บทที่ 7 การวิเคราะห์ความแปรปรวน การวิเคราะห์ความแปรปรวน

Analysis of Variance, ANOVA

Nothing is Good or Bad but by Comparison.
Thomas Fuller

การวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นเครื่องมือทางสถิติที่มีประสิทธิภาพสำหรับวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองซึ่งวางแผนไว้ดีแล้ว R.A. Fisher เป็นผู้พัฒนาวิธีการนี้ขึ้นมา และนำไปใช้กันแพร่หลายในการวิเคราะห์ข้อมูลจากสาขาวิชาต่าง ๆ การวิเคราะห์ความแปรปรวนนิยามได้ดังนี้

การวิเคราะห์ความแปรปรวน เป็นวิธีการทางสถิติแบบหนึ่ง (Collection of Statistical Methods) ที่ใช้แยกความผันแปรทั้งหมด (Total Variations) ของข้อมูลที่ได้จากการทดลองซึ่งวางแผนไว้ดีแล้วนั้นออกเป็นส่วน ๆ ตามแหล่งที่ก่อให้เกิดความผันแปร (Sources of Variations) และยังใช้กะประมาณ หรือทดสอบนัยสำคัญของผลกระทบ (Effects) ของส่วนต่าง ๆ เหล่านี้ด้วย

แหล่งของความผันแปรที่ต้องการกะประมาณ จะมีดังนี้

(1) ความผันแปรเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experimental Error) หรือที่เรียกกันว่า ความผันแปรที่อธิบายไม่ได้ (Unexplained Variation)

(2) ความผันแปรเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง รวมกับ ความผันแปรใด ๆ อันเนื่องมาจากกรรมวิธีทดลอง (Experimental Treatment) ที่ใช้กระทำการทดลอง

(3) ความผันแปรเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง รวมกับ ความผันแปรใด ๆ จากแหล่งความผันแปรอื่น ๆ

ความผันแปรใน (2) และ (3) จะเรียกว่า ความผันแปรอธิบายได้ (Explained Variation)

7.1 ตัวแบบของการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA Model)

ในการประยุกต์เทคนิคการวิเคราะห์ความแปรปรวนต่อข้อมูลที่ได้จากการทดลองนั้น สิ่งแรกที่ต้องกระทำก็คือ ต้องเขียนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) แทนข้อมูลนั้น ซึ่งประกอบ 2 ส่วน ดังนี้

(1) สมการแทนข้อมูลแต่ละชุด สำหรับสมการนั้นจะเป็นแบบเชิงเส้น (Linear) ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าข้อมูลแต่ละหน่วยประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ อะไรบ้าง

(2) คุณสมบัติ หรือข้อกำหนด (Assumptions) ของส่วนต่าง ๆ ในสมการแทนข้อมูลนั้นข้อกำหนดต่าง ๆ นั้นจะถือเป็นรากฐานในการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อกำหนดในการวิเคราะห์ความแปรปรวนมีดังนี้

(ก) กรรมวิธีและกรรมวิธีผสม (Treatment and Treatment Combinations) จะมีการแจกแจงปกติที่มีความแปรปรวนเท่ากันหมด

(ข) ผลกระทบของกรรมวิธีและสิ่งแวดล้อมรวมกันได้

(ค) ความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเป็นอิสระแก่กัน และมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 กับความแปรปรวนเป็น σ^2 เท่ากันหมด

ถ้าขาดข้อกำหนดเหล่านี้ จะทำให้การทดสอบสมมติฐานโดยใช้ตัวสถิติทดสอบ F มีการสรุปผลหรืออ้างอิงที่ไว้ใจไม่ได้

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนมีอยู่ 3 แบบดังนี้

(1) ตัวแบบผลกระทบชนิดคงที่ (Fixed Effects Model or Model I) เป็นตัวแบบที่ถือว่ากรรมวิธีทดลองเป็นกรรมวิธีทั้งหมดที่สนใจ นั่นคือถือว่ากรรมวิธีที่จะสังเกตเป็นเสมือนประชากร

(2) ตัวแบบกระทบชนิดสุ่ม (Random Effects Model or Model II) เป็นตัวแบบที่ใช้อ้างอิงเกี่ยวกับกรรมวิธีต่าง ๆ ทั้งหมดโดยใช้ตัวอย่างสุ่มของกรรมวิธีทดลองที่เลือกจากประชากรของกรรมวิธีนั้นคือกรรมวิธีจะเป็นตัวอย่างสุ่มในตัวแบบ นั่นเอง

(3) ตัวแบบผสม (Mixed Model or Model III) เป็นส่วนผสมของทั้งสองตัวแบบในตัวแบบชนิดนี้จะต้องมีแฟคเตอร์ที่จะศึกษาอย่างน้อยสองแฟคเตอร์

ต่อไปนี้เราจะขอกล่าวเฉพาะตัวแบบ I เท่านั้น

7.2 ศัพท์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน

(1) การทดลอง (Experiment) เป็นการสอบถามหรือแสวงหาคำตอบ (Inquiry) ที่ได้ตระเตรียมไว้แล้ว เพื่อที่จะค้นหาข้อเท็จจริงใหม่ ๆ หรือเพื่อจะสนับสนุนหรือขัดแย้งกับผลที่ได้จากการทดลองที่เคยทำมาแล้ว

(2) การวางแผนการทดลอง (Experimental Design) หมายถึง

1. การเลือกกรรมวิธีเพื่อจะศึกษาถึงผลกระทบ (effect) จากกรรมวิธีนั้น

2. การวางโครงร่าง (Layout) สำหรับหน่วยทดลองที่กรรมวิธีจะใช้ และ

3. การกำหนดกฎ หรือวิธีการที่กรรมวิธีจะแจกจ่ายไปตามหน่วยทดลอง นั่นคือกำหนดวิธีการว่าหน่วยทดลองจะได้รับกรรมวิธีอย่างไร

(3) หน่วยทดลอง (Experimental Unit or Plot) เป็นหน่วยหรือกลุ่มของหน่วยที่จะได้รับกรรมวิธีอย่างเดียวกัน ส่วนหน่วยตัวอย่าง (Sampling Unit) นั้นเป็นส่วนหนึ่ง (Fraction) ของหน่วยทดลอง

(4) กรรมวิธี (Treatment) เป็นวิธีการ หรือสิ่งที่ผู้ทำการทดลองนำไปใช้กับหน่วยทดลองเพื่อวัดผลกระทบ หรือเพื่อเปรียบเทียบกับกรรมวิธีอื่น ๆ

(5) แฟคเตอร์ คือลักษณะหรืออำนาจแรง (Feature or Force) ของสภาพการต่าง ๆ ที่ผู้ทำการทดลองกำหนดขึ้น กรรมวิธีต่าง ๆ ที่มีสภาพการแบบเดียวกัน เราก็ถือว่าเป็นแฟคเตอร์

หนึ่งแฟคเตอร์แบ่งได้ 2 ชนิด คือ

– แฟคเตอร์แสดงปริมาณ ซึ่งมีค่าเรียงได้ตามขนาด เช่น อุณหภูมิ ความดัน

– แฟคเตอร์แสดงคุณภาพ ซึ่งไม่สามารถเรียงค่าได้ตามขนาด เช่น นม, ผงซักฟอก

(6) ระดับของแฟคเตอร์ คือค่าต่าง ๆ ของแฟคเตอร์ที่ใช้ในการทดลอง

(7) กรรมวิธีผสม (Treatment Combinations) เป็นส่วนผสมของระดับต่าง ๆ ของแฟคเตอร์ทั้งหมดที่ใช้ในการทดลอง

(8) ผลหลัก (Main Effect) เป็นผลกระทบของแฟคเตอร์ใด ๆ อันเกิดจากขนาดของความเปลี่ยนแปลงของข้อมูล เมื่อเปลี่ยนระดับของแฟคเตอร์

(9) ผลร่วม (Interaction) เป็นผลกระทบของแฟคเตอร์ทั้งสอง ซึ่งพิจารณาจากผลกระทบของแฟคเตอร์หนึ่งในระดับต่าง ๆ ของอีกแฟคเตอร์หนึ่ง

(10) ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experimental Error) เป็นมาตราวัดความผันแปรในหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีอย่างเดียวกัน ความผันแปรนี้อาจจะเนื่องจากสาเหตุใหญ่ ๆ 2 ประการ คือ

– ความผันแปรภายใน (Internal Variability) นั่นคือ เนื่องจากสิ่งที่ได้รับกรรมวิธีนั้นแตกต่างกันเอง นั่นคือเป็นความแตกต่างที่มีอยู่ในสิ่งทดลองนั้นแล้วก่อนการทดลอง

– ความผันแปรภายนอก (Extraneous Variability) เป็นความผันแปรอื่น ๆ ทั้งหมดที่มีผลต่อการสนองตอบของหน่วยทดลองต่อกรรมวิธี ซึ่งมีทั้งควบคุมได้ (การแบ่งประเภทหน่วยทดลอง) และควบคุมไม่ได้ (ขึ้นอยู่กับหลักการสุ่ม)

(11) ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Error) เป็นความผันแปรเนื่องมาจากข้อมูล หรือค่าสังเกต (Observation) ของหน่วยทดลองเดียวกัน

(12) การซ้ำ (Replication) ได้แก่การที่ใช้กรรมวิธีมากกว่าครั้งหนึ่งในการทดลองเดียวกัน

7.3 การแบ่งประเภทของค่าสังเกต (Classification of Observations)

ในการวิเคราะห์ข้อมูลนั้น ถ้าข้อมูลที่ได้จากการทดลองสามารถแบ่งประเภทหรือแจกแจงโดยใช้หลักเกณฑ์แบ่งประเภทอย่างเดียว (Single Criterion) เช่นชนิดของพันธ์ข้าวประเภทของปุ๋ย หรือวิธีการของกระบวนการผลิต เป็นต้น เราจะเรียกการวิเคราะห์นั้นว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-way ANOVA or One-way Classification)

ถ้าข้อมูลนั้นได้ใช้เกณฑ์แบ่งประเภทถึงสองอย่างมา แจกแจงก็จะเรียกว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two-way ANOVA) เช่นในเกณฑ์ชนิดของพันธ์ข้าวกับเกณฑ์ประเภทของปุ๋ย เป็นต้นและถ้าข้อมูลที่ได้จากการทดลองใช้เกณฑ์ของการแบ่งประเภทตั้งแต่ 3 อย่างขึ้นไป จะเรียกว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายทาง (Multiway ANOVA)

7.4 การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-way Analysis of Variance) ข้อมูลที่ได้จากการทดลองนั้นเป็นตัวอย่างสุ่มที่เรียกมาจาก k ประชากร (กรรมวิธี) โดยมีขนาดตัวอย่างเป็น $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับและสมมติว่า ถ้า k ประชากรเป็นอิสระแก่กันและต่างก็มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ และมีความแปรปรวน σ^2 เท่ากันหมด ดังนั้นข้อมูลที่ได้จากการทดลองจะสรุปได้ดังนี้

กรรมวิธี	T_1	T_2	T_j	T_k	
	x_{12}	x_{1j}	x_{1k}	x_{1k}	
	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2k}	
	$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	$x_{n_j j}$	$x_{n_k k}$	
ผลรวม	x_1	x_2	x_j	x_k	x
ค่าเฉลี่ย	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_k$	$\bar{x}$

ในเมื่อ x_{ij} แทนค่าสังเกตที่ i ในกรรมวิธี j x แทนผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมดในทุกกรรมวิธี $\bar{x}_j$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตในกรรมวิธี j x_j แทนผลรวมของค่าสังเกตเฉพาะกรรมวิธี j $\bar{x}$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทั้งหมด และ n_j แทนจำนวนค่าสังเกตในกรรมวิธี j

สำหรับสมมติฐานเกี่ยวกับประชากร หรือกรรมวิธีต่าง ๆ ซึ่งเราต้องการจะทดสอบหรือเปรียบเทียบ จะเป็นดังนี้

$Ho : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \cdots = \mu_k = \mu$ หรือ

$Ho : \mu_j = \mu \; ; j = 1,2,..,k$

$Ha : \mu_j$ ไม่เท่ากันหมด ตัวแบบของข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างสุ่มนี้ คือ

$$x_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,n_j$$
$$= \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \qquad j = 1,2,\ldots,k$$

ในเมื่อ x_{ij} เป็นค่าของข้อมูลจากหน่วยทดลองที่ i เมื่อได้รับกรรมวิธี j μ ค่าเฉลี่ยรวบยอดของประชากรทั้งหมด α_j เป็นผลกระทบ (effect) จากการใช้กรรมวิธี j ε_{ij} เป็นความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเมื่อใช้กรรมวิธี j กับหน่วยทดลองที่ i k เป็นจำนวนกรรมวิธีทั้งหมด และ n_j เป็นจำนวนครั้งที่กรรมวิธี j ใช้ในการทดลอง

ก. ข้อกำหนดของตัวแบบ I ตัวแบบ 1 มีข้อกำหนดดังนี้

(1) x_{ij} เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย μ_j และความแปรปรวน σ^2

(2) $\mu_j = \mu + \alpha_j$ โดยที่ $\mu = \Sigma_j \mu_j / k$ และ $\alpha_j = \mu_j - \mu$ นั่นคือ $\sum_j n_j \alpha_j = 0$

(3) Σ_{ij} มีความแปรปรวน σ^2 เท่ากันหมด และค่าเฉลี่ยเป็น 0

(4) X_{ij} มีการแจกแจงปกติซึ่งเป็นอิสระกัน

ในตัวแบบนี้เราถือว่า μ และ α_j เป็นตัวคงที่ที่มี $\sum_j n_j \alpha_j = 0$ และ $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$

จากผลกระทบของกรรมวิธี $\alpha_j = \mu_j - \mu$ ทำให้สมมติฐาน $Ho: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu$ เขียนใหม่ได้เป็น

$Ho: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ หรือ

$Ho: \alpha_j = 0 \,;\, j = 1,2,\ldots,k$

$Ha: \alpha_j$ ไม่เท่ากับศูนย์หมด

ข. วิธีวิเคราะห์ข้อมูล จากสมการแสดงข้อมูล $X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$ เราจะเห็นได้ว่าข้อมูล X_{ij} ใด ๆ ที่เป็นผลของการทดลอง สามารถจะเขียนให้อยู่ในรูป

$X_{ij} = \bar{X} + (\bar{X}_j - \bar{X}) + (X_{ij} - \bar{X}_j)$ นั่นคือ X_{ij} ใด ๆ เป็นผลจาก

(1) $\bar{X}$ ค่าเฉลี่ยรวบยอดของข้อมูลที่ศึกษาได้

(2) $\bar{X}_j - \bar{X}$ ผลกระทบของกรรมวิธี j และ

(3) $X_{ij} - \bar{X}_j$ ผลกระทบของตัวแปรเชิงสุ่มที่หน่วยทดลอง i ตอบสนองต่อกรรมวิธี j

สำหรับ $(\bar{X}_j - \bar{X})$ จะใช้วัดความผันแปรระหว่างหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีต่างกัน และ $(X_{ij} - \bar{X}_j)$ จะเป็นตัววัดความผันแปรระหว่างหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีเดียวกัน

ดังนั้น เราสามารถแยกความผันแปรทั้งหมดของข้อมูลออกได้เป็นดังนี้

$$\sum_{i,j}(X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{i,j}(\bar{X}_j - \bar{X})^2 + \sum_{i,j}(X_{ij} - \bar{X}_j)^2$$

หรือ

$$\sum_{i,j} X_{ij}^2 - C = \left(\sum_j X_j^2/n_j - C\right) + \left(\sum_{i,j} X_{ij}^2 - \sum_j X_j^2/n_j\right)$$

ในเมื่อ $C = \left(\sum_{i,j} X_{ij}\right)^2/n; \qquad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

นั่นคือ ความผันแปรทั้งหมด เท่ากับ ความผันแปรเนื่องจากกรรมวิธี กับ ความผันแปรภายในกรรมวิธี โดยการใช้สัญญลักษณ์เราได้

SST = SST + SSE โดยมีองศาความเป็นอิสระดังนี้ $n-1 = (k+1) + (n-k)$

ความผันแปรต่อหน่วยซึ่งเรียกว่ากำลังสองเฉลี่ย (Mean Square, MS) กำหนดว่า

$$MS = SS/df$$

นั้นจะเป็นค่าประมาณของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน σ^2 ทั้งสามเทอม นั่นคือ

(1) $MSE = SSE/(n-k)$ เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 ไม่ว่า Ho จะเป็นจริงหรือไม่ เพราะ MSE จะวัดความผันแปรแบบสุ่มอย่างเดียว

(2) MSTr = SSTr/(k-1) จะเป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 ก็ต่อเมื่อ Ho เป็นจริง เมื่อผลกระทบของกรรม วิธีไม่เป็นศูนย์ MST_r จะใช้เป็นตัวประมาณค่า ปริมาณ $\sigma^2 + \Sigma_j n_j \alpha_j^2/(k-1)$ ซึ่ง $\Sigma n_j \alpha_j^2/(k-1)$ เป็นตัวเอียงทางบวก (Positive bias) และใช้วัดขนาดหรือดีกรีของความแตกต่าง ดังนั้น เราจึงหวังว่าถ้า Ho เป็นจริงแล้ว F = MSTr/MSE จะเท่ากับ 1 หรือใกล้ 1 และ หวังว่าอัตราส่วน F นี้จะมากกว่า 1 อย่างมีนัยสำคัญถ้า Ho เป็นเท็จ

(3) MST = SST/(n-1) จะเป็นตัวประมาณค่าแบบเอียงเฉของ σ^2 เช่นเดียวกับ MSTr แต่ถ้า Ho เป็นจริงจะเป็นตัวไม่เอียงเฉของ σ^2

สำหรับอัตราส่วน F = MSTr/MSE นี้จะมีการแจกแจงแบบ F ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ (df) เท่ากับ (k-1), (n-k) ดังนั้นในการทดสอบ Ho : $\alpha_j = 0$ เราจึงเปรียบเทียบค่า F กับค่าจากตาราง F ที่มี df = k-1, n-k ณ ระดับนัยสำคัญและที่ต้องการ ถ้า F มากกว่าค่าในตาราง เราก็ปฏิเสธ Ho และสรุปว่า กรรมวิธีต่าง ๆ มีผลกระทบทำให้ข้อมูลที่ได้ต่างกัน

ผลสรุปของการคำนวณเทอมต่าง ๆ ที่กล่าวมา มักจะสรุปในตารางที่เรียกว่า **ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน** (ANOVA table) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

ANOVA Table

แหล่งความผันแปร SOV	องศาความเป็นอิสระ df	ผลรวมกำลังสอง SS	กำลังสองเฉลี่ย MS	อัตราส่วน F F-ratio
กรรมวิธี	k - 1	SSTr	MSTr	MSTr/MSE
ความคลาดเคลื่อน	n - k	SSE	MSE	
ทั้งหมด	n - 1	SST		

หมายเหตุ อัตราส่วน F ในตารางนี้ ถ้ามีนัยสำคัญ ณ $\alpha = .05$ เราจะใช้ * กำกับตัวเลขเหนือ F ไว้ แต่ถ้า $\alpha = .01$ เราใช้ ** กำกับ ซึ่งแสดงว่ามีนัยสำคัญยิ่งและ ณ $\alpha = .001$ เราใช้ *** ซึ่งจะมีนัยสำคัญอย่างยิ่ง

ตัวอย่าง บริษัทผู้ผลิตได้ซื้อเครื่องจักรมาใหม่ 4 เครื่อง ซึ่งทำจากโรงงานต่างกัน และต้องการทราบว่าเครื่องไหนจะผลิตสินค้าได้เร็วกว่า บริษัทจึงทำการทดลอง และสังเกตสินค้าที่ผลิตได้ใน 1 ชั่วโมง จะเป็นดังนี้

เครื่องจักร

ค่าสังเกต	ก	ข	ค	ง
1	60	80	97	67
2	80	81	84	84

3	69	73	93	90
4	65	69	79	78
5		75	92	61
6		72		
ผลรวม	274	450	445	380

ผลสรุป ณ α = .05 จะเป็นอย่างไร 1549

สมการแสดงข้อมูลจากการทดลองนี้เขียนได้เป็น

$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$

ในเมือ $i = 1,2,3,4;\quad j = 1,2,\ldots n_j,\ n_1=4,\ n_2 = 6,\ n_3 = n_4 = 5$

ขั้นในการทดสอบทำได้ดังนี้

(1) $H_o : \alpha_j = 0 \qquad j = 1,2,3,4$

$H_a : \alpha_j$ ไม่เท่ากันหมด

(2) $\alpha = .05\ n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = n_4 = 5$

(3) ตัวสถิติทดสอบ F = MSTr/MSE

ปฏิเสธ Ho61 $F > F_{1-.05}(4-1, 20-4) = 3.24$

(4) คำนวณค่าประมาณของเทอมต่าง ๆ

$C = (\sum_{i,j} X_{ij})^2/n = (1549)^2/20$

$= 119970$

$SST = \sum X_{ij}^2 - C$

$= (60^2+80+.\,.\,, +78^2+61^2) - C$

$= 122115-C = 2145$

$SSTr = \sum_j X_j^2/n_j - C$

$= (274)^2/4+(450)^2/6+(445)^2/5+(380)^2/5 - C$

$= 121004 \quad C = 1034$

$SSE = SST - SStr = 2145-1034$

$= 1111$

สรุป การคำนวณในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้เป็น

Anova Table

SOV	df	SS	MS	F
เครื่องจักร	4-1 = 3	1034	**344.67**	4.96*
ความคลาดเคลื่อน	20-4 = 16	1111	**69.44**	
ทั้งหมด	20-1 = 19	2145		

(5) ปฏิเสธ Ho เพราะ F > 3.24 ซึ่งแสดงว่า เครื่องจักร 4 เครื่องมีความเร็วเฉลี่ยในการผลิตแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ หรือผลกระทบของเครื่องจักรมีนัยสำคัญ

ตามปกติการวิเคราะห์ความแปรปรวนเพียงแต่แสดงว่า ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีมีนัยสำคัญหรือไม่ ไม่ได้บอกว่ากรรมวิธีใดบ้างมีค่าเฉลี่ยต่างกัน เมื่อการทดสอบแบบ F แสดงว่าความแตกต่างมีนัยสำคัญ เราก็อยากทราบว่าค่าเฉลี่ยไหนทำให้เกิดความแตกต่าง วิธีการง่าย ๆ ที่จะช่วยให้ทราบก็โดย **การทดสอบแบบคู่** (Pairwise Test) หรือ**วิธีผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด** (Least Significant Difference) หรือผลต่างวิกฤต (Critical Difference)

สำหรับกรณีที่ไม่สามารถปฏิเสธ Ho ได้แล้ว โดยทั่วไปจะไม่เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากร (กรรมวิธี) ต่าง ๆ อีก นอกจากว่าได้วางแผนเปรียบเทียบไว้ก่อนแล้ว

การทดสอบแบบคู่นั้นมีเกณฑ์ในการตัดสินใจเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยคู่ โต ดังนี้

$$\text{Ha: } \mu_1 \neq \mu_j \quad \text{ถ้า} \quad \left| \bar{X}_i - \bar{X}_j \right| > \text{LSD}(\alpha)$$

ในเมื่อ $\text{LSD}(\alpha) = \sqrt{F_{\alpha}^{(1,\nu)}\ \text{MSE}\left(1/n_i + 1/n_j\right)}$; $\nu = n-k$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราหาผลต่าง $\left| \bar{X}_i - \bar{X}_j \right|$ ได้ดังตารางต่อไปนี้

$\bar{X}_1 = 274/4 = 68.50$ $\qquad \bar{X}_2 = 450/6 = 75$

$\bar{X}_3 = 445/5 = 89$ $\qquad \bar{X}_4 = 380/5 = 76$

	$\bar{X}_1$ 68.50	$\bar{X}_2$ 75	$\bar{X}_3$ 89	$\bar{X}_4$ 76
$\bar{X}_1$ 68.50	-			
$\bar{X}_2$ 75	6.50	-		
$\bar{X}_3$ 89	20.50**	14*	-	
$\bar{X}_4$ 76	7.50	1	13*	-

* : $\alpha = .05$ $\qquad$ ** : $\alpha = .01$

Ho : $\mu_1 = \mu_2$ LSD(.05) $= \sqrt{4.49\ (69.44)(1/4 + 1/6)} = 11.398$

LSD(.01) $= \sqrt{8.53(69.44)(1/4+1/6)} = 15.710$

Ho : $\mu_1 = M_3$ Ho: $\mu_1 = \mu_4$

LSD(.05) = 11.845 LSD(.01) = 16.326

Ho : $\mu_2 = \mu_3$ Ho : $\mu_2 = \mu_4$

LSD(.05) = 10.692 LSD (.01) = 14.737

Ho : $\mu_3 = \mu_4$ LSD(.05) = 11.168

LSD(.01) = 15.393

เราจะเห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยต่างกัน 3 คู่

การเปรียบเทียบโดยวิธีการดังกล่าวเป็นการเปรียบเทียบเดี่ยว (Individual) ถ้าเราสนใจการเปรียบพหุคูณ (Multiple Comparisons) นั่นคือทดสอบความแผกกัน (Contrast) หรือการรวมเชิงเส้นของค่าเฉลี่ย ψ

$$\psi = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_k\mu_k$$

ในเมื่อ $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$ นั้นจะอาศัยวิธีการของเชฟฟี่ (Scheffe's Method) โดยมีเกณฑ์ตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐาน Ho: $\psi = 0$ เป็นดังนี้

ปฏิเสธ H_0 ถ้า $\hat{\varphi} > \sqrt{F_{\alpha}^{(k-1,n-k)}}\ S_{\hat{\psi}}^2$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 + \dots + a_k\bar{X}_k$ โดยที่, $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$

และ $S_{\hat{\varphi}}^2 = (k-1)(MSE)(\sum a_i^2/n_j)$

สำหรับ φ นั้นเราจะได้ว่า

$$\varphi = \sum a_j M_j = \sum a_j \alpha_j$$

7.5 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two-way Analysis of Variance)

เมื่อกลุ่มของค่าสังเกต หรือข้อมูลสามารถแบ่งประเภทได้ด้วยกฎเกณฑ์แบ่ง ประเภท, หรือแฟคเตอร์ 2 แบบ โดยทางแนวนอนใช้เกณฑ์อย่างหนึ่ง และทางแนวตั้งใช้เกณฑ์อีกอย่างหนึ่ง เช่นแนวนอนเป็นพันธุ์ข้าวชนิดต่าง ๆ และแนวตั้งเป็นปุ๋ยชนิดต่าง ๆ เป็นต้น ดังนั้นค่าสังเกตที่ได้จากการทดลอง จะแสดงได้เป็นดังนี้

B		b_1	$b_2 \dots\dots$	$b_j \dots\dots$	b_c	รวม	เฉลี่ย
A	a_1	X_{11}	X_{12}	X_{ij}	X_{1c}	$X_{1.}$	$\bar{X}_{1.}$

a_2	X_{21}	X_{22}	X_{2j}	X_{2c}	$X_{2.}$	$\bar{X}_{2.}$
	.	.	.	.	.	.
a_i	X_{i1}	X_{i2}	$\boxed{X_{ij}}$	X_{ic}	X_{i}	$\bar{X}_{i}$
	.	.	.	.	.	.
a_r	X_{r1}	X_{r2}	X_{rj}	X_{rc}	$X_{r.}$	$\bar{X}_{r.}$
รวม	$X_{.1}$	$X_{.2}$	$X_{.j}$	$X_{.c}$	X	
เฉลี่ย	$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.2}$	$\bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.c}$		$\bar{X}$

จากตารางเราจะเห็นว่าแต่ละกรรมวิธีผสมจะให้ค่าสังเกตมาหนึ่งค่า และค่าสังเกตทั้งหมดนี้แบ่งตามเกณฑ์แบ่งประเภท 2 เกณฑ์ คือ A และ B ในเมื่อเกณฑ์ A มี r ระดับ และเกณฑ์ B มี c ระดับดังนั้นจึงมีกรรมวิธีผสมถึง rc กรรมวิธี

X_{ij} แทนค่าสังเกตของหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีผสม $a_i b_j$

$X_{i.}$ เป็นผลรวมของข้อมูลในแนวนอนหรือระดับของเกณฑ์ A

$X_{.j}$ เป็นผลรวมของข้อมูลในแนวตั้งหรือระดับของเกณฑ์ B

$\bar{X}_{.j}$, $\bar{X}_{i.}$ แทนค่าเฉลี่ยในแนวตั้ง และแนวนอน

$\bar{X}$ แทนค่าเฉลี่ยรวมของ rc ค่าสังเกต

ตัวแบบของข้อมูลในการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง จะเป็นดังนี้

(1) สมการของค่าสังเกตแต่ละค่าจะเป็น

$$
\begin{aligned}
X_{ij} &= \mu_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i=1,2,\ldots r \;\; j = 1,2,\ldots c \\
&= \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}
\end{aligned}
$$

ในเมื่อ ε_{ij} เป็นมาตรวัดความเบี่ยงเบนของค่าสังเกต X_{ij} จากค่าเฉลี่ย μ_{ij}, α_i เป็นผลกระทบของระดับ a_i ใน A, β_j เป็นผลกระทบของระดับ b_j ใน B และ μ แทนค่าเฉลี่ยรวม นั่นคือ $\mu = \sum_{ij} \mu_{ij} / rc$

(2) ข้อกำหนดของตัวแบบ มีดังนี้

ก. X_{ij} เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระ และมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_{ij} และความแปรปรวน σ^2 เท่ากันหมด

ข. α_i และ β_j เป็นค่าคงที่ และมีข้อจำกัดว่า

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_j \beta_j = 0$$

จากข้อจำกัดเราจะได้

$$\mu_{i} = \mu + \alpha_i \quad \text{และ} \quad \mu_{.j} = \mu + \beta_j$$

ค. ϵ_{ij} เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระ และมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย o และความแปรปรวน σ^2 เท่ากันหมด

สมมติฐานที่เราได้ทดสอบสำหรับข้อมูลที่แจกแจงสองทางนี้ก็คือ ค่าเฉลี่ยตามแถวนอนเท่ากัน หรือค่าเฉลี่ยตามแถวตั้งเท่ากัน นั่นคือสมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็น

(1) Ho : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$

Ha : α_i ไม่เป็นศูนย์หมด

(2) Ho : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_c = 0$

Ha : α_j ไม่เป็นศูนย์หมด

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานเหล่านี้ หาได้โดยอาศัยการเปรียบเทียบตัวประมาณที่เป็นอิสระของความแปรปรวน σ^2 ตัวประมาณนี้ได้จากการแยกความผันแปรทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ ดังนี้

$$\sum_{i,j}^{r,c}(X_{ij}-\bar{X})^2 = \sum_{i,j}^{r,c}(\bar{X}_{i}-\bar{X})^2 + \sum_{i,j}^{r,c}(\bar{X}_{.j}-\bar{X})^2 + \sum_{i,j}^{r,c}\left((X_{ij}-\bar{X}) - (\bar{X}_{i.}-\bar{X}) - (\bar{X}_{.j}-\bar{X})\right)^2$$

$$SST = SSA + SSB + SSE$$

ดังนั้นค่าประมาณของ σ^2 จะได้จาก

(1) MSE = SSE/(r-1) (c-1) ซึ่งเป็นค่าประมาณแบบไม่เอียงเฉ ไม่ว่า Ho จะเป็นจริงหรือไม่

(2) MSA = SSA/(r-1) จะเป็นค่าประมาณไม่เอียงเฉ ถ้า Ho : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$ เป็นจริง แต่ถ้า Ho ไม่เป็นจริง MSA จะมีค่ามากไป (Inflated numerical value)

(3) MSB = SSB/(c-1) จะเป็นค่าประมาณที่ไม่เอียงเฉ ถ้า Ho : $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_c = 0$ เป็นจริง แต่ถ้า Ho ไม่เป็นจริง แล้ว MSB จะมีค่ามากไป

จากตัวประมาณค่าของ σ^2 ทั้งสามนี้ เราจะได้ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลัก Ho เกี่ยวกับเกณฑ์แบ่งประเภทหรือแฟคเตอร์ A และ B ที่กล่าวมาแล้ว นั่นคือ

ก. F = MSA/MSE สำหรับ Ho : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$

ถ้า Ho เป็นจริง แล้วอัตราส่วน MSA/MSE จะมีค่าใกล้ ๆ 1 และมีการแจกแจงแบบ F ที่มี df = (r-1), (r-1) (c-1) ดังนั้นจะปฏิเสธ Ho เมื่อ MSA/MSE โตกว่า ค่า F ในตารางที่มีองศาความเป็นอิสระ (r-1), (r-1) (c-1) และระดับนัยสำคัญ α ที่ต้องการ

ข. F = MSB/MSE สำหรับ Ho : $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_c = 0$ เช่นเดียวกับ MSB/MSE จะมีค่าใกล้ ๆ 1 และมีการแจกแจงแบบ F ที่มี df = (c-1), (r-1) (c-1) ถ้า Ho เป็นจริง ดังนั้นจะปฏิเสธ Ho เมื่อ MSB/MSE มากกว่า F ในตารางที่มีองศาความเป็นอิสระ (c-1), (r-1) (c-1) และ α ที่

ต้องการ

สรุปผลการวิเคราะห์ได้ดังตารางต่อไปนี้

SOV	SS	df	MS	F-ratio
A	SSA	r-1	MSA	MSA/MSE
B	SSB	c-1	MSB	MSB/MSE
Error	SSE	(r-1)(c-1)	MSE	
Total	SST	rc-1		

ในการคำนวนหาผลรวมกำลังสองของแหล่งผันแปรต่าง ๆ เรามีวิธี ดังนี้

(1) $C = (\sum_{i,j}^{r,c} X_{ij})^2/rc = X^2/rc$

(2) $SST = \sum^{r,c} X^2_{ij} - C$

(3) $SSA = \sum_i X^2_{i.} /c - C$

(4) $SSB = \sum_j X^2_{.j}/r - C$

(5) $SSE = SST - SSA - SSB$

ตัวอย่าง ต้องการศึกษาถึงผลกระทบของพันธ์ข้าวและปุ๋ยว่ามีผลต่อผลผลิตเฉลี่ยของข้าวหรือไม่ จึงทำการทดลอง ได้ผลมาดังนี้

พันธ์ข้าว \ ปุ๋ย	ก.	ข.	ค.	ง.	
กข 1	64	55	59	58	
กข 2	72	57	66	57	
กข 3	74	47	58	53	
	210	159	183	168	720

สมการของข้อมูลก็คือ

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4,$

ก. สมมติฐานที่จะทดสอบ

(1) $Ho : \alpha_i = 0,\ i = 1,2,3$

(2) $Ho : \beta_j = 0,\ j = 1,2,3,4$

ข. เขตปฏิเสธ ณ $\alpha = .05$

(1) $F = MSA/MSE > F_{.05}(2,6) = 4.86$

(2) $F = MSB/MSE > F_{.05}(3,6) = 5.14$

ค. คำนวณ SS ได้ดังนี้

$$C = (720)^2/12 = 43200$$

$$SST = 64^2+72^2+...+53^2-C = 662$$

$$SSA = (236^2+252^2+232^2)/4-C = 56$$

$$SSB = (210^2+159^2+183^2+168^2)/3-C = 498$$

$$SSE = 662-498-56 = 108$$

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนจะเป็นดังนี้

SOV	df	SS	MS	F
พันธุ์ข้าว	3-1=2	56	28	1.56
ปุ๋ย	4-1=3	498	166	9.22
Error	(3-1)(4-1)=6	108	18	
ทั้งหมด	3(4)-1=11	662		

ง. สรุปผลได้ว่า (1) ไม่มีผลต่างในผลผลิตเฉลี่ยจากพันธุ์ข้าวทั้งสาม และ (2) มีผลต่างในผลผลิตเฉลี่ยของข้าวเมื่อใช้ปุ๋ยต่างชนิดกัน

เมื่อปฏิเสธ Ho ได้ แล้วเราต้องการเปรียบเทียบพหุคูณเราก็ทำได้โดยการทดสอบความแผกกันในค่าเฉลี่ยของแฟคเตอร์ A และ B ดังนี้

$$\varphi_1 = \sum_1^r a_i\mu_i \qquad \varphi_2 = \sum_j^c a_j\mu_j$$

โดยที่ $\sum a_i = \sum a_j = 0$ โดยวิธีการของเชฟฟี่

เรามีเกณฑ์ตัดสินใจดังนี้

(1) ปฏิเสธ $Ho : \varphi_1 = 0$ ถ้า $\hat{\varphi}_1 > \sqrt{F_\alpha^{(r-1,\nu)} \, S^2_{\hat{\varphi}_1}}$

(2) ปฏิเสธ $Ho : \varphi_2 = 0$ ถ้า $\hat{\varphi}_2 > \sqrt{F_\alpha^{(c-1,\nu)} \, S^2_{\hat{\varphi}_2}}$

ในเมื่อ $\hat{\varphi}_1 = \sum a_i \bar{X}_i$ และ $\hat{\varphi}_2 = \sum a_j \bar{X}_j$, $\nu = (r-1)(c-1)$

$S^2_{\hat{\varphi}_1} = (r-1)(MSE)(\sum a_i^2/c)$; $S^2_{\hat{\varphi}_2} = (c-1)(MSE)(\sum a_j^2/r)$

สำหรับ φ_1 และ φ_2 เราจะได้ว่า $\varphi_1 = \sum a_i\mu_i = \sum a_i \alpha_i$

$$\varphi_2 = \sum a_j\mu_j = \sum a_j \beta_j$$

7.6 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทางเมื่อมีผลร่วม (Interaction)

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทางที่กล่าวมานั้นเราสมมติว่าผลกระทบทางแนวนอนและแนวตั้งเป็นผลบวก (Additive) กัน เพราะเราใช้สมการของข้อมูลเป็น

$$X_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$
$$= \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

แต่มีการทดลองมากมายที่มีข้อสมมติของผลบวกไม่เป็นจริงดังนั้นการวิเคราะห์ที่ยึดข้อสมมติของผลบวกว่าเป็นจริงก็จะทำให้การสรุปผลผิดพลาด ในตัวอย่างที่กล่าวมาเราจะเห็นว่าข้อสมมติของผลบวกน่าจะไม่เป็นจริง เพราะชนิดของพันธุ์ข้าวกับชนิดของปุ๋ยน่าจะต้องมีผลร่วม (Interaction) กัน ผลร่วมที่ปรากฏนี้อาจจะเป็นจริง หรืออาจเนื่องมาจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง การวิเคราะห์ในตัวอย่างที่แล้วมานั้น เรายึดข้อสมมติที่ว่า ผลร่วมที่ปรากฏทั้งหมดเนื่องมากจากความคลาดเคลื่อน เคลื่อนจากการทดลอง ถ้าความผันแปรทั้งหมดของข้อมูลส่วนหนึ่งจะเนื่องมาจากผลกระทบของผลร่วมแหล่งของความผันแปรนี้ยังคงเป็นส่วนหนึ่งของผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (SSE) ซึ่งจะทำให้ MSE เป็นตัวประมาณค่าที่มากไป (Overestimate) ของ σ^2 และผลที่ตามมาก็คือ จะเพิ่มความน่าจะเป็นที่กระทำความผิดพลาดประเภทที่สอง

การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยทางแนวนอน และแนวตั้ง เมื่อผลร่วมเป็นองค์ประกอบที่มีนัยสำคัญ (Significant factor) เราจะต้องได้ตัวประมาณที่เป็นอิสระและไม่เอียงเฉของ σ^2 วิธีที่ดีที่สุดก็โดยพิจารณาความผันแปรของการวัดซ้ำ ๆ (Repeated measurement) ที่ได้จากสภาวการณ์เดิม ดังเช่นในตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว ถ้าเราเชื่อว่าชนิดของข้าว และชนิดของปุ๋ยมีผลร่วมกันเราจะซ้ำการทดลองอีก 2 ครั้งโดยใช้แปลง 36 แปลง แทนที่จะใช้ 12 แปลง และบันทึกผลทดลองในตารางต่อไปนี้ การทดลองเช่นนี้เราจะพูดว่า การทดลองทำซ้ำ ๆ (Replicated) กัน 3 ครั้ง

	ปุ๋ย	ก	ข	ค	ง
พันธุ์ข้าว	กข 1	64	65	59	58
		66	63	68	41
		70	58	65	46
	กข 2	72	57	66	57
		81	43	71	61
		64	52	59	53

กข 3	74	47	58	53
	51	58	39	59
	65	67	42	38

สำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยทั่วไปใช้การซ้ำถึง n ครั้ง และข้อมูลจะมีแนวนอน r แถว กับแถวตั้ง c แถว ดังนั้นจึงมี rc เซลล์ แต่ละเซลล์ n ค่าสังเกตดังนั้นจึงมีข้อมูลทั้งหมด rcn ดังตารางต่อไปนี้

	B	b_1	b_2	b_j	b_c	รวม	เฉลี่ย
A	a_1	x_{111} x_{112} . x_{11n}	x_{121} x_{122} . x_{12n}	x_{1j1} x_{1j2} . x_{1jn}	x_{1c1} x_{1c2} . x_{1cn}	$x_{1..}$	$\bar{x}_{1..}$
	a_2	x_{211} x_{212} . x_{21n}	x_{221} x_{222} . x_{22n}	x_{2j1} x_{2j2} . x_{2jn}	x_{2c1} x_{2c2} . x_{2cn}	$x_{2..}$	$\bar{x}_{2..}$
				$\boxed{x_{ijk}}$		$x_{i..}$	$\bar{x}_{i..}$
	a_r	x_{r11} . x_{r1n}	x_{r21} . x_{r2n}	x_{rj1} . x_{rjn}	x_{rc1} . x_{rcn}	$x_{r..}$	$\bar{x}_{r..}$
รวม		$x_{.1.}$	$x_{.2.}$	$x_{.j.}$	$x_{.c.}$	x	
เฉลี่ย		$\bar{x}_{.1.}$	$\bar{x}_{.2.}$	$\bar{x}_{.j.}$	$\bar{x}_{.c.}$		$\bar{x}$

แต่ละค่าสังเกตจากตารางนี้ เราจะเขียนได้เป็น

$$x_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

ในเมื่อ ε_{ijk} เป็นมาตราวัดส่วนเบี่ยงเบนของค่าสังเกต x_{ijk} ในเซลล์ที่ ij จากค่าเฉลี่ย μ_{ij} ถ้าให้ $(\alpha\beta)_{ij}$ แทนผลกระทบร่วมของผลรวมในแนวนอน i และแถวตั้ง j ; α_i แทนผลกระทบของแนวนอน i; β_j แทนผลกระทบของแนวตั้ง j; μ แทนค่าเฉลี่ยทั้งหมด ดังนั้นเราจะได้นั่นคือ เราจะเขียนแต่ละค่า

สังเกตได้เป็น

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i=1,2,\ldots r; \quad j = 1,2,\ldots c; \quad k = 1,2,\ldots n$$

ข้อกำหนดของสมการนี้จะเป็น

$$\sum_i \alpha_i = 0 \qquad \sum_j \beta_j = 0 \quad ; \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = \sum_i (\alpha\beta)_{ij}$$

สมมติฐานที่จะทดสอบเกี่ยวกับผลหลักของ A ผลหลักของ B และผลร่วมระหว่าง A และ B จะเป็นดังนี้

(1) Ho : $\alpha_i = 0; \; i = 1, 2\ldots r$

(2) Ho : $\beta_j = 0; \; j = 1,2\ldots c$

(3) Ho : $(\alpha\beta)_{ij} = 0; \; i = 1,2\ldots r \;\; j = 1,2,\ldots c$

การทดสอบสมมุติฐานเหล่านี้อาศัยการเปรียบเทียบค่าประมาณที่เป็นอิสระของ σ^2 โดยแยกความผันแปรของข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ ดังนี้

$$\sum_{i,j,k}(X_{ijk}-\bar{X})^2 = \sum_{i,j,k}(\bar{X}_{i..}-\bar{X})^2 + \sum_{i,j,k}(\bar{X}_{ij.}-\bar{X})^2 + \sum_{i,j,k}((\bar{X}_{ij.}-\bar{X})-(\bar{X}_{i..}-\bar{X})-(\bar{X}_{.j.}-\bar{X}))^2$$

นั่นคือ $SST = SSA + SSE + SS(AB) + SSE$

องศาความเป็นอิสระจะเป็น

$$rcn-1 = (r-1)+(c-1)+(r-1)(c-1)+rc(n-1)$$

สมมติฐาน Ho : $\alpha_i = 0; i = 1, 2, \ldots, r$ ใช้ตัวสถิติ F_i = MSA/MSE ซึ่งมีการแจกแจง F ที่มี df = (r-1), rc (n-1)

สมมติฐาน Ho : $\beta_j = 0$; $j = 1, 2, \ldots, c$ ใช้ตัวสถิติ F_2 = MSB/MSE ซึ่งมีการแจกแจง F ที่มี df = (c-1), rc(n-1)

สมมติฐาน Ho : $(\alpha\beta)_{ij} = 0; i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, c$ ใช้ตัวสถิติ F_3 = MS(AB) /MSE ซึ่งมีการแจกแจง F ที่มี df = (r-1)(c-1), rc(n-1)

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของการแจกแจงสองทางจะเป็นดังนี้

ANOVA Table

SOV	SS	df	MS	F
A	SSA	r-1	MSA	MSA/MSE
B	SSB	c-1	MSB	MSB/MSE
AB	SS(AB)	(r-1)(c-1)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
Error	SSE	rc(n-1)	MSE	
Total	SST	rcn-1		

สูตรสำหรับคำนวนผลรวมกำลังสอง จะเป็นดังนี้

(1) $C = X^2/rcn$

(2) $SST = \sum_{i,j,k} X^2_{ijk} - C$

(3) $SSG = \sum_{i,j} X^2_{ij.}/n - C$ เป็นความผันแปรระหว่างเซลล์ ij ในเมื่อ X_{ij} เป็นผลรวมของข้อมูลในเซลล์ ij หรือค่าสังเกตของกรรมวิธีผสม $a_i b_j$

(4) $SSA = \sum_i X^2_{i..}/cn - C$

(5) $SSB = \sum_j X^2_{.j.}/rn - C$

(6) $SS(AB) = SSG - SSA - SSB$

(7) $SSE = SST - SSG$

ตัวอย่าง ฝ่ายการผลิตต้องการศึกษาว่าอะไรเป็นแหล่งสำคัญของความผันแปรในกระบวนการผลิตสินค้าอย่างหนึ่ง จึงสุ่มสินค้าที่ผลิตมาแห่งละ 2 หน่วย จากคนคุมเครื่องที่มีอยู่ 3 คน และวัตถุดิบที่มีอยู่ 4 พวก แล้วทดสอบความคงทนของสินค้าได้ผลดังนี้

คนคุมเครื่อง \ วัตถุดิบ	1	2	3	4	
1	9 7	5 7	5 3	4 4	44
2	7 8	5 4	4 3	3 3	37
3	3 4	2 4	5 2	4 4	28
	38	27	22	22	109

ผลของการศึกษาจะเป็นอย่างไร ?

สมการแสดงข้อมูล คือ

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i=1,2,3; \quad j = 1,2,3,4, \quad k = 1,2$$

ก. สมมติฐานที่จะทดสอบ คือ

(1) Ho : ค่าเฉลี่ยของความคงทนสำหรับคนคุมเครื่องจากทั้งหมด 3 คน ไม่แตกต่างกัน นั่นคือ $\alpha_i = 0$

(2) Ho : ค่าเฉลี่ยของความคงทนสำหรับวัตถุดิบจากทั้งหมด 4 พวก นั่นคือ $\beta_j = 0$

(3) Ho ไม่มีผลร่วมระหว่างคนคุมเครื่องกับวัตถุดิบ นั่นคือ $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

ข. สำหรับ $\alpha = .05$ เราจะปฏิเสธ Ho คือ

(1) $F = MSA/MSE > F_{.05}(2, 12) = 3.88$

(2) $F = MSB/MSE > F_{.05}(3, 12) = 3.49$

(3) $F = MS(AB)/MSE > F_{.05}(6, 12) = 3.00$

ค. ในการคำนวณเราทำได้ ดังนี้

$C = (\sum X_{ijk})^2/rcn = (109)^2/3(4)(2) = 495.04$

$SST = \sum_{ijk} X_{ijk}^2 - C = 573 - 495.04$

$SSA = \sum_i X_i^2/cn - C = (44^2 + 37^2 + 28^2)/4(2) - C$

$= 4089/8 - C = 511.125 - 495.04$

$= 16.085$

$SSB = \sum_j X_{.j.}^2/rn - C = (38^2+27^2+22^2+22^2)/3(2)$

$= 3141/6 - C = 523.50 - C = 38.46$

$SSG = \sum_{ij} X_{ij}^2/n - C$

$= ((9+7)^2 + (7+8)^2 + \dots + (3+5)^2 + (4+4)^2)/2 - C$

$= 1117/2 - C = 558.50 - C = 63.46$

$SS(AB) = SSG - SSA - SSB$

$= 63.46 - 16.085 - 38.46 = 8.925$

$SSE = SST - SSG = 77.96 - 63.46 = 14.50$ ผลการคำนวณสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

SOV	df	SS	MS	F
คนคุมเครื่อง	(3-1)=2	16.085	8.04	6.7
วัตถุดิบ	(4-1)=3	38.46	12.82	10.6
ผลร่วม	(3-1)(4-1)=6	8.925	1.48	1.22
คลาดเคลื่อน	3(4)(2-1)=12	14.50	1.21	
รวม	3(4)(2)-1=23	77.96		

ง. เราสรุปผลได้ว่า (1) ผลกระทบของคนคุมเครื่องมีนัยสำคัญ (2) ผลกระทบของวัตถุดิบมีนัยสำคัญและ (3) ไม่มีผลร่วมระหว่างคนคุมเครื่องและวัตถุดิบ

เมื่อปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho และเราต้องการเปรียบเทียบผลกระทบในแฟคเตอร์ทั้งสอง เราก็ใช้วิธีการเปรียบเทียบพหุคูณของเชพฟี่ ดังนี้

(1) ปฏิเสธ Ho : $\varphi_1 = 0$ ถ้า $\hat{\varphi}_1 > \sqrt{F_{\alpha}^{(r-1,\nu)}\ S^2_{\hat{\varphi}_1}}$

(2) ปฏิเสธ Ho : $\varphi_2 = 0$ ถ้า $\hat{\varphi}_2 > \sqrt{F_{\alpha}^{(c-1,\nu)}\ S^2_{\hat{\varphi}_2}}$

ในเมื่อ

$$\varphi_1 = \sum a_i\mu_i = \sum a_i\alpha_i \qquad \sum a_i = \sum a_j = 0$$

$$\varphi_2 = \sum a_j\mu_j = \sum a_j\beta_j$$

$$\hat{\varphi}_1 = \sum a_i\bar{x}_i \ , \quad \hat{\varphi}_2 = \sum a_j\bar{x}_j$$

$$\nu = rc(n-1)$$

$$S^2_{\hat{\varphi}_1} = (r-1)MSE(\sum a_i^2/cn)$$

$$S^2_{\hat{\varphi}_2} = (c-1)MSE(\sum a_j^2/rn$$

7.7 การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายทาง (Multiway Analysis of Variance)

จุดประสงค์ของวิธีการนี้ก็เช่นเดียวกับการแจกแจงข้อมูล 2 ทาง ผิดแต่ว่าแบบนี้มีเกณฑ์หรือแฟคเตอร์ตั้งแต่ 3 ขึ้นไป สำหรับ 3 แฟคเตอร์ A, B และ C แล้วเราเขียนสมการข้อมูลได้เป็น

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik}$$
$$+ (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

โดยที่ i = 1, 2,..., a, j = 1,2,..., b, k = 1, 2,..., c, l = 1,2,....,3

ในเมื่อ , α ; β; γ เป็น ....

ในเมื่อ α , β, γ เป็นผลหลักของแฟคเตอร์ A, B, C;$(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$ เป็นผลร่วมของสองแฟคเตอร์ $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$

ความผันแปรของข้อมูลแยกออกตามแหล่งความผันแปรได้เป็น

SST = SSA + SSB + SSC + SS(AB) + SS(BC) + SS(ABC) + SSE

สำหรับสมมติฐานที่จะทดสอบก็จะมี

(1) Ho : ไม่มีผลหลักของ A (หรือ B หรือ C)

(2) Ho : ไม่มีผลร่วมระหว่าง A และ B (หรือ A กับ C หรือ B กับ C)

(3) Ho : ไม่มีผลร่วมระหว่าง A, B และ C

วิธีการทดสอบก็ทำได้เช่นเดียวกับ 2 ทาง และตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนจะอยู่ในรูป ดังนี้

ANOVA TABLE

SOV	SS	df	MS	F-ratio
ผลหลัก				
A	SSA	a-1	MSA	MSA/MSE
B	SSB	b-1	MSB	MSB/MSE
C	SSC	c-1	MSC	MSC/MSE
ผลร่วม				
AB	SS(AB)	(a-1)(b-1)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
AC	SS(AC)	(a-1)(c-1)	MS(AC)	MS(AC)/MSE
BC	SS(BC)	(b-1)(c-1)	MS(BC)	MS(BC)/MSE
ABC	SS(ABC)	(a-1)(b-1)(c-1)	MS(ABC)	MS(ABC)/MSE
Error	SSE	abc(s-1)	MSE	
รวม	SST	abcs-1)		

7.8 การวางแผนการทดลอง (Experimental Designs)

เราทราบแล้วว่าเทคนิคการวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นขบวนการสำหรับแยกความผันแปรทั้งหมดของข้อมูลที่ได้จากการทดลองออกเป็นส่วนประกอบต่าง ๆ ซึ่งใช้วัดแหล่งของความผันแปร ในการวิเคราะห์ต้องขึ้นกับการวางแผนการทดลองให้ข้อมูลออกมา ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทราบแบบแผนของการทดลองไว้บ้าง

แบบง่ายที่สุดก็คือ **การวางแผนแบบสุ่มตลอด** (Completely Randomized Design) ซึ่งเป็นแบบที่จะต้องกำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยทดลองเป็นไปโดยสุ่มทั้งหมด คือไม่มีการกำหนดว่ากรรมวิธีใดจะใช้กับหน่วยทดลองใด ที่ใด หรือบริเวณใดและเวลาใดเลย แต่ละกรรมวิธีอาจจะซ้ำ ๆ ได้หลายครั้ง และจำนวนครั้งที่ซ้ำอาจจะแตกต่างกันไปแต่ละกรรมวิธีได้ แบบแผนนี้มักจะใช้เมื่อวัสดุหรือหน่วยทดลองไม่ค่อยผิดแผกกันมากนัก (Homogeneous)

แบบที่ง่ายต่อมาคือ **แบบแผนการทดลองชนิดแบ่งบลอดสมบูรณ์)** (Randomized

Complete Block Design, RCB) แบบนี้จะแบ่งหน่วยทดลองหรือวัสดุทดลองเป็นพวก ๆ จัดหน่วยที่คล้ายคลึงกันไว้พวกเดียวกัน และการรวมกลุ่มหน่วยทดลองนั้น ให้จำนวนหน่วยทดลองในแต่ละกลุ่มเท่ากับจำนวนกรรมวิธีที่จะใช้ หรือให้เป็นจำนวนเท่า (พหุคูณ) ของจำนวนกรรมวิธี กลุ่มดังกล่าวนี้เรียกว่า Block หรือ Replicate ในแต่ละบลอคเราใช้กรรมวิธีทุกกรรมวิธี โดยทั่วไปจะใช้ครั้งเดียว ดังนั้นเราจะเห็นว่า กรรมวิธีทุกอย่างจะปรากฏในแต่ละบลอคเท่า ๆ กัน และทุกบลอคประกอบด้วยกรรมวิธีทุกอย่างสำหรับบลอคนั้นจะต้องไม่มีผลร่วมกับกรรมวิธีที่ใช้ แบบแผนการทดลองนี้นิยมกันมากในการวิจัยต่าง ๆ

แบบแผนต่อมาก็คือ แบบแผนการทดลองชนิดจัตุรัสลาติน (Latin Square Design) ซึ่งเป็นแบบที่เราจัดกรรมวิธีไว้ 2 ทางด้วยกัน คือแถวนอน (Row) และแถวตั้ง (Column) โดยให้แต่ละกรรมวิธีปรากฏในแต่ละแถวนอนหรือแถวตั้งครั้งหนึ่งเท่านั้น ในการจัดหน่วยทดลองและใช้กรรมวิธีจะต้องจัดให้เหมาะสม โดยทำให้ทั้งแนวนอนและแถวตั้งเป็นแหล่งของความผันแปรสูง แบบแผนการทดลองนี้ใช้ได้ในกรณีที่ไม่มีผลร่วมระหว่างแถวนอน แถวตั้งและกรรมวิธี เราจะเห็นได้ว่า แบบแผนชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์ จะมีประสิทธิภาพอย่างมากในการลดความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง โดยขจัดแหล่งความผันแปรอย่างหนึ่ง แต่การวางแผนการทดลองชนิดจัตุรัสลาติน จะใช้ควบคุมแหล่งความผันแปรถึง 2 แหล่ง และในขณะเดียวกันจะลดจำนวนกรรมวิธีผสมที่จำเป็นต้องใช้ลงด้วย

แบบแผนการทดลองที่กล่าวมาทั้ง 3 แบบนั้นเป็นแบบหลักที่ควรจะทราบ นอกจากนี้ยังมีแบบอื่น ๆ อีกซึ่งจะศึกษาได้จากตำราแบบแผนการทดลองทั่วไป และในการวิเคราะห์ข้อมูลตามตัวแบบ II และ III นั้น ก็ศึกษาได้จากตำราที่กล่าวนั้นเช่นกัน