บทที่ 2
ตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง และตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง
(Continuous and Discrete Random Variables)

ในบทนี้จะศึกษาถึงแนวความคิดเกี่ยวกับตัวแปรเชิงสุ่ม การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม การหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม การหาฟังก์ชันการแจกแจงแบบสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มตัวแปรเดียวกับ 2 ตัวแปร การหาค่าเฉลี่ย ค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม การหา Moment generating function สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และการถดถอยของค่าเฉลี่ย โดยจะกล่าวถึงตามลำดับดังต่อไปนี้

2.1 แนวความคิดเกี่ยวกับตัวแปรเชิงสุ่ม (Concept of Random Variable)

หากเราพิจารณากลุ่มผลทดลองของการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ จะเห็นว่าผลที่ได้อาจเป็นตัวเลข เช่น การวัดเวลาที่หลอดไฟฟ้าตั้งแต่เริ่มเปิดจนถึงหลอดเสียว่าเป็นเท่าใด การนับเวลาที่ใช้เดินทางจากบ้านมายังมหาวิทยาลัย การวัดจำนวนครั้งที่มีโทรศัพท์เข้ามายังสำนักงาน เป็นต้น การนับหรือการวัดเช่นนี้เราเรียกว่าการนับเชิงสุ่ม หรือการวัดเชิงสุ่ม ก่อนที่จะทำการนับหรือวัดแล้วเสร็จ ตัวเลขที่จะได้เป็นผลลัพธ์เรามักจะแทนด้วย X และเรียก X ว่าเป็น **ตัวแปรเชิงสุ่ม** (Random Variable) หรืออาจจะใช้สัญลักษณ์อื่น ๆ ก็ได้ แต่ต้องเป็นอักษรตัวใหญ่ เช่น Y, Z, P, Q เป็นต้น ส่วนค่าของตัวแปรเชิงสุ่มจะใช้อักษรตัวเล็กแทน เช่น x, y, z เป็นต้น

ในการศึกษาตัวแปรเชิงสุ่มนี้เราไม่เพียงแต่สนใจว่าตัวแปรเชิงสุ่มนั้นจะออกผลลัพธ์เป็นอะไร แต่เราสนใจที่จะหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่มจะมีค่าใดค่าหนึ่ง หรืออยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งที่เราต้องการ เช่นหา $P[X = x]$ หรือ $P[a < X < b]$ เป็นต้น

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real – Valued Function) ในตัวแบบน่าจะเป็น (S, P) โดยการกำหนดตัวเลขค่าจริงให้แก่แต่ละผลทดลอง (Sample point) ซึ่งเรียกว่าค่าของตัวแปรเชิงสุ่มของผลทดลองนั้น นั่นคือ ตัวแปรเชิงสุ่มเป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็นกลุ่มผลทดลองของการทดลองเชิงสุ่ม และมีพิสัย (Range) เป็นเซตของ

เลขจำนวนจริง

ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่มจะให้ค่าหนึ่งต่อแต่ละจุด หรือผลทดลอง เช่นถ้ากำหนดจุด w ของกลุ่มผลทดลอง S แล้ว X(w) จะเป็นเลขจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, \ldots$ นั่นคือค่าหรือพิสัยของ X เป็น $x_1, x_2, x_3, \ldots$ สำหรับแต่ละ i เราเขียน $X = x_i$ แทนเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยจุดที่แปลงไปเป็น x_i ด้วย X นั่นคือ

$$X = x_i = \{w \in S | X(w) = x_i\}$$

และเราเขียนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $X = x_i$ ด้วย $f(x_i)$ ซึ่งมีความหมายเท่ากับ $P[X = x_i]$

เนื่องจากตัวแปรเชิงสุ่มเป็นฟังก์ชันที่นิยามหรือกำหนดในกลุ่มผลทดลอง และโดยที่กลุ่มผลทดลองมี 2 ประเภท เราจึงแบ่งตัวแปรเชิงสุ่มออกเป็น 2 ประเภท ตามกลุ่มผลทดลองดังนี้

1. **ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง** (Discrete Random Variable) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ชุดของตัวเลขที่เป็นพิสัยของตัวแปรเชิงสุ่มมีจำนวนตัวเลข (ซึ่งอาจจะเป็นเลขตัวเต็มหรือไม่เป็นเลขตัวเต็ม) มากที่สุด เป็นจำนวนที่นับได้ ตัวแปรเชิงสุ่มประเภทนี้มักจะเกิดจากการนับเชิงสุ่ม (Random Counting) ตัวอย่างเช่น จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นบนถนนสายวิภาวดี – รังสิต ในรอบ 1 ปีที่ผ่านมา จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ที่มีค่าหนึ่งค่าใดในเซตของ 0,1,2,3,... ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ของตัวแปรเชิงสุ่มจะเป็นเลขตัวเต็ม (Real Integer) แต่บางครั้งผลลัพธ์อาจจะไม่เป็นตัวเลขตัวเต็มก็ได้ เช่นให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เกิดจากการวัดน้ำหนักของนักเรียน 5 คน เป็นดังนี้ 55.3, 57.2, 48.7, 60.8 63.5 X ก็ยังคงเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

2. **ตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง** (Continuous Random Variable) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ชุดของตัวเลขที่เป็นพิสัยของตัวแปรเชิงสุ่มมีจำนวนตัวเลขมากเป็นอนันต์จนนับไม่ได้ (Uncountably infinite) ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ X เป็นคะแนนสอบวิชา ST 210 ของนักศึกษาภาควิชาสถิติในภาคเรียนที่ 1 ดังนั้น X จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีพิสัยของ X เป็นดังนี้ $\{x | 0 < x < 80\}$

2.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบสะสม (Cumulative Distribution Function)

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X ใด ๆ เรานิยามฟังก์ชัน $F_X(x)$ ดังนี้

$$F_X(x) = P(X \leqslant x)$$

$$= P\{(s \in S \mid X(s) \leqslant x)\}$$

เมื่อ x เป็นเลขจำนวนจริง โดยที่ $F_X(x)$ จะต้องมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ ทุก ๆ ค่าของ $x \in (-\infty, \infty)$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

3. F(x) เป็น nondecreasing function ถ้าค่าของ x มี 2 ค่า คือ x_1 และ x_2 โดยที่ $x_1 \leqslant x_2$ แล้ว $F(x_1) \leqslant F(x_2)$

4. F(x) ต่อเนื่องทางขวามือ

ตัวอย่างที่ 2.1 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี cdf เป็นดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่ามากกว่า 10 ในรูปของ F(x)

วิธีทำ จาก $F(x) = P(X \leqslant x)$

$$.F(10) = P(X \leqslant 10)$$

และ $\because P(X \leqslant 10) + P(X > 10) = 1$

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leqslant 10) \\ &= 1 - F(10) \\ &= 1 - (1 - e^{-10}) \\ &= e^{-10} \end{aligned}$$

ตอบ

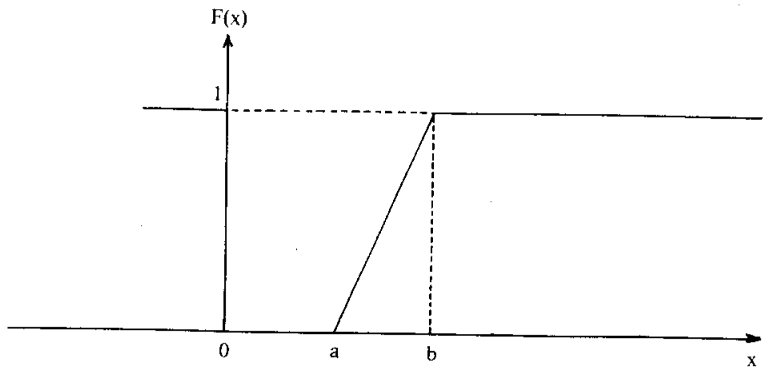
ตัวอย่างที่ 2.2 ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี cdf ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x \leqslant a \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$$

1. จงหาความน่าจะเป็นที่ $X \leqslant \dfrac{(2a+b)}{3}$

2. ถ้า $a = -3$ และ $b = 4$ จงหาความน่าจะเป็นที่ $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$

วิธีทำ 1. พิจารณาจากรูปของ F(x) ดังนี้



จะเห็นได้ว่า $a \leqslant \frac{(2a+b)}{3} \leqslant b$

เมื่อ $F(x) = P(X \leqslant x)$ เราจะได้

$$P\left[X \leqslant \frac{(2a+b)}{3}\right] = F\left[\frac{(2a+b)}{3}\right]$$

$$\therefore\ P\left[X \leqslant \frac{(2a+b)}{3}\right] = \frac{\frac{(2a+b)}{3} - a}{b-a}$$

$$= \frac{1}{3}$$ **ตอบ**

2. เหตุการณ์ $\left\{|x| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ คือ $\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\}$

จาก cdf เราจะได้ $P\left[|x| \leqslant \frac{1}{2}\right] = P\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right] - P\left[X \leqslant -\frac{1}{2}\right]$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

ถ้า $a = -3$ และ $b = 4$ ดังนั้น

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x+3}{4+3} = \frac{x+3}{7};\ -3 \leqslant x \leqslant 4$$

$$\therefore\ P\left[|x| \leqslant \frac{1}{2}\right] = \frac{\frac{1}{2}+3}{7} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{7}$$

$$= \frac{1}{7}$$ **ตอบ**

2.3 ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable)

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีค่าที่จะเป็นไปได้คือ $x_1, x_2, \ldots$, และถ้า $x_i < x_j$ เมื่อ $i < j$ ถ้า F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงแบบสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม X แล้วจะได้

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_i - 1) &= P[X \leqslant x_i] - P[X \leqslant x_{i-1}] \\ &= P[X = x_i] \end{aligned}$$

แทน $P[X = x_i]$ ด้วย $p(x_i)$, $1 = 1,2,3,\ldots$ และเรียก $P(x_i)$ ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution) **หรือฟังก์ชันมวลน่าจะเป็น** (Probability mass function) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X

ฟังก์ชันมวลน่าจะเป็นหรือการแจกแจงความน่าจะเป็น $p(x_i)$, $i = 1,2,3,\ldots$ ของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องใด ๆ จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $0 \leqslant p(x_i) \leqslant 1$, $i = 1,2,3,\ldots$
2. $\sum\limits_{\text{all}\, i} p(x_i) = 1$

ตัวอย่างที่ 2.3 ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี Probability distribution function เป็นดังนี้

$$P(X = j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!}, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

เมื่อ $\lambda > 0$ **จงแสดงว่า** $P(X = j)$ **มีคุณสมบัติเป็น** Probability distribution

วิธีทำ $P(X = j) > 0$ เสมอ เมื่อ $\lambda > 0$ ดังนั้น เพียงแต่แสดงว่า $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P(X = j) = 1$ เท่านั้น

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} P(X = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \quad \left(\because \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

แสดงว่า $P(X = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$, $j = 0,1,2,\ldots$ มีคุณสมบัติเป็น probability distribution

ตอบ

ข้อสังเกต

$$e^{\lambda} = 1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\ldots$$

$$e^{-\lambda} = 1-\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}-\frac{\lambda^3}{3!}+\frac{\lambda^4}{4!}-\ldots$$

2.4 ตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)

สมมติว่าสำหรับ Moment ซึ่ง X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจง-สะสมเป็น $F_X(x)$ ซึ่งไม่เพียงแต่เป็นแบบต่อเนื่องเท่านั้น ยังมี derivative ด้วย

$$F_X'(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่อง

สมมติว่า $f_X(x)$ และ $F_X(x)$ เป็น Continuous

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{X} f_X(y)dy$$

สำหรับในช่วง (a, b) จะได้

$$P[a < X < b] = \int_{-\infty}^{b} f_X(y)dy - \int_{-\infty}^{a} f_X(y)dy$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(y)dy$$

โดยที่ $f_X(x)$ จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f_X(x) \geqslant 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3. $f_X(x)$ เป็น piecewise continuous

4. สำหรับช่วง (a, b) $P(a \leqslant X \leqslant b)$

และ $f_X(x)$ เราเรียกว่าฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น (Probability Density Function) หรือเขียนย่อ ๆ ว่า pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X

ตัวอย่างที่ 2.4 cdf ของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง X กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

1. จงหา pdf ของ X

2. จงหาค่า C ที่ทำให้ $P(X \leqslant C) = \frac{1}{2}$ เป็นจริง

วิธีทำ จาก

1. $$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x \geqslant 0$$

$$= 0, \quad x \leqslant 0$$ **ตอบ**

2. $$P(X \leqslant C) = F(C)$$

$$= \frac{C}{1+C}$$

$$\therefore \frac{C}{1+C} = \frac{1}{2}$$

$$2C = 1+C$$

$$\therefore C = 1$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.5 ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี ppf เป็นดังนี้

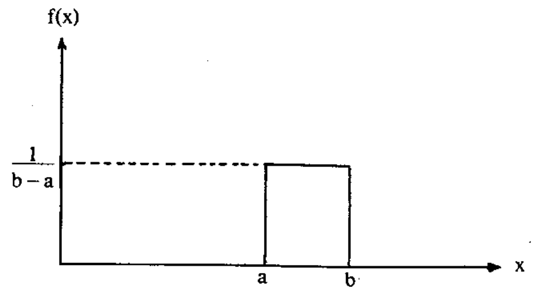
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

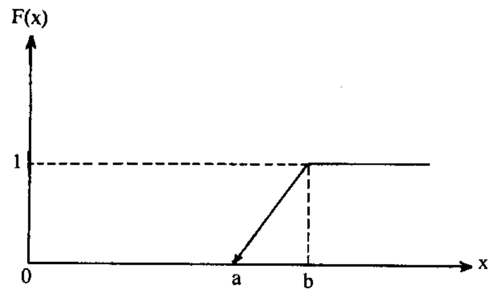
1. จงหา cdf ของ X

2. ถ้า $a = -b,\ b > 0$ จงหาค่าของ b ที่ทำให้ $P(X < 1) = 3P(X > 1)$

วิธีทำ 1. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ถ้า } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{ถ้า } x > b \end{cases}$$





2. ถ้า $a = -b$

$\therefore$ pdf(f(x)) $= \frac{1}{2b}$ เมื่อ $-b \leqslant x \leqslant b$

$= 0$ เมื่อ x มีค่าอื่น ๆ

จาก $P(X < 1) = 3P(X > 1)$

$\because P(X > 1) = 1 - P(X < 1)$

$\therefore P(X < 1) = 3[1 - P(X < 1)]$

และ $P(X < 1) = F(1)$

$= \frac{1-a}{b-a}$

แทนค่า $a = -b$ จะได้

$P(X < 1) = F(1) = \frac{1+b}{2b}$

จาก $P(X < 1) = 3[1 - P(X < 1)]$

$$\frac{1+b}{2b} = 3\left[1-\left(\frac{1+b}{2b}\right)\right]$$

$$\frac{1+b}{2b} = 3-3\left(\frac{1+b}{2b}\right)$$

$$4\left(\frac{1+b}{2b}\right) = 3$$

$$\frac{1+b}{2b} = \frac{3}{4}$$

$$4(1+b) = 3\times 2b$$

$$4+4b = 6b$$

$$6b-4b-4 = 0$$

$$2b-4 = 0$$

$$2b = 4$$

$$\therefore\ b = 2$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

α เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นค่าคงที่ที่มีค่าเป็นบวก จงแสดงว่าฟังก์ชันนี้เป็น pdf และจงหา cdf

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $f(x) \geqslant 0$

และ $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= -e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= 1$$ **ตอบ**

$\therefore$ $f(x)$ เป็น pdf

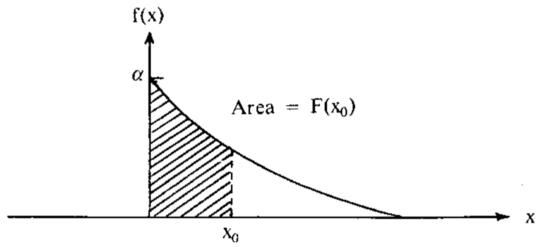
หา cdf

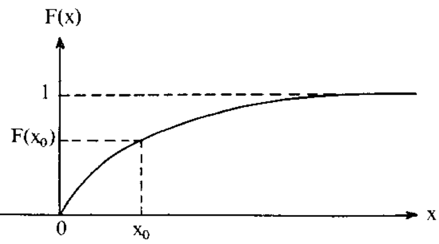
$$\because\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha y}\,dy, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

เขียนรูปแทน f(x) และ F(x) ได้ดังนี้





ตัวอย่างที่ 2.7 X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี pdf ดังนี้

$$f(x) = ax^2e^{-bx}, \quad a,b > 0, \quad 0 \leqslant x < \infty$$

1. จงหาค่าของ a เมื่อกำหนดค่า b ให้
2. จงหา cdf ของ X
3. จงหาความน่าจะเป็นที่ $X < \frac{1}{b}$

วิธีทำ 1. $\because \displaystyle\int_0^\infty ax^2e^{-bx}dx = 1$

$$\therefore\ a\left(\frac{2}{b^3}\right) = 1$$

$$a = \frac{b^3}{2}$$

ตอบ

2. $F(x) = \begin{cases} b^3\int_0^x y^2e^{-by}dy = \frac{b^3}{2}\left(\frac{2}{b^3} - \frac{2}{b^3}e^{-bx} - \frac{2}{b^2}xe^{-bx} - \frac{x^2}{b}e^{-bx}\right); & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ **ตอบ**

3. $P\left(X < \frac{1}{b}\right) = F\left(\frac{1}{b}\right)$

$$= \frac{b^3}{2}\left(\frac{2}{b^3} - \frac{2}{b^3}e^{-1} - \frac{2}{b^3}e^{-1} - \frac{1}{b^3}e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 5e^{-1})$$ **ตอบ**

2.5 ค่าคาดหมาย ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน
(Expectations, Means and Variances)

นิยาม ค่าคาดหมาย (expected value) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เขียนแทนด้วย E(X) กำหนดไว้ดังนี้

$$E(X) = \sum_{\text{all } i} x_i p(x_i)$$ เมื่อ X เป็น Discrete Random Variable

และ $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$ เมื่อ X เป็น Continuous Random Variable

ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม X จะเป็นค่าคงที่ ซึ่งจะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้ โดยไม่จำเป็นจะต้องอยู่ในพิสัยของ X

ตัวอย่างเช่น ถ้า X เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

$$\therefore\ E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \times \frac{1}{6}$$

$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{21}{6} = 3.5$$

สัญลักษณ์ที่เราใช้แทน E(X) เรามักจะใช้ μ_x หรือ μ และค่า expected value บางทีเราเรียกว่าค่าเฉลี่ย (Mean)

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหา expected value ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า

1. X เป็น Discrete Random Variable และ
   ก) มีการกระจายเป็น geometric ที่มี parameter θ
   ข) มีการกระจายเป็น poisson ที่มี parameter λ
2. X เป็น Continuous Random Variable และ
   ก) มีการกระจายเป็น uniform สำหรับช่วง (a, b)
   ข) มี pdf เป็น exponential ที่มี parameter α

วิธีทำ 1. ก) ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมี probability distribution เป็นดังนี้

$$P[X = j] = (1-\theta)^{j-1}\cdot\theta; \; j = 1,2,3,\ldots,\infty$$

$\therefore$ Expected Value ของ X คือ

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} j\cdot P(X = j)$$

$$= \theta \sum_{j=1}^{\infty} j(1-\theta)^{j-1}$$

ถ้าให้ $S = \sum_{j=1}^{\infty} (1-\theta)^{j} = \frac{1-\theta}{1-(1-\theta)}; \; 0 < \theta < 1$

แล้ว $\frac{dS}{d\eta} = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-\theta)^{j-1}$

$$= \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-\theta}{1-(1-\theta)}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{1-(1-\theta)}\right]^2; \; \eta = 1-\theta$$

แทนค่า

$$\therefore E(X) = \theta\cdot\left[\frac{1}{1-(1-\theta)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{\theta}$$

ตอบ

ข) ถ้า X เป็น Poisson ที่มี parameter λ แล้ว

$$P[X = j] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j}}{j!}, \; j = 0,1,2,\ldots$$

$$\therefore\ E(X) = \sum_{j=0}^{\infty} j\cdot\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!}\right]$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot\left[\frac{\lambda^{j}}{j!}\right] \qquad \left(\because \text{ เมื่อ } j = 0 \text{ เทอม } j\cdot\frac{\lambda^{j}}{j!} = 0\right)$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot\frac{\lambda^{j}}{j(j-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{(j-1)!}$$

เปลี่ยน Variable ใหม่โดย Sum จาก j เป็น $k = j-1$ จะได้

$$E(X) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

ตอบ

2. ก) ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\therefore\ E(X) = \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_a^b\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b^2-a^2)}{2}\right]$$

$$= \frac{a+b}{2}$$ **ตอบ**

ข) pdf ของ X คือ

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ E(X) = \int_0^\infty x \cdot \alpha e^{-\alpha x} dx$$

$$= -xe^{-\alpha x} - \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}$$ **ตอบ**

นอกจากนี้เรายังสามารถหาค่าคาดหมายของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X ได้ดังนี้ ถ้าเราทราบ probability distribution หรือ pdf ของ Y ซึ่ง

$Y = H(X)$ จะได้ว่า

, $E(Y) = \sum y_i P_Y(y_i)$ สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

หรือ $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$ สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง

ซึ่งจะเห็นได้ว่าเราไม่จำเป็นจะต้องทราบ pdf ของ Y เราก็สามารถหา E(Y) ได้ ถ้าเราทราบ pdf ของ X โดยหาได้จากสูตร

$$E(Y) = E[H(X)]$$

$$= \sum_i H(x_i)P_X(x_i)$$ เมื่อ X เป็น discrete

หรือ $E(Y) = \int_{\infty}^{\infty} H(x) f_X(x) dx$ เมื่อ X เป็น continuous

subscript ของ X และ Y ที่ pdf นั้นแสดงให้เห็นว่าเป็น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่มตัวใด

ข้อสังเกต ถ้า H(X) และ G(X) เป็นฟังก์ชันของ X แล้ว

$$\begin{aligned} E[H(X)+G(X)] &= \int [H(X)+G(X)] f_X(x)dx \\ &= \int H(x)f_X(x)dx + \int G(x)f_X(x)dx \\ &= E[H(X)] + E[G(X)] \end{aligned}$$

และถ้า C เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว จะได้

$$\begin{aligned} E[CH(X)] &= \int CH(x)f_X(x)dx \\ &= C\int H(x)f_X(x)dx \\ &= CE[H(X)] \end{aligned}$$

ซึ่งทั้ง 2 อันนี้เป็นคุณสมบัติของ expectation ที่ควรจะทราบ และนำไปใช้ประโยชน์ได้

สำหรับความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มนั้นเป็นการวัดการกระจายของฟังก์ชัน ซึ่งหาได้จากนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม ความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม X คือ

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

ถ้าเราให้

$$\begin{aligned} H(X) &= [X - E(X)]^2 \\ &= [X - \mu]^2; \ \mu = E(X) \end{aligned}$$

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

$$\therefore \ V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P_X(x_i)$$

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง

$$\therefore \ V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

ความแปรปรวนของ X คือ V(X) เรามักจะเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย σ_X^2 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X เราใช้สัญลักษณ์แทนด้วย σ_X ซึ่ง $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ และค่าของ σ^2 จะเป็นค่าคงที่ที่มีค่าเป็นบวกเสมอ ค่าคาดหมาย $E(X^k)$ ของตัวแปรเชิงสุ่ม เราเรียกว่าโมเมนต์ที่ k ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ $E[(X-\mu)^k]$ เรียกว่า Central Moment ที่ k เมื่อ $\mu = E(X)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าความแปรปรวนก็คือ Central Moment ที่ 2 ของการแจกแจง (The second central moment of the distribution)

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง และ μ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
E[(X-\mu)^2] &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx}_{E(X^2)} - 2\mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}_{E(X)} + \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}_{1} \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2 \\
\because E[(X-\mu)^2] &= V(X) \\
\therefore V(X) &= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

หรือ $$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหา Variance ของ Distribution และ Density function ในตัวอย่างที่ 2.8

ในตัวอย่างที่ 2.8 เราได้หา E(X) ไว้แล้ว ดังนั้นเราต้องหา $E(X^2)$ ก่อนดังนี้

1. ก) $$E(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \eta^{j-1} \theta, \quad \eta = 1-\theta$$

ถ้าให้ $$S = \sum_{j=1}^{\infty} \eta^j = \frac{\eta}{1-\eta}$$

และ
$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{d\eta} &= \sum_{j=1}^{\infty} j\eta^{j-1} \\
&= \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) \\
&= \frac{1}{(1-\eta)^2} \qquad \text{..........(1)}
\end{aligned}
$$

คูณสมการ (1) ด้วย η แล้วหา derivative เทียบกับ η อีกครั้งหนึ่ง จะได้

$$\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dS}{d\eta}\right) = \frac{d}{d\eta}\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\eta^{j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j^2\eta^{j-1}$$

$$= \frac{d}{d\eta}\left[\frac{\eta}{(1-\eta)^2}\right]$$

$$= \frac{1+\eta}{(1-\eta)^3}$$

$$\therefore\ E(X^2) = \left[\frac{1+\eta}{(1-\eta)^3}\right]\theta$$

$$= \frac{1+\eta}{(1-\eta)^3}\times(1-\eta) \qquad \because\ \eta = 1-\theta$$

$$\therefore\ \theta = 1-\eta$$

$$= \frac{1+\eta}{(1-\eta)^2}$$

แทนค่า $E(X^2)$ และ $E(X)$ จะได้ $V(X)$ ดังนี้

$$V(X) = E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$= \frac{1+\eta}{(1-\eta)^2}-\frac{1}{(1-\eta)^2}$$

$$= \frac{\eta}{(1-\eta)^2} = \frac{(1-\theta)}{\theta^2}$$

ตอบ

ข) สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ

$$E(X^2) = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{(j-1)!}$$

ถ้าให้ $k = j-1$

$$\therefore\ E(X^2) = e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ซึ่ง $\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda}$ และ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

$$\therefore\ E(X^2) = (\lambda e^{-\lambda})(\lambda e^{\lambda}) + (\lambda e^{-\lambda})(e^{\lambda})$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

แทนค่า $E(X^2)$ และ $E(X)$ ในสูตรของ $V(X)$ จะได้

$$\because\ V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \{\lambda\}^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

จะเห็นได้ว่าค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวซองจะมีค่าเท่ากันคือเท่ากับพารามิเตอร์ λ

2. ก) ถ้า X เป็น Uniform (a, b) แล้ว

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{(b-a)} dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(b^3 - a^3)$$

$$\therefore\ V(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4(b^3 - a^3) - 3(a+b)^2 \cdot (b-a)}{12(b-a)}$$

$$= \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(a+b)^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$ **ตอบ**

ข) ถ้า X มีการแจกแจงแบบ exponential ที่มีพารามิเตอร์ α

$$\therefore \quad E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx$$

ใช้ integration by parts เราจะได้

$$E(X^2) = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\therefore \quad V(X) = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}$$ **ตอบ**

นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ หลายอย่างของ E(X) และ V(X) ที่จะนำไปใช้ประโยชน์ แต่ในที่นี้จะขอพิสูจน์คุณสมบัติดังกล่าวให้ดูเฉพาะในกรณีที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องเท่านั้น ส่วนแบบไม่ต่อเนื่องการพิสูจน์ก็จะคล้าย ๆ กัน

คุณสมบัติมีดังนี้

1. สำหรับค่าคงที่ a, b ใด ๆ

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

พิสูจน์ ให้ $H(X) = aX+b$

$$\therefore \quad E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) \cdot f(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= aE(X)+b$$ QED

2. สำหรับค่าคงที่ a, b ใด ๆ

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

พิสูจน์

$$\because \quad V(aX+b) = E\left[\{(aX+b) - E(aX+b)\}^2\right]$$

$$= E\left[(aX+b)^2\right] - \left[E(aX+b)\right]^2$$

$$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2\{E(X)\}^2 - 2abE(X) - b^2$$

$$= a^2E(X^2) - a^2\{E(X)\}^2$$

$$= a^2\left[E(X^2) - \{E(X)\}^2\right]$$

$$= a^2 V(X) \qquad \text{QED}$$

จากคุณสมบัติข้อ (1) ถ้าให้ a = 1 จะได้

$$E(X+b) = E(X)+b$$

และจากคุณสมบัติข้อ (2) จะได้ $V(X+b) = V(X)$

ตัวอย่างที่ 2.10 จำนวนลูกค้าที่เข้ามาในร้านค้าช่วงเวลา 1 ชั่วโมง เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปัวซอง (X) ซึ่งถ้า $P(X = 0) = 0.00012$ จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

วิธีทำ $\because$ X มีการแจกแจงแบบปัวซอง ดังนั้น

$$P[X = 0] = e^{-\lambda} = 0.00012$$

$$\therefore \lambda = -\ln(0.00012)$$

$$\approx 9$$

ซึ่งค่าของพารามิเตอร์ λ นี้คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม X นั่นเอง

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.11 ให้ pdf ของ X เป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & x \text{ มีอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน และ cdf ของ X

วิธีทำ ค่าเฉลี่ยของ X คือ

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x|x|dx$$

$$= 0$$

เนื่องจาก x เป็น odd function รอบจุด origin และ |x| เป็น even function รอบจุด origin ผลคูณของ even function และ odd function จะเป็น odd function ดังนั้น integral ของ odd function ที่มีช่วงห่างจาก origin เท่า ๆ กัน จะมีค่าเป็น 0 เสมอ **ตอบ**

ความแปรปรวนของ X คือ

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= E(X^2) - 0 \qquad (\because\ E(X) = 0)$$

$$= E(X^2)$$

จาก $$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2|x|dx$$

$$= \int_{0}^{1} x^3 dx + \int_{-1}^{0} x^2(-x)dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 0\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ V(X) = \frac{1}{2}$$

ตอบ

cdf ของ X คือ

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

$$= 0 \quad \text{ถ้า } x < -1$$

$$= 1 \quad \text{ถ้า } x > 1$$

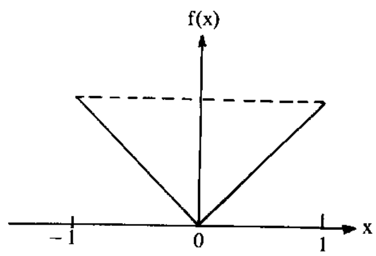
$$\therefore\ F(x) = \int_{-1}^{x} (-s)ds$$

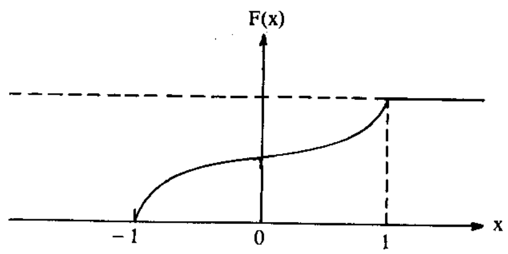
$$= -\frac{s^2}{2}\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}, \qquad -1 < x < 0$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} sds = \frac{1}{2} + \frac{s^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}; \qquad 0 < x < 1$$

$$\therefore \; F(x) = \begin{cases} 0; & x < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}; & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}; & 0 < x < 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}$$ **ตอบ**

และเขียนภาพแสดง f(x) กับ F(x) ได้ดังรูป





2.6 Moment Generating Function

นิยาม Moment Generating Function (mgf) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เขียนแทนด้วย $m_X(t)$ คือค่าคาดหมายของฟังก์ชัน e^{tx} เมื่อ t เป็น real variable ดังนั้น

$$m_X(t) = E[e^{tx}]$$

$$= \begin{cases} \sum_{x_i \in R_X} P(x_i)e^{tx_i}, & X \text{ เป็น discrete} \\ \int_{R_X} f(x)e^{tx}dx, & X \text{ เป็น continuous} \end{cases}$$

ถ้า $$e^{tx} = 1 + tx + \frac{1}{2!}t^2x^2 + \frac{1}{3!}t^3x^3 + \ldots$$

และสมมติว่า X เป็น Continuous ดังนั้น เราสามารถเขียน mgf ของ X ได้ดังนี้

$$m_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_{R_X} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tx)^i}{t!} \right) f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \int_{R_X} x^i f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} E(x^i)$$

หา first derivative ของ $m_X(t)$ จะได้

$$m_X'(t) = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2}{2!}E(X^3) + \ldots$$

ถ้าให้ $t = 0$ จะได้

$$m_X'(t)\Big|_{t=0} = m_X'(0) = E(X)$$

ทำนองเดียวกัน second derivative ของ $m_X(t)$ คือ

$$m_X^{(2)}(t) = E(X^2) + tE(X^3) + \ldots$$

ถ้าให้ $t = 0$ จะได้

$$m_X^{(2)}(t)\Big|_{t=0} = m_X^{(2)}(0)$$

$$= E(X^2)$$

ในรูปทั่ว ๆ ไป จะได้

$$m_X^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{t^{i-k}}{(i-k)!} E(X^i)$$

และ $$E(X^k) = m_X^{(k)}(0), \ k = 1,2,\ldots$$

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มี mgf เป็น $M_X(t)$

ให้ $Y = aX + b$

$\therefore$ mgf ของ Y คือ

$$m_Y(t) = E(e^{tY})$$

$$= E(e^{t(ax+b)})$$

$$= e^{tb}E(e^{(at)x})$$

$$= e^{tb}m_X(at)$$

จาก $E\left[(X-\mu)^k\right]$ ถ้าให้ $a = 1, \ b = -\mu$ นั่นคือ ถ้า $Y = X-\mu$ จะได้

$$E\left[(X-\mu)^k\right] = m_Y^{(k)}(0)$$

$$= \frac{d^k}{dt^k}(e^{-\mu t}m_X(t))\Big|_{t=0}$$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงหา Moment Generating Functions ของตัวแปรเชิงสุ่มในตัวอย่างที่ 2.8

วิธีทำ 1. ก) ถ้า X มีการกระจายเป็น Geometric ที่มีพารามิเตอร์ θ ดังนั้น

$$E(e^{tx}) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{jt}\theta\eta^{j-1}$$

$$= \theta e^t \sum_{j=1}^{\infty} (\eta e^t)^{j-1}, \quad \eta = 1-\theta$$

ใช้ผลรวมของ Geometric Series จะได้ (เมื่อ $a = 1, r = ne^t$ และ $r < 1$)

$$E(e^{tx}) = \frac{\theta e^t}{1-\eta e^t}$$

$$= \frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t}$$ **ตอบ**

ข) ถ้า X เป็น Poisson random variable ที่มีพารามิเตอร์ λ

$$E(e^{tx}) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{jt}e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)}$$ **ตอบ**

2. ก) ถ้า X เป็น Uniform distribution ในช่วง (a, b)

$$E(e^{tx}) = \int_a^b \left(\frac{1}{b-a}\right)e^{tx}dx$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_a^b$$

$$= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$ **ตอบ**

ข) ถ้า X เป็น exponential distribution ซึ่งมีพารามิเตอร์ α

$$\therefore\ E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} e^{tx} dx$$

$$= \frac{\alpha}{(t-\alpha)} e^{(t-\alpha)x} \Big|_0^{\infty}$$

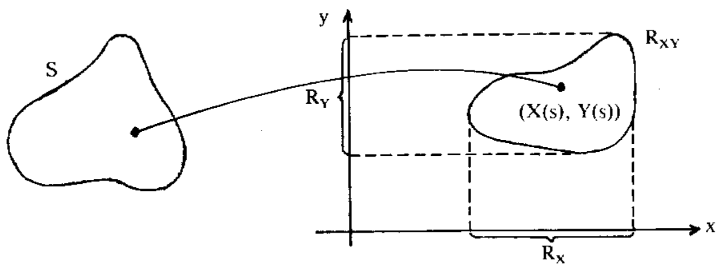
$$= \frac{\alpha}{(\alpha - t)}$$ **ตอบ**

2.7 ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ และการแจกแจงร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (Bivariate Random Variables and Their Joint Distribution)

ในหัวข้อที่กล่าวมาข้างต้นนั้นเป็นเรื่องของการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มมิติเดียว คือ เราพิจารณาผลการทดลองของการทดลองเชิงสุ่มเพียงลักษณะเดียวเท่านั้น แต่โดยทั่วไปแล้ว เรามักจะสนใจผลการทดลองมากกว่าหนึ่งคุณลักษณะ เช่น 2 คุณลักษณะ 3 คุณลักษณะ จนถึง n คุณลักษณะ ซึ่งเราจะเรียกว่าตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ, 3 มิติ จนถึง n มิติ (Multivariate Random Variable) สำหรับในหัวข้อต่อไปนี้เราจะศึกษาตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ เท่านั้น (Bivariate Random Variables)

นิยาม ให้ S เป็น Sample Space ของการทดลอง E และให้ X และ Y ทอดภาพจาก S ไปยังเลขจำนวนจริง ดังนั้นคู่ของ (X, Y) ซึ่งกำหนดค่าจริง (x, y) ให้แก่แต่ละจุด $s \in S$ เราเรียกว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ หรือตัวแปรเชิงสุ่มทวิคูณ (two – dimentional or bivariate random variables)

และถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดเลขจำนวนจริง $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ให้แก่แต่ละผลการทดลอง $s \in S$ เราเรียกว่าตัวแปรเชิงสุ่ม n มิติ ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังรูป



จากรูป พิสัยของ Bivariate Random Variable (X, Y) เราเขียนแทนด้วย R_{XY} ซึ่ง

$$R_{XY} = \{(x, y) | \text{มี } s \in S \text{ ซึ่ง } X(s) = x,\ Y(s) = y\}$$

สำหรับการศึกษาเรื่องตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ หรือ n มิติ ก็จะทำเช่นเดียวกับตัวแปรเชิงสุ่มมิติเดียว ซึ่งเราจะเริ่มต้นจากการศึกษาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ

ถ้าให้ X และ Y เป็นสองตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ ใน Sample Space S ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบสะสมของแต่ละตัวแปรคือ

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \text{ และ}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$$

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S โดยที่

$$A = \{s \in S | X(s) \leqslant x\} \text{ และ}$$

$$B = \{s \in S | Y(s) \leqslant y\} \text{ ดังนั้น}$$

$$F_X(x) = P(A) \text{ และ } F_Y(y) = P(B)$$

และจากตัวแปรเชิงสุ่มทั้ง 2 นี้ เราสามารถเขียนฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบสะสม (Joint cumulative distribution function หรือ jont pdf) ของ X และ Y ได้ โดยใช้สัญลักษณ์ $F_{XY}(x, y)$ โดยที่

$$F_{XY}(x, y) = P[X \leqslant x \text{ และ } Y \leqslant y]$$

ซึ่งเราเขียนในเทอมของ A และ B ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= P[s \in S | X(s) \leqslant x \text{ และ } Y(s) \leqslant y] \\ &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

ถ้าสำหรับค่าของ x และ y, A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน เราสามารถเขียนได้ว่า

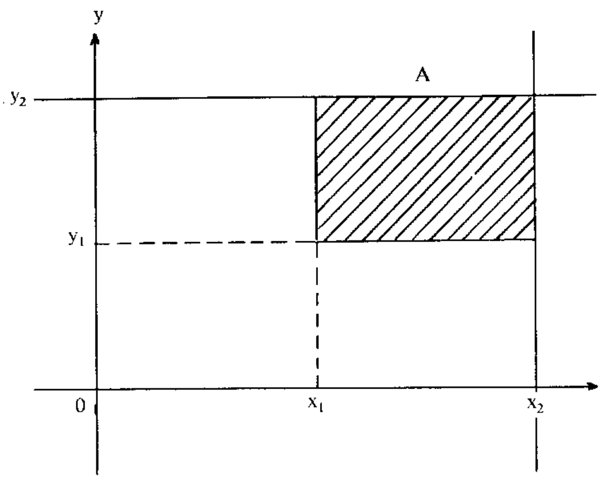
$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= P(A \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B) \\ &= F_X(x) \cdot F_Y(y) \end{aligned}$$

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัวแปรใด ๆ X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันถ้า

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

สำหรับทุก ๆ ค่าของ x และ y

ตัวอย่างที่ 2.13 ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (X, Y) มี joint cdf เป็น F(x, y) จงอธิบายความน่าจะเป็นซึ่งผลลัพธ์การทดลอง (X, Y) ของการทดลองหนึ่งจะตกอยู่ในส่วนที่แรเงาไว้ในรูปข้างล่างในเทอมของ F(x, y) ถ้าให้ส่วนที่แรเงาเป็น A



ถ้าให้ส่วนที่แรเงาเป็น A

$$\therefore \; P[(x, y) \in A] = P[X \leq x_2, Y \leq y_2] - P[X \leq x_2, Y \leq y_1] - P[X \leq x_1, Y \leq y_2] + P[X \leq x_1, Y \leq y_1]$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

และ Joint cdf มีคุณสมบัติดังนี้

1. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F_{XY}(x, y) = 1, \quad \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to \infty}} F_{XY}(x, y) = 0$
2. $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$
3. ถ้า $x_1 \leq x_2$ และ $y_1 \leq y_2$ แล้ว

   ก) $F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_1) \leq F_{XY}(x_2, y_2)$

   ข. $F_{XY}(x_1, y_1) \leq F_{XY}(x_1, y_2) \leq F_{XY}(x_2, y_2)$

4. $\lim_{x \to \infty} F_{XY}(x, y) = F_Y(y)$

$\lim_{y \to \infty} F_{XY}(x, y) = F_X(x)$

เมื่อ $F_X(x)$ และ $F_Y(y)$ เป็น cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และของตัวแปรเชิงสุ่ม Y ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.14 สุ่มเลือกสิ่งของจากสิ่งของที่มีจำนวนมาก และกำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ให้ดังนี้ ถ้าเลือกได้ของที่ชำรุดชนิดที่ 1, X = 1 และถ้าเลือกได้อย่างอื่น X = 0 และถ้าเลือกได้ของที่ชำรุดชนิดที่ 2, y = 1 และถ้าเลือกได้อย่างอื่น Y = 0 Joint cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบบไม่ต่อเนื่องกำหนดให้ดังนี้

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \text{หรือ} \quad y < 0 \\ P_1, & 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1 \\ P_2, & 0 \leqslant x < 1, y \geqslant 1 \\ P_3, & x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant y < 1 \\ 1, & x \geqslant 1, \quad y \geqslant 1 \end{cases}$$

ภายใต้เงื่อนไขอะไรที่ทำให้ X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X และของ Y (Marginal cdf) คือ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P_2, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ P_3, & 0 \leqslant y < 0 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

ซึ่งถ้า X และ Y เป็นอิสระกัน เราจะต้องได้ว่า

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

ถ้าดูจาก Marginal cdf สำหรับ $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$ จะเห็นได้ว่า $P_1 = P_2P_2$ แสดงว่า X และ Y เป็นอิสระกัน **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.15 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ ที่มี joint cdf ดังนี้

$$F(x, y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & 0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant y < \infty \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงแสดงว่า X และ Y เป็นอิสระกัน และจงหาค่าของ $P(X < 1)$

วิธีทำ จาก

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$$

$$= \lim_{y \to \infty} (1-e^{-x})(1-e^{-y})$$

$$= (1-e^{-x}), \quad x \geqslant 0$$

และ

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$$

$$= \lim_{x \to \infty} (1-e^{-x})(1-e^{-y})$$

$$= (1-e^{-y}), \quad y \geqslant 0$$

$$\therefore F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน **ตอบ**

$$\therefore P[X < 1] = F_X(1)$$

$$\therefore P[X < 1] = (1-e^{-1})$$ **ตอบ**

2.8 การแจกแจงร่วม และการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข

(Joint and Conditional Distributions)

ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบบไม่ต่อเนื่อง เมื่อ X และ Y ต่างก็เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ (X, Y) สามารถให้ค่า (x_i, y_j) โดยที่

$$P[X = x_i, \ Y = y_j] = P_{XY}(x_i, y_j)$$

เราเรียก $P_{XY}(x_i, y_j)$ ว่าเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y (Joint probability distribution function of X and Y) ซึ่ง $P_{XY}(x_i, y_j)$ จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leqslant P_{XY}(x_i, y_j) \leqslant 1$

2. $\sum_{i} \sum_{j} P_{XY}(x_i, y_j) = 1$

จาก Joint probability distribution function เราสามารถหา joint cdf ได้ดังนี้

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_i < y} P_{XY}(x, y)$$

และเราสามารถหา Marginal pdf ของตัวแปร X และของตัวแปร Y ได้จาก Joint probability distribution function ดังนี้

$$\begin{aligned} P[X = x_i] &= P_X(x_i) \\ &= P_{XY}(x_i, y_{i1}) + P_{XY}(x_i, y_{i2}) + \ldots + P_{XY}(x_i, y_{in}) \\ &= \sum_{y_i} P_{XY}(x_i, y_j) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} P[Y = y_j] &= P_Y(y_j) \\ &= \sum_{x_i} P_{XY}(x_i, y_j) \end{aligned}$$

นิยาม ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i) \cdot P_Y(y_j)$$

ตัวอย่างที่ 2.16 กำหนดตาราง Joint probability distribution function ให้ดังนี้

x \ y	−2	0	1	3
−1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

จงหา 1. Marginal probability distribution function ของ X และของ Y

2. จงแสดงว่า X และ Y เป็นอิสระกัน

3. จงหา $P(Y > X)$

วิธีทำ 1. $P_X(x_i)$ สำหรับ i = 1, 2, 3 คือ

$$P_X(-1) = \frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P_X(0) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P_X(1) = \frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{1}{4}$$

$P_Y(y_j)$ สำหรับ j = 1, 2, 3, 4 คือ

$$P_Y(-2) = \frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

$$P_Y(0) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P_Y(1) = \frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P_Y(3) = \frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

ซึ่งเขียนใส่ในตารางได้ดังนี้

$P_X(x_i)$ table

x	-1	0	1
$P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$P_Y(y_i)$ table

y	-2	0	1	3
$P(y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. สำหรับทุกคู่ i = 1,2,3; j = 1,2,3,4 จะได้

$$P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i) \cdot P_Y(y_i)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน **ตอบ**

3. $P(Y > X) = P(-1, 0) + P(-1, 1) + P(-1, 3) + P(0, 1) + P(0, 3) + P(1, 3)$

$$= \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$$

$$= \frac{2+2+1+4+2+1}{24}$$

$$= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$ **ตอบ**

ในกรณีที่ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่อง

สมมติให้ (X, Y) มี Joint cdf F(x, y) ดังนั้น

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

ซึ่ง f(x, y) ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติแบบต่อเนื่องนี้เราเรียกว่าฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (Joint probability density function หรือ joint pdf) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y

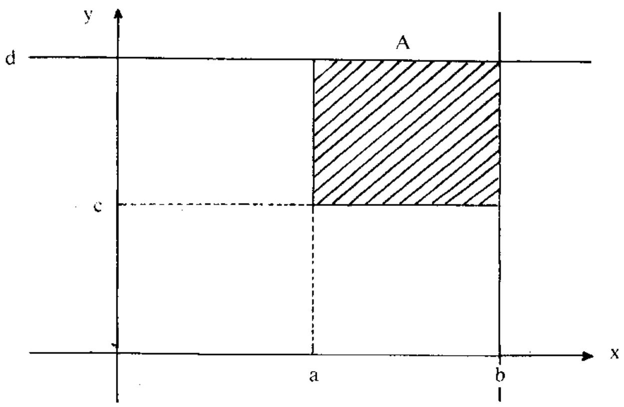
จากนิยาม $F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$

เมื่อเรา integrate สมการ $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ จะได้

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, du dv$$

$$= P[X \leqslant x, Y \leqslant y]$$

และจากรูปเราต้องการจะหา $P[(x, y) \in A]$



$$P[(x, y) \in A] = P[a \leqslant X \leqslant b, c \leqslant Y \leqslant d]$$

$$= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{d} f(u, v) du dv - \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{c} f(u, v) du dv$$

$$- \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{d} f(u, v) du dv + \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{c} f(u, v) du dv$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(u, v)dudv$$

ซึ่ง Joint pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติแบบต่อเนื่อง (X, Y) f(x, y) จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1) $f(x, y) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$

ฟังก์ชันใดก็ตามที่มีคุณสมบัติ 2 ข้อนี้จะเป็น joint pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ

ในการที่จะหา Marginal pdf ของ X, $f_X(x)$ จาก f(x, y) หาได้จาก

$$F_X(x) = P[X \leq x, y < \infty]$$

$$= F(x, \infty)$$

$$\therefore F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)dudv$$

differentiate ทั้ง 2 ข้างเทียบกับ x จะได้

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)dv$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า Marginal pdf ของ Y คือ

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y)du$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันเราจะได้ว่า

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \qquad \text{..........(1)}$$

หา partial derivative ของสมการ (1) เทียบกับ x และ y จะได้

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F_X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y}F_Y(y)$$

หรือ $$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่าถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

ตัวอย่างที่ 2.17 Joint pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (X, Y) คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leqslant x, y \geqslant 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

1. X และ Y เป็นอิสระต่อกันหรือไม่
2. จงหาค่า $P\left[|X-Y| > 1\right]$

วิธีทำ 1. การที่จะแสดงให้เห็นว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกันหรือไม่นั้นเริ่มแรกจะต้องหาMarginal pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และของตัวแปรเชิงสุ่ม Y เสียก่อน แล้วจึงดูว่า $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ หรือไม่ ถ้าเท่ากันก็แสดงว่า X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน ถ้าไม่เท่ากันก็แสดงว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระกัน หรือขึ้นอยู่กับกันและกัน (Dependent)

จาก
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dy \\ &= \frac{1}{8}\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{4}(x+1); \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ &= 0; \quad x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{aligned}$$

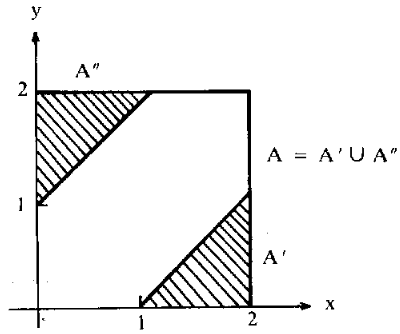
ในทำนองเดียวกันเราจะได้

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(y+1), & 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0, & y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \ f_X(x) \cdot f_Y(y) &= \left(\frac{1}{4}(x+1)\right)\left(\frac{1}{4}(y+1)\right) \\ &= \frac{1}{8}(x+1)(y+1) \\ &\neq f(x, y) \end{aligned}$$

$\therefore$ แสดงว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน **ตอบ**

2. หา $P(|X-Y|>1)$ ก่อนอื่นจะอธิบายขอบเขตของ A ในระนาบ (x, y) ก่อน ซึ่ง A คือ ส่วนที่แรเงาดังรูป



เมื่อ f(x, y) เป็น Symmetric เราสามารถหาความน่าจะเป็นของ(x, y) ที่อยู่ในส่วนแรเงา A′ และ A″

$$\therefore\ P\left[|X-Y|>1\right] = 2\int_1^2\int_0^{x-1} f(x, y)dxdy$$

$$= 2\int_1^2\left[\int_0^{x-1}\frac{1}{8}(x+y)dy\right]dx$$

$$= 2\int_1^2\left[\frac{1}{8}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x-1}\right]dx$$

$$= 2\int_1^2\frac{1}{8}\left[x(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}$$ **ตอบ**

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (X, Y) จะเรียกว่ามีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (Uniform distribution) ใน region R_{XY}

ถ้า Joint pdf, f(x, y) คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{ค่าคงที่ } C, & (x, y)\in R_{Xy} \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

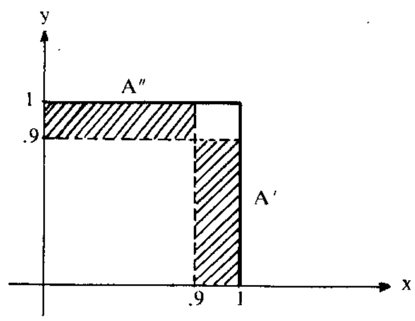
ดังนั้น
$$\int_{R_{XY}}\int f(x, y)dxdy = 1$$
$$\int_{R_{XY}}\int C\, dxdy = 1$$
$$CX\ \text{Area}\ (R_{XY}) = 1$$
$$\therefore\ C = \frac{1}{\text{Area of } R_{XY}}$$

ตัวอย่างที่ 2.18 ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (X, Y) มี joint pdf เป็นดังนี้

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

1. จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า 0.9
2. จงหาความน่าจะเป็นที่ $X + Y > 1$

วิธีทำ 1. จากรูป



วิธีที่ 1 พื้นที่ของระนาบ (x, y) ซึ่งตัวแปรเชิงสุ่มตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า 0.9 แสดงได้ดังรูป จากลักษณะสมมาตรสามารถเขียนได้ว่า

$$P[\text{ตัวแปรเชิงสุ่มตัวหนึ่งเท่านั้นมีค่ามากกว่า 0.9}] = 2\int_A\int f(x, y)dxdy$$
$$= 2\int_{0.9}^{1}\left[\int_0^{0.9} 4xy\ dy\right]dx$$

$$= 2\int_{.9}^{1} 4x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{0.9} dx$$

$$= 2\times 4\left(\frac{.81}{2}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_{.9}^{1}$$

$$= 2\times .81\times(1-.81)$$

$$= 0.3078$$ **ตอบ**

วิธีที่ 2 วิธีง่าย ๆ ที่จะแสดงให้เห็นว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกันคือ ใช้ Marginal pdf ของ X และของ Y ดังต่อไปนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\therefore\ f_X(x)\cdot f_Y(y) = 2x\times 2y = 4xy$$

$$= f(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งจะได้ว่า

$$P[\text{ตัวแปรเชิงสุ่มตัวหนึ่งเท่านั้นที่มีค่ามากกว่า } 0.9] = P[X > .9 \text{ และ } Y < .9] + P[X < .9 \text{ และ } Y > .9]$$

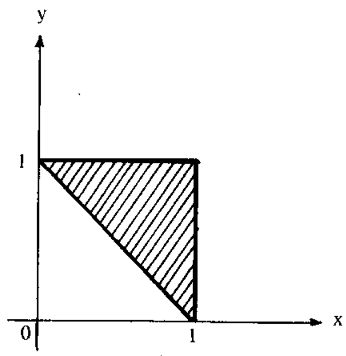
$$= 2P[X > .9 \text{ และ } Y < .9]$$

$$= 2P[X > .9]\cdot P[Y < .9]$$

$$= 2\left(\int_{.9}^{1} 2x\,dx\right)\left(\int_{0}^{.9} 2y\,dy\right)$$

$$= 0.3078$$ **ตอบ**

2. ขอบเขตของระนาบ (x, y) ในรูปส่วนที่แรเงาคือ เหตุการณ์ที่ $\{X+Y > 1\}$



$$\therefore\ P(X+Y>1) = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 4xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 4x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{1-x}^1 dx$$

$$= \int_0^1 4x\left[\frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx$$

$$= \frac{10}{12}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.19 จงแสดงว่าถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติที่มี pdf ดังต่อไปนี้

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ไม่เป็นอิสระต่อกัน

วิธีทำ หา Marginal pdf ของ X และของ Y จะได้

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\therefore\ f_X(x)\cdot f_Y(y) = (4x^3)\left[4y(1-y^2)\right]$$
$$= 16x^3y(1-y^2)$$
$$\neq f(x, y)$$

แสดงว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน **ตอบ**

นิยาม 1. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติแบบไม่ต่อเนื่องที่มี joint probability distribution function เป็น $P(x_i, y_j)$ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรเชิงสุ่ม Y เมื่อกำหนด $X = x_i$ (Conditional probability distribution function of Y, given that $X = x_i$) คือ

$$P_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)};\ P(x_i) > 0$$

2. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่องที่มี joint probability density function เป็น f(x, y) ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด $X = x_i$ (Conditional probability density function หรือ Conditional pdf of Y given that $X = x_i$) คือ

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},\ f_X(x) > 0 \text{ และ } f_X(x) \text{ คือ marginal pdf ของ } X$$

ซึ่งฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไขดังกล่าวจะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง $P_{Y|X}(y_i|x_i)$ ต้องมีคุณสมบัติดังนี้คือ

1. $P_{Y|X}(y_j|x_i) \geqslant 0$
2. $\sum_j P_{Y|X}(y_j|x_i) = 1$

$$\because\ \sum_j P_{Y|X}(y_j|x_i) = \sum_j \frac{P(x_i, y_j)}{P_X(x_i)}$$
$$= \frac{P_X(x_i)}{P_X(x_i)}$$
$$= 1$$

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องคือ $f_{Y|X}(y|x)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f_{Y|X}(y|x) \geqslant 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)dy = 1$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$$

$$= \frac{f_X(x)}{f_X(x)}$$

$$= 1$$

ทำนองเดียวกันสามารถหา $P_{Y|X}(x_i|y_i)$ และ $f_{X|Y}(x|y)$ ได้ดังนี้

$$P_{X|Y}(x_i|y_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)}; \qquad P_Y(y_j) > 0$$

และ
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}; \qquad f_Y(y) > 0$$

ตัวอย่างที่ 2.20 กำหนดให้ f(x, y) เป็นดังนี้

$$f(x, y) = \frac{4}{5}\frac{(x+y)}{x^3}, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 1 \leqslant x < \infty$$

1. จงหา $P\left[0 < Y < \frac{1}{2} | X = 2\right]$

2. A มีค่าเท่าใดที่ทำให้ $P\left(0 < Y < \frac{1}{2} | X > A\right) = \frac{5}{16}$

วิธีทำ 1. Conditional pdf ของ Y given X คือ $\frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

$\therefore$ ต้องหา Marginal pdf ของ X ก่อนดังนี้

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{4}{5}\frac{(x+y)}{x^3} dy$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{x^2}y + \frac{y^2}{2x^3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\right); \ 1 \leqslant x < \infty$$

$\therefore$ Condition pdf ของ Y given คือ

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\frac{(x+y)}{x^3}}{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^3}\right)}$$

$$= \frac{2(x+y)}{(2x+1)}; \qquad 0 \leqslant y < 1$$

$$\therefore\ P\left[0 < Y < \frac{1}{2} | X = 2\right] = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y|X = 2)dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(2+y)}{(2\times 2)+1}dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(2+y)}{5}\,dy$$

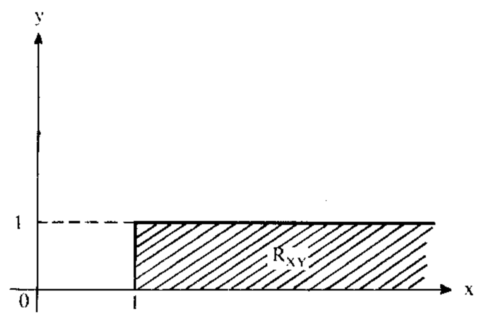
$$= \frac{2}{5}\left(2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{9}{20}$$

ตอบ

2.



การที่จะหา $P\left[0< Y< \frac{1}{2} \middle| X > A\right]$ จะต้องหา $P\left[\left(0< Y< \frac{1}{2}\right) \cap (X > A)\right]$ และ $P[X > A]$ ก่อนดังนี้

$$P[X > A] = \int_A^\infty \frac{4}{5}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3}\right) dx$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{4A^2}\right)$$

และจาก joint density function

$$P\left[\left(0< Y< \frac{1}{2}\right) \cap (X > A)\right] = \int_A^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{5} \frac{(x+y)}{x^3} dydx$$

$$= \frac{4}{5}\int_A^\infty \left(\frac{1}{x^2}y + \frac{y^2}{2x^3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{5}\int_A^\infty \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8x^3}\right) dx$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{16A^2}\right)$$

$$\therefore\ P\left[0< Y< \frac{1}{2} \middle| X > A\right] = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{16A^2}\right)}{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{4A^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{8A+1}{4A+1}\right)$$

ดังนั้น ค่าของ A ที่ทำให้ $P\left[0< Y< \frac{1}{2} \middle| X \geq A\right] = \frac{5}{16}$ หาได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{4}\left(\frac{8A+1}{4A+1}\right) = \frac{5}{16}$$

$$\frac{8A+1}{4A+1} = \frac{20}{16}$$

$$16(8A+1) = 20(4A+1)$$

$$128A + 16 = 80A + 20$$
$$128A + 16 - 80A - 20 = 0$$
$$48A - 4 = 0$$
$$48A = 4$$
$$\therefore A = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.21 ให้ $f(x, y) = \begin{cases} cx^2(8-y); & x < y < 2x \\ & 0 \leqslant x < 2 \\ 0; & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$

1. จงหา Marginal pdf ของ X
2. จงหา Conditional pdf ของ $f_{Y|X}(y|x)$

วิธีทำ 1. $f_X(x) = \int_x^{2x} cx^2(8-y)dy = c(8x^2y - \frac{x^2y^2}{2})\Big|_x^{2x}$

$$= \begin{cases} c\left(8x^3 - \frac{3}{2}x^4\right); & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$ **ตอบ**

2. $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

$$= \frac{cx^2(8-y)}{c\left(8x^3 - \frac{3}{2}x^4\right)} = \frac{cx^2(8-y)}{cx^3\left(8 - \frac{3}{2}x\right)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2(8-y)}{x(16-3x)}, & x < y < 2x \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ตอบ

นิยาม 1. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบบไม่ต่อเนื่องแล้ว

$$E(Y|X = x_i) = \sum_j y_i P_{Y|X}(y_j|x_i)$$

2. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่องแล้ว

$$E(Y|X = x) = E(Y|x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$$

และถ้า X, Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้

ก. กรณีที่ X, Y เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

$$P_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P_X(x_i)}$$

$$= \frac{P_X(x_i) \cdot P_Y(y_j)}{P_X(x_i)}$$

$$= P_Y(y_j)$$

ข. กรณีที่ X, Y เป็นแบบต่อเนื่อง

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

$$= \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)}$$

$$= f_Y(y)$$

ตัวอย่างที่ 2.22 จงหาค่า $E(Y|x)$ ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติที่มี

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2(8-y); & x < y < 2x \\ & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0; \quad \text{อื่น ๆ} & \end{cases}$$

จากตัวอย่างที่ 2.21 หา $f_{Y|X}(y|x)$ ได้แล้วเท่ากับ

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2(8-y)}{x(16-3x)}; & x < y < 2x \\ 0; \quad \text{อื่น ๆ} & \end{cases}$$

$$\therefore \ E(Y|x) = \int_x^{2x} y\left[\frac{2(8-y)}{x(16-3x)}\right]dy$$

$$= \frac{2}{x(16-3x)}\left(4y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_x^{2x}$$

$$= \frac{2x(36-7x)}{3(16-3x)}, \quad 0 < x < 2$$

2.9 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และการถดถอยของค่าเฉลี่ย

(The Correlation Coefficient and Regression of the Mean)

ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติแบบต่อเนื่องที่มี pdf เป็น f(x, y)

Moment ที่ (i, j) ของตัวแปรเชิงสุ่ม (X, y) เขียนได้ดังนี้

$$E(X^iY^j) = \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} x^iy^jf(x,y)dxdy$$

และ central moment ที่ (i, j) คือ

$$E\left[\{X-E(X)\}^i\{Y-E(Y)\}^j\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-E(X)\right]^2\left[y-E(Y)\right]^2\cdot f(x, y)dxdy$$

ถ้า X และ Y เป็นอิสระกัน สำหรับ 2 ฟังก์ชันใด ๆ G(•) และ H(•) จะได้

$$\begin{aligned} E\left[\ G(X)\cdot H(Y)\right] &= \int\int G(x)H(y)f(x,\ y)dxdy \\ &= \int G(x)f_X(x)dx \int H(y)f_Y(y)dy \\ &= E\left[G(X)\right]E\left[H(Y)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้นถ้า X และ Y เป็นอิสระกัน จะได้

$$E\left[\{X-E(X)\}^i\{Y-E(Y)\}^j\right] = E\left[\{X-E(X)\}^i\right]E\left[\{Y-E(Y)\}^j\right]$$

ซึ่งคุณสมบัติของ joint pdf ที่มี central moment ที่ (1, 1) เราเรียกว่าความแปรปรวนร่วม (Covariance) ของ X และ Y และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย Cov(X, Y) ดังนั้น

$$\begin{aligned} Cov(X,\ Y) &= E\left[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}\right] \\ &= E(XY)\quad E(X)E(Y) \end{aligned}$$

นิยาม สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย ρ_{XY} โดยที่

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \frac{E\left[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}\right]}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\ &= \frac{Cov(X,\ Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \end{aligned}$$

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y จะเรียกว่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน (Uncorrelated) ถ้า

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \text{ หรือ}$$

$$E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

และจะเห็นได้ว่า ถ้า x และ Y เป็นอิสระกันจะได้

$$E[\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}] = E\{X - E(X)\} E\{Y - E(Y)\}$$

$$0$$

แสดงว่าถ้า X และ Y เป็นอิสระกัน จะได้ว่า X และ Y ไม่มีความสัมพันธ์กัน แต่ในทางกลับกันอาจจะไม่เป็นจริงเสมอไปที่ว่าถ้า X และ Y ไม่มีความสัมพันธ์กันแล้ว X และ Y จะเป็นอิสระต่อกัน

ค่าของ ρ_{XY} จะอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 หรือเขียนแทนได้ดังนี้

$$-1 \leqslant \rho_{XY} \leqslant 1$$

ตัวอย่างที่ 2.23 กำหนดให้ $f_{XY}(x, y)$ เป็นดังนี้

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y), & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

1. จงหา Cov(X, Y)
2. จงหา ρ_{XY}

วิธีทำ การที่จะหา Cov(X, Y) และ ρ_{XY} เราจะต้องหา E(X), E(Y), E(XY), V(X) และ V(Y) ก่อนแล้วแทนค่าในสูตร

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\therefore f_X(x) = \int_0 6xy(2-x-y)dy$$

$$= \begin{cases} x(4-3x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 6xy(2 - x - y)dx$$

$$= \begin{cases} y(4-3y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\therefore E(X) = \int_0^1 x \cdot x(4-3x)dx = \frac{7}{12}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot y(4-3y)dy = \frac{7}{12}$$

$$V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 x(4-3x)dx = V(Y)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{196}{144} - \frac{819}{144}x^2 + \frac{15}{2}x^3 - 3x^4\right) dx$$

$$= \frac{196}{144 \times 2}x^2\Big|_0^1 - \frac{819}{144 \times 3}x^3\Big|_0^1 + \frac{15}{2 \times 4}x^4\Big|_0^1 - \frac{3}{5}x^5\Big|_0^1$$

$$= -\frac{175}{144} + \frac{51}{40} = \frac{7000 + 7344}{144x40}$$

$$= \frac{344}{144x40} = \frac{43}{720}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy \cdot 6xy(2 - x - y)dxdy$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\therefore Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{7}{12}\right)$$

$$= -\frac{1}{144}$$ **ตอบ**

จาก $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

แทนค่าจะได้ $\rho_{XY} = \dfrac{-\dfrac{1}{144}}{\sqrt{\left(\dfrac{43}{720}\right)\left(\dfrac{43}{720}\right)}} = \dfrac{-\dfrac{1}{144}}{\dfrac{43}{720}}$

$= -\dfrac{5}{43}$ ตอบ

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. ให้ตรวจสอบดูว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น cdf หรือไม่ แล้วให้หา pdf

ก. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{3}{2}(1-x), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ข. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

2. จงแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น pdf แล้วให้หา cdf

ก. $$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ข. $$f(x) = \begin{cases} 10e^{-10x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

3. จงแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น pdf แล้วจงหา cdf

ก. $$f(x) \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ข. $$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x+1)^2, & -1 < x < 0 \\ \frac{3}{2}(1-x)^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

4. ให้ X เป็น Continuous random variable ที่มี pdf ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0.1, & -5 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ถ้า $Y = X^2$ จงหา cdf และ pdf ของ Y

5. จากโจทย์ข้อ (4) ถ้า pdf ของ X เป็น

$$f(x) = \begin{cases} 0.1, & -1 \leqslant x \leqslant 9 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ถ้า $Y = X^2$ จงหา cdf และ pdf ของ Y

6. สำหรับ Continuous random variable X ถ้าให้ $P(X > t) = e^{-\mu t}(\mu t + 1),\ \mu > 0,\ t \geqslant 0$

จงหา ก. $F(x)$ ข. $f(x)$ ค. $P\left(X > \frac{1}{\mu}\right)$

7. สำหรับค่าคงที่ b ค่าคงที่ของ a จะเป็นเท่าใด ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-bx}, & x > \frac{1}{b} > 0 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เป็น pdf จงหา

ก. cdf ข. Mean ค. ความแปรปรวน

8. จงหา Mean, Variance และ cdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มี pdf ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & x \geqslant 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

9. ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}\exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

จงหา Mean และ Variance

10. ให้ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x^2}{a^3}\exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

จงหา Mean และ Variance

11. ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf เป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & o < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา Moment generating function ของ X และจาก mgf จงหา Mean และ Variance

12. ให้ $f_T(t) = \begin{cases} 10 \exp(-10t), & 0 \leqslant t \\ 0, & o > t \end{cases}$

จงหา 4 Moment แรกของ t จาก Moment generating function ของมัน

13. ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มี pdf เป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

14. pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{1}{2}, & 4 < x \leqslant 5 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา Mean และ Variance จาก Moment generating function

15. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน แทนความยาวและความกว้างของชิ้นไม้ ซึ่งมี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 9 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 8 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา ก. ความแปรปรวนของพื้นที่ของไม้ XY

ข. ความแปรปรวนของปริมาตรของกล่องซึ่งทำจากชิ้นไม้นั้น XY^2

16. กำหนดให้ f(x, y) เป็นดังนี้

$$f(x, y) = \frac{10^8}{x^2y^2}, \quad 10{,}000 \leqslant x < \infty, \quad 10{,}000 \leqslant y < \infty$$

จงหา joint cdf

17. ให้ X และ Y เป็นอิสระต่อกันซึ่งมี pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 40 \leqslant x \leqslant 42 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 90 \leqslant y \leqslant 100 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $P\left[Y < 95 | X + Y > 135\right]$

18. กำหนดตาราง probability distribution function ของตัวแปรเชิงสุ่ม (X, Y) 2 มิติ แบบไม่ต่อเนื่องดังนี้

y \ x	1	2	4
2	0.1	0.2	0.2
3	0.04	0.05	0.08
4	0.06	0.15	0.12

ก. จงหา F(x, y) ข. $E(X|Y = 3)$

19. $$f(x, y) = \begin{cases} cy^2, & 0 < |y| < x,\ 0 < x < 1 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ก. จงหา $P\left[0 < Y < \frac{1}{8} \middle| X = \frac{1}{4}\right]$

ข. จงหาค่าของ a ที่ทำให้ $P\left[-a < Y < a \middle| X = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$ เป็นจริง

20. $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{32}(x^2 + y^2), & 0 \leqslant x,\ y \geqslant 2 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา ρ_{XY}

21. $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{16}\left(x^2 + y^2\right), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2 \\ 0, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา ρ_{XY}

22. กำหนดตารางต่อไปนี้

x \ y	-2	-1	1	2
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

จงแสดงให้เห็นว่า X, Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน

23. ให้ X_1, X_2 มี joint pdf ดังนี้

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 x_2^2}, \quad 1 < x_1 < \infty$$
$$1 < x_2 < \infty$$

จงหา joint pdf ของ Y_1 และ Y_2 เมื่อ $Y_1 = X_1X_2$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$