บทที่ 4
ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม
(Function of Random Variable)

ในบทนี้เราสนใจที่จะหา pdf ของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่มตัวเดียวและตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว โดยจะเน้นมากในกรณีที่เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งจะขอเริ่มต้นที่การหาฟังก์ชันการแจกแจงของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่มก่อนดังนี้

4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม
(The Probability Distribution of a Function of a Random Variable)

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น $f_X(x)$ และฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็น $F_X(x)$

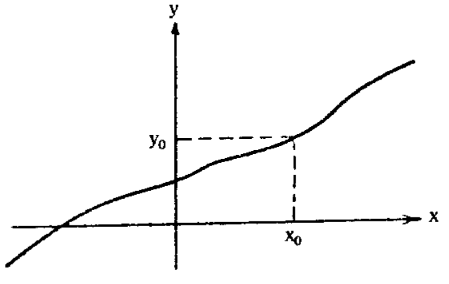
ถ้าให้ $Y = G(X)$ เมื่อ $G(\cdot)$ เป็น Continuous single – valued function

ต้องการจะหา pdf ของ Y คือ $f_Y(y)$ เมื่อเราทราบ pdf ของ X คือ $f_X(x)$ ซึ่งวิธีการที่จะหา $f_Y(y)$ เมื่อทราบ $f_X(x)$ มีขั้นตอนดังนี้

1. อธิบายเหตุการณ์ $\{Y \leqslant y\}$ ในเทอมของเหตุการณ์ใน R_X
2. หาค่า $F_Y(y)$
3. หา derivative ของ $F_Y(y)$ จะได้ $f_Y(y)$ ตามที่ต้องการ

ถ้าให้ $y = G(x)$ เป็นฟังก์ชันของ X ที่เราต้องการจะหาฟังก์ชันความน่าจะเป็น และให้ $x = G^{-1}(y)$

เมื่อ $y = G(x)$ เป็น monotonically increasing function ซึ่งเป็นเซตของค่าที่เป็นไปได้ของ Y เราสามารถจะหา inverse $x = G^{-1}(y)$ ได้แน่นอน ดังรูป



จาก $F_Y(y) = P[Y \leqslant y]$

$$= P[X \leqslant G^{-1}(y)]$$

$$= F[G^{-1}(y)]$$

differentiate w.r.t.y จะได้

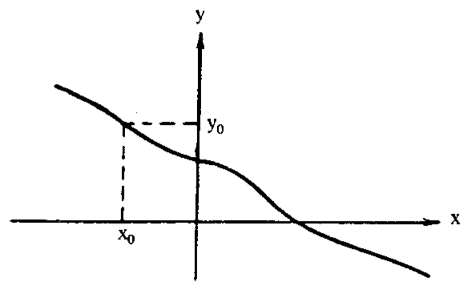
$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y)$$

$$= \frac{d}{dy}[F_X\{G^{-1}(y)\}] \qquad \text{(ใช้ Chain rule)}$$

$$\therefore\ f_Y(y) = f_X[G^{-1}(y)]\frac{d}{dy}G^{-1}(y),\ \ x = G^{-1}(y)$$

$$\therefore\ f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy} \qquad \text{..........(1)}$$

ถ้า $y = G(x)$ เป็น monotonically decreasing function ดังรูป



เหตุการณ์ $\{Y \leqslant y\}$ ใน R_Y คือ $\{X \geqslant G^{-1}(y)\}$

$$\therefore\ F_Y(y) = 1 - F_X[G^{-1}(y)]$$

ซึ่งทำวิธีเดียวกันจะได้

$$f_Y(y) = -f_X(x)\frac{dx}{dy} \qquad \text{..........(2)}$$

ถ้ารวมสมการ (1) และ (2) จะได้

$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$, $y = G(x)$ เป็น Continuous monotonic function (คือรวม

ทั้ง increasing และ decreasing)

$\left|\frac{dx}{dy}\right|$ เรียกว่า Jacobian ของการแปลง $y = G(x)$

ตัวอย่างที่ 4.1 ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf เป็นดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geqslant 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

จงหา pdf ของ $Y = e^{-x}$

วิธีทำ หา $\frac{dy}{dx}$ จาก $y = e^{-x}$ (คือหา $G^{-1}(y)$ โดย diff y เทียบกับ x)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{-x}$$

$$= -e^{-x}$$

diff เทียบกับ y จะได้

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(-e^{-x})$$

$$= \frac{-1}{e^{-x}}$$

$$= -e^{x}$$

จาก $\qquad f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{x^2}|-e^x|$$

ถ้าให้ $x = -\ln y$

จะได้ $\qquad f_Y(y) = \frac{1}{(\ln y)^2}\cdot\frac{1}{y}$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y(\ln y)^2}, & 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{e} \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

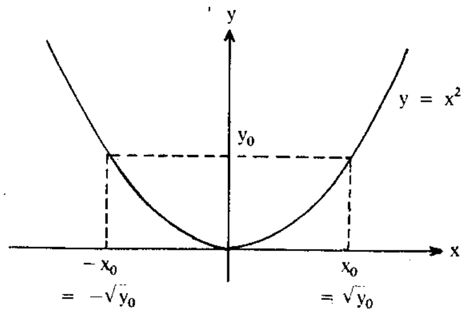
ตอบ

จากสูตร $f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$ นี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มาก เมื่อฟังก์ชันเป็น

monotonic ใน R_X และยังเป็นสูตรเฉพาะสำหรับการแปลงตัวแปรเชิงสุ่มด้วย

ตัวอย่างต่อไปจะพิจารณาการแปลง $y = x^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (one – to – one mapping) เมื่อค่าของ x 2 ค่า ทอดภาพ (mapped) ไปหาค่า y ค่าเดียวกัน ซึ่งวิธีการหา $f_Y(y)$ จาก $f_X(x)$ เรายังคงใช้ 3 ขั้นตอนในการหา $f_Y(y)$ เหมือนเดิม ดังนี้

1. เหตุการณ์ $A = \{Y \leqslant y\}$ ใน R_Y เหมือนกับเหตุการณ์ $B = \{-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}\}$ ใน R_X ดังรูป



2. หา $F_Y(y)$ จะได้

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leqslant y] \\ &= P[-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}] \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

3. หา $f_Y(y)$ โดยการ differentiate $F_Y(y)$ จะได้

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dy}\left[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right] \\ &= f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \therefore\ f_Y(y) &= \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf เป็นดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา pdf ของ $Y = X^2$

วิธีทำ จาก $$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$\therefore\ f_Y(y) = \frac{\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

$$\therefore\ f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{-\sqrt{y}}, & 0 \leqslant y < \infty \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

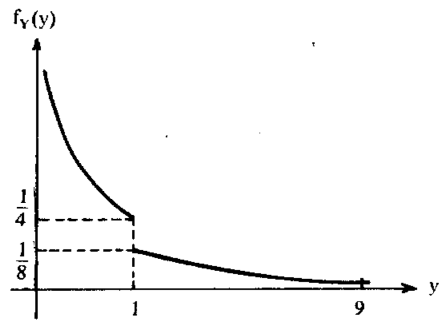
ตอบ

ตัวอย่างที่ 4.3 ถ้าความเร็วของชิ้นส่วนของหลอดวิทยุเป็น v ซึ่งมีการแจกแจงเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น σ^2 จงหา pdf ของพลังงานเกี่ยวกับการเคลื่อนไหว $K = \frac{1}{2}mv^2$ เมื่อ m เป็นมวลสารและเป็นค่าคงที่

วิธีทำ pdf ของ V ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติคือ

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < v < \infty$$

เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



ถ้าให้ตัวแปรเชิงสุ่มใหม่เป็น $U = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot v$ เป็น linear transformation ของการแจกแจงแบบปกติที่มี pdf เป็นดังนี้

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi m} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{m\sigma^2}\right), \quad -\infty < u < \infty$$

เมื่อ $K = U^2$ เราจะได้

$$f_K(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi m}\cdot\sigma} e^{-\frac{k}{m\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi m}\cdot\sigma} e^{-\frac{k}{m\sigma^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi m k}\cdot\sigma} e^{-\frac{k}{m\sigma^2}}, \quad 0 \leqslant k < \infty$$

ซึ่ง $f_K(k)$ นี้เป็นการแจกแจงเป็นไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ 1

4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (The Joint Probability Distribution of a Function of a Bivariate Random Variable)

จากการแปลงตัวแปรเชิงสุ่มตัวเดียว เมื่อ $y = G(x)$ เป็น monotonic increasing function เราจะได้

$$f_X(x)dx = f_Y(y)dy \quad \text{เมื่อ } \frac{dx}{dy} > 0$$

∴ เครื่องหมาย absolute value จึงหายไปและสมมติให้

$$y_0 = G(x_0) \quad \text{ดังนั้น}$$

$$f_X(x_0)dx = f_Y(y_0)dy$$

พิจารณาการแปลงตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (X, Y) ไปยังตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติอื่น ๆ (U, V) โดยให้

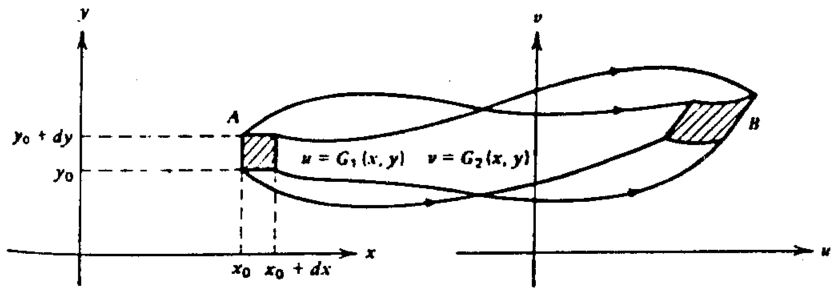
$$U = G_1(X, Y) \qquad \text{และ } V = G_2(X, Y)$$

เราจะได้ joint pdf ของ (X, Y) เป็น $f_{XY}(x, y)$ ซึ่งเราต้องการจะหา joint pdf ของ (U, V) คือ $f_{UV}(u, v)$ โดยเราสมมติว่าการแปลงนั้นเป็นแบบ one – to – one ซึ่งจะได้ inverse relationship ดังนี้

$$X = H_1(U, V)$$

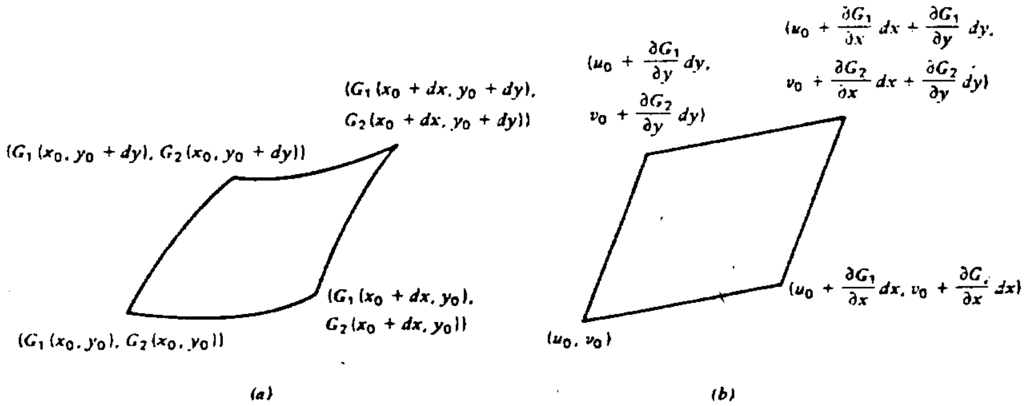
$$Y = H_2(U, V)$$

นอกจากนี้เรายังต้องสมมติต่อไปอีกว่า เราจะต้องหา partial derivative ได้ และเป็น Continuous จากรูป



เราจะหา $f_{UV}(u, v)$ ในเทอมของ $f_{XY}(x, y)$ ได้ จากรูปพิจารณาสี่เหลี่ยมผืนผ้า A ใน (x, y) plane ของพื้นที่ A และสมมติว่า ทอดภาพไปยังพื้นที่ B ใน (u, v) plane โดยใช้การแปลงดังนี้

$$f_X(x_0)dx = f_Y(y_0)dy$$



พื้นที่ A และ B เป็นเซตที่เหมือนกัน ดังนั้นเราเขียนได้ว่า

$$P[(X, Y) \in A] = P[(U, V) \in B]$$

หรือ $$f_{XY}(x_0, y_0)dxdy = f_{UV}(u_0, v_0) \times \text{พื้นที่ของ B}$$

เมื่อ $u_0 = G_1(x_0, y_0)$ และ $v_0 = G_2(x_0, y_0)$

ปัญหาที่จะต้องทำก็คือการหาพื้นที่ B ดังรูป และสำหรับ small dx และ dy เราสามารถประมาณค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$G_1(x_0 + dx, y_0) \cong G_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} G_1(x_0, y_0)dx$$

$$G_1(x_0, y_0 + dy) \cong G_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} G_1(x_0, y_0)dy$$

และสำหรับฟังก์ชัน $G_2(x, y)$ ก็จะหาได้ในทำนองเดียวกัน

พื้นที่ที่ประมาณนั้นเราสมมติว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูป ซึ่งพื้นที่นั้นคือ

$$\left|\frac{\partial G_1(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot\frac{\partial G_2(x_0, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial G_2(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot\frac{\partial G_1(x_0, y_0)}{\partial y}\right| dxdy$$

เทอมที่อยู่ในเครื่องหมาย absolute value เรียกว่า Jacobian ของการแปลง และสามารถเขียนในเทอม determinant ได้ดังนี้

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

และถ้า $$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial H_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial H_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial H_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$|J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}$$

และจะได้

$$f_{XY}(x_0, y_0)dxdy = f_{UV}\left[G_1(x_0, y_0), G_2(x_0, y_0)\right]|J(u, v)|dxdy$$

หรือในทางกลับกัน

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}\left[H_1(u, v), H_2(u, v)\right]\frac{1}{|J(x, y)|}$$

หรือ $f_{UV}(u, v) = f_{XY}\left[H_1(u, v), H_2(u, v)\right]|J(u, v)|$

ดังนั้น ในการที่จะหา $f_{UV}(u, v)$ เราจะต้องหา $|J(x, y)|$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ u และ v แล้วนำไปคูณกับ $f_{XY}(x, y)$ โดยแทน x ด้วย $H_1(u, v)$ และแทน y ด้วย $H_2(u, v)$

ตัวอย่างที่ 4.4 สมมติว่าความคลาดเคลื่อนในการวัดค่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน และแต่ละตัวแปรมีการแจกแจงเป็น Uniform (0, 1) จงหา Joint pdf และ Marginal pdf ของผลบวก และผลต่างของความคลาดเคลื่อนทั้ง 2

ถ้าให้ $U = X+Y$ และ $V = X-Y$

$\therefore$ inverse function ของการแปลง คือ

$$X = \frac{1}{2}(U+V)$$

$$Y = \frac{1}{2}(U-V)$$

และ Jacobian ของการแปลงคือ

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

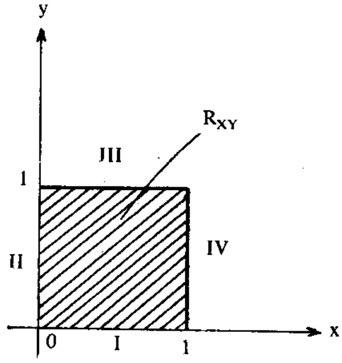
และเมื่อ $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, y \leqslant 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$

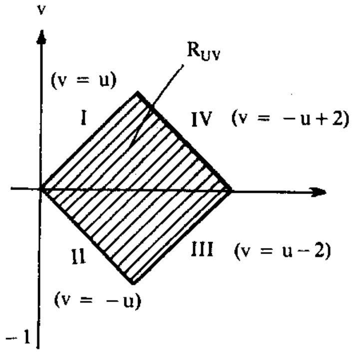
$\therefore$ Joint pdf ของ U และ V คือ

$$f_{UV}(u, v) = 1 \cdot \frac{1}{|-2|}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & (u, v) \in R_{uv} \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

และเขียนภาพแสดงได้ดังรูป





การหา Marginal ของ U ถ้าดูจากรูปจะเห็นได้ว่าค่าของ U มีค่าในช่วง (0, 2) และสำหรับ u ในช่วง (0, 1) จะเห็นว่าค่าของ v อยู่ในช่วง $(-u, u)$ และสำหรับ $u \in (1, 2)$ ค่าของ v คือ $(u-2, -u+2)$

$\therefore$ marigal ของ U คือ

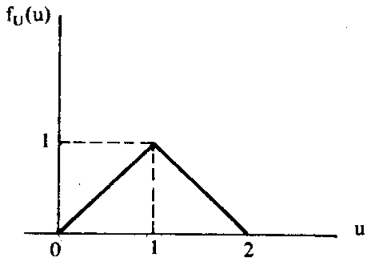
1. $f_U(u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2}[u-(-u)] = u$ เมื่อ $0 \leqslant u \leqslant 1$

2. $f_U(u) = \int_{u-2}^{-u+2} \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2}[-u+2-(u-2)] = 2-u$ เมื่อ $1 \leqslant u \leqslant 2$

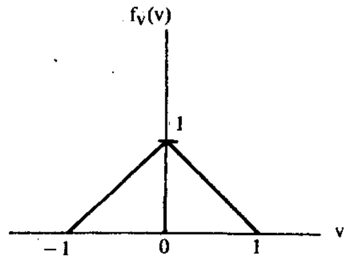
และ Marginal pdf ของ V ก็หาได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งจะได้

$$f_V(v) = \begin{cases} v+1 & \text{เมื่อ } -1 \leqslant v \leqslant 0 \\ -v+1 & \text{เมื่อ } 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

และ pdf แสดงได้ดังรูป



(a)



(b)

ตัวอย่างที่ 4.5 สมมติว่าเวลาการรอคอย X และ Y ของลูกค้า 2 คนที่เข้ามาในธนาคารแห่งหนึ่งในระยะเวลาต่างกันเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งมี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geqslant 0 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

1. จงหา joint pdf ของผลบวกของเวลารอคอยของลูกค้าทั้ง 2

$U = X+Y$ และเศษส่วนของเวลาที่ลูกค้าคนแรกใช้ในการคอย

$$V = \frac{X}{X+Y}$$

2. จงหา Marginal pdf ของ U และ V และจงแสดงว่ามันเป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ 1. เริ่มแรกเราต้องหา inverse transformation

จาก $U = X+Y$ และ $V = \dfrac{X}{X+Y}$

$\therefore X = UV$ และ $Y = U-X = U-UV$

และ Jacobian ของการแปลงคือ

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+y)}$$

$$= -\frac{1}{u} \qquad (u = x+y)$$

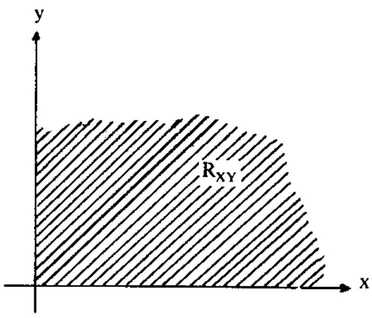
$$\therefore |J(x, y)| = \frac{1}{u}$$

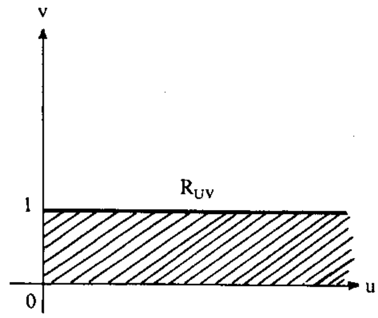
ดังนั้น joint pdf ของ U และ V คือ

$$f_{UV}(u, v) = e^{-u} \cdot u, \qquad (u, v) \in R_{UV}$$

$$\therefore \ f_{UV}(u, v) = \begin{cases} ue^{-u}, & (u, v) \in R_{UV} \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$ **ตอบ**

เขียนรูปแสดงได้ดังนี้





2. Marginal pdf ของ U และ V คือ

$$f_U(u) = \int_0^1 f_{UV}(u, v)dv$$

$$= \int_0^1 ue^{-u}dv = ue^{-u}, \quad 0 \leqslant u < \infty$$ **ตอบ**

$$f_V(v) = \int_0^\infty f_{UV}(u, v)du$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u}du$$

$$= 1, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1$$ **ตอบ**

$$f_U(u) \cdot f_V(v) = (ue^{-u}) \times 1 = ue^{-u}$$

$$= f_{UV}(u, v)$$

แสดงว่า U, V เป็นอิสระต่อกัน **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.6 สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

ถ้าให้ $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y \geq 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เมื่อ $U = \sqrt{XY}$ และ $V = X$ จงหา

1. joint pdf ของ U และ V
2. Marginal pdf ของ U

วิธีทำ 1. Jacobian ของการแปลงคือ

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} = -\frac{1}{2}\frac{V}{U}$$

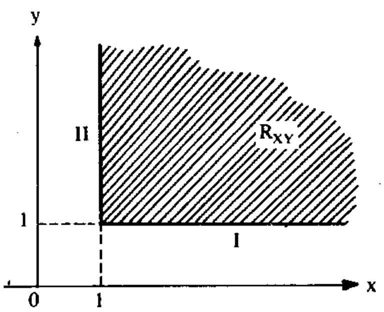
$\therefore$ joint pdf ของ U และ V คือ

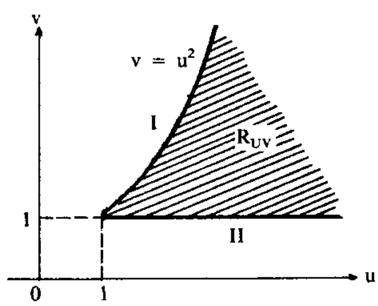
$$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{x^2y^2} \cdot \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right|}$$

$$= \frac{1}{u^4} \cdot \frac{2u}{v}$$

$$= \frac{2}{u^3v}, \quad (u, v) \in R_{UV}$$ **ตอบ**

เขียนรูปแสดงได้ดังนี้





2. Marginal pdf ของ U คือ

$$f_U(u) = \int_1^{u^2} \frac{2}{u^3 v} dv$$

$$= \frac{2}{u^3} \cdot \ln(v)\Big|_1^{u^2}$$

$$= \frac{2\ln(u^2)}{u^3}, \quad u \geqslant 1$$

$$= 0 \text{ อื่น ๆ}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหา pdf ของ $U = X+Y$ bivariate transformation $U = X+Y$, $V = X$ ซึ่งมี inverse เป็น $X = V$, $Y = U-V$ และ Jacobian คือ

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$\therefore$ joint pdf ของ (U, V) คือ

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(v, u-v) \cdot |J(u, v)|$$

$$= f_{XY}(v, u-v)|-1| = f_{XY}(v, u-v) \times 1 = f_{XY}(v, u-v)$$

Marginal ของ U คือ

$$f_U(u) = \int f_{XY}(v, u-v) dv$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$f_U(u) = \int f_X(v)\ f_Y(u-v) dv$$

integral ในรูปนี้เรียกว่า Convolution Integral และมักจะพบเสมอ ๆ ในทางด้านวิศวกรรม ฟิสิกส์ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหา pdf ของ $U = XY$

inverse transformation คือ $X = V, \; Y = \frac{U}{V}$

และมี Jacobian เป็นดังนี้

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}$$

$\therefore$ joint pdf ของ (U, V) คือ

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}\left(u, \frac{u}{v}\right) |J(u, v)|$$

$$= f_{XY}\left(u, \frac{u}{v}\right) \left| \frac{1}{v} \right|$$

และ Marginal pdf ของ U คือ

$$f_U(u) = \int f_{XY}\left(u, \frac{u}{v}\right) \left| \frac{1}{v} \right| dv$$

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหา pdf ของ $U = X + Y$

inverse transformation คือ $X = V, Y = \frac{V}{U}$

และ Jacobian คือ

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{v}{u^2}$$

$\therefore$ Marginal pdf ของ U คือ

$$f_U(u) = \int f_{XY}\left(v, \frac{v}{u}\right) \left| \frac{v}{u^2} \right| dv$$

ตัวอย่างที่ 4.10 จงแสดงว่า ถ้า X และ Y เป็น Standard normal random variable และ $U = \frac{X}{Y}$ จะเป็น Cauchy random variable

วิธีทำ เราจะแสดงโดยใช้ Marginal pdf ของ U ในตัวอย่างที่ 4.9 ดังนี้

$$\because \; f_U(u) = \int f_{XY}\left(v, \frac{v}{u}\right) \left| \frac{v}{u^2} \right| dv$$

เมื่อ X และ Y เป็นอิสระกัน จะได้

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{u}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} \left|\frac{v}{u^2}\right| dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{v}{u^2}\right| \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right] dv$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{v}{u^2 2\pi} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right] dv - \int_{-\infty}^{0} \frac{v}{u^2 2\pi} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right] dv$$

$$= -\frac{1}{2\pi(1+u^2)} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi(1+u^2)} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\right]\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$$\therefore\ f_U(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}, \quad -\infty < u < \infty$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของ Cauchy ที่มี $\beta = 0$ และ $\alpha = 1$

ตอบ

4.3 แบบอื่น ๆ ของการแปลง (Other Types of Transformation)

ยังมีแบบอื่น ๆ ของการแปลงซึ่งใช้ในทางสถิติอีกดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.11 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี joint pdf $f_{XY}(x, y)$ และ joint cdf $F_{XY}(x, y)$ จงหา cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $U = \text{Max}(x, y)$

จากรูปพิจารณาขอบเขตของเหตุการณ์ $\{\text{Max}(X, Y) \leqslant u\}$ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้คือ

$$P[U \leqslant u] = F_{XY}(u, v)$$
$$= F_U(u)$$

และถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว จะได้

$$F_U(u, v) = F_X(u) \cdot F_Y(v)$$

differentiate function นี้ เพื่อที่จะหา pdf ของ U

$$\therefore \ f_U(u) = \left[\frac{d}{du}F_X(u)\right]F_Y(u) + F_X(u)\left[\frac{d}{du}F_Y(u)\right]$$

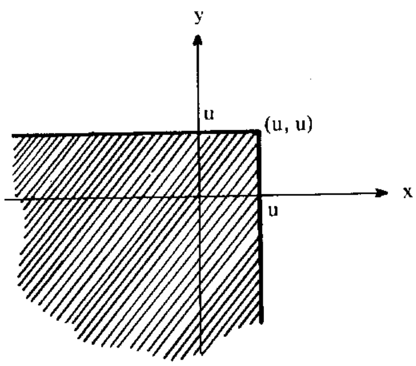
$$= f_X(u)F_Y(u) + F_X(u)f_Y(u)$$

$$= f_X(u)\int_{-\infty}^{u} f_Y(y)dy + f_Y(y)\int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx$$

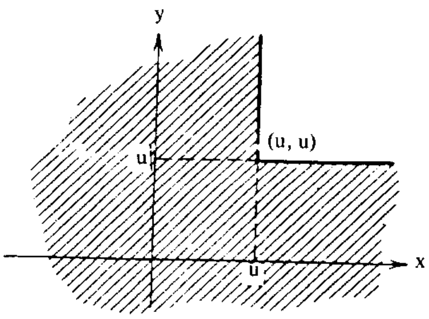
ซึ่งในกรณีที่ X และ Y มี pdf เหมือนกันคือ f(x) และมี cdf เป็น F(x) เราจะได้ว่า pdf ของ U = Max(X, Y) ซึ่งก็คือ

$$f_U(u) = 2f(u)F(u)$$

รูปแสดงขอบเขตของ U = Max(X, Y) คือ



ตัวอย่างที่ 4.12 จงหา cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $V = \text{Min}(X, Y)$ เมื่อ X และ Y มีลักษณะเหมือนกับตัวอย่างที่ 4.11 ดังรูป



region ใน (x, y) plane ตรงกันกับเหตุการณ์ $\{\text{Min}(X, Y) \leq v\}$ ดังรูป และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้คือ

$$P[V \leq v] = F_X(v) + F_Y(v) - F_{XY}(v, v)$$

$$= F_V(v)$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$F_V(v) = F_X(v) + F_Y(v) - F_X(v) \cdot F_Y(v)$$

differentiate เทียบกับ v จะได้

$$f_V(v) = f_X(v) + f_Y(v) - f_X(v)F_Y(v) - F_X(v)f_Y(v)$$

4.4 ผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่มและการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่าง

(Sums of Random Variables and Sampling Distributions)

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและแต่ละตัวแปรมี pdf เท่ากับ f(x) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จะเท่ากับ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$$

ในการศึกษาสถิติอนุมาน เมื่อสุ่มตัวอย่างได้เป็น $x_1, x_2, \ldots, x_n$ แล้ว ส่วนมากมักจะมีการหาค่าของตัวสถิติ เช่นหาค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง หรือหาความแปรปรวนของตัวอย่าง โดยค่าเฉลี่ยของตัวอย่างหาได้จาก

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

และความแปรปรวนของตัวอย่างหาได้จาก

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่าทั้ง $\overline{X}$ และ S^2 ต่างก็เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เกิดจากการแปลงตัวแปรเชิงสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$

สิ่งที่เราสนใจจะศึกษาก็คือเราต้องการหาฟังก์ชันที่แสดงการแจกแจงของ $\overline{X}$ และ S^2 เมื่อเราทราบฟังก์ชัน $f(x_i)$

ถ้าเราให้ $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ แล้ว

$$E(Y) = E(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n)$$

$$= a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \ldots + a_nE(X_n)$$

และความแปรปรวนของ Y คือ

$$V(Y) = E\left[\left\{Y - E(Y)\right\}^2\right]$$

$$= \left[\left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_iX_i - a_iE(X_i))\right\}^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[\{X_i - E(X_i)\}\{X_j - E(X_j)\}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \, Cov(X_i, X_j)$$

ถ้า x_i และ x_j เป็น pairwise uncorrelated คือ $Cov(x_i, x_j) = 0, \; i \neq j$ แล้ว ดังนั้น $Cov(X_i, X_i) = V(X_i)$

$$\therefore \; V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$$

การหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มดังกล่าวอาจจะหาได้อีกวิธีหนึ่ง คือ หาโดยใช้ Moment generating function ดังนี้

ถ้าให้ X_i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงดังนี้

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าการทดลองครั้งที่ } i \text{ สำเร็จ} \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ถ้าทำการทดลองนี้ n ครั้ง แต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน และ $P(X_i = 1) = \theta$ สำหรับแต่ละการทดลองแล้ว จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

จะเห็นได้ว่าตัวแปรเชิงสุ่ม Y คือจำนวนผลสำเร็จในการทดลองแบบเบอร์นุยลี n ครั้ง ซึ่งก็คือตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n และ θ

$\therefore$ ตัวแปรเชิงสุ่ม X_i จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \times (1-\theta) + 1 \times \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

และเมื่อ

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= 0 \times (1-\theta) + 1^2 \times \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

$\therefore$ ความแปรปรวนคือ

$$\begin{aligned} V(X_i) &= \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta) \\ &= \theta\eta \quad \text{ถ้า } \eta = 1-\theta \end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= n \times \theta = n\theta$$

และ $$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$= n \times \theta\eta$$

$$= n\theta\eta \quad \text{เมื่อ } \eta = 1-\theta$$

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นเซตของตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และ pdf ของ X_i คือ $f(x_i)$ และ moment generating function คือ $m_i(t)$ ดังนั้น mgf ของผลบวกคือ $Y = X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ

$$m_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$= E\left[e^{t(X_1, X_2, \ldots, X_n)}\right]$$

$$= E(e^{tX_1}) \cdot E(e^{tX_2}) \ldots E(e^{tXn})$$

$$= m_1(t) \cdot m_2(t) \ldots m_n(t)$$

ซึ่งถ้า $m_i(t)$ เหมือนกัน จะได้

$$m_Y(t) = m_1(t)^n$$

4.4.1 ตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินาม (Binomial Random Variables)

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินามที่เป็นอิสระต่อกัน
เมื่อ X_i มีพารามิเตอร์เป็น n_i, θ_i ดังนั้น mgf ของ X_i คือ

$$m_i(t) = (\theta_i e^t + \eta_i)^{n_i} \quad \text{เมื่อ } \eta_i = 1-\theta_i$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

$\therefore$ mgf ของ Y คือ

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} (\theta_i e^t + \eta_i)^{n_i}$$

ถ้า $\theta_i = \theta$, $i = 1,2,\ldots,n$ แล้วจะได้

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} (\theta_i e^t + \eta_i)^{n_i}$$

$$= (\theta e^t + \eta)^m$$

เมื่อ $m = n_1 + n_2 \ldots + n_n$

ดังนั้น $m_Y(t)$ ก็จะเป็น mgf ของตัวแปรเชิงสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ m และ θ

4.4.2 ตัวแปรเชิงสุ่มปัวซอง (Poisson Random Variables)

จาก mgf ของตัวแปรเชิงสุ่ม Poisson X_i ที่มีพารามิเตอร์ λ คือ

$$m_i(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}$$

ดังนั้น mgf ของ $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ เมื่อ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระกัน คือ

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^t - 1)}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

เมื่อ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

ดังนั้น $m_Y(t)$ ก็จะเป็น mgf ของตัวแปรเชิงสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ ซึ่ง $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$

4.4.3 ตัวแปรเชิงสุ่มแกมม่า (Gamma Random Variables)

ก่อนอื่นเราต้องแสดงให้เห็นถึงความสำคัญและประโยชน์ของความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบ exponential และการแจกแจงแบบแกมม่า ดังนี้

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์ λ ซึ่งมี mgf ของแต่ละ X_i เป็นดังนี้

$$m_i(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

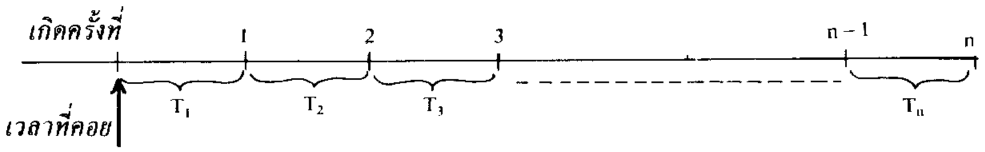
$\therefore$ ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ

$$m_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

ซึ่งคือ mgf ของฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มแกมมาที่มีพารามิเตอร์ λ และ n โดย pdf ที่สอดคล้องกับ mgf นี้คือ

$$f_Y(y) \;=\; \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y}, \quad y > 0$$

ในเรื่องของเวลาที่คอย (Waiting Time) จนกว่าจะเกิดอุบัติการใด ๆ มักจะมีการแจกแจงแบบ exponential ถ้าหากว่าเราจะคอยจนกว่าอุบัติการนั้น ๆ จะเกิดขึ้น n ครั้งต่อเนื่องกัน โดยที่การเกิดของอุบัติการแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น เวลาที่คอยทั้งสิ้นจะเท่ากับผลบวกของเวลาคอยในการเกิดแต่ละครั้งดังรูป



$\therefore$ เวลาคอยทั้งสิ้น $= T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n$

ดังนั้น เวลาคอยทั้งสิ้นจึงมีการแจกแจงแบบแกมมา และเรามักจะใช้การแจกแจงแบบแกมมากับสถานการณ์ที่มีการคอย และในบางครั้งเราเรียกการแจกแจงแบบแกมมาว่าการแจกแจงของเวลาคอย (Distribution of Waiting Time)

4.4.4 ตัวแปรเชิงสุ่มปกติ (Normal Random Variables)

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ และเป็นอิสระต่อกัน คือ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ และ $Y = X_1, X_2, \ldots, X_n$

$\because$ mgf ของ X_i คือ $m_i(t)$ เท่ากับ

$$m_i(t) \;=\; \exp\left(\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t\right)$$

$\therefore$ mgf ของ $Y = X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ

$$m_Y(t) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t\right)$$

$$= \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

เมื่อ $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ และ $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$

4.4.5 ตัวแปรเชิงสุ่มไคสแควร์ (Chi – Square Random Variables)

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน ดังนั้น pdf ของ $Y = X^2$ คือ

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0$$

ซึ่ง Y คือตัวแปรเชิงสุ่มแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $\gamma = \frac{1}{2}$ และ $\alpha = \frac{1}{2}$ และ Y ยังเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม Chi – square ที่มีพารามิเตอร์ n = 1 และ $\sigma^2 = 1$ ด้วย ดังนั้น mgf ของฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นนี้คือ

$$m_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}}$$

ถ้าให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นเซตของตัวแปรเชิงสุ่มปกติที่เป็นอิสระกัน และมีค่าเฉลี่ยเท่ากับความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 และให้

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

และ mgf ของ X_i^2 คือ

$$m_i(t) = \frac{1}{(1-2t\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\therefore$ mgf ของ Y คือ

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1-2t\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(1-2t\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}$$

ซึ่งถ้าเปรียบเทียบดูกับ mgf ของตัวแปรเชิงสุ่มแกมม่าเราจะสรุปได้ว่า pdf ของ Y คือ

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{y^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

เมื่อ $\sigma = 1$ เราจะได้ central chi – square density ที่มีองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ n ดังนั้น ผลบวกของกำลังสองของตัวแปรเชิงสุ่มปกติมาตรฐาน n ตัวที่เป็นอิสระกัน คือตัวแปรเชิงสุ่ม chi – square ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n

สมมติให้ $U_1, U_2, \ldots, U_m$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน m ตัว U_i มีการแจกแจง Chi – square ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n_i

จาก $$m_Y(t) = \frac{1}{(1-2t\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}$$

จะได้ mgf ของ $Z = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ คือ

$$\begin{aligned}
m_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\
&= E\left[e^{t(U_1+U_2+\ldots+U_m)}\right] \\
&= E(e^{tU_1}) \cdot E(e^{tU_2}) \ldots E(e^{tU_m}) \\
&= \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n_i}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

เมื่อ $n = n_1 + n_2 + \ldots n_m$

ซึ่งค่าที่ได้คือ mgf ของ Chi – square density ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n

4.5 กฎแห่งจำนวนมากและทฤษฎีว่าด้วยขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง

(Law of Large Number และ Central Limit Theorem)

ก่อนที่จะกล่าวถึง Law of large number และ Central limit theorem จะขอพิสูจน์ inequality ที่มีประโยชน์ในทฤษฎีความน่าจะเป็นก่อน นั่นคือ inequality ที่เรียกว่า Chebyshev Inequality ดังนี้

Chebyshev Inequality

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวนเป็น σ^2 แล้ว สำหรับเลขจำนวนบวก k ใด ๆ

$$P\left[|X-\mu| \geqslant k\sigma\right] \leqslant \frac{1}{k^2}$$

พิสูจน์ จาก

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

$$\geqslant \int_{|x-\mu| \geqslant k\sigma} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

แทน $(x-\mu)^2$ ด้วย $k^2\sigma^2$ ซึ่งเป็นค่าที่เล็กที่สุด

$$\therefore \sigma^2 \geqslant \int_{|x-\mu| \geqslant k\sigma} k^2\sigma^2 f_X(x)dx$$

$$= k^2\sigma^2 \int_{|x-\mu| \geqslant k\sigma} f_X(x)dx$$

$$= k^2\sigma^2 P\left[|X-\mu| \geqslant k\sigma\right]$$

$$P\left[|X-\mu| \geqslant k\sigma\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}$$

$$\therefore P\left[|X-\mu| \geqslant k\sigma\right] \leqslant \frac{1}{k^2}$$ QED

ตัวอย่างที่ 4.13 จำนวนฝนตกในท้องที่แห่งหนึ่งเป็น X มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 40 และความแปรปรวน 4 ตารางเซนติเมตร จงหา Simple Upper bound สำหรับความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในปีหนึ่ง ๆ จะมากกว่า 5 เซนติเมตรจากค่าเฉลี่ย

จาก Chebyshev inequality

$$P\left[|X-\mu| \geqslant k\sigma\right] = P\left[|X-40| \geqslant 2k\right] \leqslant \frac{1}{k^2}$$

เลือก $k = \frac{5}{2}$ จะได้

$$P\left[|X-40| \geqslant \frac{5}{2} \times 2\right] \leqslant \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$P\left[|X-40| \geqslant 5\right] \leqslant \frac{4}{25} = 0.16$$

จาก Chebyshev inequality จะได้

1. $P\left[|X-\mu| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

2. $P\left[|X-\mu| < k\sigma\right] \geqslant 1-\frac{1}{k^2}$

3. $P\left[|X-\mu| < \varepsilon\right] \geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

เมื่อ $P\left[X-\mu \geqslant \varepsilon\right] \leqslant P\left[|X-\mu| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ เราสามารถใช้ equation นี้เป็น one – sided Chebyshev inequality

ตัวอย่างที่ 4.14 ถ้า X เป็นจำนวนรถที่วิ่งผ่านจุด ๆ หนึ่งบนถนนสายหนึ่งในเวลาที่กำหนดไว้ และตัวแบบเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบ Poisson ที่มีพารามิเตอร์เท่ากับ 4 จงหา Simple upper bound สำหรับความน่าจะเป็นที่มีรถมากกว่า 10 คัน วิ่งผ่านจุดนี้ในระยะเวลาที่กำหนดไว้

ใช้ one – sided Chebyshev inequality จะได้

$$P\left[X-4 \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}$$

ถ้าเลือก $\varepsilon = 6$

$$\therefore \; P(X \geqslant 10) \leqslant \frac{4}{36} = 0.111$$

ตอบ

กฎแห่งจำนวนมาก (Law of Large Numbers)

กฎแห่งจำนวนมากมีอยู่ 2 อย่างคือ กฎแห่งจำนวนมากอย่างอ่อน (Weak Law of Large Numbers) และกฎแห่งจำนวนมากอย่างแรง (Strong Law of Large Numbers) สำหรับในวิชา ST 210 นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกฎแห่งจำนวนมากอย่างอ่อน เท่านั้น

กฎแห่งจำนวนมากอย่างอ่อน (Weak Law of Large Numbers)

กล่าวว่า ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน และมี $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$ แล้ว

$$P\left[|S_n-\mu| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

เมื่อ $\overline{X} = S_n$ และ $E(S_n) = \mu$, $V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

การพิสูจน์ เราจะใช้ Chebyshev's inequality กับตัวแปรเชิงสุ่ม S_n ก็จะได้ผลออกมาตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 4.15 จงหาขนาดตัวอย่างของตัวแปรเชิงสุ่มที่สุ่มมา ถ้าเราต้องการได้ความน่าจะเป็นอย่างน้อยที่สุด 0.95 ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างไม่ต่างจากค่า μ เป็น $\frac{\sigma}{10}$

จาก $$P\left[|S_n-\mu| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\therefore\ P\left[|S_n-\mu| \geqslant \frac{\sigma}{10}\right] = 1-P\left[|S_n-\mu| < \frac{\sigma}{10}\right] \leqslant \frac{\sigma^2}{n\left(\frac{\sigma}{10}\right)^2}$$

หรือ $$P\left[|S_n-\mu| < \frac{\sigma}{10}\right] \geqslant 1-\frac{100}{n}$$

เมื่อเราต้องการความน่าจะเป็นที่มีค่าอย่างน้อยที่สุด .95

$\therefore$ ค่า n จะต้องมีค่าอย่างน้อย $n \geqslant \frac{100}{0.05} = 2{,}000$ **ตอบ**

ทฤษฎีว่าด้วยขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง (The Central Limit Theorem)

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน ซึ่งมี cdf F(x) เหมือนกัน สมมติว่าค่าเฉลี่ย $E(x_i) = \mu$ และความแปรปรวน $V(X_i) = \sigma^2$ และทั้งคู่มีค่าจำกัด ดังนั้นสำหรับค่า x ใด ๆ

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right) \leqslant x\right] = \Phi(x)$$

เมื่อ $\Phi(x)$ เป็น cdf ของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐานที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 1

ซึ่งเราอาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นใด ๆ สามารถที่จะประมาณได้ด้วยฟังก์ชันแบบปกติเสมอ ภายใต้เงื่อนไขบางประการในขีดจำกัด

การนำทฤษฎีไปประยุกต์ใช้ที่สำคัญ ๆ เช่น ในการสุ่มตัวอย่างจากประชากรใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $(\overline{X})$ เมื่อ n มีขนาดโต เราประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวนเป็น $\frac{\sigma^2}{n}$ หรืออาจกล่าวได้ว่าเราประมาณการแจกแจงของ

$Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ว่าเป็น N(0, 1)

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. ถ้า X เป็น Standard Normal Random Variable จงหา pdf ของ $Y = \sqrt{|X|}$
2. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็น exponential pdf ที่มีพารามิเตอร์เป็น 1 จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = 1 - e^{-X}$, $x \geqslant 0$
3. จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = \frac{1}{X}$ ถ้า X มี pdf ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6\lambda}{(1+x)^4}, & 0 \leqslant x < \infty \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

4. สมมติว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2x^2}, & x > 0 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา pdf ของ $Y = \frac{1}{X}$

5. ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม Cauchy ที่มี pdf เป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = \frac{1}{X}$

6. ให้ X เป็น geometric random variable ที่มี pdf เป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}, \quad x = 1,2,3,\ldots$$

จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = X^2$

7. ให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปัวซองที่เป็นอิสระต่อกัน และมีพารามิเตอร์เป็น λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ จงหา joint pdf ของ $Y_1 = X_1 + X_2$ และ $Y_2 = X_2$
8. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี pdf เป็น

$$f(x) = \frac{x}{12}, \quad 1 < x < 5$$

$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = 2X - 3$

9. ให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมี joint pdf เป็น

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา joint pdf ของ $Y_1 = X_1^2$ และ $Y_2 = X_1X_2$

10. จงหา moment – generating function ของ binomial random variable X และใช้ mgf ที่หาได้ แสดงให้เห็นว่า $\mu = np$ และ $\sigma^2 = npq$

11. จงแสดงว่า moment generating function ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย $= \mu$ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 คือ

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

12. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี pdf เป็น

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = 2X - 1$

13. ให้ X เป็น binomial random variable ที่มี pdf เป็น

$$f(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{3-x}, \quad x = 0,1,2,3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของ $Y = X^2$

14. ให้ X_1 และ X_2 เป็น discrete random variable ที่มี joint pdf เป็น

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2}{18}, \quad x_1 = 1,2, \ x_2 = 1,2,3$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของ $Y = X_1X_2$

15. ให้ X มี pdf เป็น

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของ $Y = 8X^3$

16. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี pdf เป็น

$$f(x) = \frac{(1+x)}{2}, \quad -1 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของ $Y = X^2$

17. ให้ X มี pdf เป็น

$$f(x) = \frac{2(x+1)}{9}, \quad -1 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงหา pdf ของ $Y = X^2$

18. กำหนดให้ discrete uniform distribution เป็น

$$f(x) = \frac{1}{n}, \quad x = 1,2,3,\ldots,n$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงว่า moment generating function ของ X คือ

$$m_X(t) = \frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$$

19. ให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และแต่ละตัวแปรมี pdf เป็น

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$
$$= 0 \quad \text{อื่น ๆ}$$

จงแสดงว่าตัวแปรเชิงสุ่ม Y_1 และ Y_2 เป็นอิสระต่อกัน เมื่อ $Y_1 = X_1 + X_2$ และ $Y_2 = \frac{X_1}{(X_1 + X_2)}$