บทที่ 1

พีชคณิตของแมตริกซ์

INTRODUCTION TO MATRIX ALGEBRA

1. พีชคณิตของแมตริกซ์ (Matrix Algebra)

1.1 ระบบสมการเชิงเส้นหรือสมการกำลังหนึ่ง (Linear Equation)

โดยปกติรูปทั่วไปของสมการกำลังหนึ่งในระนาบ xy (หรือระนาบอื่นใดที่มี 2 มิติ ซึ่งมีเพียงส่วนกว้างและส่วนยาว แต่ไม่มีส่วนลึก) คือ

$ax + by + c = 0$; เมื่อ a, b, c เป็นตัวคงที่ใด ๆ (เป็นบวกหรือลบก็ได้)

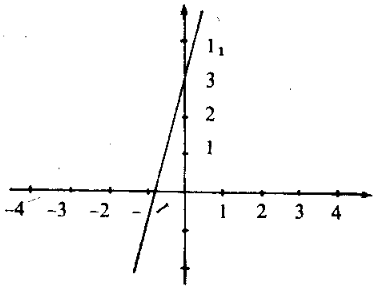
เช่น

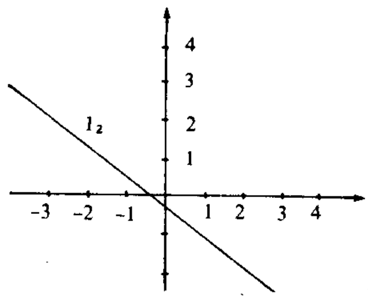
$$\ell_1 \equiv 2x + 3y + 1 = 0$$

หรือ

$$\ell_2 \equiv -x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{4} = 0$$

จะใช้แทนเส้นตรงในระนาบ xy (หากใช้ระบบอื่น เช่น ระนาบ uv ตัวแปรค่าก็เป็น u และ v) จากตัวอย่างสมการทั้งสองสามารถสร้างเส้นตรงซึ่งแสดงลักษณะทางเดินของจุดที่สอดคล้องกับสมการได้ดังภาพ





หมายเหตุ ถ้าผู้อ่านเคยผ่านวิชาคณิตศาสตร์ เช่น เรขาคณิตวิเคราะห์หรือแคลคูลัส จะพบว่าการวาดรูปสมการเส้นตรงนั้นกระทำได้หลายวิธี คือ

ก. โดยการ plot จุด

ข. โดยการจัดรูปสมการให้เป็น intercept form นั่นคือ จาก $ax + by + c = 0$ เป็น

$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$ หรือ

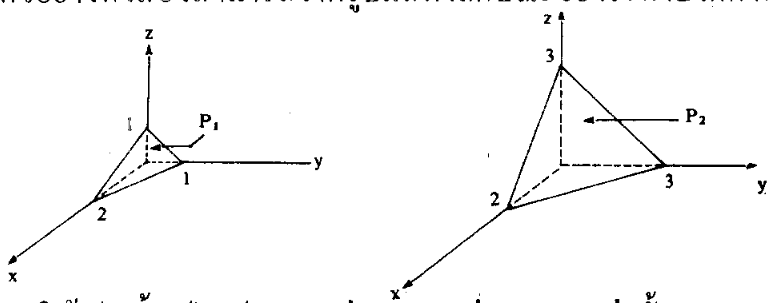
ค. จัดเป็นรูป slope form นั่นคือ จาก $ax + by + c = 0$ เป็น $y = mx + c$

ดังนั้น การแก้สมการโดยนัยของสมการในระบบ 2 มิติ จึงหมายถึงการหาจุดร่วม (common point) ที่เส้นสมการทั้งหลายลากผ่าน จุดร่วมนั้นจะแทน solution ของระบบสมการ สำหรับสมการในระบบ 3 มิติ รูปทั่วไปของสมการกำลังหนึ่ง (มี 3 ตัวแปร ตัวแปรแต่ละตัวมีกำลังเป็น 1) คือ

$$ax + by + cz + d = 0 \; ; \; a, b, c, d \text{ เป็นตัวคงที่ใด ๆ}$$

เช่น $$P_1 = -2x - y - z + 1 = 0$$
หรือ
$$P_2 = 3x + 2y + 3z - 6 = 0$$
จะใช้แทนระนาบ (plane) ในระบบ 3 มิติ

จากตัวอย่างทั้งสองสามารถวาดรูปแสดงลักษณะของระนาบได้ดังนี้



ระนาบที่แสดงให้เห็นนั้นเป็นเพียงบางส่วนของแผ่นระนาบเท่านั้น ความจริงระนาบที่สอดคล้องกับสมการมิได้มีขนาดเล็กและรูปทรงคล้ายสามเหลี่ยมดังภาพ หากเป็นแผ่นระนาบที่กว้างใหญ่ไม่มีขอบเขต เช่นเดียวกับสมการเส้นตรงในระบบ 2 มิติ ที่ความยาวยืดออกไปได้อย่างไม่มีสิ้นสุด ที่แสดงให้เห็นในภาพเป็นเพียงส่วนหนึ่งของระนาบที่พุ่งผ่านแกนทั้ง 3 ซึ่งจะทำให้มองเห็นลักษณะความลาดเอียงของแผ่นระนาบได้ด้วย

สมการในมิติที่มากกว่า 3 เช่น 4, 5,...,n ก็สามารถอธิบายได้โดยนัยเดียวกัน แต่ไม่อาจวาดรูปให้เห็นรูปทรงทางเรขาคณิตได้

ดังนั้น สมการกำลังหนึ่งในระบบ n มิติ จึงมีลักษณะดังนี้

$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$; $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ

หลักการขั้นพื้นฐานของ Linear Algebra และแมตริกซ์นั้นมาจากการศึกษาระบบของสมการกำลังหนึ่ง (Linear Equation)[1] รูปทั่วไปของระบบสมการกำลังหนึ่งมีลักษณะดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \quad \ldots\ldots(m)$$

---

1 **พีชคณิตเชิงเส้น** (Linear Algebra) **คือ พีชคณิตของสมการหรือ** Expression ที่เสนอในรูป Linear Form

เป็นระบบสมการเชิงเส้น m สมการแต่ละสมการมีตัวแปร n ตัวคือ $x_1, x_2 \ldots x_n$ โดยที่ $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ และ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ เป็นตัวคงค่าใด ๆ (จะมีเครื่องหมายบวกหรือลบก็ได้) ถ้า $m = n$ แสดงว่าระบบนั้นมีจำนวนสมการและจำนวนตัวแปรค่าเท่ากัน
ถ้า $m < n$ หรือ $m > n$ แสดงว่าจำนวนสมการน้อยกว่าตัวแปรค่าและมากกว่าจำนวนตัวแปรค่าตามลำดับ

1.2 การจัดระบบสมการเชิงเส้นในรูปแมตริกซ์

เพื่อให้เข้าใจความหมายข้างต้น ขอให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 จงจัดระบบสมการต่อไปนี้เป็นรูปแมตริกซ์

$$2x_1 + 3x_2 = 3$$
$$x_1 - x_2 = 4$$

วิธีทำ

จากสมการทั้งสอง สัมประสิทธิ์ของ x_1 และ x_2 ในสมการที่ 1 คือ 2 และ 3 และสัมประสิทธิ์ของ x_1 และ x_2 ในสมการที่ 2 คือ 1 และ -1 จัดสัมประสิทธิ์ไว้เป็นกลุ่มของมันเองได้เป็น $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

แล้วจัดตัวแปรค่า x_1, x_2 ไว้อีกกลุ่มหนึ่งเป็น $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ และตัวคงที่ด้านตรงกันข้ามกับเครื่องหมายเท่ากับเป็น $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น ระบบสมการดังกล่าวจึงสามารถจัดเป็นรูปแมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นทั่วไป คือ

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad \ldots\ldots(I)$$

สามารถจัดเป็นรูปแมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(2)$$

กลุ่มของสัมประสิทธิ์เรียกว่า Coefficience Matrix โดยปกติใช้อักษร A แทนทั้งกลุ่ม กลุ่มของตัวแปรค่าใช้ X แทน และกลุ่มของตัวคงค่าใช้ B แทน

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้นทั่วไปในรูปแมตริกซ์ (2) จึงเขียนย่อ ๆ ได้ดังนี้

$$AX = B$$

1.3 แมตริกซ์ (Matrix) คืออะไร

นิยาม 1.1

แมตริกซ์ คือกลุ่มของตัวคงค่า หรือฟังก์ชัน ซึ่งจัดเรียงกันอย่างเป็นระเบียบในรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า ตัวคงค่า (scalar) หรือฟังก์ชันนั้นเป็นค่าที่ได้มาจาก fielde $\mathcal{F}$ หรือมีค่าที่ define ใน field $\mathcal{F}$[1]

ดังนั้น แมตริกซ์จึงมีลักษณะดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

เห็นได้ว่าสมาชิกแต่ละตัวมี subscript ประจำไว้ subscript ตัวแรกเรียกว่า row subscript เป็นตัวบ่งบอกว่าสมาชิกตัวนั้นอยู่ในแถว (row) ใด โดยปกติใช้สัญลักษณ์ i ส่วน subscript ตัวที่สองเรียกว่า column subscript เป็นตัวบ่งบอกว่าสมาชิกตัวนั้นอยู่ในสดมภ์ (column) ใด โดยปกติใช้สัญลักษณ์ j ตัวอย่างเช่น a_{14} ก็คือสมาชิกของแมตริกซ์

---

1 *ดูนิยามของ* Field *ในภาคผนวก* 1

A ที่วางอยู่ในแถวที่ 1 และสดมภ์ที่ 4 a_{m1} คือสมาชิกของแมตริกซ์ A ที่วางอยู่ในแถวที่ m และสดมภ์ที่ 1

จากแมตริกซ์ A ข้างต้น สังเกตจาก subscript จะเห็นได้ว่าสมาชิกทั้งหมดของ A จัดระเบียบกันโดยเรียงกันเป็น m แถว และ n สดมภ์

เพื่อให้ง่ายและประหยัดเวลาในการเขียนแมตริกซ์ (โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการพิสูจน์ทฤษฎีเกี่ยวกับแมตริกซ์)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เราสามารถเขียนรูปย่อ โดยเอาสมาชิกตัวใด ๆ ของ A คือ a_{ij} มาเขียนไว้ในวงเล็บ แล้วเขียนจำนวนที่บ่งบอกจำนวนแถวและจำนวนสดมภ์กำกับไว้ดังนี้

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ หรือ } A = [a_{ij}]_{mn} \text{ หรือ } A = [a_{ij}]_{(m,\ n)}$$

จากรูปย่อจะเห็นได้ว่าแมตริกซ์ A ประกอบด้วยสมาชิก $a_{ij} : i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ โดย subscript i แทนแถว j แทนสดมภ์

หมายเหตุ การเสนอรูปแมตริกซ์นั้นอาจใช้เครื่องหมายวงเล็บใหญ่ เช่น $[a_{ij}]_{mn}$ หรือวงเล็บเล็ก เช่น $(a_{ij})_{mn}$ หรือเส้นตรงคู่วางในแนวตั้ง เช่น $\| a_{ij} \|_{mn}$ ก็ได้

แมตริกซ์ที่มี m แถว n สดมภ์ เรียกว่า แมตริกซ์ขนาด $m \times n$ (อ่านว่า m by n) ถ้า $m = n$ จะได้แมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนสดมภ์เท่ากัน เรียกว่า square matrix ทั้งนี้เพราะการจัดระเบียบของสมาชิกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส โดยปกติถ้าเป็น square matrix ขนาด $n \times n$ เราจะเรียกว่าแมตริกซ์ขนาด n ถ้า $m = 1$ และ $n = n$ เรียกว่า แมตริกซ์ขนาด $1 \times n$ คือมีสมาชิกจัดระเบียบกันเป็น 1 แถว และ n สดมภ์โดยปกติเรียกว่า row matrix หรือ row vector ถ้า $m = m$ และ $n = 1$ เรียกว่าแมตริกซ์ขนาด $m \times 1$ คือสมาชิกจัดระเบียบกันเป็น m แถวและ 1 สดมภ์ โดยปกติเรียกว่า column matrix หรือ column vector พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ก. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็น Column Vector หรือแมตริกซ์ขนาด 4×1 (สมาชิกจัดระเบียบกันเป็น 4 แถว และ 1 สดมภ์

ข. [-2, 4, 1, 4, 0, 3] เป็น row vector หรือแมตริกซ์ขนาด 1×6

ค. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็น square matrix

ขนาด 2×2, 3×3 และ 4×4 ตามลำดับ สำหรับแมตริกซ์สุดท้ายนั้นเรียกว่า Identity matrix

ง. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -x^2 & x & x^2 \\ x^3 & x^4 & x^5 \end{bmatrix}$ เป็นแมตริกซ์ขนาด 2×4 และ 2×3 ตามลำดับ สำหรับแมตริกซ์สุดท้ายจะสังเกตเห็นว่าสมาชิกมิใช่เป็นตัวคงค่า (scalar) แต่เป็นรูปของฟังก์ชั่นที่ define ใน field $\mathscr{F}$

โดยปกติจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C,...,X, Y, Z แทนแมตริกซ์ และใช้อักษรภาษาอังกฤษหรือลาติน (นักศึกษาอาจใช้อักษรภาษาใดก็ได้ขอเพียงให้เข้าใจกันเป็นสากล) ตัวพิมพ์เล็กแทนสมาชิกของแมตริกซ์

1.4 คุณสมบัติของแมตริกซ์

หลักทั่วไปของพีชคณิตของแมตริกซ์ (Matrix Algebra) คือการนำเอาสมาชิกของแมตริกซ์มา Operate กันแบบเดียวกับพีชคณิตที่นักศึกษาเคยพบเห็นมาแล้วในระดับมัธยมศึกษา แต่บางครั้งก็แตกต่างกัน จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่นักศึกษาต้องใช้ความระมัดระวังและช่างสังเกต มิฉะนั้นอาจไขว้เขวและไม่เข้าใจได้ จึงต้องขอย้ำไว้อีกครั้งหนึ่งว่า พีชคณิตของแมตริกซ์นั้นมีหลักพื้นฐานมาจากพีชคณิตที่นักศึกษาเคยคุ้นเคยและหลักการ operation ของแมตริกซ์ก็คือ operation ของสมาชิกของแมตริกซ์นั่นเอง

1.4.1 สมภาพหรือการเท่ากันของแมตริกซ์ (Equality of Matrices)

นิยาม 1.2 แมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{mn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mn}$ จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวในลำดับเดียวกัน (สมาชิกที่วางอยู่ในตำแหน่งของแถวและสดมภ์เดียวกัน มีค่าเท่ากัน นั่นคือ $a_{ij} = b_{ij} : i = 1, 2,\ldots,m \,;\, j = 1, 2,\ldots,n$

ดังนั้น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

$$a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \ldots, a_{1n} = b_{1n}, \ldots, a_{mn} = b_{mn}$$

จากนิยามจึงเห็นได้ว่าแมตริกซ์จะเท่ากันได้นั้น สิ่งสำคัญที่สุดก็คือแมตริกซ์คู่นั้นต้องมีขนาดเดียวกัน หากขนาดไม่เท่ากันการเท่ากันของแมตริกซ์จะไม่ define

จากนิยามข้างต้นอาศัยหลักของการเท่ากันของแมตริกซ์ คุณสมบัติของแมตริกซ์ที่สอดคล้องกับนิยามดังกล่าวที่สำคัญก็คือ Equivalent Relation กล่าวคือ

(ก) ถ้า A และ B เป็นแมตริกซ์ใด ๆ (ขนาดใด ๆ และมีสมาชิกเป็นจำนวนใด ๆ) แมตริกซ์คู่นั้น ๆ อาจเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ ทั้งนี้แล้วแต่ว่าสมาชิกและขนาดของแมตริกซ์คู่นั้น ๆ จะสอดคล้องกันกับนิยามหรือไม่

(ข) ถ้า A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ แล้ว A ก็ย่อมเท่ากับตัวมันเอง (Reflexive Property) นั่นคือ $A = A$

(ค) A และ B เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ถ้า $A = B$ แล้ว $B = A$ (Symmetric Property)

(ง) A, B และ C เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้ว $A = C$ (Transitive Property)

1.4.2 **การบวกแมตริกซ์** (Addition of Matrices)

นิยาม 1.3 ถ้า $A = [a_{ij}]_{mn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mn}$ เป็นแมตริกซ์คู่ใด ๆ ที่มีขนาดเดียวกันผลบวกของแมตริกซ์คือแมตริกซ์ที่เกิดจากการนำสมาชิกในลำดับเดียวกันของแมตริกซ์ A และ B มารวมกัน นั่นคือ

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$

นักศึกษาต้องไม่ลืมว่า operation ของแมตริกซ์นั้นก็คือ operation ของสมาชิกของแมตริกซ์ โดยถือว่าสมาชิกทุกตัวของแมตริกซ์ define ใน field $\mathscr{F}$ ซึ่งถ้าสมาชิกเหล่านั้นอยู่ใน field $\mathscr{F}$ หรือ define ใน field $\mathscr{F}$ ผลที่ได้ย่อมเกิดขึ้นแก่แมตริกซ์ซึ่งเปรียบเสมือน Set ของสมาชิกเหล่านั้น

อนึ่ง ในการให้คำจำกัดความตลอดจนการพิสูจน์กฎเกณฑ์หรือทฤษฎีของแมตริกซ์นั้นไม่นิยมนำสมาชิกทุกตัวของแมตริกซ์มาพิจารณา เพราะเป็นเรื่องสุดวิสัยและเกินความจำเป็น ทั้งนี้เนื่องจากแมตริกซ์หนึ่ง ๆ ย่อมมีกฎเกณฑ์บ่งบอกคุณลักษณะของสมาชิกของมันเองไว้อยู่แล้ว ดังนั้นสมาชิกทุกตัวหรือทุกกลุ่มในแมตริกซ์หนึ่งย่อมมีคุณลักษณะเดียวกัน การพิสูจน์หรือการให้คำจำกัดความจึงยึดถือเอาสมาชิกตัวใด ๆ (โดยปกติใช้ตัวที่ ij คือสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และสดมภ์ที่ j ซึ่งเป็นสมาชิกตัวใด ๆ) เป็นเกณฑ์ แล้วจึงย้อนสรุปสู่สมาชิกทั้งหมดของแมตริกซ์นั้น ๆ ในขั้นสุดท้าย

1. พีชคณิตของแมตริกซ์ (Matrix Algebra)

1.1 ระบบสมการเชิงเส้นหรือสมการกำลังหนึ่ง (Linear Equation)

โดยปกติรูปทั่วไปของสมการกำลังหนึ่งในระนาบ xy (หรือระนาบอื่นใดที่มี 2 มิติ ซึ่งมีเพียงส่วนกว้างและส่วนยาว แต่ไม่มีส่วนลึก) คือ

$ax + by + c = 0$; เมื่อ a, b, c เป็นตัวคงที่ใด ๆ (เป็นบวกหรือลบก็ได้)

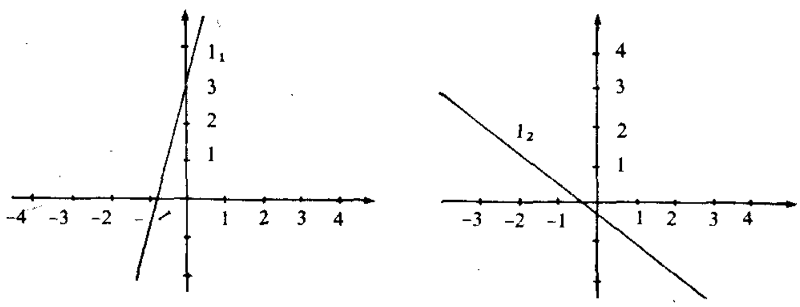
เช่น

$$\ell_1 \equiv 2x + 3y + 1 = 0$$

หรือ

$$\ell_2 \equiv -x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{4} = 0$$

จะใช้แทนเส้นตรงในระนาบ xy (หากใช้ระบบอื่น เช่น ระนาบ uv ตัวแปรค่าก็เป็น u และ v) จากตัวอย่างสมการทั้งสองสามารถสร้างเส้นตรงซึ่งแสดงลักษณะทางเดินของจุดที่สอดคล้องกับสมการได้ดังภาพ



หมายเหตุ ถ้าผู้อ่านเคยผ่านวิชาคณิตศาสตร์ เช่น เรขาคณิตวิเคราะห์หรือแคลคูลัส จะพบว่าการวาดรูปสมการเส้นตรงนั้นกระทำได้หลายวิธี คือ

ก. โดยการ plot จุด

ข. โดยการจัดรูปสมการให้เป็น intercept form นั่นคือ จาก $ax + by + c = 0$ เป็น

$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$ หรือ

ค. จัดเป็นรูป slope form นั่นคือ จาก $ax + by + c = 0$ เป็น $y = mx + c$

ดังนั้น การแก้สมการโดยนัยของสมการในระบบ 2 มิติ จึงหมายถึงการหาจุดร่วม (common point) ที่เส้นสมการทั้งหลายลากผ่าน จุดร่วมนั้นจะแทน solution ของระบบสมการ สำหรับสมการในระบบ 3 มิติ รูปทั่วไปของสมการกำลังหนึ่ง (มี 3 ตัวแปร ตัวแปรแต่ละตัวมีกำลังเป็น 1) คือ

$$ax + by + cz + d = 0 ; a, b, c, d \text{ เป็นตัวคงที่ใด ๆ}$$

การบวกแมตริกซ์ก็ยึดถือหลักเกณฑ์ดังกล่าว และขอย้ำไว้ ณ ที่นี้ว่า แมตริกซ์จะรวมกันได้ก็ต่อเมื่อแมตริกซ์คู่นั้น ๆ หรือเหล่านั้นต้องมีขนาดเดียวกัน คุณสมบัติข้อนี้เรียกว่าคุณสมบัติขั้นพื้นฐานของการบวก (conformibility of addition : con หมายถึงร่วมกัน, เดียวกัน form หมายถึงรูปแบบ ขนาด conform จึงหมายถึงการมีขนาดเดียวกัน)

ตัวอย่าง 1.2 จงหาผลรวมของแมตริกซ์ A และ B เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \beta & 2 & \beta^2 \\ \gamma & \gamma^2 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากนิยาม ผลบวกของแมตริกซ์ A และ B คือ

$$A + B = \begin{bmatrix} x_{11}+1 & x_{12}+\alpha & x_{13}+\alpha^2 \\ x_{21}+\beta & x_{22}+2 & x_{23}+\beta^2 \\ x_{31}+\gamma & x_{32}+\gamma^2 & x_{33}+3 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ โดยปกติจะให้ชื่อแมตริกซ์ที่เกิดใหม่นี้เป็น C (หรืออักษรใด ๆ ก็ได้) ทั้งนี้เพื่อความสะดวกและประหยัดเวลา

ตัวอย่าง 1.3 จงหาผลรวมของแมตริกซ์ A, B และ C เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ผลรวมของแมตริกซ์ A, B และ C คือ

$$D = \begin{bmatrix} 2+(-1)+(-3) & 2+(-5)+0 \\ 3+7+(-9) & 4+11+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 21 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.4 จงหาผลรวมของแมตริกซ์ A และ B เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จากแมตริกซ์ที่กำหนดให้จะเห็นได้ว่าไม่อาจรวมกันได้ทั้งนี้เพราะมีขนาดต่างกันหรือมีจำนวนสมาชิกไม่เท่ากัน การรวมกันจึงไม่ define อาจให้เหตุผลอย่างไม่เป็นทางการได้ว่าเพราะ A และ B มีขนาดต่างกันหรือจำนวนสมาชิกไม่เท่ากัน การจับคู่เพื่อบวกกันจึงทำได้ไม่ตลอดเพราะขาดคู่ (หรือเกินคู่)

ทฤษฎี 1.1 การบวกแมตริกซ์สอดคล้องกับคุณสมบัติของการสลับที่ (Commutative Law) และคุณสมบัติการจับคู่ (Associative Law) นั่นคือ

ถ้า A, B และ C เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดเดียวกันแล้ว

ก. $A+B = B+A$

และ ข. $A+(B+C) = (A+B)+C$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{ij}]_{mn}$ และ $C = [c_{ij}]_{mn}$

ก. $A+B = B+A$

$\because A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{mn}$ เมื่อ a_{ij} และ b_{ij} เป็นสมาชิกใด ๆ ของ A และ B ตามลำดับ

แต่ a_{ij} และ b_{ij} เป็น scalar ที่อยู่ใน $\mathcal{F}$ ซึ่งย่อมสอดคล้องกับคุณสมบัติของ field คือ Commutative Law (ต่อไปจะใช้ $\mathcal{F}$ แทนคำว่า field $\mathcal{F}$)

ดังนั้น $a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij}$

นั่นคือสมาชิกใด ๆ ของ A รวมกับสมาชิกใด ๆ ของ B มีค่าเท่ากับสมาชิกใด ๆ ของ B รวมกับสมาชิกใด ๆ ของ A

ดังนั้น $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{mn} = [b_{ij}+a_{ij}]_{mn} = B+A$

ข. $A+(B+C) = (A+B)+C$

$A+(B+C) = [a_{ij}]_{mn}+[b_{ij}+c_{ij}]_{mn}$

แต่ a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} เป็นสมาชิกของ $\mathcal{F}$ ซึ่งย่อมสอดคล้องกับคุณสมบัติของ field คือ Associative Law

ดังนั้น
$$\begin{aligned} A+(B+C) &= [a_{ij}]_{mn}+[b_{ij}+c_{ij}]_{mn} \\ &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{mn} \\ &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{mn} \\ &= [a_{ij}+b_{ij}]_{mn}+[c_{ij}]_{mn} = (A+B)+C \end{aligned}$$

ทฤษฎี 1.2 ถ้า A, B และ C เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดสองคล้องกับเงื่อนไขการบวก แล้ว Cancellation Law for Addition จะเป็นจริง นั่นคือ

$A+C = B+C$ ได้ก็ต่อเมื่อ $A = B$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{ij}]_{mn}$ และ $C = [c_{ij}]_{mn}$

สมาชิกใด ๆ ของ $A+C$ คือ $a_{ij}+c_{ij}$ และสมาชิกใด ๆ ของ $B+C$ คือ $b_{ij}+c_{ij}$

ดังนั้นตามหลักของ Cancellation Law ของสมาชิกใน field

$$a_{ij}+c_{ij} = b_{ij}+c_{ij} \text{ ได้ก็ต่อเมื่อ } a_{ij} = b_{ij} \text{ เท่านั้น}$$

เมื่อสมาชิกใด ๆ ของ A+C จะเท่ากับสมาชิกใด ๆ ของ B+C ได้ก็ต่อเมื่อสมาชิกใด ๆ ของ A มีค่าเท่ากับสมาชิกใด ๆ ของ B ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า

$$A+C = B+C \text{ ก็ต่อเมื่อ } A = B \text{ เท่านั้น}$$

1.4.3 การลบกันของแมตริกซ์ (Subtraction of Matrices)

หลักการลบกันของแมตริกซ์ยึดถือหลักเกณฑ์เดียวกันกับการรวมกันของแมตริกซ์ทุกประการ กล่าวคือ แมตริกซ์ที่จะนำมาลบกันได้ต้องมีขนาดเดียวกัน และการลบกันให้นำสมาชิก ณ ลำดับเดียวกันมาลบกัน

ในที่นี้จำเป็นต้องทำความเข้าใจไว้ประการหนึ่งว่า นิเศธ (negative) ของแมตริกซ์นั้นนิยามไว้ดังนี้

ถ้า $A = [a_{ij}]_{mn}$

$-A = [-a_{ij}]_{mn}$

หมายความว่า นิเศธของแมตริกซ์ใด ๆ ก็คือนิเศธของสมาชิกทุกตัวของแมตริกซ์นั้น ๆ เช่น

$$-\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -5 & -1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -(-1) & 0 & -2 \\ -(-5) & -(-1) & -(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

และแมตริกซ์ใด ๆ ก็ตามที่สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ (zero) เราเรียกว่า Zero Matrix โดยปกติเขียนเป็น 0_{mn} หรือ 0_n แล้วแต่ว่าแมตริกซ์นั้น ๆ มีขนาดเป็นเท่าใด บางครั้งเพื่อประโยชน์การพิสูจน์อาจเขียนเป็น $[0_{ij}]_{mn}$ หรือ $[0_{ij}]_n$

ดังที่กล่าวแล้วว่าการลบกันของแมตริกซ์นั้นให้นำสมาชิกในลำดับเดียวกันมาลบกัน จึงไม่เป็นการยากที่จะพิสูจน์คุณสมบัติของแมตริกซ์ดังต่อไปนี้

ก. $A+O = A$: (0 เรียกว่า identity element for addition)

ข. $A-A = A+(-A)$: ($-A$ เรียกว่า inverse of addition ของแมตริกซ์ A)

ค. $A-B = A+(-B)$

จากคุณสมบัติข้างต้นอาจยกตัวอย่างเพื่อให้เห็นชัดได้ดังนี้

ถ้าให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ จะเห็นได้ว่า

$$A+O = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 4+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$A+(-A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 3-3 \\ 4-4 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 4-1 & 0-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+(-2) \\ 4+(-1) & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

อาศัยคุณสมบัติดังกล่าวทำให้เราสามารถแก้สมการต่าง ๆ ได้โดยง่าย เช่น ในสมการ

$$X+A = B$$

ดังนั้น $X+A-A = B-A$

นั่นคือ $X = B-A$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.5 จงหาค่า x และ y จากสมการ

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & 2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ x-y & 3 \end{bmatrix}$$

อาศัยหลักสมภาพของแมตริกซ์จะได้สมการ 4 สมการดังนี้

$$x+y = 2 \quad \dots (1)$$

$$2 = x+y \dots (2)$$

$$1 = x-y \dots (3)$$

$$2x-2y = 3 \quad \dots (4)$$

จากสมการทั้ง 4 เห็นได้ว่าสมการที่ 1 และ 2 คือสมการเดียวกัน ดังนั้นจึงเหลือเพียง 3 สมการ คือ

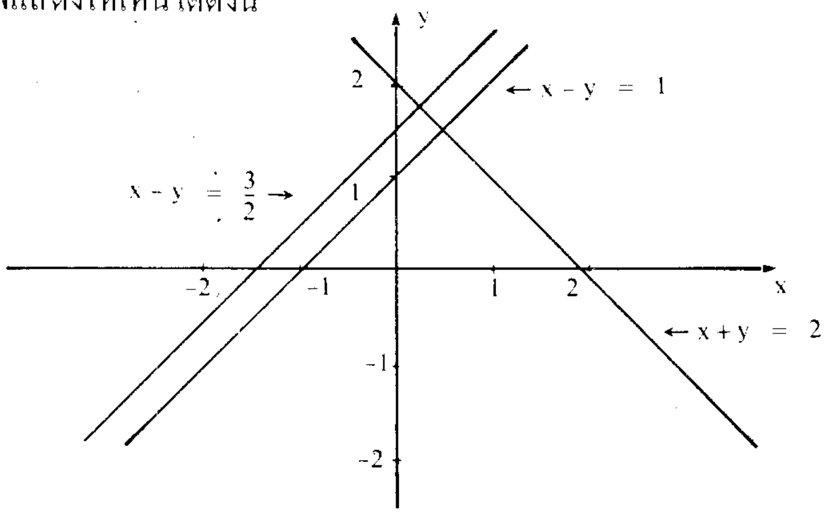
$$x+y = 2 \dots (5)$$

$$x-y = 1 \dots (6)$$

$$x-y = \frac{3}{2} \dots (7)$$

จะเห็นได้ว่า $1 = \frac{3}{2}$ (จากสมการ (6) และ (7)) ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นจริงในระบบจำนวน

ดังนั้น ระบบสมการดังกล่าวจึงไม่มีคำตอบ (solution) หรือจุดตัดร่วมกัน สามารถวาดภาพแสดงให้เห็นได้ดังนี้



1.4.4 การคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า (Scalar Multiplication of Matrices)

นิยาม 1.4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{mn}$ เป็นแมตริกซ์ใด ๆ และ α เป็นตัวคงค่าใด ๆ แล้ว

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{mn}$$

นั่นคือ การคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่าใด ๆ ก็คือการคูณสมาชิกทุกตัวของแมตริกซ์นั้นด้วยตัวคงค่าดังกล่าว

ตัวอย่างเช่น ต้องการคูณแมตริกซ์ A ด้วย 2 เมื่อกำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & x+y \\ y & y+z \end{bmatrix}$

ดังนั้น $2A = \begin{bmatrix} 2x & 2(x+y) \\ 2y & 2(y+z) \end{bmatrix}$

หรือต้องการคูณแมตริกซ์ B ด้วย $-\frac{1}{2}$ เมื่อกำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $-\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{5}{2} & -3 \end{bmatrix}$

การคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่าดังกล่าวมีคุณสมบัติดังนี้

ก. $1 \cdot A = A$ เมื่อ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ

ข. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ เมื่อ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ α, β เป็นตัวคงค่าใด ๆ

ค. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ เมื่อ A และ B เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดเดียวกัน

ง. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ เมื่อ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ และ α, β เป็นตัวคงค่าใด ๆ

สำหรับคุณสมบัติข้างต้นนี้จะพิสูจน์ให้เห็นเป็นตัวอย่างในบางประการ นอกเหนือไปจากนั้นจะเว้นไว้ให้นักศึกษาฝึกพิสูจน์เองเพื่อให้คุ้นเคยกับหลักการของแมตริกซ์

พิสูจน์ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mn}$

ดังนั้น $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{mn}$: นิยามการบวกแมตริกซ์

$\alpha(A+B) = [\alpha(a_{ij}+b_{ij})]_{mn}$: นิยามการคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า

$= [\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}]_{mn}$: Distributive Law ของ $\mathscr{F}$

$= [\alpha a_{ij}]_{mn}+[\alpha b_{ij}]_{mn}$: คุณสมบัติการบวก

$= \alpha A+\alpha B$: นิยามการคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า

พิสูจน์ $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta B$

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$ และ α, β เป็น scalar ใด ๆ

ดังนั้น $(\alpha+\beta)A = [(\alpha+\beta)a_{ij}]_{mn}$: นิยามการคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า

$= [\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}]_{mn}$: Right Hand Distributive Law ของ $\mathscr{F}$

$= [\alpha a_{ij}]_{mn}+[\beta a_{ij}]_{mn}$: นิยามการบวก

$= \alpha[a_{ij}]_{mn}+\beta[a_{ij}]_{mn}$: นิยามการคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า

$= \alpha A+\beta A$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ และ } A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ x_1, x_2, x_3 และ x_4 จากสมการ

$$x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

จากสมการ $x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

แทนค่า A_1, A_2, A_3, A_4

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

อาศัยหลักการคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงค่า

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix}x_1 & 0\\0 & x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & x_2\\x_2 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_3 & 0\\0 & -x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & x_4\\-x_4 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1+x_3 & x_2+x_4\\x_2-x_4 & x_1-x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

จึงได้ระบบสมการจากสมภาพของแมตริกซ์ดังนี้

$$x_1+x_3 = 2 \ldots (1)$$

$$x_2+x_4 = -1 \ldots (2)$$

$$x_2-x_4 = -1 \ldots (3)$$

$$x_1-x_3 = 2 \ldots (3)$$

แก้สมการทั้ง 4 ได้คำตอบดังนี้

$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

ตัวอย่าง 1.7 จงพิสูจน์ว่า $(A-B)+C \neq A-(B+C)$ และ $A-B \neq B-A$

วิธีทำ

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{ij}]_{mn}$, $C = [c_{ij}]_{mn}$

ดังนั้น $(A-B)+C = [(a_{ij}-b_{ij})+c_{ij}]_{mn}$

$$= [a_{ij}-b_{ij}+c_{ij}]_{mn}$$

$$= [a_{ij}-(b_{ij}-c_{ij})]_{mn}$$

$$= [a_{ij}]_{mn} - [b_{ij}-c_{ij}]_{mn}$$

$$= A-(B-C)$$

$$\neq A-(B+C)$$

ตัวอย่างนี้นับว่าจะก่อประโยชน์ให้นักศึกษาได้มากเพราะทำให้ระมัดระวังการใช้ Commutative Law และ Associative Law มากขึ้น นักศึกษาสามารถกำหนดแมตริกซ์ขึ้นเพื่อตรวจสอบความเป็นจริงของกฎเกณฑ์ประการต่าง ๆ ที่ผ่านมาด้วยตนเองได้

1.4.5 **การคูณแมตริกซ์** (Multiplication of Matrices)

นิยาม 1.5 ให้ A เป็นแมตริกซ์ขนาด $m \times p$ ให้ B เป็นแมตริกซ์ขนาด $p \times n$ ผลคูณ

ของแมตริกซ์คือ AB จะเป็นแมตริกซ์ขนาด $m \times n$ โดยที่สมาชิกตัวที่ ij ของ AB (โดยปกติใช้ชื่อเป็นแมตริกซ์ใหม่เช่น C) เกิดจากการรวมกันของผลคูณของสมาชิกในแถวที่ i ของ A และสมาชิกในสดมภ์ที่ j ของ B

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}} & & & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} : i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2 \ldots, n$$

ข้อสังเกต

ก. จำนวนสมาชิกในแถวใด ๆ ของแมตริกซ์แรกต้องมีจำนวนเท่ากับจำนวนสมาชิกในสดมภ์ใด ๆ ของแมตริกซ์หลัง หรือนัยหนึ่ง จำนวนสดมภ์ในแมตริกซ์แรกต้องเท่ากับจำนวนแถวในแมตริกซ์หลัง

เช่น $A = [a_{ij}]_{37}$ เป็นแมตริกซ์ที่มี 3 แถว 7 สดมภ์ (แต่ละแถวมีสมาชิก 7 ตัว) แมตริกซ์ที่จะมาคูณกับ A ได้ต้องเป็นแมตริกซ์ที่มี 7 แถว (แต่ละสดมภ์มีสมาชิก 7 ตัว)

ดังนั้น $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$

ซึ่งหมายความว่า A จะมีกี่แถว B จะมีกี่สดมภ์ก็ได้ แต่ A ต้องมีจำนวนสดมภ์เท่ากับจำนวนแถวของ B การคูณจึงจะ define หลักการนี้เรียกว่าหลักขั้นพื้นฐานของการคูณ (Conformability of Multiplication)

ข. สมาชิกใด ๆ ของผลคูณของแมตริกซ์ AB คือ

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} : i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

ดูนิยามของ Σ ในภาคผนวก 2

โดยปกติในการพิสูจน์เกี่ยวกับการคูณจะใช้สัญญลักษณ์นี้ เพื่อประหยัดเวลาและความสะดวก ขอให้สังเกตว่า subscript ที่ 2 ของ a และ subscript ที่ 1 ของ b (ในที่นี้คือ k) ต้องเป็นตัวเดียวกัน และเป็น subscript ที่เปลี่ยนค่าไปเรื่อย ๆ จนถึง p เรียกว่า index of summation ส่วน i, j เรียกว่า free subscript

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.8 จงหาผลคูณของ A และ B เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ -x & -x^2 & -x^3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha x+\beta(-x) & \alpha x^2+\beta(-x^2) & \alpha x^2+\beta(-x^3) \\ \gamma x+\theta(-x) & \gamma x^2+\theta(-x^2) & \gamma x^3+\theta(-x^3) \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ตัวอย่าง 1.9 จงหาผลคูณของแมตริกซ์ A และ B เมื่อกำหนดให้

$$A = [\,2 \quad 3 \quad 4 \quad 1\,]_{1\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ -20 & 11 \\ -7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} AB &= [\,(2\cdot 13+3\cdot(-20)+4\cdot(-7)+1\cdot(-8)) \quad (2\cdot 10+3\cdot 11+4\cdot(-6)+1\cdot 9)\,] \\ &= [\,-70 \quad 38\,]_{1\times 2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.10 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ A^2, A^3 และ A^4 เมื่อ $i = \sqrt{-1}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+i^2 & 0+0 \\ 0+0 & i^2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & -i+0 \\ 0-i & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A\cdot A\cdot A\cdot A = A^3\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-i^2 & 0+0 \\ 0+0 & -i^2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ สำหรับตัวอย่างนี้นักศึกษาอย่าเข้าใจไขว้เขวว่า แมตริกซ์ยกกำลังใดจะมีค่าเท่ากับการที่สมาชิกของแมตริกซ์ยกกำลังนั้น นั่นคือ

$$A^p \neq [a_{ij}^p]_{mn} \quad \text{แต่} \quad A^p = \underbrace{A\cdot A\cdot A \; A\ldots A}_{p \text{ ครั้ง}}$$

คุณสมบัติของการคูณแมตริกซ์

เกี่ยวกับการคูณแมตริกซ์นั้นพีชคณิตของแมตริกซ์ (Matrix Algebra) แตกต่างไปจากพีชคณิตของจำนวนในระบบจำนวนธรรมดา (Scalar Algebra) ดังนี้

ก. โดยปกติ Commutative Law จะไม่เป็นจริงในพีชคณิตของแมตริกซ์ (ที่ใช้คำว่าโดยปกติไม่เป็นจริงนั้นเพราะเหตุว่าในบางกรณีอาจเป็นไปได้ แต่เป็นกรณีเฉพาะหรือมีเงื่อนไขพิเศษเพิ่มเติมเข้ามา)

นั่นคือ $AB \neq BA$ เมื่อ A, B เป็นแมตริกซ์ใด ๆ

ข. ถ้า $AB = 0$ เราไม่อาจสรุปได้ว่าทั้ง A และ B จะต้องเป็น Zero Matrix

ค. ถ้า $AB = AC$ หรือ $BA = CA$ ถึงแม้ว่า A จะไม่ใช่ Zero Matrix $(A \neq 0)$ เราก็ไม่อาจสรุปได้ว่า $B = C$

โปรดพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.11 จงแสดงให้เห็นว่า $AB \neq BA$ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 15 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ การคูณไม่ define}$$

จากตัวอย่างนี้นักศึกษาจะสังเกตได้ว่า การที่กฎการสลับที่ (Commutative Law) ไม่เป็นจริงนั้น สาเหตุประการหนึ่งก็คือ เมื่อสลับที่แล้วการคูณไม่ define จากตัวอย่าง $A_{2\times2}\, B_{2\times3} = C_{2\times3}$ แต่ $B_{2\times3}\, A_{2\times2}$ พบว่าจำนวนสดมภ์ของแมตริกซ์แรกกับจำนวนแถว

ของแมตริกซ์หลังไม่เท่ากัน จึงหาผลคูณไม่ได้

นักศึกษาอาจเข้าใจว่าเหตุดังกล่าวเป็นสาเหตุที่แท้จริง ความจริงแล้วเหตุที่กล่าวถึงเป็นเพียงข้อสังเกตปลีกย่อย เพราะถึงแม้แมตริกซ์คู่ใด ๆ จะมีขนาดเท่ากันโดยเป็น Square matrix ทั้งคู่ กฎการสลับที่ก็ยังคงไม่เป็นจริง ซึ่งอาจพิสูจน์ให้เห็นได้ดังนี้

ให้ $A = [a_{ij}]_n$, $B = [b_{ik}]_n$ และ $C = [c_{ik}]_n$

ให้ $AB = C$

นั่นคือ $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} : i = 1, 2, \ldots, n ;$

$j = 1, 2, \ldots, n$

เป็นสมาชิกใด ๆ ของ AB

ให้ $BA = D$

และ เพื่อประโยชน์ในการพิสูจน์ กำหนด subscript ของ B, A และ D เสียใหม่คือให้

$$B = [b_{rs}]_n , A = [a_{st}]_n , D = [d_{rt}]_n$$

∴ สมาชิกใด ๆ ของ D คือ

$$d_{rt} = b_{r1}a_{1t} + b_{r2}a_{2t} + \ldots + b_{rn}a_{nt} = \sum_{s=1}^{n} b_{rs}a_{st} : r = 1, 2, \ldots, n ; t = 1, 2, \ldots, n$$

เพื่อให้สามารถเทียบกันได้ระหว่างสมาชิกใด ๆ ของ C และ D จึงควรเทียบกันระหว่างสมาชิกในลำดับเดียวกัน เช่น สมาชิกในลำดับ (2, 3) ของ C กับสมาชิกในลำดับที่ (2, 3) ของ D เป็นต้น

ดังนั้น กรณี c_{ik} และ d_{rt} จึงกำหนดให้ $i = r$ และ $k = t$ หมายความว่าสมาชิกใด ๆ ของ C และ D อยู่ในตำแหน่งแถวและสดมภ์เดียวกัน

ดังนั้น c_{ik} จึงกลายเป็น c_{rt}

นั่นคือ $c_{rt} = a_{r1}b_{1t} + a_{r2}b_{2t} + \ldots + a_{rn}b_{nt}$

และ $d_{rt} = b_{r1}a_{1t} + b_{r2}a_{2t} + \ldots + b_{rn}a_{nt}$

แต่โดยทั่วไป $a_{r1} \neq b_{r1}, a_{r2} \neq b_{r2}, \ldots, a_{rn} \neq b_{rn}$

$b_{1t} \neq a_{1t}, b_{2t} \neq a_{2t}, \ldots, b_{nt} \neq a_{nt}$

(ยกเว้นเมื่อ $A = B$ ซึ่ง AB ก็คือ AA หรือ BB ซึ่งย่อมสลับที่กันได้)

ดังนั้น จึงไม่อาจยืนยันได้ว่า $c_{rt} = d_{rt}$

นั่นคือ $AB \neq BA$

ตัวอย่าง 1.12 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงให้เห็นว่า $AB \neq BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

เห็นได้ว่า $AB \neq BA$

สำหรับกรณี Rectangular Matrix

นักศึกษาจะพบว่าแม้ผลคูณ AB จะ define แต่ผลคูณ BA จะไม่ define ซึ่งทำให้สรุปได้ทันทีว่าการคูณไม่สอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law)

กล่าวคือ 1. $A_{m\times p}B_{p\times n} = C_{m\times n}$

2. $B_{p\times n}A_{m\times p}$ การคูณไม่ define

ข้อสังเกต ในการพิสูจน์เกี่ยวกับการคูณของแมตริกซ์ เราต้องให้ subscript ของสมาชิกของแมตริกซ์ที่จะนำมาคูณกันนั้นเป็นอักษรที่ต่อเนื่องกัน ทั้งนี้เพื่อให้สอดคล้องกับนิยามของการคูณ กล่าวคือมี running subscript ร่วมกัน เช่น

$$A = [a_{ij}]_{mn}$$

แมตริกซ์ที่จะคูณกับ A ได้ต้องมีจำนวนแถวเป็น n subscript ตัวต้นของสมาชิกใด ๆ ของแมตริกซ์ที่จะมาคูณกับ A จึงต้องเป็น j ด้วยเช่น $B = [b_{jk}]_{nr}$

หรือเมื่อ $C = [c_{rs}]_{mp}$

แมตริกซ์ที่จะคูณกับ C เช่น D จึงเป็น $D = [d_{sk}]_{pn}$

ซึ่งต่างจากการพิสูจน์เกี่ยวกับการบวกที่ต้องกำหนดให้มี subscript ตัวเดียวกันและแมตริกซ์ก็ต้องมีขนาดเดียวกันที่ต้องเป็นเช่นนี้ก็เพื่อให้สอดคล้องกับนิยามของการบวก

ตัวอย่าง 1.13 จงหาผลคูณของแมตริกซ์ A และ B เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ แต่ $AB = 0$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

จงแสดงให้เห็นว่า $AB = AC$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $AB = AC$ แต่ $B \neq C$ ซึ่งแสดงให้เห็นกฎการตัด (Cancellation Law for Multiplication) ไม่เป็นจริงในพีชคณิตของแมตริกซ์

นักศึกษาสามารถพิสูจน์ข้อ ข. และ ค. ได้เองโดยอาศัยความรู้เรื่องการแก้สมการมาเป็นเครื่องมือ

ทฤษฎี 1.3 การคูณของแมตริกซ์สอดคล้องกับกฎการจับคู่ (Associative Law)

กล่าวคือ $(AB)C = A(BC)$

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{jk}]_{np}$ และ $C = [c_{kl}]_{pr}$

ให้ $AB = S = [s_{ik}]_{mp}$ และ $BC = T = [t_{jl}]_{nr}$

สมาชิกใด ๆ ของ AB คือ $s_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

ให้ $(AB)C = X = [x_{il}]_{mr}$

ดังนั้น สมาชิกใด ๆ ของ $(AB)C$ คือ

$$x_{il} = s_{i1}c_{1l} + s_{i2}c_{2l} + \ldots + s_{ip}c_{pl} = \sum_{k=1}^{p} s_{ik}c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} \right) \qquad \square$$

หมายเหตุ หรืออาจแจงออกมาโดยละเอียดได้ดังนี้

$$x_{il} = \sum_{k=1}^{p} (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk})\, c_{kl}$$

$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1})c_{1l} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2})c_{2l} + \ldots +$$

$$+ \ldots + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \ldots + a_{in}b_{np})c_{pl}$$

$$= (a_{i1}b_{11}c_{1l} + a_{i2}b_{21}c_{1l} + \ldots + a_{in}b_{n1}c_{1l}) + (a_{i1}b_{12}c_{2l} + a_{i2}b_{22}c_{2l} + \ldots + a_{in}b_{n2}c_{2l})$$

$$+ \ldots + (a_{i1}b_{1p}c_{pl} + a_{i2}b_{2p}c_{pl} + \ldots + a_{in}\, b_{np}c_{pl})$$

แยกวงเล็บแล้วจัดเทอมที่มี $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ไว้เป็นพวกเดียวกันได้ดังนี้

$$x_{il} = (a_{i1}b_{11}c_{1l} + a_{i1}b_{12}c_{2l} + \ldots + a_{i1}b_{1p}c_{pl}) + (a_{i2}b_{21}c_{1l} + a_{i2}b_{22}c_{2l} + \ldots + a_{i2}b_{2p}c_{pl})$$

$$+ \ldots + (a_{in}b_{n1}c_{1l} + a_{in}b_{n2}c_{2l} + \ldots + a_{in}b_{np}c_{pl})$$

$$= a_{i1}(b_{11}c_{1l} + b_{12}c_{2l} + \ldots + b_{1p}c_{pl}) + a_{i2}(b_{21}c_{1l} + c_{22}c_{2l} + \ldots + b_{2p}c_{pl}) + \ldots +$$

$$+ \ldots + a_{in}(b_{n1}c_{1l} + b_{n2}c_{2l} + \ldots + b_{np}c_{pl})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, (b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \ldots + b_{jp}c_{lp})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} \right) \qquad ***$$

สำหรับผลคูณ A(BC) กำหนดให้ $A(BC) = Y = [\,y_{il}\,]_{mr}$

โดยหลักเกณฑ์เดียวกัน

$$t_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} \;:\; j = 1, 2, \ldots, n \;;\; l = 1, 2, \ldots, r$$

ดังนี้สมาชิกใด ๆ ของ Y คือ

$$y_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} \right) \;:\; i = 1, 2, \ldots, m \;;\; l = 1, 2, \ldots, r$$

จะเห็นได้ว่า $x_{il} = y_{il}$ หรือสมาชิกใด ๆ ของ (AB)C และ A(BC) เป็นสมาชิกตัวเดียวกัน

นั่นคือ (AB)C = A(BC) หรือการคูณของแมตริกซ์สอดคล้องกับกฎการจับคู่ (Associative Law)

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

จงแสดงให้เห็นว่า $(AB)C = A(BC)$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

เห็นได้ว่า $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่าของ a, b, c และ d ที่ทำให้แมตริกซ์ A และ B สอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law)

กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

สิ่งที่ต้องการคือต้องการทราบว่า a, b, c, d มีค่าเท่าใดจึงทำให้ $AB = BA$

พบว่า

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{bmatrix}$$

และ

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ $AB = BA$ คือ $\begin{bmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}$

จะได้สมการดังนี้

$$a-b = a+c \ldots (1)$$

$$a+b = b+d \ldots (2)$$

$$c-d = -a+c \ldots (3)$$

$$c+d = -b+d \ldots (4)$$

จากสมการ (1) $\quad -b = c \quad \ldots (5)$

จากสมการ (2) $\quad a = d \quad \ldots (6)$

จากสมการ (3) $\quad -d = -a \quad \ldots (7)$

จากสมการ (4) $\quad c = -b \quad \ldots (8)$

นั่นคือ แมตริกซ์ A, B จะสอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law) ได้ต่อเมื่อ $a = d$ และ $b = -c$ ตรวจสอบคำตอบได้ดังนี้

$$AB = \begin{bmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-(-c) & d+b \\ c-(a) & (-b)+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = BA$$

ตัวอย่าง 1.16 จงแสดงให้เห็นว่า $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ เมื่อ A, B เป็นแมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดสอดคล้องกับเงื่อนไขการบวกและการคูณ

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)\cdot(A+B) \\ &= AA+AB+BA+BB \\ &= A^2+AB+BA+B^2 \\ &\neq A^2+2AB+B^2 \end{aligned}$$

: การยกกำลังคือการนำแมตริกซ์เดิมมาคูณกันเป็นจำนวนครั้งเท่ากับจำนวนของกำลัง

ทฤษฎี 1.4 การคูณแมตริกซ์สอดคล้องกับกฎการกระจายภายใต้การบวก (Distributive Law with respect to Addition)

นั่นคือ ถ้า A, B และ C มีขนาดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการบวกและการคูณแล้ว

ก. $A(B+C) = AB+AC$ และ

ข. $(A+B)C = AC+BC$

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{jk}]_{np}$, $C = [c_{jk}]_{np}$

ให้ $AB = D = [d_{ik}]_{mp}$

$AC = E = [e_{ik}]_{mp}$

ดังนั้น สมาชิกใด ๆ ของ AB คือ

$$d_{ik} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} : i = 1, 2,\ldots,m ; k = 1, 2,\ldots,p$$

และสมาชิกใด ๆ ของ AC คือ

$$e_{ik} = a_{i1}c_{1k}+a_{i2}c_{2k}+\ldots+a_{in}c_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} : i = 1, 2,\ldots,m ; k = 1, 2,\ldots,p$$

ดังนั้นสมาชิกใด ๆ ของ AB+AC คือ

$$d_{ik}+e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} : i = 1, 2,\ldots,m ; j = 1, 2,\ldots,p \qquad ***$$

สำหรับ A(B+C) ให้ $B+C = [b_{jk}+c_{jk}]_{np} = G = [g_{jk}]_{np}$

และ $A(B+C) = H = [h_{ik}]_{mp}$

สมาชิกใด ๆ ของ A(B+C) คือ

$$\begin{aligned}
h_{ik} &= a_{i1}g_{1k}+a_{i2}g_{2k}+\ldots+a_{in}g_{nk} \\
&= a_{i1}(b_{1k}+c_{1k})+a_{i2}(b_{2k}+c_{2k})+\ldots+a_{in}(b_{nk}+c_{nk}) \\
&= a_{i1}b_{1k}+a_{i1}c_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i2}c_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}+a_{in}c_{nk} \\
&= (a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk})+(a_{i1}c_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}c_{nk}) \\
&= (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})+(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}) \\
&= d_{ik}+e_{ik} : i = 1, 2,\ldots,m ; k = 1, 2,\ldots,p
\end{aligned}$$

นั่นคือ

สมาชิกใด ๆ ของ A(B+C) = (สมาชิกใด ๆ ของ AB)+(สมาชิกใด ๆ ของ AC)

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$A(B+C) = AB+AC$$

สำหรับกรณี $(A+B)C = AC+BC$ ก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันจะขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

นิยาม 1.6 ผลรวมของสมาชิกที่วางอยู่ในตำแหน่งในแนวเส้นทแยงมุมจากด้านซ้ายบนมาด้านขวาล่าง (Main digonal) ของ square matrix เรียกว่า Trace ของแมตริกซ์

นั่นคือ ถ้า

$$A = [a_{ij}]_n$$

Trace ของแมตริกซ์ A(Trace of A เขียนย่อ ๆ ว่า tr A) คือ

$$\text{tr } A = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ตัวอย่าง 1.17 จงหา Trace ของ A เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

Trace ของ A คือผลรวมของสมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม (main diagonal) ดังนั้น

$$\text{tr } A = a_{11}+a_{22}+a_{33} = 3+4+(-1) = 6$$

ตัวอย่าง 1.18 ถ้า A และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด n จงพิสูจน์ว่า

$$\text{tr }(A+B) = \text{tr } A+\text{tr } B$$

พิสูจน์

เพราะว่า $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_n$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \text{tr}(A+B) &= (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+\ldots+(a_{nn}+b_{nn}) \\ &= (a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+\ldots+b_{nn}) \\ &= \text{tr } A+\text{tr } B \end{aligned}$$

หมายเหตุ สมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม (main diagonal) ของแมตริกซ์ก็คือสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งที่ค่า subscript ของแถวและสดมภ์มีค่าเดียวกัน เช่นในแมตริกซ์ A สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมก็คือ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ถ้าเขียนรูปทั่วไปจะเขียนเป็น a_{ii} : $i = 1, 2, \ldots, n$

(อาจเขียนเป็น a_{ij} : $i = j = 1, 2, \ldots, n$ ก็ได้) ดังนั้น ถ้านักศึกษาสังเกตให้ดีจะ

พบว่า แมตริกซ์ใดก็ตามที่ไม่ใช่ square matrix จะไม่มีแนวเส้นทแยงมุม ทั้งนี้เพราะไม่อาจหาสมาชิก a_{ii} ได้ครบทุกตัว

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมคือ 1, 5, 9

แต่ในแมตริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 12 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า $b_{11} = 11$, $b_{22} = 12$, $b_{33} = 9$, $b_{44} = ?$ ซึ่งถ้าหากวาดเส้นแสดงแนวเส้นทแยงมุม เช่นเดียวกับที่กระทำกับ A จะพบว่าเส้นดังกล่าวจะไม่คลุมสมาชิกที่มี subscript $i = j$ ได้ครบ

นิยาม 1.7 แมตริกซ์ที่มีลักษณะดังนี้

$$D_n = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & d_{22} & & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

คือแมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวที่อยู่นอกแนวเส้นทแยงมุมมีค่าเป็น 0 ($d_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$) เรียกว่า Diagonal Matrix ขนาด n

จากนิยามจะเห็นได้ว่า square matrix เท่านั้นที่จะเป็น Diagonal Matrix ได้ และการที่กล่าวว่า $d_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ นั้น มิได้หมายความว่า d_{ij} (เมื่อ $i = j$) จะเป็น 0 ไม่ได้ สมาชิกบางตัวในแนวเส้นทแยงมุม (Main diagonal) ก็เป็น 0 ได้แต่ไม่ใช่ 0 หมดทุกตัว เพราะถ้า $d_{ii} = 0$ ทุกตัวแมตริกซ์ดังกล่าวจะกลายเป็น Zero Matrix

สำหรับ Diagonal Matrix นั้น ค่า d_{ii} จะเป็นเท่าใดก็ได้ แต่ถ้า d_{ii} เท่ากันทั้งหมด

เช่น $d_{ii} = c$ สำหรับทุกค่า i นั่นคือ $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = c$ แมตริกซ์ที่มีลักษณะดังกล่าวเรียกว่า Scalar Matrix การที่มีชื่อเรียกดังนี้เพราะมันทำหน้าที่เหมือนตัวคงที่ (scalar) เมื่อนำไปคูณกับแมตริกซ์ใด ๆ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น Scalar Matrix}$$

และ $$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

ผลคูณ $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = 2\cdot B$$

ลักษณะพิเศษประการหนึ่งของ Diagonal Matrix คือสอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law) ซึ่งแมตริกซ์อื่นใดไม่มีคุณลักษณะนี้ (ยกเว้นเมื่อกำหนดเงื่อนไขไว้ให้เป็นกรณีพิเศษ)

กรณีเฉพาะของ Diagonal Matrix ที่สำคัญยิ่งอีกประการหนึ่งก็คือ กรณีที่ $d_{11} = d_{22} = \ldots d_{nn} = 1$ กล่าวคือสมาชิกทุกตัวในแนวเส้นทแยงมุมของ Diagonal Matrix มีค่าเป็น 1 แมตริกซ์ดังกล่าวเรียกว่า Identity Matrix (โดยปกติใช้สัญลักษณ์ I)

ดังนั้น Identity Matrix ขนาด n จึงเขียนได้เป็น

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

ที่เรียกว่า Identity Matrix เพราะทำหน้าที่เหมือนเลข 1 ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับแมตริกซ์ใด ๆ ก็เปรียบเสมือนคูณแมตริกซ์นั้น ๆ ด้วย 1 ไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงใด ๆ Identity

Matrix มีบทบาทมากในพีชคณิตของแมตริกซ์ (Matrix Algebra) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในส่วนที่เกี่ยวกับการหาส่วนกลับ (Inverse) ของแมตริกซ์ และการแก้ระบบสมการกำลังหนึ่ง

อนึ่ง Scalar Matrix ทุกรูปสามารถเสนอให้เป็นรูปของ Identity Matrix ได้เสมอ ทั้งนี้ก็ด้วยอาศัยหลักเกณฑ์การคูณแมตริกซ์ด้วยตัวคงที่ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.19 ก. จงแสดงให้เห็นว่า Diagonal Matrix คู่ใด ๆ หากมีขนาดเดียวกันแล้วจะมีคุณสมบัติสอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law)

ข. เมื่อ D เป็น Diagonal Matrix p เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จงเขียนสูตรทั่วไปที่แสดงลักษณะของ D^p

วิธีทำ

ก. ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ii}]_n \,;\, a_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j$

ให้ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = [b_{ii}]_n ; b_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j$

สมาชิกใด ๆ ของ AB คือ

$$c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \dots + a_{i,\,i-1}b_{i-1,\,i} + a_{ii}b_{ii} + a_{i,\,i+1}b_{i+1,\,i} + \dots + a_{in}b_{ni}$$

แต่ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ และ $b_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

ดังนั้น $c_{ii} = 0+0+0+\dots+0+a_{ii}b_{ii}+0+\dots+0$

$= a_{ii}b_{ii}$

ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่าสมาชิกใด ๆ ของ BA คือ

$d_{ii} = b_{ii}a_{ii} = a_{ii}b_{ii} ; b_{ii}a_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ เพราะเป็นสมาชิกใน $\mathscr{F}$

นั่นคือ $c_{ii} = d_{ii}$ หรือสมาชิกใด ๆ ในลำดับที่ (i, i) ของ AB และ BA เป็นสมาชิกตัวเดียวกัน

จึงสรุปได้ว่า AB = BA หรือการคูณกันของ Diagonal Matrix สอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law)

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$$

ข. ให้ $D = [d_{ii}]_n : d_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

ดังนั้นสมาชิกใด ๆ ของ D^2 (หรือ $D \cdot D$) คือ

$$d_{i1}d_{1i}+d_{i2}d_{2i}+\ldots+d_{i,\,i-1}d_{i-1,\,i}+d_{ii}d_{ii}+d_{i,\,i+1}d_{i+1,\,i}+\ldots+d_{in}d_{ni} = d_{ii}^{2}$$

สมาชิกใด ๆ ของ D^3 (หรือ $D \cdot D^2$) คือ

$$d_{i1}d_{1i}^{2}+d_{i2}d_{2i}^{2}+\ldots+d_{i,\,i-1}d_{i-1,\,i}^{2}+d_{ii}d_{ii}^{2}+d_{i,\,i+1}d_{i+1,\,i}^{2}+\ldots+d_{in}d_{ni}^{2} = d_{ii}^{3}$$

.

.

.

สมาชิกใด ๆ ของ D^p (หรือ $D \cdot D^{p-1}$) คือ d_{ii}^{p}

นั่นคือ $D^p = [d_{ii}^{p}]_{n|n}$

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

.

.

.

$$A^p = \begin{bmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 4^p \end{bmatrix}$$

นิยาม 1.8 แมตริกซ์ใดที่เมื่อยกกำลังสองแล้วยังคงสภาพเดิม เรียกว่า Idempotent Matrix

นั่นคือ

A จะเป็น Idempotent Matrix ได้เมื่อ $A^2 = A$

สำหรับ Idempotent Matrix นั้นนับว่ามีบทบาทในการประยุกต์ อาจประยุกต์ไปใช้ทางสถิติ หรือเศรษฐศาสตร์ จะได้กล่าวถึงแมตริกซ์นี้อีกครั้งหนึ่งในบทหลัง สำหรับ

ตัวอย่างของ Idempotent Matrix ที่เห็นได้ชัดก็คือ Identity Matrix

ตัวอย่าง 1.20 ถ้ากำหนดให้ $AB = BA$ จงแสดงให้เห็นว่าสมการนี้ยังคงเป็นจริงเมื่อ A เป็น Idempotent Matrix

วิธีทำ จาก $AB = BA$

คูณข้างหน้าตลอดด้วย A (premultiply by A)

นั่นคือ $A(AB) = A(BA)$

$(AA)B = (AB)A$: กฎการจับคู่ (Associative Law)

$A^2B = (BA)A$: กำหนดให้ $AB = BA$

$A^2B = BA^2$: กฎการคูณ

$AB = BA$: A เป็น Idempotent Matrix

ถ้าหาก B เป็น Idempotent Matrix สมการดังกล่าวก็ยังคงเป็นจริง กล่าวคือ

จาก $AB = BA$

คูณข้างหลังตลอดด้วย B (postmultiply by B)

$$
\begin{aligned}
(AB)B &= (BA)B \\
A(BB) &= B(AB) \\
AB^2 &= B(AB) \\
AB^2 &= B(BA) \\
AB^2 &= (BB)A \\
AB &= B^2A \\
AB &= BA
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงหาค่าของ x และ y จากสมการ

$$
\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}
$$

2. จงพิสูจน์ว่า $(D+E)F = DF+EF$
3. จงพิสูจน์ว่าสมการ $\alpha A = 0$ (เมื่อ α เป็นตัวคงค่าใด ๆ) จะเป็นจริงได้เมื่อ $\alpha = 0$

หรือ $A = 0$

4. กำหนดให้ $\alpha A = \beta A$; $A \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $\alpha = \beta$

5. จงพิสูจน์ว่า

ก. $\alpha A \cdot \beta B = \alpha\beta \cdot AB$ (เมื่อ a , β เป็นตัวคงค่า)

ข. $(-1)A = -A$

ค. $(-A)(-B) = AB$

ง. $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$

6. จงหาผลคูณต่อไปนี้

fl. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & c_2 \end{bmatrix}$

จ. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ฉ. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. ก. เมื่อใดผลคูณของ ABCD จึงจะ define และจะจัดการจับคู่เพื่อการคูณได้อย่างไรบ้าง

ข. ท่านจะอาศัยกฎการจับคู่อย่างไรจึงจะทำให้เสียแรงงานในการหาผลคูณของแมตริกซ์ต่อไปนี้น้อยที่สุด

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. ก. จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

ข. จงกระจาย $(A+B)^3$ และตรวจสอบผลด้วยการยกตัวอย่างแมตริกซ์ประกอบ

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A มีสมาชิกในแถวที่ i และ k เป็นเลขจำนวนเดียวกัน ผลคูณ AB ก็จะมีสมาชิกในแถวที่ i และ k เป็นเลขจำนวนเดียวกันด้วย

10. จงคำนวณหา A^2, B^2 และ B^4 เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b & -(1/b+b) \\ b & -b \end{bmatrix}$$

11. จงคำนวณหา

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4$$

หลังจากนั้นจงสรุปออกเป็นเกณฑ์ทั่วไปสำหรับการยกกำลังของแมตริกซ์ที่มีลักษณะดังกล่าว

12. ให้ A และ B เป็นแมตริกซ์ขนาด n และกำหนดให้

$$C_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B = [\, \alpha_1 a_{ij} + \beta_1 b_{ij} \,]_n$$

$$C_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B = [\, \alpha_2 a_{ij} + \beta_2 b_{ij} \,]_n$$

โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ เป็นตัวคงที่ (scalar) และ $\alpha_1 \beta_2 \neq \alpha_2 \beta_1$ จงแสดงให้เห็นว่า $C_1C_2 = C_2C_1$ ก็ต่อเมื่อ $AB+BA$

13. ค่า x (นับเฉพาะค่าจริง) ควรเป็นเท่าไรจึงจะทำให้อสมภาพ (inequality) ต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{bmatrix} x & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

14. ถ้าหาก $AB = BA$ จงหาค่าของ a, b, c และ d ที่ทำให้ A และ B สอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law) โดยที่กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & b \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$$

15. ถ้ากำหนดให้ $A \circ B = AB - BA$ จงพิสูจน์ว่า

ก. $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ ก็ต่อเมื่อ $B \circ (A \circ C)$

ข. $A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0$

16. ถ้า $A_i = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta_i & -\text{Sin } \theta_i \\ \text{Sin } \theta_i & \text{Cos } \theta_i \end{bmatrix}$; i = 1, 2

จงแสดงให้เห็นว่า $A_1A_2 = A_2A_1$

17. จงหาเมตริกซ์ A จากสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**18. A เป็น Square Matrix ใด ๆ และ p เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าหาก $A^p = 0$ แล้วเมตริกซ์ A นั้นจะมีชื่อเรียกว่า Nilpotent Matrix

จงแสดงให้เห็นว่า Nilpotent Matrix ขนาด 2×2 ทุกรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $A^2 = 0$ อาจเขียนได้ในรูปของ

$$A = \begin{bmatrix} \lambda\mu & \mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu \end{bmatrix}$$

โดยที่ λ และ μ เป็นตัวคงที่ใด ๆ

(ข้อแนะนำ : นักศึกษาอาจเริ่มต้นด้วยการยกตัวอย่างเป็นตัวเลขเช่น ให้ $\mu = 2$, $A = 3$ ดังนั้น $\lambda\mu = 6$, $\mu^2 = 4$, $-\lambda^2 = -9$, $-\lambda\mu = -6$)

แมตริกซ์ในข้อ 11 เป็น Nilpotent Matrix หรือไม่ ท่านได้ข้อสรุปใดบ้างจากทั้งข้อ 11. และข้อ 18.

19. fl. ถ้า C เป็นแมตริกซ์ขนาด mxn, G เป็นแมตริกซ์ขนาด nxm จงแสดงให้เห็นว่า

$$\text{tr } CG = \text{tr } GC$$

ข. ถ้า A, B และ C เป็นแมตริกซ์ขนาด n จงอาศัยผลจากข้อ ก. แสดงให้เห็นว่า

$$\text{tr } ABC = \text{tr } BCA = \text{tr } CAB \text{ และ}$$

$$\text{tr } ACB = \text{tr } BAC = \text{tr } CBA$$

จากผลของพิสูจน์ดังกล่าว ท่านสามารถสรุปเป็นเกณฑ์ทั่วไปได้อย่างไร และ tr ABC = tr ACB หรือไม่ เพราะเหตุใด ?

20. A เป็นแมตริกซ์ขนาด $p\times q$ และ D เป็น Diagonal Matrix จงหาผลคูณ AD_q และ D_pA แล้วอภิปรายผลและเสนอข้อสรุป

21. ถ้ากำหนดให้ $AB = \lambda B$ โดย A เป็นตัวคงที่ใด ๆ จงแสดงให้เห็นว่า $A^p B = \lambda^p B$ ในทุกค่าของ p ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

**22. ถ้ากำหนดให้ AB = BA จงแสดงให้เห็นว่า $A^rB^s = B^sA^r$ ในทุกค่าของ r และ s ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

(ข้อแนะนำ : จากสมการของแมตริกซ์นั้น การคูณตลอดของสมการด้วยแมตริกซ์ใด ๆ ให้ยึดหลัก premultiply หรือ postmultiply เช่นเดิม เช่น

$$AB = BA$$

ถ้าจะคูณด้วย A แบบ premultiply ก็ต้อง premultiply ตลอดนั่นคือ

$$A(AB) = A(BA)$$

หรือคูณด้วย B แบบ postmultiply ก็ต้อง postmultiply ตลอดนั่นคือ

จาก
$$A(AB) = A(BA)$$
$$A(AB)B = A(AB)B$$

จะกระทำเหมือนการคูณของจำนวนในพีชคณิตธรรมดาไม่ได้)

1.5 การเปลี่ยนตำแหน่งของแมตริกซ์(Transpose of Matrix)

ในแมตริกซ์ใด ๆ สมมุติว่าเป็นแมตริกซ์ A ถ้าเราเปลี่ยนตำแหน่งของสมาชิกของ A โดยเปลี่ยนจากสมาชิกในแถวมาเป็นสมาชิกในสดมภ์ หรือย้ายสมาชิกในสดมภ์ไปเป็นสมาชิกในแถว (หรือการสลับให้แถวไปเป็นสดมภ์ หรือสดมภ์ไปเป็นแถว) โดยการย้ายที่นั้นต้องทำอย่างมีระเบียบและเป็นไปตามลำดับ แมตริกซ์ใหม่ที่ได้จะเรียกว่าแมตริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งของแมตริกซ์เดิม (Transpost of Original Matrix)

ให้ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ นั่นคือ A = $[a_{ij}]_{mn}$ หรือเขียนออกมาเต็มรูปได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เปลี่ยนแถวไปเป็นสดมภ์ (**หรือจะเปลี่ยนสดมภ์ไปเป็นแถวก็ได้**) จะได้แมตริกซ์ใหม่เรียกว่า Transpose of A เขียนย่อ ๆ **เป็น A^T** (บางท่านเขียนเป็น A' หรือ A' หรือ ${}^TA$ หรือ ${}'A$)

ดังนั้น

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

จะสังเกตเห็นว่า แมตริกซ์ A เดิมมี m แถวและ n สดมภ์ เมื่อเปลี่ยนตำแหน่งไปแล้วจะได้ A^T ซึ่งมี n แถว m สดมภ์ นั่นคือเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งของแมตริกซ์แล้ว แมตริกซ์ใหม่จะมีขนาดกลับกันกับแมตริกซ์เดิม อีกประการหนึ่งสมาชิก a_{ij} ใน A หรือนัยหนึ่งสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของ A นั้น จะกลายเป็นสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ j สดมภ์ที่ i ของ A^T เช่น a_{23} ในแมตริกซ์ A เดิมอยู่ในแถวที่ 2 สดมภ์ที่ 3 เมื่อเปลี่ยนตำแหน่งแล้วสมาชิกตัวนี้จะไปอยู่ในแถวที่ 3 สดมภ์ที่ 2 ของ A^T

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & 20 \\ 3 & -3 & 13 \end{bmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 20 & 13 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ การเปลี่ยนตำแหน่งของแมตริกซ์นั้นสามารถกระทำกับแมตริกซ์ขนาดใด ๆ ก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเป็น Square Matrix แต่เพียงอย่างเดียว

นิยาม 1.9 ให้ A เป็นแมตริกซ์ใด ๆ นั่นคือ $A = [a_{ij}]_{mn}$ ดังนั้น $A^T = [a_{ji}]_{nm}$

ทฤษฎี 1.5 ถ้า A^T และ B^T เป็นแมตริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งของ A และ B และถ้า α เป็นตัวคงค่าใด ๆ แล้ว

ก. $(A^T)^T = A$

ข. $(A+B)^T = A^T + B^T$

ค. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

ง. $(AB)^T = B^T A^T$

พิสูจน์ จะพิสูจน์ให้ดูเฉพาะข้อ ข. และ ข้อ ง. เท่านั้น

ข. $(A+B)^T = A^T+B^T$

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mn}$

นั่นคือ $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $A+B$

ดังนั้นโดยการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$c_{ji} = a_{ji}+b_{ji}$$

แต่ c_{ji}, a_{ji}, b_{ji} เป็นสมาชิกใด ๆ ของ C^T, A^T และ B^T ตามลำดับ

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$C^T = A^T+B^T$$

หรือ $(A+B)^T = A^T+B^T$

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^T+B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

เห็นได้ว่า $(A+B)^T = A^T+B^T$

ง. $(AB)^T = B^T A^T$

ให้ $A = [a_{ij}]_{mn}$, $B = [b_{jk}]_{np}$ และ $AB = C = [c_{ik}]_{mp}$

จากนิยามการคูณ

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} : i = 1, 2, \ldots, m ; k = 1, 2, \ldots, p$$

ดังนั้น

$$c_{ki} = a_{1i}b_{k1}+a_{2i}b_{k2}+\ldots+a_{ni}b_{kn} \qquad : i = 1, 2, \ldots m; \ k = 1, 2, \ldots, p$$

แต่ subscript ของผลคูณแต่ละตัวไม่ต่อเนื่องกัน เพื่อให้ตรงตามนิยามการคูณจึงสลับ b กับ a เพื่อให้ subscript ต่อเนื่องกัน โดยมี running subscript วิ่งจาก 1, 2,...,n

นั่นคือ

$$c_{ki} = b_{k1}a_{1i} + b_{k2}a_{2i} + \ldots + b_{kn}a_{ni} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji} : i = 1, 2, \ldots, m \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

โดยที่ c_{ki} เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $C^T = [c_{ki}]_{pm}$, b_{kj} เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $B^T = [b_{kj}]_{pn}$ และ a_{ji} เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $A^T = [a_{ji}]_{nm}$

นั่นคือ สมาชิกใด ๆ ของ C^T เกิดจากผลรวมของผลคูณของสมาชิกใน B^T และ A^T จึงสรุปได้ว่า

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A\,B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 7 \\ -4 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A\,B)^T = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= (A\,B)^T$$

1.6 แมตริกซ์รูปอื่น ๆ (Special Matrix)

นอกจากแมตริกซ์รูปต่าง ๆ ที่นักศึกษาได้ทำความรู้จักมาในตอนต้นแล้ว ยังมีแมตริกซ์รูปอื่น ๆ อีก ซึ่งจะมีข้อกำหนดไว้เป็นกรณีเฉพาะไปดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 1.10 Square Matrix A ใด ๆ จะเรียกว่า Symmetric Matrix ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$ หรือเมื่อพิจารณาสมาชิกเป็นรายตัวจะพบว่า $a_{ij} = a_{ji}$ ในทุกคู่ของ subscript (i, j)

แต่ถ้าหาก $A^T = -A$ (หรือ $A = -A^T$) หรือเมื่อพิจารณาสมาชิกเป็นรายตัวแล้ว

พบว่า $a_{ij} = -a_{ji}$ ในทุกคู่ของ subscript (i, j) แมตริกซ์ A นั้นจะเรียกว่า Skew-Symmetric Matrix

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A เป็น symmetric Matrix เพราะว่าเมื่อเปลี่ยนตำแหน่ง (Transpose) แล้วจะยังคงรูปเดิม กล่าวคือ

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = A$$

ข้อสังเกต แมตริกซ์ A เป็น Symmetric Matrix ได้ก็เพราะสมาชิกของมันสมมาตรกันตามแนวเส้นทแยงมุม จากตัวอย่างสามารถแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

สมาชิกที่มีลูกศรชี้คือสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งที่สมมาตรกันตามแนวเส้นทแยงมุม (Main Diagonal)

ดังนั้น ในการสร้าง Symmetric Matrix ที่มีขนาดต่าง ๆ จึงกระทำได้ง่ายโดยอาศัยหลักเกณฑ์ดังกล่าว โดยที่สมาชิกของแมตริกซ์ที่จะอยู่ในตำแหน่งที่สมมาตรกันได้ต้องมีค่าเท่ากัน (เป็นสมาชิกตัวเดียวกัน เครื่องหมายเดียวกัน)

สำหรับแมตริกซ์ B นั้นเป็น Skew-Symmetric Matrix ทั้งนี้เพราะเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งสมาชิก (Transpose) แล้วจะได้แมตริกซ์รูปเดิมแต่มีเครื่องหมายเป็นตรงข้าม กล่าวคือ

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-1) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

ข้อสังเกต Square Matrix จะเป็น Skew-Symmetric Matrix ได้นั้นจะต้องมีลักษณะ 2 ประการคือ

1. สมาชิกทุกตัวในแนวเส้นทแยงมุม (Main Diagonal) ต้องมีค่าเป็น 0 (ศูนย์) ทั้งนี้ก็เพราะต้องสอดคล้องกับคุณสมบัติของ Skew-Symmetric Matrix (ตามนิยาม) คือ $a_{ij} = -a_{ji}$ ในทุกค่าของ i, j : i, j = 1, 2,...,n

แต่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมคือ a_{ii} จะมีค่าเท่ากับนิเศษ (Negative) ของมันเองได้ก็ต่อเมื่อ $a_{ii} = 0$ เท่านั้น

ดังนั้น $a_{ii} = -a_{ii}$ ได้ก็ต่อเมื่อ $a_{ii} = 0$

2. สมาชิกของ Skew-Symmetric Matrix จะสมมาตรกัน (Symmetry) ตามแนวเส้นทแยงมุม (Main Diagonal) แต่มีเครื่องหมายเป็นตรงกันข้าม

ตัวอย่าง 1.21 ถ้า A และ B เป็น Symmetric Matrix ขนาดเดียวกัน จงพิสูจน์ว่าผลคูณ AB ไม่จำเป็นต้องเป็น Symmetric Matrix พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]_n$ โดยที่ $A^T = A$ หรือ $a_{ij} = a_{ji}$ ในทุกคู่ของ i, j : i, j = 1, 2,...,n

$B = [b_{jk}]_n$ โดยที่ $B^T = B$ หรือ $b_{jk} = b_{kj}$ ในทุกคู่ของ j, k : j, k = 1, 2,...,n

แต่แมตริกซ์ AB จะเป็น Symmetric Matrix ได้ก็ต่อเมื่อ $(AB)^T = AB$

แต่ $(AB)^T = B^T A^T = BA \neq AB$

ดังนั้น $(AB)^T \neq AB$

จึงไม่เป็นการยืนยันว่าผลคูณของ Symmetric Matrix จะเป็น Symmetric Matrix ด้วย เว้นแต่ว่าแมตริกซ์นั้น ๆ เป็น Diagonal Matrix, Scalar Matrix, Identity Matrix หรือแมตริกซ์อื่นใดที่ได้ระบุไว้เป็นกรณีพิเศษว่าสอดคล้องกับกฎการสลับที่ (Commutative Law)

ตัวอย่างเช่น

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งต่างก็เป็น Symmetric Matrix ด้วยกันทั้งคู่

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \neq AB$$

เห็นได้ว่า AB ไม่เป็น Symmetric Matrix

ตัวอย่าง 1.22 เมื่อ A เป็น Skew-Symmetric Matrix ที่สมาชิกทุกตัวมีค่าเป็นเลขจำนวนจริง สมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุม (Main Diagonal) ของ AA^T และ A^2 จะมีลักษณะใด ?

วิธีทำ

ให้ $A = [a_{ij}]_n$ โดยที่ $A^T = -A$ หรือ $a_{ij} = -a_{ji}$ ในทุกคู่ของ i, j

$A^T = [b_{jk}]_n$ โดยที่ $b_{jk} = -a_{ji} = a_{ij}$; $a_{ii} = 0, b_{ii} = 0$

ดังนั้นสมาชิกใด ๆ ของ AA^T คือ

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{i,i-1}b_{i-1,k}+a_{ii}b_{ik}+a_{i,i+1}b_{i+1,k}+\ldots+a_{ik}b_{kk}+\ldots+a_{in}b_{nk} \\ &= a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{i,i-1}b_{i-1,k}+0+a_{i,i+1}b_{i+1,k}+\ldots+0+\ldots+a_{in}b_{nk} \\ &= -a_{i1}a_{1i}-a_{i2}a_{2i}-\ldots-a_{i,i-1}a_{i-1,i}-0-a_{i,i+1}a_{i+1,i}-\ldots-0-\ldots-a_{in}a_{ni} \end{aligned}$$

และสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม คือ

$$\begin{aligned} c_{ii} &= a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\ldots+a_{i,i-1}b_{i-1,i}+a_{ii}b_{ii}+a_{i,i+1}b_{i+1,i}+\ldots+a_{in}b_{ni} \\ &= a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\ldots+a_{i,i-1}b_{i-1,i}+0+a_{i,i+1}b_{i+1,i}+\ldots+a_{in}b_{ni} : a_{ii} = b_{ii} = 0 \\ &= a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{i,i-1}^2+0+a_{i,i+1}^2+\ldots+a_{in}^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมาชิกใด ๆ นอก Main Diagonal ของ AA^T เมื่อ A เป็น Skew-Symmetric Matrix จะเป็นจำนวนลบเสมอ และสมาชิกใน Main Diagonal ของ AA^T เมื่อ A เป็น Skew-Symmetric Matrix จะเป็นจำนวนบวกเสมอ

ตัวอย่างเช่น

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+3^2+(-1)^2 & -2 & -6 \\ -2 & (-3)^2+0+2^2 & -3 \\ -6 & -3 & 1^2+(-2)^2+0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -2 & -6 \\ -2 & 13 & -3 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

* กรณีของ A^2 ขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ในการนำแมตริกซ์ไปใช้นั้น โดยทั่วไปจะเป็นแมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นเลขจำนวนจริง ดังตัวอย่างที่นักศึกษาได้พบเห็นมาแต่ต้น เรียกว่า Real Matrix แต่ก็มิใช่ว่าสมาชิกภายในของแมตริกซ์จะเป็นได้เฉพาะเลขจำนวนจริงเท่านั้น หากแต่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) ก็ได้และยังทรงความสำคัญเช่นเดียวกับ Real Matrix

รูปทั่วไปของจำนวนเชิงซ้อนคือ $c = a+bi$ โดยที่ a, b เป็นเลขจำนวนจริง $i = \sqrt{-1}$ เป็นจำนวนจินตภาพ (imaginary number) Conjugate ของ c คือ $\bar{c} = \overline{a+bi} = a - bi$

ดังนั้น ถ้า A เป็นแมตริกซ์ที่สมาชิกเป็นเลขจำนวนเชิงซ้อน $\bar{A}$ ก็คือ Conjugate ของ A กล่าวคือ $\bar{A}$ จะมีสมาชิกเป็น Conjugate ของสมาชิกใน A จากข้อเท็จจริงนี้จะเห็นได้ว่าแมตริกซ์ใด ๆ จะเป็น Real Matrix ได้ก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$ นอกจากนี้ ถ้าเราเปลี่ยนตำแหน่ง (Transpost) ของแมตริกซ์ $\bar{A}$ จะทำให้ได้ $(\bar{A})'$ (ใช้สัญญลักษณ์ A^*) เรียกว่า Tranjugate of A

นิยาม 1.11 ถ้า $A = A^*$ นั่นคือ $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ แล้วแมตริกซ์ A จะเรียกว่าเฮอร์มิเตียนแมตริกซ์ (Hermitian Matrix)

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$

จะเห็นได้ว่า

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad A^* = (\bar{A})' = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \qquad B^* = (\bar{B})^T = \begin{bmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix} = B$$

นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างอื่น ๆ อีกเช่น

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 3-2i \\ 2-i & 2 & -i \\ 3+2i & i & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งจะพบว่า}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 3+2i \\ 2+i & 2 & i \\ 3-2i & -i & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^* = (\overline{C})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 3-2i \\ 2-i & 2 & -i \\ 3+2i & i & 3 \end{bmatrix} = C$$

นักศึกษาสามารถสร้างเฮอร์มิเตียนแมตริกซ์ขนาดต่าง ๆ ได้เอง ขอให้สังเกตว่า เฮอร์มิเตียนแมตริกซ์นั้นต้องเป็น Square Matrix สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมต้องเป็นเลขจำนวนจริงหรือนัยหนึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีจำนวนจินตภาพ (imaginary part) เป็น 0 คือ $c = a+0i$ เป็นแมตริกซ์ที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับ Symmetric Matrix กล่าวคือสมมาตรกันในแนวทแยง (Main Diagonal) แต่สมาชิกในตำแหน่งที่พึงสมมาตรกันนั้นเป็น Conjugate ซึ่งกันและกัน

นิยาม 1.12 แมตริกซ์ A จะเป็น Lower Triangular ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ ในทุกค่าของ $i < j$ และเป็น Upper Triangular ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 0$ ในทุกค่าของ $i > j$ และถ้า $a_{ij} = 0$ ในทุกค่าของ $i \geqslant j$ แล้ว A จะเป็น Upper Matrix และการเปลี่ยนตำแหน่ง (Transpose) ของ A จะได้ Lower Matrix ($a_{ij} = 0$ ในทุกค่าของ $i \leqslant j$)

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ เป็น Lower Triangular Matrix ทั้งนี้เพราะสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง i j จะเป็น 0 เช่น $a_{23} = 0$ เพราะ $i < j$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ เป็น Upper Triangular Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็น Upper Matrix เพราะ $c_{ij} = 0$ เมื่อ $i \geqslant j$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็น Lower Matrix เพราะ $d_{ij} = 0$ เมื่อ $i \leqslant j$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 55 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็น Lower Matrix เพราะ $e_{ij} = 0$ เมื่อ $i \leqslant j$

** **ข้อสังเกต** แมตริกซ์ทั้งหลายตามนิยามข้างต้นต้องเป็น Square Matrix

หมายเหตุ Nilpotent Matrix เป็นแมตริกซ์พิเศษรูปหนึ่ง ได้กล่าวไว้แล้วในแบบฝึกหัดที่ 1.1 ข้อ 18

1.7 ส่วนกลับของแมตริกซ์ (Inverse of Matrix)

โดยอาศัยหลักการเบื้องต้นจากส่วนกลับของจำนวนคงที่ (Scalar) กล่าวคือถ้า c เป็นจำนวนคงที่ใด ๆ ส่วนกลับของมันก็คือ $c^{-1} = \frac{1}{c}$

ดังนั้น $c \cdot c^{-1} = c \cdot \frac{1}{c} = 1$

และโดยอาศัยหลักการของ Scalar matrix จะพบว่า

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c \end{bmatrix} = c \cdot I_n \text{ และ } \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & \dots & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{c} \end{bmatrix} = c^{-1} \cdot I_n$$

จะเห็นว่า

$$(c \cdot I_n)(c^{-1} \cdot I_n) = (c^{-1} \cdot I_n)(c \cdot I_n) = I_n$$

ทำให้เราสามารถขยายหลักการเข้าสู่แมตริกซ์ทั่ว ๆ ไป (ต้องเป็น Square Matrix) ได้ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 1.13 A เป็น Square Matrix ใด ๆ และถ้า B เป็นแมตริกซ์ขนาดเดียวกันกับ A ที่ทำให้ AB = BA = I ได้แล้ว แมตริกซ์ B ก็คือส่วนกลับของแมตริกซ์ A (ใช้สัญญลักษณ์ A^{-1})

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ จะเป็นส่วนกลับของแมตริกซ์ A และโดยนัยกลับกัน A ก็เป็นส่วนกลับของ B

โดยปกติส่วนกลับของแมตริกซ์ใด ๆ จะมีได้เพียงรูปเดียวเท่านั้น (Unique) ซึ่งสามารถพิสูจน์ให้เห็นได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้ (ทั้งนี้มิได้หมายความว่าแมตริกซ์ทุกรูปจะมีส่วนกลับได้ หากต้องมีเงื่อนไข 2 ประการ ก. ต้องเป็น Nonsingular Matrix ข. ต้องเป็น Square Matrix ซึ่งจะได้กล่าวถึงในลำดับต่อไปนี้)***

ทฤษฎี 1.6 Square Matrix A จะมีส่วนกลับได้เพียงรูปหนึ่งรูปเดียวเท่านั้น (Unique)

พิสูจน์

ให้ A เป็น Square Matrix ขนาดใด ๆ ที่มีส่วนกลับเป็น B และ C

*** **หมายเหตุ** กรณีที่แมตริกซ์ A มิใช่ Square Matrix หรือเป็น Square Matrix แต่เป็น Singular Matrix เราก็สามารถหาส่วนกลับของ A ได้ ส่วนกลับของแมตริกซ์สำหรับกรณีทั้งสองนี้เรียกว่า Generalized Inverse (g-Inverse) และ Conditional Inverse (c-Inverse) ซึ่งมีวิธีการหาที่สลับซับซ้อนมาก จะกล่าวถึงอีกครั้งในบทหลัง

ดังนั้น $AB = BA = I$ ... (1) : (นิยาม)

และ $AC = CA = I$ ... (2) : (นิยาม)

$(1) \times C$ ได้ $(AB)C = (BA)C = IC = C$ ... (3)

$B \times (2)$ ได้ $B(AC) = B(CA) = BI = B$ ... (4)

จากสมการที่ 3 $(BA)C = B(AC) = C$: Associative Law

และจากสมการที่ 4 $B(AC) = B$

ดังนั้น $C = B(AC) = B$ นั่นคือ $B = C$

จึงสรุปได้ว่า A^{-1} มีได้เพียงรูปหนึ่งรูปเดียวเท่านั้น

ดังที่ได้ให้ข้อสังเกตไว้แล้วว่า Square Matrix ทุกรูปนั้นมิใช่ว่าจะมีส่วนกลับได้ แต่มีเงื่อนไขว่าแมตริกซ์นั้นต้องเป็น Nonsingular Matrix ด้วย

นิยาม 1.1.14 ถ้า A^{-1} มีค่าปรากฏ (Exist) แมตริกซ์ A จะเป็น Nonsingular Matrix หาก A^{-1} ไม่มีค่าปรากฏ A จะเป็น Singular Matrix

การคำนวณหาส่วนกลับของแมตริกซ์นั้นสามารถกระทำได้หลายวิธี ซึ่งนักศึกษาสามารถเลือกใช้ได้ตามถนัดดังนี้

วิธีที่ 1 ใช้วิธีแก้สมการตามธรรมดาโดยอาศัยนิยามของส่วนกลับ และการเท่ากันของแมตริกซ์

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ให้ $$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ เป็นส่วนกลับของ A

ดังนั้น จากนิยาม $AB = I$ หรือ $BA = I$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a + 2c = 1 \ \ldots (1)$$

$$b+2d = 0 \quad (2)$$
$$3a+4c = 0 \quad (3)$$
$$3b+4d = 1 \quad (4)$$

แก้สมการทั้ง 4 จะได้

$$a = -2, b = 1, c = \frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 2 อาศัยความรู้เรื่อง Elementary Operation (หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Elementary Transformation)

วิธีที่ 3 อาศัยความรู้เรื่อง Determinant

วิธีที่ 4 อาศัยความรู้เรื่อง Partitioned Matrix

รายละเอียดของวิธีที่ 2, 3 และ 4 จะกล่าวถึงเป็นลำดับ ๆ ไป

ทฤษฎี 1.7 ถ้า A, B, C,...,M, N เป็นแมตริกซ์ขนาด n โดยที่ทุกรูปต่างก็มีส่วนกลับ ดังนั้นส่วนกลับของผลคูณ $ABC \cdots MN$ ก็คือผลคูณของส่วนกลับของแต่ละแมตริกซ์แต่เรียงลำดับย้อนกัน นั่นคือ

$$(ABC \cdots MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

พิสูจน์ ถ้า $(N^{-1}M^{-1} \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1})$ เป็นส่วนกลับของ $(ABC \cdots MN)$ จริง ผลคูณของมันต้องได้ I_n

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}(ABC \cdots MN)(N^{-1}M^{-1} \cdots C^{-1}B^{-1}M^{-1}) &= ABC \cdots M(NN^{-1})M^{-1} \cdots C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ &= ABC \ldots I(MM^{-1}) \ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ &= I(AA^{-1}) \\ &= I\end{aligned}$$

สัญญลักษณ์ → แทนคำว่า "ดังนั้น"

นั่นคือ $(N^{-1}M^{-1}...C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ เป็นส่วนกลับของ $(ABC...MN)$

***หมายเหตุ กรณีเฉพาะที่ใช้กันอยู่เสมอ ๆ คือ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ตัวอย่าง 1.23 ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ และให้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงให้เห็นว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ ซึ่ง } (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$$

ตัวอย่าง 1.24 จงพิสูจน์ว่า $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

พิสูจน์ จาก

$$AA^{-1} = I$$

ดังนั้น $(AA^{-1})' = I' = I : \quad I' = I$

$(A^{-1})'A' = I \qquad : (AB)' = B'A'$

$(A^{-1})'A'(A')^{-1} = I(A')^{-1}$: คูณ (postmultiply) ตลอดด้วย $(A')^{-1}$

$(A^{-1})' \cdot I = I(A')^{-1}$

ดังนั้น $\quad (A')^{-1} = (A^{-1})'$

ทฤษฎี 1.8 ถ้า A เป็น Nonsingular Matrix (หรือส่วนกลับของ A มีค่าปรากฏ) A^{-1} ก็จะมีส่วนกลับด้วย

นั่นคือ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$

พิสูจน์

จาก $\quad AA^{-1} = I$

ดังนั้น $\quad (AA^{-1})^{-1} = I^{-1} = I : \quad I^{-1} = I$

$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I \qquad : (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

คูณ (postmultiply) ตลอดด้วย A

นั่นคือ $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A = IA$

ดังนั้น $(A^{-1})^{-1} = A$

หมายเหตุ ยังมีทฤษฎีเกี่ยวกับส่วนกลับของแมตริกซ์อีกมาก จะกล่าวถึงโดยละเอียดในภายหลัง

1.8 การแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์ (Matrix Partitioning)

ในงานบางอย่างซึ่งต้องอาศัยแมตริกซ์เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ เช่น การวิเคราะห์การถดถอยหรือเศรษฐมิตินั้น ปรากฏอยู่เสมอว่าการใช้แมตริกซ์เดิมมาวิเคราะห์โดยตรงจะยุ่งยากและกินเวลามาก ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจึงแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์นั้นออกเป็นแมตริกซ์ขนาดย่อย ๆ เรียกว่า Submatrix แล้วทำการวิเคราะห์โดยอาศัย Submatrix เหล่านั้นก่อนแล้วจึงเสนอผลรวมออกมาสู่แมตริกซ์เดิมในภายหลัง

ตัวอย่างเช่น แมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

อาจจัดแบ่งเป็น $[A_1, A_2]$ โดยที่ $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

หรือเป็น $\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$ โดยที่ $B_1 = [1 \quad 4], B_2 = [6 \quad -4], B_3 = [0 \quad -5]$

หรือเป็น $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ โดยที่ $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}, C_2 = [0 \quad -5]$

หรือในแมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

อาจจัดเป็นกลุ่มของ Submatrix ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

การแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์ออกเป็น Submatrix นั้นไม่มีข้อจำกัดว่าจะต้องแบ่งดังตัวอย่างที่ผ่านมา อาจจัดแบ่งกลุ่มอย่างไรก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการจัดกลุ่มและวิจารณาญาณของผู้วิเคราะห์เป็นประการสำคัญ แต่ทั้งนี้จำเป็นต้องคำนึงถึงกฎเกณฑ์หรือเงื่อนไขการบวก ลบ การเท่ากัน และการคูณของแมตริกซ์มิใช่จัดแบ่งอย่างเลื่อนลอย

ตัวอย่างเช่น จะทำการบวกแมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ เข้ากับแมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ โดยอาศัยหลักของการแบ่งกลุ่มของสมาชิก สิ่งที่ต้องพิจารณาเป็นประการแรกคือ แมตริกซ์เดิมคู่นี้มีขนาดเดียวกันหรือไม่ ถ้าขนาดต่างกันก็แย้งกับเงื่อนไขการบวก ขั้นต่อไปจะจัดแบ่งกลุ่มอย่างไรหากจัดแบ่งกลุ่มแรกเป็น

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

แล้วแมตริกซ์กลุ่มหลังคือ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ก็จะต้องแบ่งในลักษณะเดียวกันเป็น

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

ทั้งนี้เพราะเมื่อบวกกันจะได้ $\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$ ซึ่ง A_{11} กับ B_{11}, A_{12} กับ B_{12}, A_{21} กับ B_{21} และ A_{22} กับ B_{22} จะต้องมีขนาดเดียวกัน

ดังนั้น $$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \\ [3] & [2 \quad 4] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [3] & [-1 \quad 2] \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [3] + [3] & [2 \quad 4] + [-1 \quad 2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \\ [6] & [1 \quad 6] \end{bmatrix}
$$

ปลดวงเล็บภายในออก ผลบวกของแมตริกซ์จึงมีค่าดังนี้

$$
\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}
$$

การคูณแมตริกซ์โดยอาศัยการแบ่งแมตริกซ์เดิมเป็นแมตริกซ์ย่อย (Submatrix) ก็เช่นกัน คือต้องพิจารณาก่อนว่าการคูณของแมตริกซ์เดิมสอดคล้องกับเงื่อนไขการคูณหรือไม่ หลังจากนั้นจึงแบ่งกลุ่มสมาชิกของแมตริกซ์เดิมเป็นกลุ่มย่อย ๆ แมตริกซ์ย่อยหนึ่งถือเป็นสมาชิกตัวหนึ่งของแมตริกซ์เดิม ดังนั้นการคูณจะ define หรือไม่จึงอยู่ที่วิจารณญาณของผู้ใช้โดยดูว่าเมื่อแบ่งกลุ่มแล้วขนาดของแมตริกซ์ย่อยเหล่านั้นสอดคล้องกับเงื่อนไข การคูณด้วยหรือไม่

สมมุติจะทำการคูณ $A_{3\times 3}$ กับ $B_{3\times 3}$ (คูณกันได้เพราะสอดคล้องกับเงื่อนไขการคูณ) และเมื่อแบ่งแล้วอาจจะอยู่ในรูปนี้

$$
A = \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
B = \left[\begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
$$

ดังนั้น
$$
AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} [a_{11}][b_{11}] + [a_{12} \quad b_{13}]\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & [a_{11}][b_{12} \quad b_{13}] + [a_{12} \quad b_{13}]\begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}[b_{11}] + \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}[b_{12} \quad b_{13}] + \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

ตัวอย่าง 1.25 จงหาผลคูณต่อไปนี้โดยวิธีแบ่งแมตริกซ์เดิมเป็นแมตริกซ์ย่อย

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}
$$

วิธีทำ

แบ่ง A เป็นแมตริกซ์ย่อยได้ดังนี้

$$
A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right]
$$

ขนาดของแมตริกซ์ย่อย ๆ ซึ่งเป็นสมาชิกในแมตริกซ์ A และ B จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขการคูณ

B อาจแบ่งได้ดังนี้

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
AB = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]
$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 26 & 9 & 27 \\ 8 & 3 & 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & 8 & 24 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 & 15 & 37 \\ 9 & 7 & 11 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 25 & 16 & 38 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 15 & 37 & 11 \\ 9 & 7 & 11 & 2 \\ 25 & 16 & 38 & 11 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. ก. จงแสดงให้เห็นว่า $B^TA^T = (AB)^T$ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ข. จงพิสูจน์ว่า $(A^TB^T)^T = BA$

2. จงพิสูจน์ให้เห็นว่า โดยปกติทั่วไปแล้ว $AA^T \neq A^TA$
3. จงพิสูจน์ว่าสมาชิกในแนวเส้นทะแยงมุม (Main Diagonal) ของเฮอร์มิเตียน (Hermittian Matrix) ทุกตัวเป็นเลขจำนวนจริง (Real Number)
4. จงพิสูจน์ว่า Square Matrix ใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปผลบวกของ Symmetric Matrix และ Skew-Symmetric Matrix ได้เสมอ นั่นคือ $A = A^s + A^{ss}$ โดยที่ A^s เป็น Symmetric Matrix และ A^{ss} เป็น Skew-Symmetric Matrix
(ข้อแนะนำ–หา $(A + A^T)$ และ $(A - A^T)$ แล้วนำมารวมกัน)
5. ถ้า A เป็นเฮอร์มิเตียนแมตริกซ์ (นั่นคือ $(\bar{A})^T = A$) และเขียนได้ในรูป $A = B + iC$ โดยที่ B และ C เป็น Real Matrix (มีสมาชิกเป็น Real Number) i เป็นจำนวนจินตภาพ

จงอธิบายลักษณะของ B และ C พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

(ข้อแนะนำ– $A = B + iC$ ดังนั้น $A^* = (\bar{A})^T = (B - iC)^T = B^T - iC^T$ แต่ A เป็นเฮอร์มิเตียนแมตริกซ์ซึ่ง $A = A^*$ ดังนั้น ?)

6. ถ้า A และ B เป็น Symmetric Matrix ผลคูณ AB จะ Symmetric ด้วยหรือไม่ พิสูจน์และยกตัวอย่างประกอบ ท่านมีข้อคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไร ?

7. จงแสดงให้เห็นว่า $(A^*)^* = A$, $(AB)^* = B^*A^*$

8. ถ้า A เป็น Symmetric Matrix แล้ว จงพิสูจน์ว่า A^{-1} ก็เป็น Symmetric ด้วย

9. จงหาผลคูณ $AB = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ โดยวิธีการแบ่งแมตริกซ์ A และ B เป็นแมตริกซ์ย่อย (Submatrix or Partitioned Matrix) แล้วเปรียบเทียบคำตอบกับผลคูณเดิมก่อนที่จะแบ่งเป็นแมตริกซ์ย่อยดังกล่าว

10. จงหาผลคูณ

$$AB = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & I_1 & B_3 \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = [3], I_1 = [1]$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}, B_3 = [7]$$

และ 0 (Zero Matrix) มีขนาดที่เหมาะสมกับตำแหน่งของมัน

11. จงหาผลคูณ $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}$ โดยวิธีแบ่งเป็นแมตริกซ์ย่อย

(ข้อแนะนำ– ถ้าจะให้การคูณนี้ง่ายและสะดวกรวดเร็ว จงแบ่งแมตริกซ์เดิมให้เป็นแมตริกซ์ย่อยที่เป็น Zero Matrix หรือแมตริกซ์ที่สมาชิกส่วนใหญ่มีค่าเป็นศูนย์)

12. Zero Matrix เป็น Singular Matrix หรือไม่ ?

13. จงพิสูจน์ว่าแมตริกซ์ใดจะเป็น Real Matrix ได้ก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$

14. เพราะเหตุใด Lower (Upper) Triangular Matrix และ Lower (Upper) Matrix จึงต้องเป็น Square Matrix ?