บทที่ 3
การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่สำคัญ ๆ
(Some Important Distribution)

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่สำคัญ ๆ โดยแบ่งออกเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง และในแต่ละการแจกแจงจะกล่าวถึงฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น รวมทั้งคุณสมบัติต่าง ๆ เช่น ค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน ซึ่งจะขอกล่าวถึงการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องก่อนดังนี้

3.1 การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแจกแจงที่สำคัญ ๆ บางตัวเท่านั้น ดังต่อไปนี้

3.1.1 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)

เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่ง่ายที่สุด ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ค่าของมันมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน และเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นลักษณะนี้ว่า การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม

นิยาม ถ้าตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าที่จะเป็นไปได้คือ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ และมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน แล้ว การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบยูนิฟอร์มคือ

$$f(x : k) = \frac{1}{k}, \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

เราใช้สัญลักษณ์ $f(x : k)$ แทน $p(x_i)$ เพื่อชี้ให้เห็นว่าการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มนั้นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ k

ทฤษฎี ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มแบบยูนิฟอร์มคือ

$$E(X) = \mu = \frac{\sum x_i}{k}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก

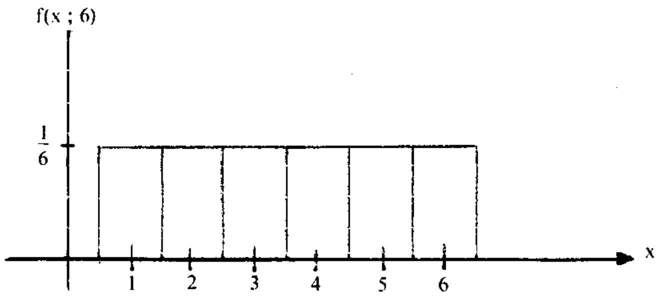
$$\therefore S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละหน้ามีค่าเท่ากันคือ $\frac{1}{6}$

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ลูกเต๋าจะออกหน้าต่าง ๆ ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม ดังนี้

$$f(x ; 6) = \frac{1}{6}; \quad x = 1,2,3,4,5,6$$

และเขียนรูปได้ดังนี้



ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.2 ในการเลือกหัวหน้าคนงานจากคนงานที่มีอยู่ 10 คน กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นคนงานคนที่ x ซึ่งได้รับการคัดเลือกให้เป็นหัวหน้า และคนงานแต่ละคนมีโอกาสที่จะได้รับการคัดเลือกเท่า ๆ กัน

$\therefore$ X มีการแจกแจงแบบ Uniform ดังนั้น

$$f(x ; 10) = \frac{1}{10}, \quad x = 1,2,\ldots,10$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จากตัวอย่างที่ 3.1 จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

$$\therefore \mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$ **ตอบ**

และ $$\sigma^2 = \frac{(1-3.5)^2+(2-3.5)^2+(3-3.5)^2+(4-3.5)^2+(5-3.5)^2+(6-3.5)^2}{6}$$

$$= \frac{35}{12}$$ **ตอบ**

3.1.2 การแจกแจงแบบเบอร์นุยลี (Bernoulli Distribution)

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยลี ถ้า X มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เพียงค่าใดค่าหนึ่งใน 2 ค่าคือ 0 (ถ้าผลทดลองไม่เกิดความสำเร็จ, F) กับ 1 (ถ้าผลทดลองเกิดความสำเร็จ, S) และ X มีการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = p \qquad \text{เมื่อ } x = 1$$
$$= 1-p \qquad \text{เมื่อ } x = 0$$

เมื่อ p และ $1-p = q$ คือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิด S และ F ตามลำดับ

ทฤษฎี ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยลีคือ

$$E(X) = \mu = p$$
$$V(X) = \sigma^2 = p(1-p) = pq$$

ตัวอย่างที่ 3.4 ตัวแทนจำหน่ายผงซักฟอกชนิดหนึ่งกล่าวว่ามีแม่บ้าน 80% ที่นิยมผงซักฟอกชนิดนี้ ถ้าสุ่มเลือกแม่บ้านมา 1 คน กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเป็น 1 ถ้าเขานิยมผงซักฟอกชนิดนี้ และมีค่าเป็น 0 ถ้าเขาไม่นิยมผงซักฟอกชนิดนี้

$\therefore$ X มีการแจกแจงแบบเบอร์นุยลีที่มีการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = 0.80 \qquad \text{ถ้า } x = 1$$
$$= 0.20 \qquad \text{ถ้า } x = 0$$ **ตอบ**

3.1.3 การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution)

ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวนครั้งของความสำเร็จ (S) จากการทำการทดลองแบบเบอร์นุยลีซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ภายใต้สภาวการณ์เดียวกัน และแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน X จะมีการแจกแจงแบบทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ (n, p) และมีการแจกแจงดังนี้

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

ทฤษฎี ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินาม $b(x; n,p)$ คือ

$$E(X) = \mu = np$$

$$V(X) = \sigma^2 = npq$$

ตัวอย่างที่ 3.5 ผู้จัดการบริษัทประกันภัยประกาศว่า 70% ของคนในอำเภอนี้ได้ทำประกันอัคคีภัยไว้ เพื่อยืนยันคำกล่าวนี้บริษัทได้ส่งตัวแทนไปสำรวจ และได้สุ่มตัวอย่างมา 8 ครอบครัว ให้ X เป็นจำนวนครอบครัวที่ทำประกันอัคคีภัย จงหาฟังก์ชันการแจกแจงและค่าเฉลี่ยของ X

วิธีทำ X มีการแจกแจงแบบทวินามที่มี $n = 8$, $p = 0.70$ และมีการแจกแจงดังนี้

$$b(x; 8, 0.7) = \binom{8}{x}(0.7)^x(0.3)^{8-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,8$$ **ตอบ**

ค่าเฉลี่ยของ X คือ μ

$$\begin{aligned} \mu &= np \\ &= 8 \times 0.7 \\ &= 5.6 \end{aligned}$$ **ตอบ**

การหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินาม เราใช้เปิดจากตารางการแจกแจงทวินามที่มีอยู่ในภาคผนวก ซึ่งในตารางนั้นจะให้ค่าความน่าจะเป็นแบบสะสม ซึ่งอยู่ในรูป

$$P[X \leqslant r] = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

สำหรับบางค่าของ n และ p และการหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X อยู่ในรูปอื่น จะหาได้จากสูตรดังนี้

$$P[X = x] = P[X \leqslant x] - P[X \leqslant x-1]$$

$$P[a \leqslant X \leqslant b] = P[X \leqslant b] - P[X \leqslant a]$$

$$P[X > x] = 1 - P[X \leqslant x]$$

3.1.4 การแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson Distribution)

ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X แทนจำนวนครั้งที่เกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่สนใจภายในช่วงหรือขอบเขตที่กำหนดให้ ถ้า λ เป็นจำนวนเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่เกิดขึ้น แล้ว X จะมีการแจกแจงแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ และ X จะมีการแจกแจงเป็นดังนี้

$$P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

เมื่อ λ คือค่าเฉลี่ยของ Success และ e = 2.71828...

ทฤษฎี ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซอง $P(x;\lambda)$ มีค่าเท่ากับพารามิเตอร์ λ ทั้ง 2 ค่า คือ

$$E(X) = \mu = \lambda$$

$$V(X) = \sigma^2 = \lambda$$

การหาความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวซองนั้นเรามักจะหาจากตาราง Poisson distribution ที่มีอยู่ในภาคผนวก ซึ่งในตารางจะให้ค่า

$$P(r:\lambda) = \sum_{x=0}^{r} P(x;\lambda)$$

ตัวอย่างที่ 3.6 ถ้าจำนวนเฉลี่ยของถังน้ำมันที่มาถึงเมืองท่าของเมือง ๆ หนึ่ง ในแต่ละวันเป็น 10 และเมืองท่านั้นมีความสามารถที่จะรับถังน้ำมันได้อย่างมากที่สุด 15 ถังใน 1 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่ในวันนั้นถังน้ำมันจะถูกส่งกลับ

ให้ X เป็นจำนวนถังน้ำมันที่มาถึงในแต่ละวัน

$$\therefore\ P|X > 15| = 1 - P|X \leq 15|$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{15} P(x;10)$$

$$= 1 - 0.9513$$

$$= 0.0487$$

ตอบ

3.2 การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง

เช่นเดียวกันจะขอกล่าวเฉพาะการแจกแจงที่สำคัญ ๆ ดังนี้

3.2.1 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)

ถ้า X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (a, b) ดังนั้น X จะมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b$$
$$= 0, \quad x \text{ มีค่าอื่น ๆ}$$

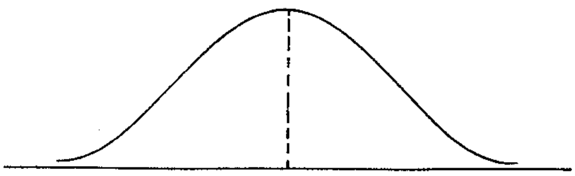
ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ X คือ

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.2.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

เป็นการแจกแจงที่สำคัญที่สุด และมีรูปการแจกแจงเป็นรูประฆังคว่ำ และมีลักษณะสมมาตร ดังรูป



ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวนเป็น σ^2 เราเขียนแทนด้วย

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

และ X จะมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$n(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; \quad -\infty < x < \infty$$

เมื่อ π = 3.14159... และ

e = 2.71828...

การหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าต่าง ๆ นั้นหาได้จากการเปิดตาราง Standard Normal (Z – table) ในภาคผนวก โดยเราจะต้องแปลงค่า X ให้เป็นค่าของ Z ก่อนจากสูตร $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ซึ่ง $Z \sim N(0, 1)$ แล้วจึงไปเปิดตาราง Z ได้ค่าความน่าจะเป็นที่ต้องการ ดังนี้

$$P[X < b] = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

$$= P\left[Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

และ $$P[a < X < b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

$$= P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right]$$

ตัวอย่างที่ 3.7 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มี $\mu = 50$ และ $\sigma = 10$ จงหาความน่าจะเป็นที่ X จะอยู่ระหว่าง 45 ถึง 62

ให้ค่า z ที่สัมพันธ์กับ $x_1 = 45$ และ $x_2 = 62$ คือ

$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5$$

$$z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$

$$\therefore \quad P[45 < X < 62] = P[-0.5 < Z < 1.2]$$

$$= P[Z < 1.2] - P[Z < -0.5]$$

$$= 0.8849 \quad 0.3085$$

$$= 0.5764$$

ตอบ

3.2.3 การแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution)

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะเรียกว่ามีการแจกแจงแบบ gamma ถ้า pdf ของ X อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\gamma x), \ \alpha, \gamma > 0, x > 0$$

และ $\Gamma(\alpha)$ เป็น gamma function โดย

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

ถ้า integrating by parts จะได้ (โดยให้ $u = x^{\alpha-1}$, $dv = e^{-x}dx$)

$$\Gamma(\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (\alpha-1)e^{-x}x^{\alpha-2}dx$$

$$= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ α เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันนี้เขียน $\Gamma(\alpha)$ ได้

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))\Gamma(1+x)$$

เมื่อ $\alpha = n+x$, n เป็น integer และ $0 \leqslant x < 1$

ดังนั้น เมื่อ α เป็น integer ใด ๆ จะได้

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

ซึ่งคล้ายกับ factorial function

ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ gamma จะมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนดังนี้

$$E(X) = \mu = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{\alpha}{\gamma^2}$$

3.2.4 การแจกแจงแบบเอ็กโพเนลเชียล (Exponential Distribution)

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะเรียกว่ามีการแจกแจงแบบ exponential ถ้า pdf ของ X อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}; \quad x \geqslant 0$$

ค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ X เป็นดังนี้

$$E(X) = \mu = \frac{1}{\alpha}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

3.2.5 การแจกแจงแบบ Cauchy (Cauchy Distribution)

ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะเรียกว่ามีการแจกแจงแบบ Cauchy ถ้า pdf ของ X อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{1}{\pi\alpha\left[1+\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)^2\right]}, \quad -\infty < x < \infty$$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนหาไม่ได้

3.2.6 การแจกแจงแบบ Student's t (Student's t Distribution)

การแจกแจงแบบ Student's t ที่มีองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom, df) เท่ากับ n มี pdf เป็นดังนี้

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty$$

ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ Stundent's t จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และมีความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{n}{n-2}$ เมื่อ $n > 2$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงแสดงว่าถ้า X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มแบบไม่ต่อเนื่องที่มี pdf $f(x;k)$ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \quad \text{และ} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

2. ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะหายจากโรคที่หาเลือดได้ยากเป็น 0.4 ถ้ามีคนเป็นโรคนี้ 15 คน จงหาความน่าจะเป็นที่
   ก. อย่างน้อยที่สุด 10 คน ที่หายป่วยจากโรคนี้
   ข. มี 3 ถึง 8 คน ที่หายป่วยจากโรคนี้
   ค. มี 5 คนเท่านั้นที่หายป่วยจากโรคนี้
3. จงแสดงว่า ถ้า X มีการแจกแจงแบบทวินาม ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ

$$E(X) = np$$
$$V(X) = npq$$

4. จงแสดงว่า ถ้า X มีการแจกแจงแบบปัวซอง ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

5. จงแสดงว่า ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ

$$E(X) = \mu$$
$$V(X) = \sigma^2$$

6. ถ้าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่อันหนึ่งเฉลี่ยแล้วเท่ากับ 3 ปี และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.5 ปี สมมติว่าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่มีการแจกแจงแบบปกติ จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่นั้นจะมีอายุการใช้งานน้อยกว่า 2 – 3 ปี
7. โรงงานผลิตหลอดไฟซึ่งอายุการใช้งานมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 800 ชั่วโมง และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 40 ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟนั้นใช้งานระหว่าง 778 ถึง 834 ชั่วโมง
8. กำหนดให้ X มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 18 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.5 จงหา

ก. $P[X < 15]$

ข. ค่า k ที่ทำให้ $P(X < k) = 0.2578$

ค. $P(17 < X < 21)$

ง. ค่า k ที่ทำให้ $P(X > k) = 0.1539$

9. ถ้า X มีการแจกแจงแบบปัวซองที่มี $\lambda = 2$ จงเขียน pdf ของ X และจงหา $P[1 \leqslant X]$

10. ถ้า X มีการแจกแจงแบบ b(x; n, p) จงแสดงว่า

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = P \text{ และ}$$

$$E\left[\left(\frac{X}{n} - P\right)^2\right] = \frac{P(1-P)}{n}$$

11. ถ้า X มีการแจกแจงแบบ Cauchy จงหา F(x)

12. ถ้า X มีการแจกแจงแบบ Gamma จงแสดงว่า

$$E(X) = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ และ } V(X) = \frac{\alpha}{\gamma^2}$$