -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$$

ค. ในทางปฏิบัติการหาสมาชิกของ A^{-1} นั้น หาเพียงสมาชิกตัวแรกของแมตริกซ์ A^{-1} คือ $A_{11}^{-1}+(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})^T$ เท่านั้นก็พอเพราะสมาชิกอื่นของ A^{-1} นั้นเราสามารถดึงเอามาจากส่วนนี้ได้ (ขอให้สังเกตสูตร A^{-1})

ตัวอย่าง 2.10

จงหาส่วนกลับของ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

นักศึกษาสามารถจัดแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์ A ได้ 2 วิธี (โดยพยายามแบ่งให้ A_{11} และ A_{22} เป็น Square Matrix (โดยเฉพาะ A_{11} นั้นต้องพยายามจัดให้ A_{11}^{-1} มีค่าปรากฏ) คือ

$$\left[\begin{array}{c|cc} 5 & -2 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{หรือ} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

1. การแบ่งกลุ่มสมาชิกวิธีแรก

$$A_{11} = [5], A_{12} = [-2 \quad 4], A_{21} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1}+(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})^T$$

$$= [5]^{-1}+[[5]^{-1}[-2 \quad 4]]\left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}[5]^{-1}[-2 \quad 4]\right]^{-1}[[5]^{-1}[-2 \quad 4]]^T$$

$$= \frac{1}{5}+\left[\left[\frac{1}{5}\right]\left[-2 \quad 4\right]\right]\left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{16}{5} \end{bmatrix}\right]^{-1}\left[\left[\frac{1}{5}\right][-2] \quad 4\right]^T$$

$$= \frac{1}{5}+\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{13}{5} & -\frac{16}{5} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{5} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16}{37} & \frac{13}{37} \\ \frac{13}{37} & -\frac{1}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{32}{185} = \frac{5}{185} = \frac{1}{37}$$

$-(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$

$$= -\left[[5]^{-1}[-2 \quad 4] \right] \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} [5]^{-1}[-2 \quad 4] \right]^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16}{37} & \frac{13}{37} \\ \frac{13}{37} & -\frac{1}{37} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{4}{37} & -\frac{6}{37} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} & \frac{6}{37} \end{bmatrix}$$

$[-(A_{11}^{-1}A_{12})(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}]^T$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} & \frac{6}{37} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} \\ \frac{6}{37} \end{bmatrix}$$

$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16}{37} & \frac{13}{37} \\ \frac{13}{37} & -\frac{1}{37} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{37} & \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} & \frac{6}{37} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{4}{37} \\ \frac{6}{37} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{16}{37} & \frac{13}{37} \\ \frac{13}{37} & -\frac{1}{37} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{37} & -\frac{4}{37} & \frac{6}{37} \\ -\frac{4}{37} & \frac{16}{37} & \frac{13}{37} \\ \frac{6}{37} & \frac{13}{37} & -\frac{1}{37} \end{bmatrix}$$

สำหรับการแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์ตามวิธีที่ 2 จะขอเว้นไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะจัดแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์เดิมในลักษณะใดก็ตามจะได้คำตอบเดียวกันเสมอ จะแตกต่างกันก็เฉพาะในระดับความยากง่าย ขอให้นักศึกษาสังเกตเปรียบเทียบความยากง่ายดูเอง สิ่งสำคัญที่ต้องขอแนะนำคือ ขอให้พยายามจำรูปส่วนกลับของแมตริกซ์โดยวิธีนี้ให้ได้ มิฉะนั้นจะประสบความยุ่งยากในการนำไปใช้ เพราะเมื่อศึกษาคณิตศาสตร์ สถิติหรือเศรษฐศาสตร์ขั้นสูงขึ้นไป รูปของส่วนกลับนี้จะถูกนำมาใช้บ่อยครั้ง หากจำรูปไม่ได้จะประสบความยุ่งยากมาก

ดังที่กล่าวแล้วในตอนต้นว่า การหาส่วนกลับของแมตริกซ์โดยวิธีนี้ใช้ได้กับ Symmetric Matrix เท่านั้น ซึ่งจะทำให้รู้สึกว่าเป็นวิธีจำเพาะเจาะจงและไม่สามารถใช้กับแมตริกซ์ทั่วไปได้ แต่ความจริงแล้วมิได้เป็นเช่นนั้น วิธีนี้สามารถใช้กับแมตริกซ์ใด ๆ ก็ได้ แต่เราต้องปรับรูปแมตริกซ์นั้น (ที่ไม่ใช่ Symmetric Matrix) ให้เป็น Symmetric Matrix เสียก่อน แล้วจึงดำเนินการหาส่วนกลับโดยวิธีแบ่งกลุ่มสมาชิกดังกล่าว

ทฤษฎี 2.1 ถ้า A เป็น Square Matrix ใด ๆ แล้วแมตริกซ์ $B = AA^T$ และแมตริกซ์ $C = A^TA$ จะเป็น Symmetric Matrix

พิสูจน์ ก. $B^T = (AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T = B$

แสดงว่า $B = AA^T$ เป็น Symmetric Matrix

ข. $C^T = (A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA = C$

แสดงว่า $C = A^TA$ เป็น Symmetric Matrix

ข้อสังเกต

1. จาก $B = AA^T$

$$B^{-1} = (AA^T)^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1}$$

คูณตลอด (Premultiply) ด้วย A^T

$$A^TB^{-1} = A^T(A^T)^{-1}A^{-1} = A^{-1}$$

2. จาก $C = A^TA$

$$C^{-1} = (A^TA)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1}$$

คูณตลอด (Postmultiply) ด้วย A^T

$$C^{-1}A^T = A^{-1}(A^T)^{-1}A^T = A^{-1}$$

จากข้อสังเกตทั้ง 2 ประการเราสามารถสรุปได้ดังนี้

ก. ถ้าทำแมตริกซ์ A ใด ๆ ให้เป็น Symmetric Matrix ด้วยการ**คูณด้านหลัง** (Postmultiply) ด้วย Transpose Matrix ของ A นั่นคือ B = $\mathbf{AA^T}$ เวลาหาส่วนกลับต้องหัก A^T ส่วนเกินนั้นออกด้วยการ**คูณด้านหน้า** (Premultiply) ด้วย A^T (ดูข้อสังเกตข้อ 1)

ข. ถ้าทำแมตริกซ์ A ใด ๆ ให้เป็น Symmetric Matrix ด้วยการ**คูณด้านหน้า** (Premultiply) ด้วย Transpose Matrix ของ A นั่นคือ C = A^TA เวลาหาส่วนกลับต้องหัก A^T ส่วนเกินนั้นออกด้วยการ**คูณด้านหลัง** (Postmultiply) ด้วย A^T (ดูข้อสังเกตข้อ 2)

ตัวอย่าง 2.11 จงหาส่วนกลับของแมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ คูณด้านหน้าด้วย A^T

$$\text{ดังนั้น} \quad B = A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 14 & 21 & 1 \\ 21 & 42 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

จัดแบ่งกลุ่มสมาชิกของ B

$$\text{ให้} \qquad B = \left[\begin{array}{cc:c} 14 & 21 & 1 \\ 21 & 42 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

$$B_{11}^{-1} + (B_{11}^{-1}B_{12})\,(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}\,(B_{11}^{-1}B_{12})^T$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}^{-1} + \left[\begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right]\left[[5] - [1 \quad -3]\begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right][5] - [1 \quad -3]\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\left[[5] - \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\Big[[5] - [2]\Big]^{-1}\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{25}{147} & -\frac{15}{147} \\ -\frac{15}{147} & \frac{9}{147} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{67}{147} & -\frac{36}{147} \\ -\frac{36}{147} & \frac{23}{147} \end{bmatrix}$$

$$-(B_{11}^{-1}B_{12})\,(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{1}\ )^{-1}$$

$$= -\left[\begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right] \left[[\,5\,] - [\,1 \quad -3\,] \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 21 & 42 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{21} \\ \frac{3}{21} \end{bmatrix}$$

$$[\,-(B_{11}^{-1}B_{12})\,(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1}\,]^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{21} & \frac{3}{21} \end{bmatrix}$$

$$(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{67}{147} & -\frac{36}{147} & -\frac{5}{21} \\ -\frac{36}{147} & \frac{23}{147} & \frac{3}{21} \\ -\frac{5}{21} & \frac{3}{21} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = B^{-1}A^{T} = \begin{bmatrix} \frac{67}{147} & -\frac{36}{147} & -\frac{5}{21} \\ -\frac{36}{147} & \frac{23}{147} & \frac{3}{21} \\ -\frac{5}{21} & \frac{3}{21} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.6 สรุป

เมื่อศึกษาทฤษฎีของแมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น (Matrix Theory and Linear Algebra) มาถึงระดับนี้ นักศึกษาสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้ 4 วิธีคือ

ก. แก้สมการโดยวิธีธรรมดาอย่างที่เคยใช้และคุ้นเคยในชั้นมัธยมศึกษา

ข. แก้สมการโดยวิธี Gauss-Jordan Reduction กล่าวคือ จากระบบสมการ

$$A_{m\times n} X_{n\times 1} = B_{n\times}{}^{1} \quad \text{หรือ} \quad A_{n\times n} X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

แปลงรูป Augmented Matrix (A | B) ให้เป็น Reduced Echelon Matrix

ค. แก้ระบบสมการโดยวิธี Gaussian Elemination กล่าวคือ จากระบบสมการ

$$A_{m\times n} X_{n\times 1} = B_{n\times 1} \quad \text{หรือ} \quad A_{n\times n} X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

แปลงรูป Augmented Matrix (A | B) ให้เป็น Echelon Matrix (ซึ่งถ้าแปลงรูปต่อไปจนกระทั่งเป็น Reduced Echelon Matrix จะได้วิธีแก้สมการแบบ ข.) การหาคำตอบ (Solution) ของระบบสมการให้ค่อย ๆ หาค่าคำตอบทีละค่าโดยย้อนจากสมการล่างไปยังสมการบน

ง. แก้ระบบสมการโดยใช้ส่วนกลับของ Coefficient Matrix กล่าวคือ จากระบบสมการ

$$A_{n\times n} X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

หาส่วนกลับของ A คือ A^{-1} แล้วนำ A^{-1} นั้นคูณข้างหน้าตลอด (Premultiply) นั่นคือ เมื่อ A^{-1} มีค่าปรากฏ

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ดังนั้น $X = A^{-1}B$ คือคำตอบ (Solution) ของระบบสมการ

ตัวอย่าง 2.12 จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จัดระบบสมการเป็นรูปแมตริกซ์ $Ax = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

คูณ (Premultiply) ระบบสมการ $AX = B$ ด้วย A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} -\frac{16}{21} \\ -\frac{1}{7} \\ -1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = -\frac{16}{21}$, $x_2 = -\frac{1}{7}$, $x_3 = -1$

แบบฝึกหัด

1. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

ก.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ข.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

ค.

$$x_1+x_2-x_3+x_4 = 3$$
$$x_1+x_3+x_4 = 2$$
$$x_2+x_3-x_4 = -1$$
$$2x_1-x_2+x_3 = 2$$

ง.

$$x_1-2x_2+x_3 = 0$$
$$2x_1+3x_2-x_3 = 2$$

จ.

$$2x_1-3x_2 \quad 1$$
$$x_1+2x_2 = 3$$
$$5x_1-7x_2 = 0$$

ฉ.

$$x_1-x_2+x_3 = 1$$
$$2x_1+x_2-2x_3 = 1$$
$$3x_1-2x_2-x_3 = 0$$

ช.

$$4x_1+x_2+3x_3 = 2$$
$$x_1-x_2-x_3 = 1$$
$$2x_1-2x_2-3x_3 = 5$$

2. จงแสดงให้เห็นว่าระบบสมการ

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$$

จะมี Unique Solution ก็ต่อเมื่อ $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$

3. ค่า k ในระบบสมการต่อไปนี้จะต้องมีค่าเท่าไรจึงจะทำให้ระบบสมการมี Unique Solution จงหา Solution ทุกชุดที่สามารถหาค่าได้

ก.

$$x+ky = 1$$
$$kx+y = 1$$

ข.

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 1 \\ 2x-3y+z &= 2 \\ kx+9ky-4z &= 0 \end{aligned}$$

ค.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 4 \\ 2x_1+3x_2+4x_3 &= 5 \\ 3x_1+4x_2+5x_3 &= 2k \end{aligned}$$

4. ค่า t จะต้องมีค่าเท่าไรจึงจะทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มีคำตอบ (Consistent) พร้อมทั้งหาคำตอบทุกคำตอบ

ก.

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3 &= t \\ x_1-x_2+2x_3 &= 1-t \\ x_1+3x_2-3x_3 &= 1+t \end{aligned}$$

ข.

$$\begin{aligned} tx_1+x_2 \quad &= 0 \\ x_1+tx_2-x_3 &= 1 \\ -x_2+tx_3 &= 0 \end{aligned}$$

ค.

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 &= 5 \\ x_1-3x_2 &= -1 \\ 3x_1+4x_2 &= k \end{aligned}$$

5. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

ก.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+6x_4 &= 0 \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ข.

$$\begin{aligned} x_1-x_2-x_4+2x_5 &= 0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_5 &= 0 \\ -3x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. จงแก้สมการจากระบบสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
x_1+(1-i)x_2+ix_3 &= 1\\
(1+i)x_1+x_2+(1+i)x_3 &= 1+i\\
-ix_1+(1-i)x_2+x_3 &= 4+3i
\end{aligned}
$$

8. จงหาส่วนกลับของเมตริกซ์ต่อไปนี้โดยอาศัยการแปลงรูป Augmented Matrix (A | I) พร้อมกันนั้นจงหาส่วนกลับโดยวิธีแบ่งกลุ่มสมาชิกแล้วตรวจสอบเปรียบเทียบคำตอบกัน

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

จ. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ฉ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

9. จงหาค่า k ที่ทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มี Nontrivial Solution

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$