บทที่ 5
การประมาณค่า และการทดสอบสมมติฐาน
(Estimation and Hypothesis Testing)

การนำความน่าจะเป็นไปประยุกต์ใช้นั้นที่สำคัญที่สุดก็คือการนำไปใช้ในสถิติอนุมาน (Inferencial Statistics) โดยการนำเอาข้อเท็จจริงที่รวบรวมได้จากตัวอย่างไปใช้ในการสรุปผลเกี่ยวกับคุณลักษณะของประชากร

การสรุปผลเกี่ยวกับคุณลักษณะของประชากรหรือการอนุมานทางสถิตินั้นเราแบ่งออกเป็น 2 วิธีด้วยกันคือ การประมาณค่า (Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (Testing – hypothesis)

การประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นหมายถึงการประมาณค่าคุณลักษณะใดคุณลักษณะหนึ่งของประชากร ซึ่งส่วนใหญ่จะแสดงออกมาเป็นตัวเลข เช่น ค่าเฉลี่ยของประชากร (μ) สัดส่วนประชากร (π) ความแปรปรวนของประชากร (σ^2) เป็นต้น ซึ่งค่าต่าง ๆ เหล่านี้เราไม่ทราบค่า แต่เราสามารถที่จะประมาณค่าต่าง ๆ เหล่านี้ได้โดยการสุ่มตัวอย่างมาจำนวนหนึ่งแล้วคำนวณหาค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างที่สอดคล้องกับค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่เราสนใจ แล้วนำค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างนี้ไปประมาณค่าพารามิเตอร์โดยอาศัยทฤษฎีความน่าจะเป็นเป็นเครื่องมือ ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการทราบค่าเฉลี่ยของรายจ่ายต่อเดือนของนักศึกษารามคำแหงก็ทำการสุ่มตัวอย่างนักศึกษามาจำนวนหนึ่ง แล้วคำนวณค่าเฉลี่ยของรายจ่ายต่อเดือนของนักศึกษาที่สุ่มตัวอย่างมาแล้ว ใช้ค่าเฉลี่ยของรายจ่ายที่ได้จากตัวอย่างนี้ไปประมาณค่าเฉลี่ยของรายจ่ายต่อเดือนของนักศึกษารามคำแหงทั้งหมด

สำหรับการทดสอบสมมติฐานนั้นเป็นกระบวนการที่นำไปสู่การตัดสินใจ โดยที่การตัดสินใจนั้นต้องอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างสุ่ม ตัวอย่างเช่น มีผู้กล่าวว่า “ค่าเฉลี่ยของรายจ่ายต่อเดือนของนักศึกษารามคำแหงเท่ากับ 1,200 บาทต่อเดือน” ซึ่งโดยความเป็นจริงแล้ว ค่าเฉลี่ยดังกล่าวอาจจะมีค่ามากกว่า 1,200 บาท หรือน้อยกว่า 1,200 บาทก็ได้ ซึ่งถ้าความเป็นจริงค่าเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 1,200 บาท ก็แสดงว่า คำกล่าวข้างต้นนั้นเป็นความจริง

ข้อความที่เป็นสมมติฐานที่กำหนดขึ้นมานั้น อาจจะถูกหรือผิดจากความเป็นจริงก็ได้

เราไม่ทราบได้แน่นอนนอกเสียจากว่าเราจะทำการศึกษาจากทุกหน่วยของประชากร แต่ส่วนใหญ่แล้วเราไม่สามารถที่จะทำการศึกษาจากทุกหน่วยของประชากรได้ เนื่องจากทรัพยากรเรามีจำกัด โดยทั่วไปแล้วเราจะอาศัยตัวอย่างสุ่มแล้วนำค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างสุ่มไปใช้ในการตัดสินใจหรืออ้างอิงเกี่ยวกับสมมติฐานของประชากรนั้น ๆ

จะขอเริ่มจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ก่อนแล้วจะกล่าวถึงการทดสอบสมมติฐานต่อไปดังนี้

5.1 การประมาณค่าแบบจุด และคุณสมบัติ

(Point Estimation and their Properties)

การประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นเราจะใช้ข้อมูลจากตัวอย่างโดยการหาตัวสถิติ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างที่มีคุณสมบัติที่ดี ตามเกณฑ์ที่เราใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เราสนใจ ดังนั้น การประมาณค่าคือการที่เราใช้ข้อเท็จจริงจากตัวอย่างสุ่มในรูปของสถิติไปประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่เราสนใจว่าควรจะมีค่าเท่าใด หรืออยู่ในช่วงใด ซึ่งเรามีวิธีการประมาณค่า 2 วิธีด้วยกันดังนี้

1. การประมาณค่าแบบจุดหรือการประมาณค่าแบบค่าเดี่ยว (Point Estimation)
2. การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

จะขอกล่าวถึงวิธีแรก และคุณสมบัติของตัวประมาณค่าที่ดีก่อนดังนี้

5.2 การประมาณค่าแบบค่าเดี่ยว

(Point Estimation)

หมายถึง การใช้ค่าประมาณที่คำนวณได้จากตัวอย่างสุ่มเป็นค่าประมาณพารามิเตอร์ประชากรที่เราสนใจ ซึ่งการประมาณค่าโดยวิธีนี้ โอกาสที่จะประมาณผิดพลาดมีมากหรือมีน้อย เราไม่สามารถมีหลักประกันความมั่นใจได้ว่าค่าที่ใช้ประมาณนั้นมีโอกาสถูกต้องมากน้อยเพียงใด

นิยาม ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจง $f(x;\theta)$ ตัวประมาณค่า (estimator) ของพารามิเตอร์ θ คือฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ ส่วนค่าประมาณ (estimate) ของ θ คือค่าหนึ่งของตัวประมาณ เช่น $\hat{\theta} = g(x_1, \ldots, x_n)$ เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ตามลำดับ ที่สังเกตได้จากตัวอย่างสุ่ม

ซึ่งจะเห็นได้ว่าตัวประมาณและค่าประมาณนั้นไม่เหมือนกันคือ ตัวประมาณ (estimator) เป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม ส่วนค่าประมาณ (estimate) เป็นค่าของฟังก์ชันหรือของตัวประมาณดังกล่าว

ดังนั้นตัวประมาณเป็นสูตรหรือกฎเกณฑ์ที่ใช้ในการประมาณค่าและค่าของตัวประมาณที่ได้โดยการแทนค่าของตัวแปรเชิงสุ่มที่สังเกตได้ คือค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่สนใจ

$\therefore$ ถ้าให้ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2,\ldots,X_n) = g(X_1, X_2,\ldots,X_n)$

เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ แล้ว

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2,\ldots,x_n) = g(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ จะเป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ โดยที่ $x_1,\ldots,x_n$ เป็นค่าสังเกตที่ได้ของ $X_1, X_2,\ldots,X_n$ ตามลำดับ

ปัญหาในการประมาณค่าก็คือการที่จะหาตัวประมาณค่าที่เหมาะสมจะทำได้อย่างไร ซึ่งเรามีหลักเกณฑ์ในการเลือกตัวประมาณค่าดังนี้

หลักเกณฑ์ในการเลือกตัวประมาณ

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่มใด ๆ $g(x_1,\ldots,x_n)$ อาจจะนำมาใช้เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ได้ทั้งนั้น แต่เราจะเลือกใช้ฟังก์ชัน (หรือสถิติ) ใดดี ในการพิจารณาเลือกใช้สถิตินั้นเราจะอาศัยการแจกแจงของตัวอย่างเป็นหลักสำคัญ โดยเราจะเลือกตัวสถิติที่ดี ซึ่งเกณฑ์ในการเลือกตัวสถิติที่ดีมีหลายอย่างด้วยกัน ในที่นี้จะขอกล่าวถึงเพียง 3 อย่างคือ

1. ความไม่เอียงเฉ (Unbiasness)
2. ความคงเส้นคงวา (Consistency)
3. ความมีประสิทธิภาพ (Efficiency)

5.2.1 ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉ (Unbiased Estimator)

นิยาม ให้ $\hat{\theta} = g(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ เราจะเรียกว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉ ถ้า $E(\hat{\theta}) = \theta$ และถ้า $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ แล้ว $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่เอียงเฉ (Biased Estimator) ของ θ

ตัวอย่างที่ 5.1 จงแสดงว่า $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของ μ

$$\because E(X) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu$$

$$= \frac{1}{n}(n\mu)$$

$$= \mu$$ QED

ซึ่งเป็นจริงเสมอสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 5.2 จงแสดงว่า $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่เอียงเฉของ σ^2 $(\widehat{\sigma}^2)$

$$\because\ E(S^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2 - 2x_i\overline{X} + \overline{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[E(x_i^2) - 2E(x_i\overline{X}) + E(\overline{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2 + \mu^2 - \frac{2}{n}\left\{\sigma^2 + \mu^2 + (n-1)\mu^2\right\} + \frac{1}{n^2}\left\{n\sigma^2 + n\mu^2 + n(n-1)\mu^2\right\}\right]$$

$$= \sigma^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right) + \mu^2(1 - 2 + 1)$$

$$= \frac{(n-1)}{n}\sigma^2$$

$$\neq \sigma^2$$

$\therefore$ S^2 เป็นตัวประมาณค่าที่เอียงเฉของ σ^2 QED

5.2.2 **ตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวา** (Consistent Estimator)

นิยาม ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}_n$ ของ θ ที่ได้จากตัวอย่างสุ่มขนาด n เป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวา (Consistent Estimator) ของ θ ถ้า $\hat{\theta}_n$ converge in probability ไปสู่ θ

นั่นคือ เมื่อ $\in$ เป็นจำนวนจริงบวก

$$\lim_{n - m} P\left[|\hat{\theta}_n - \theta| > \in \right] = 0$$

หรือเมื่อ $\in, \delta$ เป็นจำนวนบวกใด ๆ จะมีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้

$$P\left[|\hat{\theta}_n - \theta| > \in \right] < \delta$$

เมื่อ $n > N$

ทฤษฎี ถ้า $\hat{\theta}_n$ เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ โดยใช้ตัวอย่างสุ่มขนาด n ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$ แล้ว $\hat{\theta}_n$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้น-คงวาของ θ

ตัวอย่างที่ 5.3 จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวาของค่าเฉลี่ยของประชากร เมื่อประชากรมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

พิสูจน์ เราทราบว่า $E(\overline{X}) = \mu$ และ $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}\sigma^2$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} E(\overline{X}) = \mu$$

และ $$\lim_{n \to \infty} V(\overline{X}) = \frac{1}{\infty}\sigma^2 = 0$$

$\therefore$ $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวาของ μ QED

ตัวอย่างที่ 5.4 ให้ $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 จงแสดงว่า $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวาของ σ^2

พิสูจน์ เราทราบว่า $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มี $df = n - 1$

$$\therefore \quad E\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = n-1$$

$$V\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$$

$$\therefore \quad E(S^2) = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2$$

และ $$V(S^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} E(S^2) = \sigma^2$$

และ $$\lim_{n \to \infty} V(S^2) = 0$$

$\therefore$ S^2 เป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวาของ σ^2 QED

ทฤษฎี ถ้าประชากรมี Moment ที่ k คือ $\mu'_k = E(X^k)$ และความแปรปรวนของ X^k เป็นจำนวนจำกัดแล้ว โมเมนต์ที่ k ของตัวอย่าง $M'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวาของ μ'_k

พิสูจน์

$$\because \quad E(M'_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^k)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu'_k$$

$$= \mu'_k$$

$$V(M'_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i^k)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X^k)$$

$$= \frac{V(X^k)}{n^2}$$

$$\lim_{n - m} E(M_k') = \mu_k'$$

$$\lim_{n \to \infty} V(M_k') = 0$$

$\therefore$ M_k' เป็นตัวประมาณค่าที่คงเส้นคงวาของ μ_k' QED

5.2.3 ตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพ (Efficient Estimator)

โดยทั่วไปเราถือว่าตัวประมาณค่าเป็นตัวประมาณที่ดีหากมีความคลาดเคลื่อนต่ำ ซึ่งความคลาดเคลื่อนของตัวประมาณค่าเราดูได้จากความแปรปรวน หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน หรือความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของมัน ดังนั้น เราสามารถพิจารณาประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าได้จากความแปรปรวน ของตัวประมาณค่าได้

พิจารณาตัวอย่างสุ่ม $X_1,...,X_n$ จากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 เราทราบว่า X_i มีค่าคาดหมาย μ และความแปรปรวน σ^2 และ $\bar{X}$ ซึ่งมีค่าคาดหมาย μ เช่นเดียวกับ X_i ใด ๆ มีความแปรปรวน $\frac{\sigma^2}{n}$ (ปกติแล้ว $\frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$ เมื่อ $n > 1$) เราจึงใช้ $\bar{X}$ แทนที่จะใช้ X_i แต่ละตัวเป็นตัวประมาณค่าของ μ และยิ่งไปกว่านั้น $\bar{X}$ ยังเป็นตัวประมาณค่าของ μ ที่มีความคงเส้นคงวาอีกด้วย $\therefore$ $\bar{X}$ จึงเป็นตัวประมาณค่าของ μ ที่ดีกว่า X_i ใด ๆ

นิยาม ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉ และมีความแปรปรวนเท่ากับขีดจำกัดล่าง (Minimum Variance Bound Unbiased Estimator – MVBU) ของพารามิเตอร์ θ ได้แก่ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ ของ θ ที่

1. เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของ θ คือ $E(\hat{\theta}) = \theta$
2. ความแปรปรวนของ $\hat{\theta}$ เท่ากับขีดจำกัดล่างพอดี

$$V(\hat{\theta}) = \frac{}{nE\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{I,}\right)^2}$$

โดยที่ $f(x;\theta)$ คือ pdf ของตัวแปรเชิงสุ่มของประชากรที่พิจารณาในเทอมของประสิทธิภาพ

นิยาม ตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงที่สุด (Most Efficient Estimator) ของพารามิเตอร์ θ คือ ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ ที่มีความแปรปรวนเท่ากับขีดจำกัดล่างพอดี

ประสิทธิภาพ (Efficiency) ของ $\hat{\theta}$ เราเขียนแทนด้วย $e(\hat{\theta})$ คือ

$$e(\hat{\theta}) = \frac{V(\hat{\theta}_0)}{V(\hat{\theta}_1)}$$

และ $\hat{\theta}$ จะมีประสิทธิภาพสูงที่สุด เมื่อ

$$e(\hat{\theta}) = 1$$

ตัวอย่างที่ 5.5 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการกระจายแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

1. จงแสดงว่า $\bar{X}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงที่สุดของ μ

2. จงแสดงว่า $S_0^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \mu)^2$ เมื่อทราบค่า μ เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงที่สุดของ σ^2

3. จงหาประสิทธิภาพของตัวประมาณ $S^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma(x_i - \bar{X})^2$ ของ σ^2

วิธีทำ $$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

1. เราทราบว่า $\bar{X}$ เป็นตัวประมาณค่าไม่เอนเอียงของ μ ที่มีความแปรปรวน

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore \ln f(x;\mu) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)$$

$$\therefore E\left(\frac{\partial \ln f(x;\mu)}{\partial \mu}\right)^2 = E\left[\frac{1}{\sigma^4}(x-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^4}V(X)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\therefore \frac{1}{nE\left(\frac{\partial \ln f(x;\mu)}{\partial \mu}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\therefore \quad V(\overline{X}) = \frac{1}{nE\left(\frac{\partial \ln f(x;\mu)}{\partial \mu}\right)^2}$$

แสดงว่า $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพที่สุดของ μ QED

2. เมื่อทราบค่า μ

$$\frac{nS_0^2}{\sigma^2} = \Sigma\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

แต่ $\frac{x_i-\mu}{\sigma}$ มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

$\therefore \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มี df = 1

$\therefore \Sigma\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มี df = n

$$\therefore \quad E\left(\frac{nS_0^2}{\sigma^2}\right) = n$$

และ $V\left(\frac{nS_0^2}{\sigma^2}\right) = 2n$

$$\therefore \quad E(S_0^2) = \sigma^2 \text{ และ } V(S_0^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

$$\ln f(x;\sigma^2) = -\frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(x-\mu)^2$$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x;\sigma^2)}{\partial \sigma^2}\right) = \frac{1}{4\sigma^4} + \frac{1}{4\sigma^4}E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^4 - \frac{1}{2\sigma^4}E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4\sigma^4} + \frac{1}{4\sigma^4}\left[V\left(\frac{x-\mu^2}{\sigma}\right) + \left\{E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right] - \frac{1}{2\sigma^4}E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4\sigma^4} + \frac{1}{4\sigma^4}\left[2(1)+1^2\right] - \frac{1}{2\sigma^4}$$

$$= \frac{1}{2\sigma^4}$$

$$\frac{1}{nE\left(\frac{\partial \ln f(x;\sigma^2)}{\partial \sigma^2}\right)^2} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

$\therefore$ S_0^2 เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงที่สุดของ σ^2 QED

3. $\because$ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\therefore E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = n-1$$

$$V\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$$\therefore E(S^2) = \sigma^2 \text{ และ } V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\therefore e(S^2) = \frac{V(S_0^2)}{V(S^2)}$$

$$= \frac{\frac{2\sigma^4}{n}}{\frac{2\sigma^4}{n-1}}$$

$$= \frac{n-1}{n}$$

ตอบ

5.3 วิธีการหาตัวประมาณค่า

มีหลายวิธีแต่ในวิชา ST 210 นี้จะขอกล่าวถึงเพียง 3 วิธีเท่านั้นคือ

1. วิธีโมเมนต์ (Method of Moment)
2. วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Method of Maximum Likelihood)
3. วิธีของเบย์ (Bayes Method)

5.3.1 วิธีโมเมนต์ (Method of Moment)

เป็นวิธีการประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่เก่าแก่ที่สุด เสนอโดย Karl Pearson ในปี ค.ศ. 1894 หลักสำคัญที่นำมาใช้คือการถือว่า โมเมนต์ของตัวอย่าง (Sample Moments) เป็นตัวประมาณค่าของโมเมนต์ของประชากร (Population Moments) ที่สมนัยกัน และฟังก์ชันของโมเมนต์ของตัวอย่างก็ใช้เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ของประชากรที่เป็นฟังก์ชันที่สมนัยกันของโมเมนต์ของประชากร ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ k ตัว เราก็จะหาโมเมนต์ของประชากร k อันดับแรก ในเทอมของพารามิเตอร์ k ตัวนี้ แล้วถือว่าเท่ากับโมเมนต์ของตัวอย่าง k อันดับแรกเช่นเดียวกัน แล้วแก้สมการ k สมการนั้นเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ในเทอมของตัวอย่าง ค่าที่หาได้นี้เราใช้เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ที่

เราสนใจ

สมมติว่า ประชากรมี pdf เป็น $f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ k ตัว

ให้ $\mu_1', \mu_2',\ldots,\mu_k'$ เป็นโมเมนต์ของประชากรอันดับ 1,2,...,k ตามลำดับ นั่นคือ

$$\mu_j' = \int_{-\infty}^{\infty} x^j f(x;\theta)dx = E(X^j),\ j = 1,2,\ldots,k$$

โดยทั่วไป μ_j จะเป็นฟังก์ชันของ $\theta_1,\ldots,\theta_k$

ให้ $M_1', M_2',\ldots,M_k'$ เป็นโมเมนต์ของตัวอย่างอันดับ 1,2,...,k ตามลำดับ

นั่นคือ เมื่อ $X_1, X_2,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มเราจะได้

$$M_j' = \frac{1}{n}\Sigma x_i^j$$

ในการหาตัวประมาณ $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_k$ ของ $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ ตามลำดับ โดยวิธีโมเมนต์เราจะได้

$$\mu_j' = M_j',\quad j = 1,2,\ldots,k$$

แล้วแก้สมการ k สมการนี้ หา $\theta_1,\ldots,\theta_k$ ในเทอมของ $X_1, X_2,\ldots,X_n$

จะได้ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_k$ ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.6 ในประชากรใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 จงหาตัวประมาณค่าของ μ, μ^2 และ σ^2 โดยวิธีโมเมนต์

จาก $$M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}$$

$$M_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\mu_1' = \mu, \qquad \mu_2' = \sigma^2+\mu^2$$

และจาก $\mu_1' = M_1',\quad \mu_2' = M_2'$ จะได้

$$\mu = \overline{X}$$ และ

$$\sigma^2+\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\therefore \hat{\mu} = \overline{X}$$ **ตอบ**

$$\hat{\mu}^2 = \overline{X}^2$$ **ตอบ**

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \hat{\mu}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$$ **ตอบ**

5.3.2 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Method of Maximum Likelihood)

นิยาม ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x; \theta)$

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างสุ่มคือ ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ) เราใช้สัญลักษณ์ L หรือ $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ หรือ $L(\theta)$ แทนฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ดังนั้น

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta), f(x_2; \theta), \ldots, f(x_n; \theta)$$

นิยาม **ตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด** (Maximum likelihood estimator) ของพารามิเตอร์ θ คือ $\hat{\theta}$ เมื่อ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ที่เป็นค่าของ θ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงที่สุด

วิธีหาตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด มีดังนี้

ก. เราจะใช้ค่าของ θ ที่ทำให้ $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ มีค่ามากที่สุดเป็นตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ ดังนั้น

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \hat{\theta}) \geqslant L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

ข. เราอาจจะใช้อนุพันธ์ในการหาค่า θ ที่ทำให้ $L(\hat{\theta}) \geqslant L(\theta)$ ถ้าพิสัยของฟังก์ชัน $f(x; \theta)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ θ และ θ อาจจะมีค่าในช่วง ๆ หนึ่ง ค่าวิกฤตของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นได้แก่รากสมการ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ และเงื่อนไขที่พอเพียงที่ $\hat{\theta}$ จะให้ค่าสูงสุดของ $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ได้แก่

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0 \qquad d\ o\ e\ = \hat{\theta}$$

ค. การใช้อนุพันธ์หาตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดส่วนมากจะใช้ ln L แทน L จะสะดวกกว่า

$$\left(\therefore \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \theta} \text{ และ } L > 0 \right)$$

ดังนั้นถ้าให้ $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ เราจะได้ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ด้วย (ซึ่งเราเรียกสมการนี้ว่า สมการ-ภาวะน่าจะเป็น

และ $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$ ก็จะทำให้ $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$ ด้วย

ตัวอย่างที่ 5.7 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปัวซอง ที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}; \quad x = 0,1,\ldots$$

จงหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ

วิธีทำ จาก $f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$

$$\therefore L = \frac{e^{n\theta}\theta^{\Sigma x_{i}}}{\pi x_i!}$$

$$\ln L = -n\theta + (\Sigma x_i)\ln\theta - \Sigma \ln x_i!$$

$$\frac{\partial \ln L}{a e} = -n + \frac{\Sigma x_i}{e} \quad 0$$

$$. \quad \frac{\Sigma x_i}{e} \quad n$$

$$n\theta = \Sigma x_i$$

$$e = \frac{\Sigma x_i}{n} = \overline{X}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \overline{X}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \frac{-\Sigma x_i}{\theta^2}$$

เมื่อ $\theta = \hat{\theta} = \bar{X}$ จะได้

$$\frac{-\Sigma x_i}{\theta^2} = \frac{-n\bar{X}}{\bar{X}^2} = \frac{-n}{\bar{X}} < 0$$

$\therefore$ ตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ คือ $\bar{X}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ เมื่อประชากรมีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \geqslant 0,\ \theta > 0$

วิธีทำ จาก $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \theta^n e^{-\theta \Sigma x_i}$$

$$\ln L = n \ln \theta - \theta \Sigma x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \Sigma x_i = 0$$

$$\therefore \frac{n}{\theta} = \Sigma x_i$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$\therefore \theta = \frac{n}{\Sigma x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\ 3$$

เมื่อ $\theta = \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$

$$\therefore \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -n\bar{X}^2 < 0$$

$\therefore$ ตัวประมาณค่าแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ θ คือ $\frac{1}{\bar{X}}$ **ตอบ**

5.3.3 วิธีของเบย์ (Bayes Method)

ให้ $g(\theta)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ θ และเราเรียก $g(\theta)$ ว่าเป็น Prior distribution function (ฟังก์ชันการแจกแจงเบื้องต้น)

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มี pdf เป็น $f(x;\theta) = f(x|\theta)$ โดยที่ $f(x|\theta)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นมีเงื่อนไข (Conditional density function) ของ X เมื่อกำหนด θ

ให้ $g(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ θ

เมื่อกำหนดให้ $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ และเราเรียกฟังก์ชันนี้ว่าเป็นฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (Posterior distribution function) ของ θ

ดังนั้น ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (joint pdf) ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เมื่อกำหนด θ ให้คือ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta)\cdot f(x_2|\theta)\ldots f(x_n|\theta)$$

และฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ และ θ คือ

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)\cdot g(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\cdot g(\theta) \end{aligned}$$

และจะได้ว่า Marginal pdf ของตัวอย่างเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \int_{R_\theta} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)d\theta \\ &= \int_{R_\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\cdot g(\theta)d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ g(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &= \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)\cdot g(\theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \end{aligned}$$

ซึ่ง $g(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ที่ได้ก็คือ Posterior distribution หรือ pdf ของ θ และค่าเฉลี่ยของ Posterior pdf คือ

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= E(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \int \theta\cdot g(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)d\theta \end{aligned}$$

เราเรียก $\hat{\theta}$ นี้ว่า Bayes estimate ของ θ และเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$

ตัวอย่างที่ 5.9 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มี pdf

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}; \quad x = 0,1$$

จงหา Bayes estimator ของ θ เมื่อ marginal pdf

$$g(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

วิธีทำ เราต้องหา Conditional pdf ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เมื่อกำหนด θ ก่อนดังนี้

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta) \ldots f(x_n|\theta)$$

$$= \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}, \quad x_i = 0, 1$$

และ joint pdf ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ และ θ คือ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \ldots x_n|\theta) \cdot g(\theta)$$

$$= \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i} \times 1$$

$$= \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}; \quad x_i = 0, 1$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

Marginal pdf ของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{\text{“R”}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)d\theta$$

$$= \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)d\theta$$

$$= \int_0^1 \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}\, d\theta$$

ซึ่งคือ Beta function $\beta[\Sigma x_i; (n-\Sigma x_i)]$

$$\therefore \int_0^1 \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}d\theta = \frac{(\Sigma x_i)!(n-\Sigma x_i)!}{(\Sigma x_i + n - \Sigma x_i + 1)!}$$

$$= \frac{(\Sigma x_i)!(n - \Sigma x_i)!}{(n+1)!}$$

$$g(\theta|x_1, x_2,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1, x_2,\ldots,x_n|\theta)\cdot g(\theta)}{f(x_1, x_2,\ldots,x_n)}$$

$$= \frac{\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}{\frac{(\Sigma x_i)!(n-\Sigma x_i)!}{(n+1)!}}$$

$$= \frac{(n+1)!\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}{(\Sigma x_i)!(n-\Sigma x_i)!}$$

Bayes estimator ของ θ คือ

$$\hat{\theta} = E(\theta|x_1, x_2,\ldots,x_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta\cdot g(\theta|x_1, x_2,\ldots,x_n)d\theta$$

$$= \int_0^1 \theta\cdot \frac{(n+1)!\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}{(\Sigma x_i)!(n-\Sigma x_i)!}d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{(n+1)!\theta^{\Sigma x_i+1}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}{(\Sigma x_i)!(n-\Sigma x_i)!}d\theta$$

$$= \left[\frac{(n+1)!}{(\Sigma x_i)!(n-\Sigma x_i)!}\right]\left[\frac{(\Sigma x_i+1)!(n-\Sigma x_i)!}{(n+2)!}\right]$$

$$\therefore\ \hat{\theta} = \frac{\Sigma x_i + 1}{n+2}$$ **ตอบ**

5.4 **การประมาณค่าแบบช่วง** (Interval Estimation)

การประมาณค่าแบบช่วงที่นิยมใช้กันอยู่ในปัจจุบันเป็นผลงานของเนย์แมน ในปี ค.ศ. 1937 โดยนำทฤษฎีความน่าจะเป็นมาใช้

นิยาม ให้ $X_1, X_2,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มี pdf เป็น $f(x;\theta)$ เมื่อ θ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ตัวสถิติ L และ U จะเป็น $100(1-\alpha)\%$ ช่วงเชื่อมั่น (L, U) สำหรับพารามิเตอร์ θ

ถ้า $P[L < \theta < U] \geqslant 1-\alpha; \quad 0 < \alpha < 1$

เราต้องการจะหาช่วง (L, U) ที่จะทำให้เราเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ว่าคงจะคลุมค่าที่แท้จริงของพารามิเตอร์ θ และเราเรียก $(1-\alpha)$ ว่าเป็นสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence coefficient)

5.4.1 ช่วงเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่ทราบความแปรปรวน (Confidence intervals for the mean of a normal population with known variance)

ตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ และทราบความแปรปรวนว่าเท่ากับ σ^2 จากตัวอย่างเราต้องหาค่า L และ U ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวอย่างสุ่ม ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่มซึ่ง $P[L < \mu < U] \geqslant 1-\alpha$ สำหรับ $\alpha, 0 < \alpha < 1$ คือ $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน

ดังนั้น สำหรับค่า α ที่กำหนดให้ เราสามารถจะหาค่าของ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (ซึ่งเท่ากับ $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$) ที่ทำให้

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = \Phi(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$
$$= 1-\alpha$$

เขียนใหม่จะได้

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \leqslant Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
$$= P\left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$
$$= 1-\alpha$$

ดังนั้น $L = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ และ

$$U = \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

ซึ่งค่า $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ สามารถเปิดได้จากตาราง Standard Normal ในภาคผนวก

ตัวอย่างที่ 5.10 ในการสำรวจวัดฐานที่ตั้งของทรัพย์สิน 4 ครั้ง และพบว่าเขาวัดได้โดยเฉลี่ยเท่ากับ 585.145 เมตร จากประสบการณ์ที่ผ่านมาเขาทราบว่าความแปรปรวนของการวัดของเขาสำหรับระยะทางนี้จะเท่ากับ 0.010 เมตร^2 จงหา 99% Confidence interval สำหรับการวัดนี้

วิธีทำ จาก $\sigma^2 = 0.01$ เมตร^2 $\therefore \sigma = \sqrt{0.01} = 0.1$

$$L = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 585.145 - \frac{0.1}{2}(2.576)$$

$$= 585.016$$

$$U = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 585.145 + \frac{0.1}{2}(2.576)$$

$$= 585.274$$

99% Confidence interval ของ μ คือ (585.016, 585.274) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5.11 เครื่องจักรผลิตเหรียญ 2 เครื่อง ผลิตเหรียญที่มีการถ่วงน้ำหนักซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ ความแปรปรวนของการถ่วงน้ำหนักของทั้ง 2 เครื่องเป็น 0.9×10^{-3} กรัม^2 ในการตรวจสอบเหรียญ 10 เหรียญจากแต่ละเครื่องได้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็น 4.10 และ 4.15 ตามลำดับ จงหา 95% Confidence interval สำหรับผลต่างของค่าเฉลี่ยทั้ง 2

ถ้าผลผลิตที่ได้จากเครื่องจักรเครื่องหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ $N(\mu_X, \sigma^2)$ และอีกเครื่องหนึ่งเป็น $N(\mu_Y, \sigma^2)$ ดังนั้นตัวแปรเชิงสุ่ม

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}}$$

จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มี $\mu = 0$ และความแปรปรวนเป็น 1 และสมมติว่าผลผลิตจากแต่ละเครื่องเป็นอิสระกันจะได้

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - a$$

$$= P\left[(\overline{X}-\overline{Y})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{2}{n}} \leqslant \mu_X-\mu_Y \leqslant (\overline{X}-\overline{Y})+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}\right]$$

$\therefore$ 95% Confidence interval สำหรับผลต่างของค่าเฉลี่ยทั้ง 2 คือ

$$\mu = (\overline{X}-\overline{Y}) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\overline{X} = 4.10$$

$$\overline{Y} = 4.15$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.960$$

$$\sigma = 0.03, \quad n = 10$$

$$\therefore \mu = (4.10-4.15) \pm 1.960 \times 0.03\sqrt{\frac{2}{10}}$$

$$= -0.15 \pm 0.023$$

$$= (-0.173, -0.127)$$ **ตอบ**

5.4.2 ช่วงเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติและไม่ทราบความแปรปรวน (Confidence intervals for the mean of a normal population with unknown variance)

เราจะใช้ S^2 เป็น unbiased sample variance แทน σ^2 ตัวแปรเชิงสุ่ม $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ จะมีการแจกแจงแบบ t ที่มี df เท่ากับ $n-1$

$$\therefore P\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] = 1-a$$

$$= P\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

ซึ่งจะได้ $L = \overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$$U = \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

ค่าของ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ เปิดได้จากตาราง t ในภาคผนวก

ตัวอย่างที่ 5.12 จากตัวอย่างที่ 5.10 สมมติว่าไม่ทราบความแปรปรวนแต่คำนวณค่าความแปรปรวนของตัวอย่างได้เท่ากับ 0.01 เมตร^2 จงหา 99% Confidence interval ของการวัดนี้

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{.995, 3} = 5.841$$

$$\therefore L = \overline{X} - t_{.995, 3}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= \overline{X} - 5.841 \times \left(\frac{0.1}{2}\right)$$

$$U = \overline{X} + t_{.995, 3}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= \overline{X} + 5.841 \times \left(\frac{0.1}{2}\right)$$

$\therefore$ 99% Confidence interval คือ

$$\overline{X} - 5.841 \times \left(\frac{0.1}{2}\right) \leqslant \mu \leqslant \overline{X} + 5.841 \times \left(\frac{0.1}{2}\right)$$ **ตอบ**

5.4.3 ช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย (Confidence intervals for the variance of a normal population with unknown mean)

ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของความแปรปรวนคือ

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$$

และ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มี df เท่ากับ $(n-1)$

$$\therefore P\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right] = 1-\alpha$$

$\therefore$ $100(1-\alpha)\%$ Confidence interval ของ σ^2 คือ

$$\sigma^2 = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right)$$

หรือ $\sigma^2 = \left(\frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2, \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2\right)$

ตัวอย่างที่ 5.13 ถ้า $\Sigma(x_i - \overline{X})^2 = 1.02$ จงหา 99% Confidenceinterval สำหรับความแปรปรวน σ^2

$$\therefore a = 0.01$$

และ $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{.005, 7} = .9893$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{.995, 7} = 20.28$$

$\therefore$ 99% Confidence interval ของ σ^2 คือ

$$\left(\frac{1.02}{20.28}, \frac{1.02}{.9893}\right) = (0.050, 1.03)$$ **ตอบ**

5.5 การทดสอบสมมติฐาน (Testing Hypothesis)

สถานการณ์อันหนึ่งที่ง่ายที่สุดในทฤษฎีการตัดสินใจเมื่อเราต้องการตัดสินใจเกี่ยวกับค่าของพารามิเตอร์บางตัวของ pdf

สมมติว่าเราสังเกตตัวแปรเชิงสุ่ม n ตัว คือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ และให้แต่ละตัวแปรเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งมี pdf $f_0(x)$ หรือ $f_1(x)$ ปัญหาของเราก็คือจะตัดสินใจเลือก pdf อันไหนที่เหมาะสม วิธีการง่าย ๆ ก็คือเราสมมติให้ $f_0(x)$ และ $f_1(x)$ มีรูปแบบเหมือนกัน แต่มีค่าเฉลี่ยต่างกัน คือ $f_0(x)$ มีค่าเฉลี่ยเป็น μ_0 และ $f_1(x)$ มีค่าเฉลี่ยเป็น μ_1 เราเรียกสมมติฐานที่ว่าค่าเฉลี่ยเป็น μ_0 เป็นสมมติฐานเพื่อการทดสอบ (Null hypothesis) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย H_0 และสมมติฐานที่ว่าค่าเฉลี่ยเป็น μ_1 เป็นสมมติฐานแย้ง (Alternative hypothesis) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย H_1 ดังนี้

$H_0 : \mu = \mu_0$ (the null hypothesis)

$H_1 : \mu = \mu_1$ (the alternative hypothesis)

ซึ่งเมื่อเราสังเกตค่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เราก็จะตัดสินใจได้ว่าสมมติฐาน 2 อันนี้อันไหนใช้ได้ Sample Space คือ set ของ real n – tuples ทั้งหมด ซึ่งคือ Euclidean n – space, E_n เราจะแบ่ง Space E_n ออกเป็น 2 ขอบเขตด้วยกันคือ R_0 และ R_1 โดยที่ถ้าค่าสังเกต

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ตกอยู่ใน R_0 เราจะตัดสินใจเลือก H_0 และถ้าตกอยู่ใน R_1 เราจะตัดสินใจเลือก H_1 โดยที่ R_0 คือขอบเขตที่ยอมรับ (Acceptance region) และ R_1 คือขอบเขตที่ปฏิเสธหรือขอบเขตวิกฤต (Rejection or critical region)

มีบ่อยครั้งที่เป็นไปได้เมื่อ null hypothesis เป็นจริง (the actual population pdf คือ $f_0(x)$) แต่ตัวอย่างตกอยู่ในขอบเขต R_1 ในกรณีนี้ H_1 จะได้รับการยอมรับ ลักษณะเช่นนี้เป็นการเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1 (error of type I) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1 คือ P_I และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย α

อีกกรณีหนึ่งก็คือถ้า H_1 เป็นจริง (the population pdf คือ $f_1(x)$) แต่ตัวอย่างตกอยู่ในขอบเขต R_0 ในกรณีนี้เราจะยอมรับ H_0 ว่าเป็นจริง เรียกว่าเป็นการเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 2 (error of type II) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 2 คือ P_{II} และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย β

P_I เรามักจะเรียกว่าระดับนัยสำคัญ (Level of significance) หรือขนาดของแบบทดสอบ (Size of the test) หรือขนาดของเขตวิกฤต (Size of the critical region) และ $1 - P_{II}$ เราเรียกว่ากำลังของการทดสอบ (Power of the test) ซึ่งก็คือความน่าจะเป็นที่ยอมรับ H_1 เมื่อ H_1 เป็นจริง

โดยทั่ว ๆ ไปเราจะตั้งสมมติฐานทั้ง 2 เป็น $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งแย้งกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ สำหรับพารามิเตอร์ θ ใด ๆ ของประชากร หรืออาจจะอยู่ในรูป $H_0 : \theta^{(1)} = \theta_{01}, \theta^{(2)} = \theta_{02}, \ldots, \theta^{(k)} = \theta_{0k}$ ซึ่งแย้งกับ $H_1 : \theta^{(1)} = \theta_{11}, \theta^{(2)} = \theta_{12}, \ldots, \theta^{(k)} = \theta_{1k}$

ในกรณีที่เราไม่ทราบค่าของพารามิเตอร์แน่นอน เราอาจจะตั้งว่า $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งแย้งกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ จะเห็นได้ว่า H_1 ไม่บ่งค่าของ θ แน่ชัด

สมมติฐานที่เรียกว่าสมมติฐานเอกพันธ์ (Simple hypothesis) ถ้าหากว่าสมมติฐานนั้นบ่งค่าของพารามิเตอร์ในการทดสอบอย่างแน่นอน และสมมติฐานที่ไม่ใช่สมมติฐานเอกพันธ์เราเรียกว่าสมมติฐานพหุพันธ์หรือสมมติฐานประสม (Composite hypothesis) ตัวอย่างเช่น $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งแย้งกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ เป็นสมมติฐานที่เป็น Simple hypothesis ทั้งคู่ ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ นั้นเป็นการทดสอบ Simple null hypothesis vs Composite alternative hypothesis และสมมติฐาน $H_0 : |\theta| < k$ vs $H_1 : |\theta| > k$ เป็นการทดสอบ Composite vs Composite hypothesis

ตัวอย่างที่ 5.14 จากคำกล่าวของผู้จัดการธนาคารแห่งหนึ่งเกี่ยวกับจำนวนของเหรียญเพนนีรุ่นใหม่ที่ธนาคารได้รับจากกองกษาปณ์จำนวนหนึ่งเป็นเหรียญที่ไม่เที่ยงตรง ซึ่งตามความเป็นจริงแล้วเราทราบว่าความน่าจะเป็นที่จะได้หัวของเหรียญเพนนีนี้ $= \frac{7}{12}$ และความน่าจะเป็น

ที่จะได้ก้อยเท่ากับ $\frac{5}{12}$ ถ้าเราไปแลกเหรียญเพนนีรุ่นใหม่นี้จากธนาคาร และเราต้องการทดสอบว่าเหรียญเพนนีที่แลกมานี้เที่ยงตรงหรือไม่ ดังนั้น เราตั้งสมมติฐานว่า

H_0 : เหรียญเพนนีเที่ยงตรง

H_1 : เหรียญเพนนีไม่เที่ยงตรง

ถ้าเหรียญเที่ยงตรง ความน่าจะเป็นที่จะได้หัวให้เป็น θ จะต้องมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ และให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินามที่มีค่า $X = 1$ เมื่อได้หัว และ $X = 0$ เมื่อได้ก้อย) ดังนั้นสมมติฐานคือ

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2}$$

$$H_1 : \theta = \frac{7}{12}$$

หรือ

$$H_0 : E(X) = \frac{1}{2}$$

$$H_1 : E(X) = \frac{7}{12}$$

ถ้าเราทำการทดลองโยนเหรียญ N ครั้ง เราคาดว่าถ้าเหรียญนั้นเที่ยงตรง จำนวนหัวที่นับได้จะได้ประมาณ $\frac{N}{2}$ แต่ถ้าไม่เที่ยงตรงจะได้จำนวนหัว $\frac{7N}{12}$

จาก $$\overline{X} = \frac{1}{N}\Sigma x_i$$

ในการที่จะตกลงยอมรับ H_0 ว่าเป็นเหรียญเที่ยงตรงนั้นค่า $\overline{X}$ จะต้องน้อยกว่า $\frac{13}{24}$ $\left(\text{ครึ่งหนึ่งของ } \frac{1}{2} \text{ และ } \frac{7}{12}\right)$ และจะยอมรับ H_1

ถ้า $\overline{X} \geqslant \frac{13}{24}$

$$\therefore\ R_0 = \left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in S \,\middle|\, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i < \frac{13}{24}\right]$$

และ $$R_1 = \overline{R}_0 = \left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in S \,\middle|\, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \geqslant \frac{13}{24}\right]$$

การที่เราจะคำนวณหาความคลาดเคลื่อนในการทดสอบสมมติฐานทั้ง 2 ชนิด เราจะให้ $E[X_i] = \theta$ และ $V(X_i) = \theta(1-\theta)$ เมื่อ $\theta = \frac{1}{2}$ ภายใต้ H_0 และ $\theta = \frac{7}{12}$ ภายใต้ H_1 สมมติว่าเราทำการทดลองทอดเหรียญ N ครั้ง เมื่อ H_0 จริงจะหาความน่าจะเป็นที่จะทำให้เราตัดสินใจเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1 และยอมรับ H_1 ว่าจะเป็นเท่าใด

ให้ P_1 เป็นความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1 ดังนั้นเราจะได้

$$P_1 = P\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i > \frac{13}{24}\middle|\theta = \frac{1}{2}\right]$$

$$= P\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i > \frac{13N}{24}\middle|\theta = \frac{1}{2}\right]$$

สำหรับ N ที่มีค่ามาก เราสามารถใช้การแจกแจงแบบปกติประมาณค่าการแจกแจงแบบทวินามได้ดังนี้

$$P_1 = P\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i > \frac{13N}{24}\middle|\theta = \frac{1}{2}\right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

เมื่อ $$C = \frac{\left(\frac{13N}{24} - \frac{N}{2}\right)}{\left(\frac{N}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{N}}{12}$$

$$\therefore P_1 \approx 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{12}\right)$$

สำหรับ $N = 100$ เปิดตารางปกติมาตรฐานจะได้

$$P_1 \approx 1 - .798 = .202$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาความคลาดเคลื่อนแบบ 2 ได้ซึ่งจะเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็น P_{11} โดยที่

$$P_{11} = P\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i < \frac{13}{24}\middle|P = \frac{M}{12}\right]$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{C'} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\approx \Phi(C')$$

เมื่อ $$C' = \frac{\left(\frac{13N}{24} - \frac{7}{12}N\right)}{\left(N \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-\sqrt{N}}{2\sqrt{35}}$$

ถ้า $N = 100$ แล้ว $C' = -.841$ และจะได้

$$P_{11} \approx 0.200$$

และสำหรับ $N = 1000$ จะได้ $P_1 = .0042$ และ $P_{11} = .0037$

จากตัวอย่างจะเห็นว่าจุดมุ่งหมายของวิธีการทดสอบสมมติฐานใด ๆ คือการนำเอาข้อมูลที่มีอยู่มาใช้ให้ได้ผลดีที่สุดที่จะเป็นไปได้ ปัญหาก็คือเราจะตีความหมายของคำว่าผลดีที่สุดที่จะเป็นไปได้ว่าอย่างไร

สมมติให้พารามิเตอร์ θ ที่ปรากฏอยู่ในสมมติฐานเอกพันธ์ที่อยู่ในรูป $H_0 : \theta = \theta_0$ ซึ่งแย้งกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยทั่ว ๆ ไปแล้วความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนในการทดสอบไม่ว่าจะเป็นชนิดใดก็ตาม มักจะมีค่าลดลง ถ้าเราเพิ่มขนาดตัวอย่างให้มากขึ้น ความน่าจะเป็นที่จะยอมรับ H_0 จะอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $O(\theta)$ ของพารามิเตอร์ θ และเราเรียกชื่อว่าลักษณะการดำเนินการ (Operating characteristic หรือ OC) ของแบบทดสอบ และส่วนเติมเต็ม (Complement) ของมันคือ $P(\theta) = 1 - O(\theta)$ เราเรียกว่าฟังก์ชันกำลัง (Power function) ของแบบทดสอบ (ซึ่งคือความน่าจะเป็นที่ค่าสังเกตจะตกอยู่ในเขตวิกฤต R_1 ของแบบทดสอบนั้น)

$$\therefore\ P(\theta) = \left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in R_1 | \theta\right]$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $P(\theta_0) = \alpha$ คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1

และ $$O(\theta) = 1 - P(\theta)$$

$$= P\left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in R_0 | \theta\right]$$

ส่วนโค้งที่แสดงลักษณะการดำเนินการ (OC curve) ของแบบทดสอบคือส่วนโค้ง $Y = OC(\theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ θ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าแบบทดสอบที่ดีนั้นได้แก่แบบทดสอบที่จะไม่ก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนบ่อยนัก และเรามักต้องการแบบทดสอบที่มีความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เท่ากับ 1 ถ้า H_0 ไม่จริง และความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เท่ากับ 0 ถ้า H_0 จริง

กำลังของการทดสอบ (Power of a test) คือความน่าจะเป็นที่จะยอมรับ H_1 เมื่อ H_1 จริง แบบทดสอบที่ให้กำลังสูงที่สุด ณ ระดับนัยสำคัญ α ที่กำหนดให้เราเรียกแบบทดสอบนั้นว่าเป็นแบบทดสอบที่มีกำลังสูงที่สุด (Most powerful test หรือ MP – test) และแบบทดสอบที่ให้ Power สูงกว่าทุก ๆ แบบทดสอบ ขนาดเดียวกันในทุกค่าของพารามิเตอร์ θ ตาม H_1 เราเรียกแบบทดสอบนี้ว่าเป็นแบบทดสอบที่มีกำลังสูงที่สุดเสมอ (Uniformly most powerful test หรือ UMPT)

เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจความหมายของคำบางคำในการทดสอบสมมติฐาน H_0 vs H_1 ที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ μ สรุปได้ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนแบบ 1 เกิดขึ้นเมื่อ H_0 ถูกปฏิเสธทั้ง ๆ ที่ H_0 เป็นจริง

2. ความคลาดเคลื่อนแบบ 2 เกิดขึ้นเมื่อ H_1 ถูกปฏิเสธทั้ง ๆ ที่ H_1 เป็นจริง

3. P_1 คือความน่าจะเป็นที่เกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1 และเราเรียกว่าระดับนัยสำคัญของแบบทดสอบ (level of significance of the test)

4. $1 - P_{11}$ คือ power of the test

2. $O(\theta)$ คือ operating characteristic of the test

6. $1 - O(\theta)$ คือ power function of the test

7. แบบทดสอบจะถูกเรียกว่าเป็น Uniformly most powerful test (UMPT) ถ้าแบบทดสอบนั้นให้ค่า P_{11} ต่ำที่สุด (คือให้ power สูงที่สุด)

5.6 สมมติฐานเอกพันธ์และทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของเนย์แมน และเพียร์สัน

(Simple Hypothesis and the Neyman – Pearson Lemma)

ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ เมื่อทั้ง H_0 และ H_1 เป็นสมมติฐานเอกพันธ์ (Simple hypothesis) ทั้งคู่ ปัญหาของเราก็คือเราจะสร้างแบบทดสอบ ซึ่งเมื่อกำหนดค่า α ให้ เมื่อ β ต่ำสุด ซึ่งก็คือปัญหาที่จะต้องหาเขตวิกฤตที่ดีที่สุดของขนาด α ที่ทำให้แบบทดสอบนั้นมีกำลังสูงสุด (Most powerful test – MP) นั่นเอง ทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของ

เนย์แมนและเพียร์สัน (Neyman – Pearson Lemma) จะช่วยแก้ปัญหาดังกล่าวนี้ได้

ถ้าให้ joint pdf ของเซตของค่าสังเกตเป็น $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ภายใต้ $H_0 : \theta = \theta_0$ คือ $L(X; \theta_0)$ และในทำนองเดียวกันสำหรับ $H_1 : \theta = \theta_1$ คือ $L(X; \theta_1)$

ถ้าตัวอย่างถูกสุ่มมาและ X_i มี pdf $f_X(x; \theta_0)$ ดังนั้น

$$L(X; \theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_0)$$

ทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของเนย์แมนและเพียร์สัน (NPL)

(The Neyman – Pearson Lemma)

การที่จะทดสอบสมมติฐานเอกพันธ์ทั้งสองคือ $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ เขตวิกฤต R_1 ของขนาด α นิยามดังนี้

$$R_1 = \left\{ X \in E_n \middle| \frac{L(X; \theta_1)}{L(X; \theta_0)} \geqslant C \right\}$$

จะเป็นอาณาเขตวิกฤตที่ดีที่สุดและมีขนาด α (Most Powerful Region of Size α) ค่าคงที่ C จะถูกเลือกจนกระทั่งได้ $P_1 = \alpha$

พิสูจน์ จากข้อสมมติของ Lemma ได้ว่า

$$P_1 = \alpha = \int_{R_1} L(x; \theta_0)dx$$

และในทำนองเดียวกัน

$$P_{11} = \beta = \int_{R_0} L(x; \theta_1)dx$$

$$= 1 - \int_{R_1} L(x; \theta_1)dx$$

เมื่อ $R_1 = \overline{R}_0$ สมมติให้ R_1' เป็นอาณาเขตวิกฤตอื่น ๆ ที่มีขนาด α

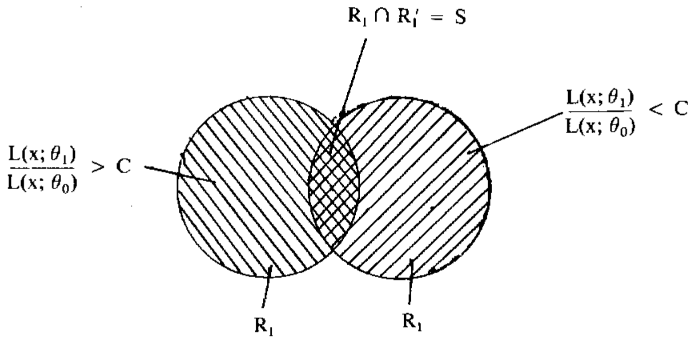
$$\therefore \alpha = \int_{R_1'} L(x; \theta_0)dx$$

ต้องการที่จะแสดงว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ α ที่เกี่ยวข้องกับ R_1' คือ P_{11}' มีค่าอย่างน้อยที่สุดใหญ่เท่ากับ β ดังนั้น

$$P'_{11} = 1 - \int_{R'_1} L(x; \theta_1)dx \geqslant 1 - \int_{R_1} L(x; \theta_1)dx$$

$$= P_{11} = \beta$$

หรือ $\int_{R'_1} L(x; \theta_1)dx \leqslant \int_{R_1} L(x; \theta_1)dx$



จากรูป จะเห็นได้ชัดเจนเลยว่า

$$\int_{R_1} L(x; \theta_1)dx - \int_{R'_1} L(x; \theta_1)dx = \int_{R_1|S} L(x; \theta_1)dx - \int_{R'_1|S} L(x; \theta_1)dx$$

$$> C\left[\int_{R_1|S} L(x; \theta_0)dx - \int_{R'_1|S} L(x; \theta_0)dx\right]$$

ซึ่งทางขวามือของสมการเราสามารถเขียนได้ดังนี้

$$C\left[\int_{R_1|S} L(x; \theta_0)dx + \int_S L(x; \theta_0)dx - \int_S L(x; \theta_0)dx - \int_{R'_1|S} L(x; \theta_0)dx\right]$$

$$= C\left[\int_{R_1} L(x; \theta_0)dx - \int_{R'_1} L(x; \theta_0)dx\right] = 0$$

จากข้อสมมติ integral ทั้ง 2 ในสมการสุดท้ายนี้มีค่าเท่ากับ α ดังนั้น

$$\int_{R_1} L(x; \theta_1)dx - \int_{R'_1} L(x; \theta_1)dx > 0$$

นั่นคือ $\int_{R_1} L(x;\theta_1)dx > \int_{R_1'} L(x;\theta_1)dx$ เมื่อ

$$\int_{R_1} L(x;\theta_0)dx = \int_{R_1'} L(x;\theta_0)dx = \alpha$$

ดังนั้น เขตวิกฤต R_1 ที่พัฒนาขึ้นมาจากทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของเนย์แมน และเพียร์สันจึงเป็นเขตวิกฤตที่ให้กำลังสูงกว่าเหมาะสมกว่า หรือเป็นเขตวิกฤตที่ดีที่สุด (Best Critical Region) และมีขนาดเท่ากับ α

ทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของเนย์แมน และเพียร์สันนี้จะใช้ในการสร้างอาณาเขตวิกฤตที่ดีที่สุด และมีขนาดเท่ากับ α (Most powerful Critical Region of Size α) ถ้าให้อัตราส่วน (Ratio) ของ $\frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)}$ เป็น likelihood ratio ของตัวอย่าง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu_1 < \mu_0$ (ทราบ σ^2)

ฟังก์ชัน $L(x;\mu_0)$ คือ

$$L(x;\mu_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right]$$

และสำหรับ $L(x;\mu_1)$ ก็เขียนได้ทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของเนย์แมน และเพียร์สันจะให้แบบทดสอบอยู่ในรูปดังนี้คือ

จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $x \in R_1$ เมื่อ

$$R_1 = \left(x \,\middle|\, \frac{L(x;\mu_1)}{L(x;\mu_0)} \geqslant C\right)$$

likelihood ratio สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{L(x;\mu_1)}{L(x;\mu_0)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu_1)^2\right]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu_0)^2\right]}$$

$$= \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu_1^2 - \mu_0^2) + \bar{X}n\frac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} \right]$$

สำหรับ $\mu_1 < \mu_0$ exp นี้จะเป็น monotonically decreasing function ของ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

ดังนั้น แบบทดสอบที่อยู่ในรูป $\frac{L(x;\mu_1)}{L(x;\mu_0)} \geqslant C$

สามารถเขียนอยู่ในรูป Reject H_0 ถ้า $\bar{X} \leqslant C'$

เราจะหาค่า C' ภายใต้ H_0 ให้ $\bar{X}$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_0 และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n}$ และ

$$\alpha = P_I = P[\bar{X} \leqslant C' | \mu = \mu_0]$$

$$= \int_{-\infty}^{C'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}(v - \mu_0)^2 \right] dv$$

$$= \Phi\left(\frac{C' - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$$

จะได้ $$\frac{(C' - \mu_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_\alpha \text{ หรือ } C' = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) Z_\alpha + \mu_0$$

และจะได้ $$\beta = P_{II} = \int_{C'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}(v - \mu_1)^2 \right] dv$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{C' - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)0$$

$$= 1 - \Phi\left[\frac{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) Z_\alpha + \mu_0 - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right]$$

$$= \quad 1-\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}+Z_\alpha\right)$$

ถ้าเราไม่ทราบความแปรปรวน (σ^2) เราสามารถใช้ $\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(เมื่อ S^2 เป็น unbiased sample variance) ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n – 1 และเราจะได้แบบทดสอบอยู่ในรูป Refect H_0 ถ้า $\bar{X} < \mu_0 + \left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)t_{\alpha,\, n-1}$

กรณีที่ 2 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$ (สมมติว่าทราบค่า μ)

อัตราส่วนของ Neyman – Pearson Lemma คือ

$$\frac{L(x;\sigma_1)}{L(x;\sigma_0)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right]}$$

$$= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\right]$$

ซึ่งเป็น monotonically decreasing function ของ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

ดังนั้น แบบทดสอบคือจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \leqslant C$

จาก $\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม chi – square ที่มีองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ n

$$\therefore P_1 = \alpha = P\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \leqslant \frac{C}{\sigma_0^2}\middle|\sigma^2 = \sigma_0^2\right]$$

ซึ่งจะได้ว่า $\frac{C}{\sigma_0^2} = \chi^2_{\alpha,\, n}$ หรือ $C = \sigma_0^2\chi^2_{\alpha,\, n}$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิด Type II error คือ

$$\beta = P\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 > \sigma_0^2\chi^2_{\alpha,n}\middle|\sigma^2 = \sigma_1^2\right]$$

$$= P\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma_1^2} > \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\chi^2_{\alpha,n}\middle|\sigma^2 = \sigma_1^2\right]$$

ถ้าเราไม่ทราบค่า μ สมมติฐานนี้จะเป็นสมมติฐานพหุพันธ์ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่างที่ 5.15 ต้องการจะทดสอบ $H_0 : \mu = 8$ vs $H_1 : \mu = 8.6\,(\sigma^2 = 4)$ ในการวิเคราะห์จะทำเหมือนกับกรณีที่ 1 ที่กล่าวมาแล้ว แบบทดสอบจะอยู่ในรูปดังนี้คือจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $\overline{X} \geqslant C$

เมื่อ $C = \mu_0 - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)Z_\alpha$ ซึ่งเท่ากับ $8 + \frac{3.292}{\sqrt{n}}$

และความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 2 คือ

$$P_{II} = P\left[\overline{X} < C|\mu = 8.6\right]$$

$$= \int_{8+\frac{3.292}{\sqrt{n}}}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}(v-8.6)^2\right)dv$$

$$= 1-\Phi\left(-\frac{0.3}{\sqrt{n}}+1.646\right)$$

จากทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของ Neyman และ Pearson แบบทดสอบนี้จะมีกำลังสูงที่สุด

5.7 สมมติฐานพหุพันธ์ (Composite Hypothesis)

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ H_0 เป็นสมมติฐานเอกพันธ์ และ H_1 เป็นสมมติฐาน-พหุพันธ์

สมมติว่าภายใต้ H_0 พารามิเตอร์ $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(k)})$ จะถูกนำค่ามาใช้ในบางขอบเขตของ k – dimentional space E และเราเรียกขอบเขตนี้ว่า Λ_0 ภายใต้ H_1 พารามิเตอร์นี้ก็จะถูกนำค่ามาใช้ในขอบเขตอื่นบางขอบเขตให้เป็น Λ_1 และให้ $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$ เมื่อพารามิเตอร์แปรไปตาม Λ_0 สำหรับค่าบางค่าหรือ set of points มันจะให้ค่าสูงที่สุด (Maximum value), $\max L(x;\theta)$ สำหรับตัวอย่างใดตัวอย่างหนึ่ง X และถ้าพารามิเตอร์แปรตามขอบเขต Λ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\max_{\theta \in \Lambda} L(x;\theta) \geqslant \max_{\theta \in \Lambda_0} L(x;\theta)$$

ถ้าเราเขียนในรูปของ likelihood ratio จะได้

$$L(X) = \frac{\max_{\Lambda_0} L(X;\theta)}{\max_{\Lambda} L(x;\theta)}$$

แบบทดสอบจะอยู่ในรูปดังนี้คือ จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $L(X) < C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ที่เลือกขึ้นมาจนกระทั่งได้เท่ากับระดับนัยสำคัญที่เราต้องการ ซึ่งค่าของ C จะมีค่าไม่เกิน 1 แบบทดสอบนี้จะแตกต่างไปจากที่กำหนดไว้ในทฤษฎีประกอบเบื้องต้นของ Neyman และ Pearson

เราจะพัฒนาแบบทดสอบสำหรับข้อมูลปกติใน 4 กรณีดังนี้

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ (สมมติว่าทราบค่า σ)
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (สมมติว่าทราบค่า σ)
3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$ (ไม่ทราบค่า σ)
4. $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (ไม่ทราบค่า μ)

ตารางแสดง Composite Hypothesis Tests

สำหรับ Normal Data

H_0	H_1	Critical Region of Size α	**หมายเหตุ**
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\overline{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$	ทราบ σ
		$\overline{X} > \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha, n-1}$	ไม่ทราบ σ
$\mu = \mu_0$	$\mu \geqslant \mu_0$	$\overline{X} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}$	ทราบ σ
		$\overline{X} < \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha, n-1}$	ไม่ทราบ σ
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	ทราบ σ
	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert\overline{X} \neq \mu_0\rvert > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$	ไม่ทราบ σ
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\Sigma(x_i - \overline{X})^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{1-\alpha, n-1}$	ไม่ทราบค่า μ
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\Sigma(x_i - \overline{X})^2 < \sigma_0^2 \chi^2_{\alpha, n-1}$	ไม่ทราบค่า μ
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\Sigma(x_i - \overline{X})^2$ อยู่นอก interval $\left(\sigma_0^2 \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \sigma_0^2 \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)$	ไม่ทราบค่า μ

กรณีที่ 1 $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$

likelihood ratio **คือ**

$$L(X) = \frac{\exp\left[-\frac{\Sigma(x_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right]}{\max_\mu \exp\left[-\frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

$$= \min_\mu \exp\left[\frac{n\overline{X}}{\sigma^2}(\mu_0 - \mu) + \frac{n(\mu_0^2 - \mu^2)}{\sigma^2}\right]$$

ซึ่งจะเป็น monotonically decreasing function **ของ** $\overline{X}$ **สำหรับค่า** $\mu > \mu_0$ **ใด ๆ และ** critical region **คือ จะปฏิเสธ** H_0 **เมื่อ** $\overline{X} > C$

พิจารณาค่าคงที่ C จาก

$$P(\overline{X} > C|\mu = \mu_0) = \alpha$$

$$= P\left[\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\middle|\mu = \mu_0\right]$$

ดังนั้น $$\frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_{1-\alpha}$$

หรือ $$C = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\alpha}$$

ดังนั้น Critical region ของขนาด α คือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $\overline{X} > \mu_0 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)Z_{1-\alpha}$

ถ้าสมมติว่าค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของข้อมูลคือ $\mu_1 > \mu_0$ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 2 ในการยอมรับ H_0 เมื่อ H_1 จริงคือ

$$P_{II} = P\left(|\overline{X}-\mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}|\mu = \mu_1\right)$$

$$= P\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\middle|\mu = \mu_1\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

กรณีที่ 2 $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

จะเห็นได้ว่า H_1 เป็นแบบทดสอบ 2 ด้าน

เศษของ likelihood ratio คือ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu_0)^2\right]$$

ส่วนของ likelihood ratio สำหรับ $\mu = \mu_1$ คือ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu_1)^2\right]$$

เมื่อ differentiate เทียบกับ μ_1 แล้วให้ผลลัพธ์ที่ได้เท่ากับ 0 ค่าของ μ_1 ที่ maximizes expression นี้คือ $\mu_1 = \overline{X}$

likelihood ratio คือ

$$L(X) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\mu_0)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\overline{X})^2\right]}$$

$$= \exp\left[-\frac{(\overline{X}-\mu_0)^2}{2\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}\right]$$

ซึ่ง L(X) นี้เป็น monotonically decreasing function ของค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของผลต่างระหว่าง $\overline{X}$ และ μ_0 แบบทดสอบจะอยู่ในรูปดังนี้คือ จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $|\overline{X}-\mu_0| > C$

การที่จะหาค่า C สำหรับ $P_1 = \alpha$ หาได้ดังนี้

$$P_1 = \alpha$$

$$= P(|\overline{X}-\mu_0| > C|\mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{-C}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

ดังนั้น $C = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

และ Critical region ของขนาด α คือ

$$R_1 = \left\{X \,\middle|\, |\overline{X}-\mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิด Type II error ขึ้นอยู่กับค่า $\mu = \mu_1$ ใน H_1 ดังนี้

$$P_{11} = P\left(|\overline{X}-\mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\middle|\mu = \mu_1\right)$$

$$= P\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\overline{X}-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\middle|\mu = \mu_1\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

แบบทดสอบสำหรับกรณีที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนจะทำเหมือนกับกรณีที่ 1 และ 2 ที่กล่าวมาแล้ว โดยพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม $\frac{(\overline{X}-\mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (เมื่อ S^2 เป็น unbiased sample variance) ซึ่งมีการแจกแจงแบบที ที่มี degree of freedom เท่ากับ n – 1 ขณะที่ $\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มี degree of freedom เท่ากับ n – 1 และเราจะใช้ข้อเท็จจริงนี้ในกรณีที่ 3 และ 4 ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 3 $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$ (σ ไม่ทราบค่า)

แบบทดสอบจะอยู่ในรูปดังนี้คือ จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $\overline{X} < C$ และปัญหาก็คือการหาค่าคงที่ C ว่าจะมีค่าเท่าใด

จาก $P_1 = \alpha$

$$= P(\overline{X} < C|\mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < \frac{C-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\middle|\mu = \mu_0\right)$$

ซึ่งจะได้ $\frac{C-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = t_{\alpha, n-1}$

หรือ
$$C = \mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha, n-1}$$

$$= \mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha, n-1}$$

และความน่าจะเป็นที่จะเกิด Type II error ก็จะอยู่ในรูปฟังก์ชันของ $\mu_0-\mu$ เหมือนกัน

กรณีที่ 4 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (μ ไม่ทราบค่า)

เศษของ likelihood ratio คือ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\Sigma(x_i-\mu)^2\right]$$

maximize เทอมนี้ over μ เมื่อ μ ไม่ทราบค่า จะให้ $\mu = \overline{X}$ ภายใต้ H_1 (สมมติว่า

$\mu = \mu_1$ สำหรับ Moment) ส่วนของ likelihood ratio คือ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu)^2\right]$$

maximum valuje over σ สำหรับ expression นี้คือ

$$\sigma^2 = \Sigma\frac{(x_i-\mu)^2}{n}$$

maximize ผลของ expression over μ เมื่อให้ $\mu = \overline{X}$ และ likelihood ratio คือ

$$L(X) = \left[\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{S^2}{\sigma_0^2}\right]^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{(n-1)S^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n}{2}\right]$$

ซึ่ง likelihood ratio นี้ไม่เป็น monotonic ใน S^2

เมื่อ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 ที่มี degree of freedom เท่ากับ $n-1$

$$\therefore\ P\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1} \leqslant \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}\right] = 1-\alpha$$

และ critical region ของขนาด α คือจะปฏิเสธ H_0 ถ้า

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\Sigma(x_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}$$

หรือ

$$\frac{\Sigma(x_i-\overline{X})^2}{\sigma_1^2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}$$

ตัวอย่างที่ 5.16 ระยะเวลาในการผลิตชิ้นส่วนอย่างหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น-145 ช.ม. และความแปรปรวนเป็น 100 ช.ม.^{2} ถ้าการผลิตเป็นไปอย่างถูกต้อง ข้อบกพร่องในขบวนการผลิตชิ้นส่วนนั้นเป็นผลในช่วงระยะเวลาสั้น จากของจำนวนมากซึ่งอาจจะดีหรืออาจจะเสีย สุ่มเลือกมา 10 ชิ้น เพื่อมาทดสอบและพบว่ามีระยะเวลาเฉลี่ย 132 ช.ม. เราจะยอมรับของจำนวนนี้หรือไม่ ถ้าเราต้องการความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธจำนวนของที่ดีน้อยกว่า 0.02 ถ้าในความเป็นจริงแล้วของจำนวนนี้มีค่าเฉลี่ยเป็น 130 ช.ม. ความน่าจะเป็นที่จะยอมรับจะเป็นเท่าใด? สมมติว่าประชากรของเรามีการแจกแจงแบบปกติที่ทราบความแปรปรวนว่าเท่ากับ 100 ช.ม.^{2} และเราต้องการที่จะทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 = \mu_0 = 145 \text{ vs } H_1 : \mu = \mu_1 < 145$$

อัตราส่วนของ $\frac{L(x;\mu_0)}{\text{Max}_\mu L(x;\mu)}$ สามารถเขียนได้ดังนี้ $\dfrac{\exp\left[-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right]}{\max_\mu \exp\left[-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่มีการ Maximize เศษ และเราต้องการเลือกค่า $\mu(\mu \leqslant \mu_0)$ เพื่อที่จะ Maximize ส่วน หรือ Minimize ratio นี้นั่นเอง ถ้าจัดเทอมเสียใหม่เราจะได้แบบทดสอบสำหรับค่า μ ใด ๆ เป็นดังนี้คือ จะปฏิเสธ H_0 ถ้า

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-(x_i-\mu)^2\right\}\right] < C$$

หรือเหมือนกับจะปฏิเสธ H_0 ถ้า

$$\exp\left(\frac{\mu^2-\mu_0^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{(\mu_0-\mu)}{2\sigma^2}\right] < k$$

จากสมการนี้จะเห็นได้ว่าสำหรับค่าของ μ ที่น้อยกว่า μ_0 ทางด้านซ้ายมือของสมการจะเป็น increasing function ของ $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

สรุปได้ว่า แบบทดสอบคือจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i < C'$ สำหรับค่าคงที่อันใหม่คือ C' ซึ่งจะถูกกำหนดโดยระดับนัยสำคัญทำนองเดียวกัน เราจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $\overline{X} < C''$ ถ้าค่าเฉลี่ยภายใต้ H_0 เป็น μ_0 และความแปรปรวนเป็น $\frac{\sigma^2}{n}$ ดังนั้นระดับนัยสำคัญคือ

$$\begin{aligned}
P_1 &= P\left[\overline{X} < C'' | \mu = \mu_0\right] \\
&= \int_{-\infty}^{C''} \frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\mu_0)^2}{\frac{2\sigma^2}{n}}\right]}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}dx \\
&= \Phi\left(\frac{C''-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)
\end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นที่จะยอมรับ H_0 เมื่อ H_0 จริงคือ $1-P_1$ และความน่าจะเป็นที่จะยอมรับ H_0 เมื่อ H_1 จริงจะขึ้นอยู่กับค่าเฉพาะของ μ_1 ดังนี้

$$P_{11} = P\left[\overline{X} \geqslant C'' | \mu = \mu_1\right]$$

$$= \int_{C''}^{\infty} \frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\dfrac{2\sigma^2}{n}}\right]}{\sqrt{2\pi}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} dx$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{C''-\mu_1}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

ถ้าให้ระดับนัยสำคัญเป็น α ดังนั้น Z_α เขียนได้ดังนี้

$$\Phi(Z_\alpha) = \alpha \quad \text{และ } C'' = Z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0$$

Operating Characteristic ของแบบทดสอบคือ

$$O(\mu_1) = 1-\alpha+1-\Phi\left(Z_\alpha + \frac{\mu_0-\mu_1}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

ปัญหาของเราคือ ถ้า $\overline{X} = 132$ ช.ม., $\mu_0 = 145$ ช.ม., $\sigma = 10$ ช.ม., $n = 10$ และ $P_1 = 0.02$ ดังนั้น $Z_\alpha = -2.05$

และแบบทดสอบคือเราจะปฏิเสธ $H_0(\mu = 145$ ช.ม.) ถ้า

$$\overline{X} < \frac{-2.05\times 10}{\sqrt{10}} + 145 = 138.52$$

เมื่อ $\overline{X} = 132$ เราจึงปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 **ตอบ**

และถ้าค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของประชากรเท่ากับ 130 ช.ม. ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ของจำนวนนี้จะถูกยอมรับคือ

$$O(130) = 2-0.02-\Phi\left(-2.05+\frac{15}{\dfrac{10}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$= 1.98-\Phi(2.69)$$

$$= 0.984$$

5.8 การทดสอบภาวะสารรูปสนิทดี

(Goodness of Fit Tests)

ในสถานการณ์ที่ปฏิบัติกันอยู่โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว บ่อยครั้งเรามักจะไม่ทราบการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งขั้นแรกในการวิเคราะห์เราต้องการที่จะสร้างรูปการแจกแจงขึ้นมาซึ่งจะต้องขึ้นอยู่กับการวัดโดยเลือกรูปการแจกแจงที่เหมาะสม (fit) กับข้อมูลที่มีอยู่ ซึ่งเราจะต้องตั้งสมมติฐานขึ้นมาเพื่อทดสอบสถานการณ์เช่นนี้ โดย Null hypothesis จะตั้งเกี่ยวกับการแจกแจงที่เรารู้สึกว่ามันอาจจะ fit กับค่าสังเกตของเรา และ Alternative hypothesis เราจะตั้งว่าการแจกแจงนั้นไม่ fit กับค่าสังเกตของเรา ในลักษณะเช่นนี้เราจะใช้ χ^2 goodness of fit test fit test

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี pdf เป็น f(x) และให้ $I_1, I_2, \ldots, I_m$ เป็นช่วงเชื่อมั่น m ช่วงที่แยกต่างหากจากกัน ซึ่งถ้านำมา Union กันแล้วจะเป็นพิสัยของ X, R_X

ถ้าให้ Probabilities $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ เป็นดังนี้

$$\theta_j = P[X \in I_j]$$

$$= \int_{I_j} f(x)dx;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ \sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$$

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มของ X ดังนั้น Y_i เป็นจำนวนตัวอย่างที่ตกอยู่ในช่วงที่ i แล้วจะได้

$$P(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \ldots, Y_m = n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}\theta_1^{n_1}\theta_2^{n_2}\ldots\theta_m^{n_m}$$

เมื่อ $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$ และตัวแปรเชิงสุ่ม $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ มีการแจกแจงเป็น multinomial

population X มี pdf f(x) อัตราส่วน $\frac{n_i}{n}$ เมื่อ n โต จะเข้าใกล้ความน่าจะเป็น θ_i, i = 1,2,...,m ถ้าประชากรถูกสมมติว่ามี pdf ดังข้างต้น แต่ความเป็นจริงแล้วประชากรนี้มี pdf เป็นอย่างอื่น ให้เป็น g(x) ดังนั้น ผลต่างระหว่างความถี่ที่สังเกตมา (observed frequencies) n_i และความถี่ที่คาดว่าจะเป็น (expected frequencies) $n\theta_i$ จะปรากฏขึ้นมา ซึ่งเราจะใช้ χ^2 goodness of fit test ดังนี้

สมมติฐานที่ตั้งขึ้นในการทดสอบสถานการณ์นี้คือ

H_0 : the observed frequencies n_i are consistent with $n\theta_i$, i = 1,2,...,m

H_1 : the observed frequencies are not consistent

ถึงแม้ว่าเราจะไม่สามารถเขียน likelihood ratio สำหรับแบบทดสอบนี้ได้โดยตรง แต่เราสามารถเขียนรูปอัตราส่วนได้ดังนี้

$$L = \frac{\left(\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!}\right)\theta_1^{n_1}\cdot\theta_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot\theta_m^{n_m}}{\left(\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!}\right)\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{n_m}{n}\right)^{n_m}}$$

เมื่ออัตราส่วน $\frac{n_i}{n}$ ใช้ประมาณ θ_i

ถ้าเราให้ $e_i = n\theta_i$

$\therefore$ เราสามารถเขียน L ได้ใหม่ดังนี้

$$L = \left(\frac{e_1}{n_1}\right)^{n_1}\left(\frac{e_2}{n_2}\right)^{n_2}\cdots\left(\frac{e_m}{n_m}\right)^{n_m}$$

$$\therefore \ln(L) = \sum_{i=1}^{n} n_i \ln\left(\frac{e_i}{n_i}\right)$$

ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าเมื่อ n เข้าใกล้ ∞ ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ เมื่อ Y_i เป็นจำนวน observation ที่อยู่ใน interval I_i เป็น m − variate normal pdf และตัวสถิติ

$\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \frac{(Y_i - e_i)^2}{e_i}$ จะเป็น Chi − square random variable ที่มี degree of freedom เท่ากับ (m − 1)

และสามารถที่จะแสดงให้เห็นได้ว่าผลรวม $\sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$ มีค่าประมาณ $-2\ln(L)$

χ^2 goodness of fit test คือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \frac{(Y_i - e_i)^2}{e_i} > \chi^2_{1-\alpha,\, m-1}$$

แบบทดสอบนี้จะใช้ได้ $e_i \geqslant 5$

ในบางครั้งเราต้องการที่จะทดสอบดูว่า population ของเรามี pdf ในรูปที่เรากำหนดไว้หรือไม่ โดยเราไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของมันเลย ตัวอย่างเช่นเราต้องการจะทดสอบดูว่า

X ของเรามีการแจกแจงเป็นแบบปกติหรือไม่ โดยที่เราไม่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเลย ถ้าให้จำนวนพารามิเตอร์ของ f(x) ที่เราไม่ทราบค่ามี r ตัว ดังนั้น องศาความเป็นอิสระจะมีค่าเท่ากับ (m − r − 1)

ตัวอย่างที่ 5.17 อายุการใช้งานของ transformer เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์เป็น 0.45 ปี$^{-1}$

สุ่มมาตรวจ 50 อันได้ผลดังนี้

ช่วงระยะเวลา (ปี)	0 − 1	1 − 2	2 − 3	> 4
จำนวนของเสีย	21	16	9	4

ถ้า $\alpha = 0.05$ อยากทราบว่าจะยอมรับสมมติฐานนี้หรือไม่

exponential pdf มีพารามิเตอร์เท่ากับ 0.45 จะได้ว่า

$$\text{ความน่าจะเป็น } \theta_1 = \int_0^1 (0.45)e^{-0.45t}\,dt$$

$$= 0.362$$

$$\theta_2 = 0.232$$

$$\theta_3 = 0.145$$

$$\theta_4 = 0.259$$

$$\therefore \text{ ตัวสถิติ } \Lambda = \frac{(21-18.1)^2}{18.1} + \frac{(16-11.6)^2}{11.6} + \frac{(9-7.25)^2}{7.25} + \frac{(4-12.95)^2}{12.95}$$

$$= 8.74$$

จากตาราง χ^2 เปิดค่า $\chi^2_{.95,\,3} = 7.81$

$$\therefore \Lambda = 8.74 > \chi^2_{.95,\,3}$$

เราจึงปฏิเสธ H_0 ว่าอายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟมีการแจกแจงแบบ exponential

ตอบ

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จากตัวอย่างหลอดไฟ 4 หลอด ระยะเวลาในการเผาไหม้เป็นดังนี้ 4.1, 4.5, 3.9 และ 5.0 วัน ถ้าสมมติว่าระยะเวลาการเผาไหม้ของหลอดไฟมีการแจกแจงแบบ gamma ที่มี pdf ดังนี้

$$f(x; \alpha, \gamma) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\gamma}}}{\gamma^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

จงประมาณค่า α และ γ โดยใช้วิธีโมเมนต์

2. ค่าสังเกตของตัวอย่าง 3.1, 0.2, 1.6, 5.2 และ 2.1 สุ่มมาจากตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ Uniform ใน range(a, b) ที่ไม่ทราบค่า จงประมาณค่า a และ b โดยใช้วิธีโมเมนต์
3. ในการวิเคราะห์ระยะเวลาของลูกค้า 10 คน ที่มาถึงภัตตาคารแห่งหนึ่งเป็นดังนี้ 4.2, 1.1, 6.3, 5.2, 2.2, 2.8, 7.4, 1.2, 1.9 และ 3.1 สมมติว่าระยะเวลานี้มีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์ λ จงประมาณค่า λ โดยใช้วิธี Maximum likelihood
4. จงประมาณค่า a และ b ของโจทย์ข้อ (2) โดยใช้วิธี Maximum likelihood
5. Crushing Strength ของ Concrete ตัวอย่างมีการแจกแจงแบบ gamma ที่มี pdf เป็น

$$f(x; \theta) = \frac{xe^{-\frac{x}{\gamma}}}{\gamma^2}; \quad x \geqslant 0$$

จงประมาณค่า γ โดยใช้วิธี Maximum likelihood เมื่อค่าสังเกตเป็นดังนี้ 5.4, 7.1, 6.2, 6.4 และ 4.9

6. จำนวน defects ที่พบในม้วนพรมมีการแจกแจงแบบ Poisson ที่มีพารามิเตอร์ λ สุ่มพรมมาตรวจ 4 ม้วน และพบว่ามี 12, 4, 9 และ 15 defects ตามลำดับ จงประมาณค่า λ โดยวิธี Maximum likelihood
7. ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2 จงประมาณค่า μ และ σ^2 โดยวิธี Maximum likelihood
8. อายุการใช้งานของ mechanical relay ใน heating system สมมติว่ามีการแจกแจงแบบปกติที่มีความแปรปรวน 6.4 วัน^2 สุ่มสิ่งของมาตรวจ 5 ชิ้น โดยผลดังนี้ 104.1, 86.2, 94.1, 112.7 และ 98.8 วัน ตามลำดับ จงหา 95% Lower confidence limit ของ E(T)
9. น้ำหนักของแท่งเหล็กไม่ทราบค่าเฉลี่ย มีความแปรปรวน 4 กรัม ถ้าสมมติว่าน้ำหนักมีการ

แจกแจงแบบปกติ ข้อมูลก่อนการทดลองชี้ให้เห็นว่าค่าเฉลี่ยควรจะมีค่าใกล้ 100 กรัม สมมติว่าถ้าค่าเฉลี่ยของมันมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 100 กรัม และความแปรปรวนเป็น 1 กรัม จงประมาณค่าเฉลี่ยโดยใช้วิธีของเบย์ ถ้าสุ่มแท่งเหล็กมา 10 แท่ง และได้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเท่ากับ 99.2 กรัม

10. ให้ T เป็นระยะเวลาที่มีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์เป็น λ และสมมติว่า λ มีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์ η จงประมาณค่า λ โดยใช้วิธีของเบย์

11. ถ้า pdf ของค่าสังเกตของตัวอย่างที่ไม่ทราบค่าของค่าเฉลี่ย μ คือ $N(\mu, \sigma^2)$ และถ้า prior distribution ของพารามิเตอร์ μ มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (a, b) จงแสดงว่า Bayes estimate ของ μ คือ Sample mean นั่นเอง

12. ผลของการทดสอบ X_i ของสัญญาณเรดาห์ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มปกติ ภายใต้ $H_0 : X_i$ มีค่าเฉลี่ย 5 และความแปรปรวน 9 เมื่อ $H_1 : X_i$ มีค่าเฉลี่ย 7 และความแปรปรวน 9 จงหาขนาดตัวอย่างที่ทำให้ $P_I \leqslant 0.05$ และ $P_{II} \leqslant 0.02$

13. โรงงานผลิตชิ้นส่วนของ electronic 2 โรงงาน พบว่าอายุการใช้งานของชิ้นส่วนมีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์เป็น 0.02 hour^{-1} จากโรงงานที่หนึ่ง และเป็น 0.015 hour^{-1} จากโรงงานที่ 2 จงหาแบบทดสอบที่ minimize P_{II} สำหรับระดับนัยสำคัญ 0.05 และจงหา power function ถ้า null hypothesis tests มีพารามิเตอร์ $\alpha = 0.02\ \text{hour}^{-1}$ และถ้า sample mean ของอายุการใช้งานเป็น 57.2 hours จงหา power of the test

14. แร่ชนิด A มี density เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 8.40 g/cm^3 และ standard deviation 1.50 g/cm^3 สุ่มตัวอย่างแร่มา 10 ตัวอย่าง พบว่า overage density มีค่าเท่ากับ 9.05 g/cm^3 ถ้า $\alpha = .05$ ตัวอย่างที่สุ่มมาจะเป็นแร่ชนิด A หรือไม่

15. ความน่าจะเป็นที่สิ่งของจะเป็น defective เป็น θ การทดลองคือ จะตัดสินใจว่า $\theta = 0.40$ หรือ $\theta < 0.40$ หรือไม่ สุ่มตัวอย่างสิ่งของมาทดสอบจนกระทั่งไม่ defective ชิ้นแรกแล้วจดจำนวนสิ่งของที่นำมาทดสอบ การทดลองทำซ้ำกัน 2 ครั้ง คือ 3 กับ 5 ตามลำดับ ถ้า $\alpha = .10$ เราจะยอมรับสมมติฐานที่ว่า $\theta = 0.40$ หรือไม่

16. กำหนดตารางข้อมูลต่อไปนี้ให้

ค่าของ X	0	1	2	3	4	> 5
ความถี่	11	30	25	20	10	4

ถ้า $\alpha = 0.01$ จะยอมรับสมมติฐานที่ว่า X มีการแจกแจงแบบ Poisson หรือไม่