บทที่ 5 การประมาณค่าทางสถิติ

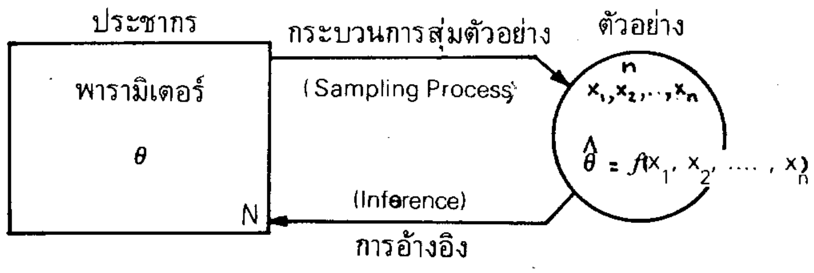
GET YOUR FACTS FIRST
AND THEN YOU CAN DISTORT 'EM
AS YOU PLEASE.

MARK TWAIN

จุดมุ่งหมายในการศึกษาประชากรซึ่งเป็นผลรวมของหน่วยทั้งหมด โดยอาศัยตัวแทนประชากรที่เรียกว่า "ตัวอย่าง (Sample)" ก็เพื่อรวบรวมข้อมูลข่าวสารสำหรับใช้เป็นพื้นฐานในการสรุปผลหรืออ้างอิงเกี่ยวกับประชากรในแง่ของมาตราวัดสรุป (Summary Measure) ซึ่งเรียกว่ามาตรประชากร หรือพารามิเตอร์ (Parameter) หรืออ้างอิงในแง่ของสรุปร่างของประชากร (Population Form or shape) ค่าเฉลี่ย ประชากร (μ) สัดส่วนประชากร (π) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ) ก็เป็นพารามิเตอร์ประชากรที่เราสนใจกันบ่อย ๆ

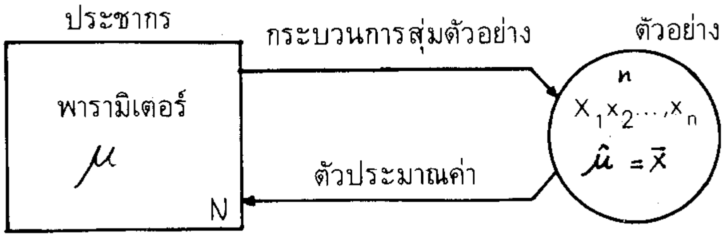
ถ้าเราต้องการสรุปผลเกี่ยวกับสัดส่วนหรือเปอร์เซนต์ของคนสูบบุหรี่ในประเทศไทย โดยการสอบถามคนทุกคนที่อยู่ในประเทศไทย และคำนวณค่าของพารามิเตอร์ที่แทนเปอร์เซนต์จริง ๆ เราก็ไม่สามารถจะทำได้ เพราะต้องเสียค่าใช้จ่ายและเวลามากมาย ดังนั้นเราจึงต้องใช้ตัวอย่างหรือตัวแทนของประชากร และคำนวณเปอร์เซนต์ของคนที่ชอบสูบบุหรี่จากตัวอย่างนั้น ค่าของเปอร์เซนต์ที่คำนวณได้ซึ่งเป็นค่าของ ตัวสถิติตัวอย่าง (Sample Statistic) นี้จะใช้อ้างอิงหรืออนุมานเกี่ยวกับเปอร์เซนต์จริง ๆ

ให้ θ เป็นพารามิเตอร์ประชากรที่น่าสนใจซึ่งอาจจะเป็นค่าเฉลี่ย (μ) สัดส่วน (π) หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) จากตัวอย่างเราเลือกตัวสถิติตัวอย่าง $\hat{\theta}$ ซึ่งเป็นมาตราวัดสรุปจากตัวอย่างนั้นทำการอ้างอิงหรือสรุปผลเกี่ยวกับค่าของพารามิเตอร์ θ เราสามารถแสดงกระบวนการอ้างอิงได้ดังรูปต่อไปนี้



เช่นเมื่อเราสนใจประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (μ) ตัวสถิติตัวอย่างที่เราใช้อ้างอิงหรือประมาณค่า μ ก็คือค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X} = \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ ซึ่งเรามักเรียกตัวสถิติที่ใช้ประมาณค่ากันว่า "ตัว

ประมาณค่า (Estimator)" พิจารณารูปต่อไปนี้



วิธีการอ้างอิงหรือสรุปผลเกี่ยวกับประชากรเราทำได้ 2 วิธีคือการประมาณค่า และการทดสอบสมมติฐาน วิธีการอ้างอิงทั้งสองวิธีนี้ต่างก็ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างผลทดลองตัวอย่าง (Sample Outcomes) และค่าประชากร (Population values) เช่นเดียวกันนั่นคือ เลือกตัวอย่างสุ่มจากประชากร และใช้ตัวสถิติตัวอย่างพิจารณาอ้างอิงเกี่ยวกับพารามิเตอร์หรือรูปร่างประชากร ในการประมาณค่านั้นข้อมูลข่าวสารตัวอย่างจะใช้ประโยชน์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์หรือฟังก์ชั่นประชากร ส่วนในการทดสอบสม มติฐานนั้นจะมีค่ากว่าหรือสมมติฐานระบุไว้ก่อน แล้วจึงใช้ข้อมูลข่าวสารตัวอย่างมาตัดสินว่าสมมติฐานนั้นจะได้รับการปฏิเสธหรือไม่

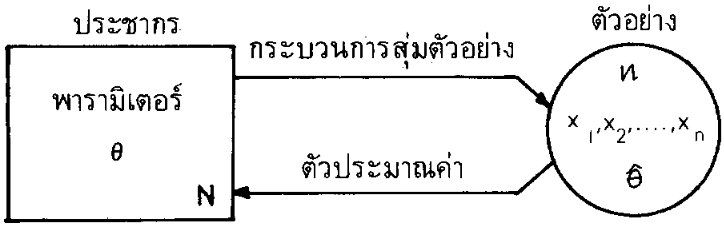
การประมาณค่าทางสถิติ จึงหมายถึงวิธีการ (Procedure) ของการใช้ตัวสถิติตัวอย่างไปกะประมาณพารามิเตอร์หรือฟังก์ชั่นประชากร สำหรับตัวสถิติตัวอย่างนี้จะได้ชื่อว่าตัวประมาณค่า (Estimator) ค่าที่เป็นไปได้ของตัวประมาณค่าจะเรียกว่าค่าประมาณ (Estimate)

ในการประมาณค่าทางสถิติเราทำได้ 2 แบบ คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดนั้นเราใช้จำนวนเลขเดี่ยว ๆ ที่คำนวณจากข้อมูลข่าวสาร ตัวอย่างหรือที่เป็นค่าหนึ่งของตัวสถิติตัวอย่างมาเป็นค่าประมาณของค่าพารามิเตอร์ Θ ที่สนใจ เช่นจากตัวอย่างสุ่มของนักศึกษา, ม.ร ปรากฏว่ามีคนสูบบุหรี่ 10% จำนวน 10% นี้จะใช้เป็นค่าประมาณแบบจุดสำหรับเปอร์เซนต์แท้จริง (π) ของนักศึกษา ม.ร.ทั้งหมดที่สูบบุหรี่ ความจริงค่าประมาณแบบจุดนี้มีโอกาสที่จะเท่ากับพารามิเตอร์น้อยมาก ส่วนการประมาณค่าแบบช่วงนั้น ๆ เราอาศัยจำนวนเลข 2 ค่า (หรือจุด) ที่กำหนดช่วงขึ้นมาโดยหวังว่ามันจะครอบคลุมค่าของพารามิเตอร์ Θ ด้วยความเชื่อมั่นระดับหนึ่งตามที่ต้องการ เช่นในการประมาณค่าแบบช่วงของเปอร์เซนต์ที่นักศึกษา ม.ร.สูบบุหรี่ เราจะได้ว่า "เปอร์เซนต์แท้จริงของนักศึกษา ม.ร.ที่สูบบุหรี่จะอยู่ระหว่าง 9.5% กับ 10.5% ด้วยความเชื่อมั่น 95% เป็นต้น

5.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

กระบวนการในการประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ก็คือเลือกตัวอย่างสุ่มขนาด

หนึ่ง (n) จากประชากรที่มีพารามิเตอร์ θ ซึ่งไม่ทราบค่า ค่าสังเกตหรือข้อมูลจากตัวอย่างจะได้เป็น $x_1, x_2, \ldots, x_n$ และใช้กฎหรือวิธีการบางอย่างมาสรุปผลข้อมูลเหล่านี้เป็นเลขจำนวนหนึ่งออกมา เลขจำนวนนี้จะเป็นค่าของตัวสถิติตัวอย่าง (หรือตัวประมาณค่า) $\hat{\theta}$ และเราจะถือว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ในทางคณิตศาสตร์ เราพูดได้ว่า $\hat{\theta}$ เป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตตัวอย่าง $x_1, x_2, \ldots, x_n$ นั่นคือ $\hat{\theta} = f(x_1 x_2, x_n)$ กระบวนการของการประมาณค่าแบบจุดแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



ตัวสถิติตัวอย่าง $\bar{x}$ (ค่าเฉลี่ยเลขคณิต) S^2 (ความแปรปรวน)และ P (สัดส่วน) จะใช้เป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ μ, σ^2 และ π ตามลำดับ

สำหรับพารามิเตอร์ประชากร μ (ค่าเฉลี่ยประชากร) ซึ่งเป็นมาตราวัดแนวโน้มสู่ส่วนกลางนั้น ฟังก์ชั่นหรือตัวประมาณค่าของ μ ที่รู้จักกันดีก็คือ (1) ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{x}$ (2) มัธยฐานตัวอย่าง $\bar{x}_m$ และ (3) ฐานนิยมตัวอย่าง $\bar{x}_{mo}$ โดยที่แต่ละตัวประมาณค่าเป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตตัวอย่าง $x_1, x_2, \ldots x_n$ หรือเป็นค่าที่สรุปจากตัวอย่างนั้นเอง ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{x}$ นั้นเป็นส่วนเฉลี่ยของค่าสังเกตตัวอย่าง มัธยฐานตัวอย่าง $\bar{x}_m$ เป็นค่ากลาง (middle value) ของค่าสังเกตตัวอย่างที่เรียงลำดับตามขนาดแล้ว และฐานนิยมตัวอย่าง $\bar{x}_{mo}$ เป็นค่าสังเกตที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุดหรือมีความถี่มากสุดนั่นเอง

ตัวประมาณค่าตัวไหนที่ใช้เป็นตัวประมาณค่าของ μ เป็นที่ทราบกันดีว่าค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{x}$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่ดีของ μ ในกรณีทั่วไปพารามิเตอร์ θ เราจะเลือกตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ ใดที่จะให้ค่าประมาณที่ดีของ θ ตัวประมาณค่าที่ดีเราประเมินกันด้วยเกณฑ์ต่อไปนี้

ก. ความไม่เอียงเฉ (Unbiasedness) ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ ของพารามิเตอร์ θ ที่ถูกประมาณนั้นเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม บางค่าจะน้อยกว่าเท่ากับ หรือมากกว่าพารามิเตอร์ θ แต่ถ้าค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ยของมันเท่ากับพารามิเตอร์ θ แล้ว $\hat{\theta}$ จะได้เชื่อว่าไม่เอียงเฉ

นั่นคือ ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ จะปราศจากความเอียงเฉ ถ้า $E(\hat{\theta}) = \theta$

ถ้า $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ เราจะเรียก $\hat{\theta}$ ว่าเป็นตัวประมาณแบบเอียงเฉ (Bias) ของพารามิเตอร์ θ และความเอียงเฉกำหนดไว้ดังนี้

ความเอียงเฉ $= E(\hat{\theta}) - \theta$

สำหรับ $\bar{X} = \Sigma X_i/n$ และ $S^2 = \Sigma(X-\bar{X})^2/(n-1)$ ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่าของ μ และ σ^2 เราทราบว่า $E(\bar{x}) = \mu$ และ $E(S^2) = \sigma^2$ ดังนั้น $\bar{x}$ และ S^2 เป็นตัวประมาณไม่เอียงเฉของ μ และ σ^2 ตามลำดับ

ส่วน s และ $\hat{\sigma}^2 = \Sigma(x-\bar{x})^2/n$ เป็นตัวประมาณค่าแบบเอียงเฉของ σ และ σ^2 เพราะ $E(S) \neq \sigma$ และ $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$

ข. ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE, Mean Square Error) เป็นเกณฑ์ที่ใช้เปรียบเทียบตัวประมาณค่าในแง่ของความเอียงเฉ และความเที่ยงตรง (Precision) ซึ่งวัดด้วยความแปรปรวน

MSE กำหนดไว้ว่าเป็นค่าเฉลี่ยของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนที่ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ จะห่างไปจากพารามิเตอร์ θ ที่จะประมาณ และ MSE นี้จะเท่ากับความแปรปรวนของตัวประมาณค่ารวมกับกำลังสองของความเอียงเฉ

นั่นคือ $MSE = E(\hat{\theta}-\theta)^2 = V(\hat{\theta})+(E(\hat{\theta})-\theta)^2$

ตัวอย่าง สมมติว่า $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าของ θ โดยที่ $E(\hat{\theta}_1) = \theta$ และ $E(\hat{\theta}_2) = .9\theta$ กับ $V(\hat{\theta}_1) = 3$ และ $V(\hat{\theta}_2) = 2$ ตัวประมาณค่าตัวไหนจะดีกว่าในเทอมของ MSE?

$$MSE\ \hat{\theta}_1 = V(\hat{\theta}_1) + (\text{Bias})^2 = 3+(\theta-\theta)^2 = 3$$
$$MSE\ \hat{\theta}_2 = V(\hat{\theta}_2)+(\text{Bias})^2 = 2+(.9\theta-\theta)^2$$
$$= 2+.01\theta^2$$

ดังนั้น $\hat{\theta}_1$ จะดีกว่า ถ้า $|\theta|>10$ แต่ $\hat{\theta}_2$ จะดีกว่าถ้า $|\theta|<10$ ซึ่งทั้งที่ $\hat{\theta}_1$ เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ θ

ค. ความคงเส้นคงวา (Consistency) ถ้าขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้น ๆ ผลต่างระหว่างตัวประมาณค่าและพารามิเตอร์จะน้อยลง ๆ แล้วตัวประมาณค่าจะเรียกว่ามุ่งเข้าหาพารามิเตอร์ด้วยความน่าจะเป็นและตัวประมาณค่าเช่นนี้เรียกว่าตัวประมาณค่าแบบคงเส้นคงว่า นั่นคือ

ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ จะเรียกว่า คงเส้นคงวาของพารามิเตอร์ θ ถ้า $P(|\hat{\theta}-\theta|>e)\rightarrow 0$ หรือ $P(|\hat{\theta}-\theta|<e) \longrightarrow 1$ เมื่อ $n \longrightarrow \infty$ โดยที่ $e>0$ และ n เป็นขนาดของตัวอย่าง

การคงเส้นคงวาของตัวประมาณค่าเมื่อพิจารณาด้วยทฤษฎีต่อไปนี้จะง่ายเข้านั่นคือ "ถ้า $E(\hat{\theta})\rightarrow\theta$ และ $V(\hat{\theta})\rightarrow 0$ เมื่อ $n\rightarrow\infty$ แล้ว $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าแบบคงเส้นคงวาของ θ"

$\bar{X}$ และ S^2 เป็นตัวประมาณค่าแบบคงเส้นคงวาของ μ และ σ ส่วนมัธยฐานของตัวอย่าง $\tilde{x}_m$ จะเป็นตัวประมาณค่าแบบคงเส้นคงวาของ μ ก็ต่อเมื่อประชากรเป็นแบบสมมาตร (Symmetrical) แต่ถ้าประชากรเป็นอย่างอื่น $\tilde{x}_m$ จะเข้าใกล้มัธยฐานของประชากร (ไม่ใช่ μ) เมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้น

ง. **ประสิทธิภาพ** (Efficiency) ถ้าความแปรปรวนของตัวประมาณค่ามีค่าน้อย การแจกแจงของตัวประมาณค่าจะเกาะกลุ่มกันมาก (Highly Concentrated) ใกล้ ๆ กับพารามิเตอร์และตัวประสิทธิภาพ ลองพิจารณานิยามต่อไปนี้

นิยาม ในตัวอย่างเดียวกันขนาด n ถ้า $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉ ของ θ แล้ว $\hat{\theta}_1$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า $\hat{\theta}_2$ ถ้า $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$

ตัวอย่าง ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ แล้ว $\hat{\theta}_1 = \bar{X}$ และ $\hat{\theta}_2 = (X_1+X_2)/2$ ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ λ โดยมี $V(\hat{\theta}) = \lambda/n$, $V(\hat{\theta})_2 = \lambda/2$

ดังนั้น ถ้า $n>2$ แล้ว $\hat{\theta}_1$ จะมีประสิทธิภาพมากกว่า θ_2 ในฐานะเป็นตัวประมาณค่าของ λ เพราะ $V(\hat{\theta}_1)<V(\hat{\theta}_2)$ หรือ $\lambda/n< \lambda/2$

นิยาม ให้ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของ θ เราจะพูดว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าที่มีความแปรปรวนต่ำสุด (MVUE, Minimum Variance Unbiased Estimator) ของ θ ถ้าตัวประมาณค่าอื่น ๆ $(\hat{\theta}^*)$ ทั้งหมดที่ไม่เอียงเฉ หรือ $E(\hat{\theta}^*) = \theta$ และ $V(\hat{\theta}^*) \geq V(\hat{\theta})$ นั่นคือระหว่างตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉทั้งหมดของ θ นั้น $\hat{\theta}$ มีความแปรปรวนต่ำสุด

เนื่องจากตัวสถิติ $\bar{X}$ มีคุณสมบัติดังกล่าว ดังนั้น $\bar{X}$ จึงเป็น MVUE ของ μ

ทฤษฎี ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของพารามิเตอร์ θ แล้วขอบเขตล่าง (Lower Bound) ของความแปรปรวนกำหนดได้จากอสมการเครเมอร์-ราว (Cramer-Rao Inequality) ดังนี้

$$V(\hat{\theta}) = 1/n(I(\theta))$$

ในเมื่อ $I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right)$ ซึ่งเรียกว่าจำนวนข้อมูลข่าวสารต่อค่าสังเกต (Amount of Information per observation) ส่วน $f(x,\theta)$ เป็นการแจกแจงของประชากรที่มีพารามิเตอร์ θ

อสมการเครเมอร์-ราว ข้างบนนี้กล่าวว่า ความแปรปรวนของตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉจะมากกว่าหรือเท่ากับค่าบางค่าซึ่งเป็นค่าคงที่สำหรับตัวอย่างสุ่มหนึ่ง ๆ ที่ได้จากการพิจารณาการแจกแจงของประชากร ทางด้านขวาของอสมการจะเท่ากับความแปรปรวนต่ำสุด (Minimal Variance) ของ θ ดังนั้น ถ้า $\hat{\theta}$ ไม่เอียงเฉ และความแปรปรวนกำหนดไว้ ดังทฤษฎีแล้ว $\hat{\theta}$ จะเรียกว่าเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงสุด (Most efficient Estimator) ในบรรดาตัวประมาณค่าไม่เอียงเฉทั้งหมด จากทฤษฎีนี้เราได้ผลตามมาว่าตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบางอย่างดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าไม่เอียงเฉของพารามิเตอร์ θ แล้ว $\hat{\theta}$ จะเรียกว่าเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงสุดก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไข 2 ประการดังนี้

(1) $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าที่พอเพียง (Sufficient)

(2) $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\hat{\theta};\theta) = k(\hat{\theta}-\theta)$; $f(\hat{\theta};\theta) > 0$

ในเมื่อ k ไม่ขึ้นอยู่กับ $\hat{\theta}$

จากทฤษฎีนี้เราจะเห็นว่า $\bar{x}$ เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพสูงสุดของ μ ในประชากรแบบปกติที่ทราบความแปรปรวน

นิยาม $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอียงเฉชนิดเชิงเส้นที่ดีที่สุด (BLUE, Best Linear Unbiased Estimator) ของ θ ถ้า

(1) $\hat{\theta}$ เป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตจากตัวอย่างแบบเชิงเส้น นั่นคือ $\hat{\theta} = \sum_i^n a_i X_i$

(2) $\hat{\theta}$ ไม่เอียงเฉ นั่นคือ $E(\hat{\theta}) = \theta$

(3) $\hat{\theta}$ มีความแปรปรวนน้อยที่สุด นั่นคือ $V(\hat{\theta}) \leq V(\hat{\theta}^*)$ ในเมื่อ $\hat{\theta}^*$ เป็นตัวประมาณค่าตัวใด ๆ ของ θ ที่สอดคล้องกับ (1) และ (2) นี้

$\hat{\theta}$ ที่มีคุณสมบัติแบบ BLUE จะได้ชื่อว่ามีประสิทธิภาพมากที่สุดในบรรดาตัวประมาณที่ไม่เอียงเฉเชิงเส้น

ตัวสถิติ $\bar{X}$ เป็น BLUE ของ μ เพราะสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 3 นั้น

จ. ความพอเพียง (Sufficiency) เกณฑ์นี้ Fisher ได้เสนอแนะไว้ แต่ในทางคณิตศาสตร์เกณฑ์นี้ยากที่จะเข้าใจ

ตัวประมาณค่า $\hat{\theta}$ ของพารามิเตอร์ θ จะเรียกว่า พอเพียง (Sufficient) ถ้าได้รวบรวมข้อมูลข่าวสารทั้งหมดเกี่ยวกับ θ ไว้ และไม่มีตัวประมาณค่าอื่น ๆ ที่คำนวณได้จากตัวอย่างสุ่มเดียวกันที่จะให้ข้อมูลข่าวสารเกี่ยวกับ θ เพิ่มเติมอีก

นิยามของความพอเพียงในเชิงคณิตศาสตร์กล่าวไว้ว่าตัวประมาณค่าจะเรียกว่า พอเพียง ถ้าฟังก์ชั่นน่าจะเป็น (Likelihood function) $L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)$ หรือฟังก์ชั่นร่วมของตัวอย่างสุ่มมีรูปแบบดังนี้

$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Theta) = g(\hat{\Theta} / \Theta)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในเมื่อ $g(\hat{\Theta} / \Theta)$ เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่อยู่ในเทอมของ $\hat{\Theta}$ เท่านั้น และ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชั่นของ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ที่เป็นอิสระกับพารามิเตอร์ Θ

ตัวอย่าง ให้ X แทนประชากรที่มีฟังก์ชั่นดังนี้ $f(x) = 1/\Theta,\ 0 < x < \Theta$ ในเมื่อ Θ เป็นพารามิเตอร์ที่จะประมาณค่าโดยใช้ตัวอย่างสุ่มขนาด n

จงแสดงว่าตัวสถิติ $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นตัวสถิติที่พอเพียงของพารามิเตอร์ Θ

ฟังก์ชั่นของ Y จะหาได้ดังนี้

$$f(y) = ny^{n-1}/\theta^n \qquad o < y < \theta$$

ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นคือ

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = 1/\theta^n$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = (ny^{n-1}/\theta^n)\,(1/ny^{n-1})$$

เราเห็นได้ว่าทางขวาของฟังก์ชั่นน่าจะเป็นนั้น เป็นผลคูณของสองเทอม เทอมแรกเป็นฟังก์ชั่นในเทอมของ Y แต่เทอมสองไม่ได้ขึ้นอยู่กับ θ ดังนั้น ตามนิยามแล้วตัวสถิติ Y จะเป็นตัวประมาณแบบพอเพียงของพารามิเตอร์ θ

Rao และ Blackwell ได้พบว่า ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของตัวประมาณค่าที่มีความพอเพียงนั้น จะมีความแปรปรวนน้อยกว่าตัวประมาณค่าอื่น ๆ ที่ไม่ได้เป็นฟังก์ชั่นของตัวประมาณค่าที่มีความพอเพียง

สำหรับพารามิเตอร์ตัวหนึ่งถ้าเราหาตัวประมาณค่าที่มีความพอเพียงได้แล้ว เราก็ไม่จำเป็นต้องพิจาณาค่าอื่น ๆ ที่ไม่มีความพอเพียงอีก เพราะจะไม่มีตัวประมาณค่าอื่น ๆ ในตัวอย่างเดียวกันที่จะให้ข้อมูลข่าวสารเพิ่มเติมเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่จะประมาณอีก

ถ้า μ เป็นพารามิเตอร์ที่จะประมาณ เมื่อเราใช้มัธยฐานของตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่าเราจะได้ว่ามัธยฐานเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความพอเพียง เพราะไม่ได้ใช้ข้อมูลข่าวสารทั้งหมดสำหรับที่จะหามัธยฐาน (มัธยฐานพิจารณาเฉพาะข้อมูลตัวเดียวที่อยู่ตรงกลางของข้อมูลที่เรียงลำดับแล้วเท่านั้น) ถ้าเราใช้ $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณค่าจะได้ว่ามันมีความพอเพียง เพราะต้องใช้ข้อมูลข่าวสารทั้งหมดจากตัวอย่างมาพิจารณา

5.2 วิธีหาตัวประมาณค่าแบบจุด (Methods of Finding a Point Estimator)

นักสถิติได้เสนอวิธีการที่จะหาตัวประมาณค่าที่มีคุณสมบัติที่ต้องการไว้หลายวิธีดังนี้

(1) วิธีโมเมนต์ (Method of Moments) วิธีนี้เป็นเทคนิคเก่าที่สุด Karl Pearson เสนอไว้เมื่อปี 1894 และใช้แพร่หลายมาหลายปีวิธีโมเมนต์เป็นวิธีที่ง่าย ๆ และให้ตัวประมาณที่ใช้ได้ (Reasonable Estimator)

วิธีโมเมนต์ทำได้ดังนี้ กำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งมีพารามิเตอร์ θ โดยทั่ว ๆ ไป โมเมนต์แรกของ X (ค่าเฉลี่ยของมันเอง, E(X)) จะขึ้นอยู่กับ θ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$E(X) = g(\theta)$$

และให้ตัวอย่างขนาด n จาก x ซึ่งเราสามารถพิจารณาโมเมนต์แรกของตัวอย่าง X ได้แล้ว วิธีโมเมนต์จะระบุว่า ให้เทียบ X เท่ากับ $g(\hat{\theta})$ และแก้สมการหา $\hat{\theta}$ ค่าของ $\hat{\theta}$ ที่ได้ จะเรียกว่า ตัวประมาณค่า

แบบโมเมนต์ของพารามิเตอร์ θ

ตัวอย่าง ประชากร X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม ที่มีค่าอยู่ในช่วง (o, Θ) นั่นคือ

$$f(x) = 1/\Theta \,;\, o < x < \Theta$$

ค่าเฉลี่ยของ X หรือ $E(X) = \int_o^{\Theta} x(1/\Theta)\,dx = \Theta/2$

ดังนั้น $g(\Theta) = \Theta/2$

กำหนดตัวอย่างสุ่มของ n ค่าสังเกตของ X แล้วเราตั้งสมการได้ว่า

$$\overline{X} = g(\hat{\Theta}) = \hat{\Theta}/2$$

นั่นคือ $\hat{\Theta} = 2\overline{X}$

หรือตัวประมาณค่าแบบโมเมนต์ของ Θ เป็น 2 เท่าของค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง

ถ้าค่าสังเกตของตัวอย่างเป็น 5, 6, 1, 13, 9, 16, 7, 9, 10 เราจะได้ว่า $\overline{X} = 76/9 = 8.4$

ดังนั้น $\hat{\theta} = 2(8.4) = 16.8$

ประชากรส่วนมากมีการแจกแจงที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าถึง 2 ตัว หรือมากกว่าเช่น ถ้าประชากรมีพารามิเตอร์ Θ_1 และ Θ_2 แล้วสองโมเมนต์แรกจะเป็นฟังก์ชั่นของ Θ_1 และ Θ_2 นั่นคือ

$$E(X) = g(\Theta_1, \Theta_2) \text{ และ } E(X^2) = h(\Theta_1, \Theta_2)$$

โดยวิธีโมเมนต์เราจะให้สองโมเมนต์แรกของตัวอย่างเท่ากับ $g(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2)$, และ $h(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2)$ และแก้สมการหาค่าของ $\hat{\Theta}_1$ และ $\hat{\Theta}_2$ ตามลำดับ ซึ่ง $\hat{\Theta}_1$ และ $\hat{\Theta}_2$ จะเป็นตัวประมาณค่าแบบวิธีโมเมนต์

ถ้าประชากรมีพารามิเตอร์กำกับมากกว่า 2 ตัว เราก็จะหาโมเมนต์ต่อ ๆ ไปของตัวอย่างให้เท่ากับจำนวนพารามิเตอร์นั้น แล้วก็ทำเช่นเดียวกับที่ผ่านมา

ตัวอย่าง ถ้าประชากรมีการแจกแจงปกติที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2 เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาด n แล้วเราหาตัวประมาณค่าแบบวิธีโมเมนต์ของ μ และ σ^2 ได้ดังนี้

เราทราบว่า $E(X_2) = \mu$ และ $E(X^2) = \mu + \sigma^2$

แล้ว $g(\mu, \sigma^2) = \mu$ และ $h(\mu, \sigma^2) = \mu^2 + \sigma^2$

ดังนั้น $\overline{X} = \hat{\mu}$ และ $m_2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2$

นั่นคือ $\hat{\mu} = \overline{X}$ และ $\hat{\sigma}^2 = m_2 - \bar{x}^2 = \frac{n-1}{n} S^2$

ในเมื่อ $m_2 = \Sigma X_i^2$, $S^2 = \Sigma(X - \overline{X})^2/(n-1)$

(2) วิธีน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum-Likelihood Method) วิธีนี้ R.A. Fisher ได้เสนอแนะไว้ ซึ่งเป็นวิธีที่ดีมาก และโดยทั่วไปจะให้ตัวประมาณค่าที่ดี บ่อยครั้งที่วิธีนี้ให้ผลเช่นเดียวกับวิธี

โมเมนต์ ในกรณีที่ทั้งสองวิธีให้ตัวประมาณค่าไม่ตรงกันแล้ว ตัวประมาณค่าแบบน่าจะเป็นสูงสุดจะดีกว่า

วิธีน่าจะเป็นสูงสุดอธิบายได้ดังนี้ : สมมติ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีพารามิเตอร์ Θ กำกับอยู่กับการแจกแจงของมัน Fisher เสนอว่าฟังก์ชั่นน่าจะเป็น $L(\Theta)$ กำหนดว่าเป็นการแจกแจงน่าจะเป็นร่วม (Joint probability distribution) ของตัวอย่าง ซึ่งมีค่าสังเกตเป็น $X_1, X_2, \ldots X_n$ ดังนั้น $L(\Theta)$ จะเป็นฟังก์ชั่นของพารามิเตอร์ Θ ที่ไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวเมื่อเลือกค่าของ Θ (คือ $\hat{\Theta}$) ที่ทำให้ $L(\Theta)$ มีค่ามากที่สุด แล้ว $\hat{\Theta}$ จะเป็นค่าประมาณแบบน่าจะเป็นสูงสุดของ Θ

โดยที่ $L(\Theta)$ คำนวณจากค่าสังเกตของตัวอย่าง ค่า $\hat{\Theta}$ ที่ทำให้ $L(\hat{\Theta})$ มากที่สุด โดยทั่วไปจะเป็น ฟังก์ชั่นของค่าสังเกตจากตัวอย่าง

นิยาม ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจงอย่างหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ Θ และให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มของ X ซึ่งมีค่าสังเกตของตัวอย่างเป็น $x_1, x_2, \ldots x_n$ ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของตัวอย่าง $L(\Theta)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$L(\Theta) = f(x_1) f(x_2) \ldots, f(x_n)$$

นิยาม ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของตัวอย่างเป็น $L(\Theta)$ และให้ $\hat{\Theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นค่าที่ทำให้ $L(\Theta)$ สูงสุด นั่นคือ $L(\hat{\Theta}) = \max_{\Theta} L(\Theta)$ แล้วตัวประมาณค่าแบบวิธีน่าจะเป็นสูงสุดของ Θ คือ

$$\hat{\Theta} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

จะเห็นได้ว่าค่า $\hat{\Theta}$ ที่ทำให้ $L(\Theta)$ สูงสุดก็เป็นค่าที่ทำให้ความน่าจะเป็นที่ผลทดลองจากตัวอย่างจะเกิดขึ้นสูงสุดด้วย ถ้าเราใช้ค่าประมาณของ $\hat{\Theta}$ เดาค่าของ Θ เราก็จะเลือกค่าที่ทำให้ความน่าจะเป็นของค่าสังเกตในตัวอย่างมีค่าสูงสุด

ตามหลักคณิตศาสตร์ $\hat{\Theta}$ ที่ทำให้ $L(\Theta)$ สูงสุดก็จะทำให้ $\ln L(\Theta) = K(\Theta)$ สูงสุดด้วย ในทางปฏิบัติเรามักหาค่า $\hat{\Theta}$ ที่ทำให้ $K(\Theta)$ สูงสุด เพราะสะดวกกว่าที่จะทำให้ $L(\Theta)$ สูงสุด

ตัวอย่าง ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยยีที่มีพารามิเตอร์ π และให้ $X_1, X_2, \ldots X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ของ X แล้ว

$$f(x) = \pi^{n}(1-\pi)^{1-n}, x = 0, 1$$

และฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของตัวอย่างจะเป็น

$$\begin{aligned} L(\Theta = \pi) &= f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i} \\ &= \pi^{\Sigma x_i}(1-\pi)^{n-\Sigma x_i} \end{aligned}$$

แล้วกำหนด $K(\Theta = \pi) = \ln L(\pi)$ ซึ่งจะได้

$K(\pi) = \Sigma x_i \ln \pi + (n - \Sigma x_i) \ln(1-\pi)$

K จะเป็นฟังก์ชั่นแบบต่อเนื่องของ π ดังนั้น จะมีค่าของ π ที่ทำให้ $\frac{dK}{d\pi} = 0$, $\frac{d^2K}{d\pi^2} < 0$ ค่านั้นจะทำให้ K มีค่าสูงสุด

นั่นคือ $\frac{dK}{d\pi} = \Sigma x_i/\pi - (n - \Sigma x_i)/(1-\pi) = 0$

$$\pi = \Sigma x_i/n = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

เราจะเห็นว่า $\frac{d^2K}{d\pi^2} = -\frac{\Sigma x_i}{\pi^2} - \frac{n - \Sigma x_i}{(1-\pi)^2}$ จะมีค่าเป็นลบไม่ว่า π จะมีค่าเท่าใด

ดังนั้น $\hat{\pi}$ จะทำให้ $K(\Theta = \pi)$ หรือ $L(\Theta = \pi)$ มีค่าสูงสุด นั่นคือ ตัวประมาณแบบวิธีน่าจะเป็นสูงสุดของ π คือ $P = \hat{\pi}$

$$P = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma x_i/n = \bar{X}$$

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มมีการแจกแจงซึ่งมีพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัว เช่น $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$ แล้วฟังก์ชั่นน่าจะเป็น L จะเป็นฟังก์ชั่นของพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัว นั่นคือ $L(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ ตัวประมาณค่าแบบวิธีน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_k$ จะกำหนดให้เป็น $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \ldots, \hat{\Theta}_k$ ซึ่งจะทำให้ $L(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$ หรือ $K(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_k) = \ln L(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_k)$ สูงสุด

ตัวอย่าง น้ำหนักของส้มโอนครชัยศรีมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 (μ และ σ^2 ไม่ทราบค่า) ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด n ของผลส้มโอ เราจะประมาณค่า μ และ σ^2 ตามวิธีน่าจะเป็นสูงสุดได้ดังนี้

ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของตัวอย่างจะเป็น

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} (1/\sigma\sqrt{2\pi})\, e^{-1/2(X_i-\mu)^2/\sigma^2}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-1/2 \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2/\sigma^2}$$

$$K(\mu, \sigma^2) = -(n/2)\ln 2\pi - (n/2)\ln\sigma^2 - (1/2\sigma^2) \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \mu} = (1/\sigma^2)\Sigma(X-\mu)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma^2} = -(n/2\sigma^2) + \Sigma(X-\mu)^2/2\,(\sigma^2)^2$$

ให้ $\frac{\partial K}{\partial \mu} = 0$ และ $\frac{\partial K}{\partial \sigma^2} = 0$ เราจะได้ $\hat{\mu} = \Sigma X/n = \bar{X}$ และ $\hat{\sigma}^2 = \Sigma(X - \bar{X})^2/n$

เราจะเห็นได้ว่าตัวประมาณค่าของ π, μ และ σ^2 ตามวิธีของโมเมนต์และวิธีน่าจะเป็นสูงสุดเป็นแบบเดียวกัน

(3) วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least Squares Method) วิธีการประมาณค่าของตัวพารามิเตอร์วิธีนี้เป็นการประมาณค่าแบบเชิงเส้น (Linear Estimation) หลักการเบื้องต้นเป็นผลงานของ Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855) และ Andrei Andreevich Markov (1856 - 1922) วิธีการง่าย ๆ ทำได้ดังนี้

ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(X_i)$ และความแปรปรวน $V(X_i)$ เป็น

$$E(X_i) = a_{i1}\theta_1 + a_{i2}\theta_2 + \ldots + a_{ik}\theta_k$$

$$= \Sigma a_{ij}\theta_j; \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, n; k < n \\ j = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

$$V(X_i) = \sigma^2$$

ในเมื่อ a_{ij} เป็นตัวคงที่ซึ่งทราบค่า θ_j เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระกัน และไม่ทราบค่า, σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า และเป็นอิสระกับ θ_j แล้ว $\hat{\theta}_j$ จะเป็นตัวประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุดของพารามิเตอร์ θ_j ถ้า $\hat{\theta}_j$ ได้จากการทำให้ผลรวมของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนที่ค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่มได้ห่างจากค่าเฉลี่ยของมัน มีค่าต่ำที่สุด

นั่นคือทำให้ Ω มีค่าต่ำสุด ในเมื่อ Ω กำหนดไว้ว่า

$$\Omega = \Sigma(X_i - E(X_i))^2 = \Sigma(X_i - \Sigma a_{ij}\theta_j)^2$$

ดังนั้นค่าประมาณของ θ_j ได้จากการแก้สมการ $\frac{\partial \Omega}{\partial \theta_j} = 0$; $j = 1, 2, \ldots, k$ ซึ่งมีสมการเชิงเส้นพร้อม (Simultaneous Linear Equations) ถึง K สมการ และเราจะได้ค่าของ $\hat{\theta}_j$ อยู่ในรูป

$$\hat{\theta}_j = \Sigma b_{ij}X_i; j = 1, 2, \ldots, k$$

ในเมื่อ b_{ij} เป็นค่าคงที่ขึ้นอยู่กับ n และ a_{ij} แต่ไม่เกี่ยวข้องกับค่าสังเกต X_i หรือพูดได้ว่าค่าประมาณ $\hat{\theta}_j$ เป็นฟังก์ชั่นเชิงเส้นของค่าสังเกต

ที่กล่าวมาเราจะเห็นได้ว่า

(1) $E(X_i)$ แต่ละตัวจะเขียนได้ในรูปของฟังก์ชั่นเชิงเส้นของพารามิเตอร์ θ_j ถึง k ตัว

(2) กรณีที่ θ_j เป็นอิสระกัน เราจะหมายถึงว่า ไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้นในแบบที่ว่า $\Sigma c_j\theta_j = 0$ ในเมื่อ c_j เป็นตัวคงที่ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกันหมด และ

(3) ความเป็นอิสระของ σ^2 กับ θ_j นั้นหมายถึงว่า σ^2 ไม่ขึ้นอยู่กับ θ_j เงื่อนไขนี้ไม่จำเป็นนัก แต่ที่จำเป็นก็คือ X_i ทั้งหมดจะต้องมีความแปรปรวนเท่ากัน

คุณสมบัติที่สำคัญของตัวประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยสุด

ก. ไม่เอียงเฉ $E(\Theta_j) = \Sigma b_{ij} E(X_i) = \Theta_j$

ข. เมื่อ X ต่างก็เป็นอิสระกัน

$$V(\hat{\theta}_j) = \sum b_{ij}^2 \; ; \; V(X_i) = \sigma^2 \sum b_{ij}^2 \quad ; \quad j = 1,2,\ldots k$$

ถ้าความแปรปรวน σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระ ตามทฤษฎีของการประมาณค่าเชิงเส้น จะให้ค่าประมาณของ σ^2 คือ $S_e^2 = M/(n-k)$

ในเมื่อ M ได้จากการแทนค่า θ_j ด้วย $\hat{\theta}_j$ ใน Ω นั่นคือ $\mu = \Sigma(X_i - \Sigma a_{ij} \hat{\theta}_j)^2$ และ n - k คือ ผลต่างของขนาดตัวอย่างกับจำนวนพารามิเตอร์ θ_j

เป็นที่ทราบกันว่า $E(S_e^2) = \sigma^2$

ตัวอย่าง (การประมาณค่าพารามิเตอร์ในประชากรแบบทวินาม) สมมุติได้รับความสำเร็จจากตัวอย่างสุ่มขนาด n เป็น X โดยที่ $E(X) = n\pi$ และ $V(X) = n\pi(1-\pi)$ เมื่อ π เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทดลองครั้งหนึ่งนั่นเอง

เราจะหาค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดของ π ได้จาก

$$\Omega = (X - n\pi)^2$$

และ $\dfrac{d\Omega}{d\pi} = 2(X - n\pi)(-n)$

ดังนั้น P เป็นค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดของ π หาได้จาก $\left.\dfrac{d\Omega}{d\pi}\right|_{\pi = P} = 0$ นั่นคือ

$2(X - nP)(-n) = 0$ นั่นคือ $P = X/n$

จะเห็นได้ ค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดของ π เป็นแบบเดียวกับวิธีน่าจะเป็นมากสุด

ตัวอย่าง (ประมาณค่าพารามิเตอร์ในประชากรเอกซ์โพเนนเชียล) ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรแบบเอกซ์โพเนนเชียลที่มีการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = (1/\lambda)e^{-x/\lambda} \; ; x > 0$$

โดยที่ $E(X_i) = \lambda$ และ $V(X_i) = \lambda^2$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots n$ แล้วค่าประมาณแบบกำลังน้อยสุดของ λ จะหาได้จาก

$$\Omega = \Sigma(X_i - \lambda)^2$$

และ $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 2\Sigma(X_i - \lambda)(-1) = \Sigma(X_i - \lambda)(-2)$

เพราะฉะนั้นค่าประมาณแบบกำลังสองน้อยสุดของ λ คือ $\hat{\lambda}$ หาได้จากสมการที่เป็นแบบเดียวกับวิธีน่าจะเป็นมากสุดนั่นคือ $\Sigma(X_i - \hat{\lambda}) = 0;\ \hat{\lambda} = \bar{X}$

(4) วิธีไคสแควน้อยสุด (Minimum Chi - Square Method) ลองพิจารณาการแจกแจงเกี่ยวกับประเภทต่าง ๆ C ประเภทที่ไม่ร่วมกัน (mutually exclusive and exhaustive categories) โดยที่ความน่าจะเป็นของประเภทที่ i คือ $P_i(\theta)$ เป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ ถ้า n_i เป็นความถี่ที่สังเกตได้ในประเภทที่ i ของตัวอย่างสุ่มขนาด n แล้วค่าประมาณแบบไคสแควน้อยสุดของพารามิเตอร์ $\underline{\theta}$ หาได้จากการทำให้ X^2 มีค่าน้อยที่สุด โดยการแทนค่า $\underline{\theta}$ ลงใน X^2

$$X^2 = \Sigma(n_i - np_i(\underline{\theta}))^2/np_i(\underline{\theta})$$

เมื่อปรับปรุงวิธี (Modified method) จะได้วิธีการดังนี้

ทำให้ $X^2 = \Sigma(n_i - np_i(\theta))^2/n_i$ เมื่อเทียบกับ $\underline{\theta}$ มีค่าน้อยสุดแล้วจะได้สมการ

$$\sum_i (p_i/n_i)\frac{\partial p_i}{\partial \theta_j} = 0; j=1,2,\ldots,k$$

สมการเหล่านี้บางครั้งก็ดัดแปลงได้เป็น

$$\sum \frac{p_i}{n_i+1}\frac{\partial p_i}{\partial \theta_j} = 0;\ j = 1,2,\ldots,k$$

ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงที่ n_i บางตัวเป็นศูนย์

ตัวอย่าง ในการทดลองอย่างหนึ่งได้ผลออกมาเป็น 4 ประเภทต่าง ๆ กันคือ A, B, C, D และทราบกันว่าความน่าจะเป็นของแต่ละประเภทเป็นดังนี้

ประเภท	A	B	C	D
ความน่าจะเป็น	$(2 + \theta)/4$	$(1 - \theta)/4$	$(1 - \theta)/4$	$\theta/4$

เพื่อที่จะประมาณค่าพารามิเตอร์ θ นี้จึงทำการสังเกตความถี่ของแต่ละประเภท จากการทดลองได้ผลดังนี้

ประเภท	A	B	C	D
ความถี่	$n_1 = 102$	$n_2 = 25$	$n_3 = 28$	$n_4 = 5$

สมมติว่า n_1, n_2, n_3, n_4 มีการแจกแจงพหุนาม แล้วการประมาณค่าพารามิเตอร์ θ แบบไคสแควน้อยที่สุดที่ดัดแปลงแล้ว (Modified Minimum Chi - Square) ทำได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{p_i}{n_i} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} = 0$$

นั่นคือ $\frac{(2+\theta)/4}{105} \frac{d}{d\theta}(2+\theta)/4+\ldots\ldots+\frac{\theta/4}{5}\frac{d}{d\theta}(\theta/4) = 0$

$$(2+\theta)/105-(1-\theta)/25-(1-\theta)/28+\theta/5 = 0$$

$$\hat{\theta} = 0.23$$

(5) **วิธีเบยส์** (Bayesian Method) การประมาณค่าที่กล่าวมาแล้ว 4 วิธีนั้นเป็นวิธีประมาณค่าแบบคลาสสิค (Classical Method of Estimation) ซึ่งส่วนใหญ่ขึ้นอยู่กับข้อมูลข่าวสารจากตัวอย่างสุ่ม แต่วิธีประมาณค่าแบบเบยส์จะรวมข้อมูลข่าวสารทั้งจากตัวอย่าง (Sample Information) กับข้อมูลข่าวสารที่มีมาก่อน (Prior Information) ซึ่งตรงกับเรื่องที่จะศึกษา ความน่าจะเป็นที่กำหนดให้แก่ข้อมูลข่าวสารที่มีมาก่อนนี้เรียกว่า ความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัย (Subjective) ซึ่งวัดจากดีกรีของความเชื่อของบุคคลในเรื่องนั้น ๆ และบุคคลนั้น ๆ อาจจะใช้ความรู้และประสบการณ์ของเขาเป็นพื้นฐานในการกำหนดความน่าจะเป็น

ลองพิจารณาประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ θ ของประชากรตามวิธีคลาสสิค เราก็สุ่มตัวอย่างขนาด n แล้วแทนข้อมูลข่าวสารที่ได้จากตัวอย่างให้แก่ตัวประมาณค่าที่เหมาะ เช่น กรณีของประชากรทวินาม $B(X; n, \pi)$ ค่าประมาณของสัดส่วนของความสำเร็จ π จะเป็น $P = X/n$

ถ้าสมมติว่าเรามีข้อมูลข่าวสารเพิ่มเติมเกี่ยวกับ θ นั้นว่า θ ผันแปรตามการแจกแจงน่าจะเป็น $f(\theta)$ นั่นคือ เราสมมติว่า Θ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม มีการแจกแจงน่าจะเป็น $f(\theta)$ และเราต้องการจะประมาณค่า θ ของประชากรที่เราเลือกสุ่มมา เรากำหนดให้ $f(\theta)$ เป็นการแจกแจงก่อนทดลอง (Prior distribution) ของพารามิเตอร์ θ ที่ผันแปรและไม่ทราบค่าจะสังเกตได้ว่า $f(\theta)$ แสดงถึงดีกรีของความเชื่อเกี่ยวกับค่ากลาง ๆ (Location) ของ Θ ก่อนที่จะทำการสุ่มตัวอย่าง

เทคนิคการประมาณค่าแบบเบยส์จะใช้การแจกแจงแบบกำหนดก่อน $f(\theta)$ กับการแจกแจงร่วมของตัวอย่าง $f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$ มาคำนวณหาการแจกแจงหลังทดลอง (Posterior distribution) คือ $f(\theta/x_1,x_2,\ldots,x_n)$ การแจกแจงหลังทดลองจะประกอบด้วยข้อมูลข่าวสารก่อนทดลองในเชิงจิตวิสัย กับที่แจกแจงของตัวอย่างที่กำหนดในเชิงวัตถุวิสัย

สำหรับการแจกแจงร่วมของตัวอย่างเราจะเขียน $f(x_1,x_2,\ldots,x_n/\theta)$ แทน $f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$ เพราะต้องการจะชี้ให้เห็นว่าพารามิเตอร์ก็เป็นตัวแปรเชิงสุ่มด้วย ดังนั้นการแจกแจงร่วมของตัวอย่าง $x_1,x_2,\ldots,x_n$, และพารามิเตอร์ θ คือ

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n/\theta)f(\theta)$$

เมื่อจะหาการแจกแจงของตัวอย่างเท่านั้น เราจะได้

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{cases} \Sigma f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta) \\ \int f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)\,d\theta \end{cases}$$

ดังนั้นการแจกแจงหลังทดลองจะเป็น

$$f(\theta/x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta)/g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

นิยาม ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นค่าเฉลี่ยของการแจกแจงหลังทดลองแล้ว $\hat{\theta}$จะเรียกว่าเป็นค่าประมาณแบบเบยส์ (Bayes Estimate) ของพารามิเตอร์ θ

ตัวอย่าง จะใช้ตัวอย่างสุ่มขนาด 2 ประมาณสัดส่วน π ของชิ้นส่วนที่ใช้ไม่ได้จากการผลิตโดยเครื่องจักร สมมติว่าการแจกแจงก่อนทดลองของ π เป็นดังนี้

π	0.1	0.2
$f(\pi)$	0.6	0.4

ให้ x เป็นจำนวนชิ้นส่วนที่ใช้ไม่ได้ในตัวอย่างขนาด 2 นั้น แล้วการแจกแจงของตัวอย่างจะเป็น $f(x/\pi) = \binom{2}{x}\pi^x(1-\pi)^{2-x}$; $x = 0, 1, 2$

การแจกแจงร่วมของตัวอย่าง และพารามิเตอร์คือ $f(x,\pi) = f(x/\pi)\,f(\pi)$ เราจะหาได้ดังนี้

	x	0	1	2
π	0.1	.486	.108	.006
	0.2	.256	.128	.016

การแจกแจงของตัวอย่าง x จะเป็น

x	0	1	2
g(x)	.742	.236	.022

การแจกแจงหลังทดลองคำนวณได้จาก $f(\pi/x) = f(x,\pi)/g(x)$ นั่นคือเราได้

		$f(\pi/x=0)$	$f(\pi/x=1)$	$f(\pi/x=2)$
π	0.1	.655	.458	.273
	0.2	.345	.542	.727

สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงหลังทดลองหรือค่าประมาณแบบเบยส์ของพารามิเตอร์ π คำนวณได้ดังนี้

ถ้า $x = 0,\ \hat{\pi} = 0.1(.655)+0.2(.345) = 0.1345$

$x = 1,\ \hat{\pi} = 0.1(.458)+0.2(.542) = 0.1542$

$x = 2,\ \hat{\pi} = 0.1(.273)+0.2(.727) = 0.1727$

สำหรับการแจกแจงก่อนทดลองของ π ถ้าเป็นแบบอื่น เราก็หาค่าประมาณแบบเบยส์ได้ด้วยวิธีการเดียวกัน เช่น ถ้าเป็นแบบยูนิฟอร์ม

$$f(\pi) = 1,\ 0<\pi<1$$

เราจะได้

$$f(x,\pi) = f(x/\pi)f(\pi) = \binom{2}{x}\pi^x(1-\pi)^{2-x}\ (1);\ x=0,1,2\ ;\ 0<\pi<1$$

$$= \begin{cases} (1-\pi)^2, & x=0 \\ 2\pi(1-\pi), & x=1 \\ \pi^2, & x=2 \end{cases} \qquad 0<\pi<1$$

การแจกแจงของตัวอย่าง

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^1 (1-\pi)^2\,d\pi = 1/3; & x = 0 \\ \int_0^1 2\pi(1-\pi)\,d\pi = 1/3; & x = 1 \\ \int_0^1 \pi^2\,d\pi = 1/3; & x = 2 \end{cases}$$

การแจกแจงหลังทดลอง

$$f(\pi/x) = f(x,\pi)/g(x) = \binom{2}{x}\pi^x(1-\pi)^{2-x/(1/3)}$$

$$= \begin{cases} 3(1-\pi)^2; & x = 0 \\ 6\pi(1-\pi); & x = 1 \quad 0<\pi<1 \\ 3\pi^2; & x = 2 \end{cases}$$

ค่าประมาณ π คือ $\hat{\pi}$ คำนวณได้ดังนี้

$$\hat{\pi} = \begin{cases} 3\int_0^1 (1-\pi)^2\,d\pi = 1/4; & x = 0 \\ 6\int_0^1 \pi^2(1-\pi)^2\,d\pi = 1/2; & x = 1 \\ 3\int_0^1 \pi^2\,d\pi = 1; & x = 2 \end{cases}$$

ถ้าเปรียบเทียบค่าประมาณที่ได้นี้กับค่าประมาณแบบคลาสสิค เราจะเห็นว่าเมื่อ $x = 1$ หรือ $x = 2$ จะได้ค่าประมาณเท่ากัน แต่เมื่อ $x = 0$ จะได้ค่าต่างกัน

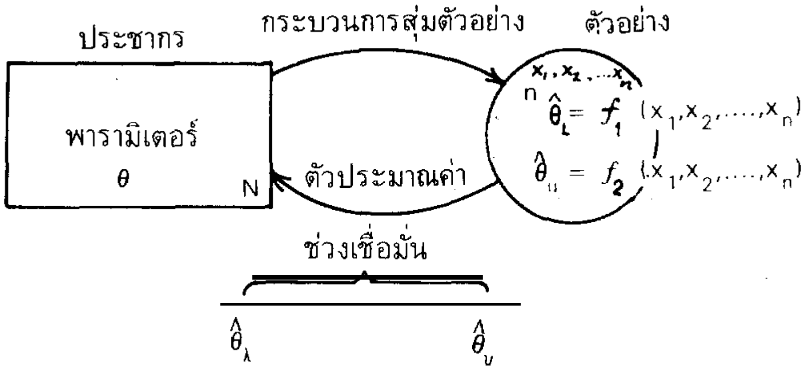
5.3 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

กระบวนการประมาณแบบช่วงก็คือใช้ฟังก์ชั่นของค่าสังเกตตัวอย่าง 2 ฟังก์ชั่น สมมติว่าเป็นฟังก์ชั่น $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ และ $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ซึ่งจะให้ค่าออกมา 2 ค่า $\hat{\theta}_L$ และ $\hat{\theta}_u$ โดยที่ค่าทั้งสองนี้จะกำหนดช่วงที่จะร่วมค่าของพารามิเตอร์ θ ด้วยระดับความเชื่อมั่นที่ระบุไว้

เช่นเราอาจจะหา $\hat{\theta}_L$ และ $\hat{\theta}_u$ ที่ทำให้พารามิ เตอร์ θ จะอยู่ในช่วง $\hat{\theta}_L$ และ $\hat{\theta}_u$ ด้วยความเชื่อมั่น 95% นั่นคือ

$$P(\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_u) = .95$$

ค่าประมาณแบบช่วง $(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_u)$ นี้มักเรียกกันว่า **ช่วงเชื่อมั่น** (Confidence Interval) กระบวนการประมาณแบบช่วงที่กล่าวมาสรุปได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปฟอร์มของการประมาณค่าแบบช่วงซึ่ง J. Neyman ได้เสนอแนะไว้จะเป็นดังนี้

ช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ θ คือ

$\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_u$ หรือ $\theta = (\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_u)$

โดยที่ $(1-\alpha)\%$ เป็นระดับความเชื่อมั่น (Confidence Level) และ α เป็นระดับความไม่เชื่อมั่น ซึ่ง $0<\alpha<1$

ตัวอย่างของการประมาณแบบช่วง เช่นถ้าสุ่มตัวอย่างขนาดหนึ่งเพื่อประมาณพารามิเตอร์ μ แบบช่วง และกำหนดระดับความเชื่อมั่นเป็น 0.95 เราประมาณ $\hat{\theta}_L$ และ $\hat{\theta}_u$ ได้เป็น 10.50 และ 11.50 ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ μ จะเป็น

$$\mu = (10.50, 11.50)$$

ในทำนองเดียวกับตัวประมาณค่าแบบจุด เราสามารถพิจารณาตัวประมาณค่าแบบช่วงที่ดีได้จากเกณฑ์ต่อไปนี้

"ตัวประมาณค่าแบบช่วงที่ดีซึ่งเป็นฟังก์ชั่น $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ และ $f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ นั้นจะให้ช่วง $(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_u)$ ที่สั้นที่สุดสำหรับระดับความเชื่อมั่นและขนาดตัวอย่างที่กำหนดไว้"

ความหมายของช่วงเชื่อมั่นอาจจะกล่าวได้ดังนี้ สมมติว่าสุ่มตัวอย่างจากประชากรมาหลาย ๆ ตัวอย่าง (ด้วยขนาดเดียวกัน) แต่ละตัวอย่างก็มีคำกล่าว (Statement) ที่ θ จะรวมอยู่ในช่วง $(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_u)$ แล้วความถี่สัมพันธ์ของคำกล่าวที่ถูกต้องจะ (ประมาณ) เท่ากับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ ตัวอย่างเช่น ใช้ $(1-\alpha) = 0.95$ ก็หมายความว่าถ้าสุ่มตัวอย่างขนาดเดียวกันมา 100 ตัวอย่างและสร้างช่วงเชื่อมั่น 100 ช่วง แล้วเราก็หวังว่า 95% ของช่วงเหล่านี้จะรวม

หรือครอบคลุมค่าจริงของพารามิเตอร์ θ จงสังเกตว่าคำกล่าวนี้จะไม่เหมือนกับคำกล่าวที่ว่าความน่าจะเป็นที่พารามิเตอร์ θ จะอยู่ระหว่างขีดจำกัด $\hat{\theta}_L$ และ $\hat{\theta}_U$ เท่ากับ 95 ใน 100 หรือ 0.95 ทั้งนี้เพราะว่าพารามิเตอร์ θ ไม่เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแต่เป็นตัวคงที่ซึ่งไม่ทราบค่า

ในทางปฏิบัติเราไม่ได้ใช้ตัวอย่างหลายตัวอย่าง เราใช้ตัวอย่างเดียวเท่านั้น และก็สร้างช่วงเชื่อมั่นโดยอาศัยตัวอย่างนี้ ดังนั้นเราอาจจะถูกหรือผิดก็ได้ เพราะช่วงนั้นจะครอบคลุมพารามิเตอร์หรือไม่ก็ได้ นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ θ จะอยู่ภายในช่วงนั้นอาจจะเป็น 1 หรือ 0 แล้วแต่ว่าค่าจริงของ θ จะตกอยู่ภายในหรือภายนอกช่วงนั้นหรือไม่ มีสิ่งที่สำคัญน่าจะพิจารณาก็คือ เราได้ดำเนินการตามวิธีการ (Procedure) ที่จะให้โอกาสที่จะถูกต้องดังที่พิจารณาไว้ก่อน ดังนั้นคำกล่าวในเชิงน่าจะเป็นจึงจะบ่งถึงดีกรีของความเชื่อมั่นในวิธีการที่ใช้สร้างค่าประมาณแบบช่วง

5.4 การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร (Population Mean)

5.4.1 การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรเดียว

ในประชากรแบบปกติชนิดตัวแปรเดียวนั้นมีพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย (μ) และความแปรปรวน (σ^2) สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร (μ) นั้นเราจะประมาณด้วยค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\bar{x}$) ซึ่งเราทราบว่า $\bar{X}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีของ μ

ในการประมาณค่าเป็นช่วงของค่าเฉลี่ยประชากร μ นั้นเราก็อาศัยการแจกแจงของตัวประมาณค่า $\bar{X}$ ซึ่งเราจะได้ช่วงเชื่อมั่นแบบ $(1-\alpha)\%$ สำหรับ μ ดังวิธีการต่อไปนี้

(1) เมื่อทราบความแปรปรวนของประชากร เราทราบว่าค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ ของตัวอย่างขนาด n จากประชากรปกติที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย (μ) แต่ทราบความแปรปรวน (σ^2) นั้นจะมีการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนดังนี้

$$E(\bar{X}) = \mu,\ V(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานและจากการแจกแจงนี้เราจะได้ว่า

$$P(-Z_{\alpha/2} \le Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

หรือ

$$P(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X}+Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ μ จะเป็น

$$\bar{X}-Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

หรือขีดจำกัดช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ μ จะเป็น

$$\mu = \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

ถ้าประชากรไม่เป็นแบบปกติ แต่ใช้ตัวอย่างขนาดโต ($n \to \infty$) แล้วเราจะได้ช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ μ เช่นเดียวกัน

(2) เมื่อไม่ทราบความแปรปรวนของประชากร ตามปกติเราไม่ทราบความแปรปรวนประชากร จึงต้องประมาณด้วยความแปรปรวนตัวอย่าง S^2 และเราทราบว่า

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

มีการแจกแจงแบบที (Student t) ด้วยองศาตามเป็นอิสระ $\nu = n-1$ จากการแจกแจงนี้เราจะได้ขีดจำกัดเชื่อมั่น $1w(1-\alpha)\%$ สำหรับ μ คล้าย ๆ กับที่กล่าวมาแล้วดังนี้

$$\mu = \bar{X} \pm t^{n-1}_{\alpha/2} \; S/\sqrt{n}$$

ถ้าใช้ตัวอย่างขนาดโต ($n \to \infty$) แล้วขีดจำกัดเชื่อมั่นจะเป็น

$$\mu \doteq \bar{X} \pm Z_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$$

ตัวอย่าง (1) ในการศึกษารายได้ต่อปีของครัวเรือนเกษตรกรที่อยู่ในอำเภอหนึ่ง โดยอาศัยตัวอย่างของครัวเรือนเกษตรกร 100 ราย ได้รายได้เฉลี่ย ($\bar{X}$) เป็น 6,000 บาท

จากประมาณรายได้เฉลี่ยแท้จริง (μ) ของครัวเรือนเกษตรกรในอำเภอนั้น โดยให้มีระดับความเชื่อมั่น 0.95 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของรายได้ของครัวเรือน (σ) ป็น 1000

สำหรับ $\alpha = 0.05$ เราได้ค่า $Z_{\alpha/2}$ จากตารางปกติมาตรฐานเป็น $Z_{0512} = Z_{025} = 1.96$ แล้วเราจะได้ขีดจำกัดเชื่อมั่น 95% สำหรับรายได้เฉลี่ยแท้จริงของครัวเรือนเกษตรกรจะเป็น

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{X} \pm Z_{05/2}\, \sigma/\sqrt{n} \\ &= 6000 \pm 1.96\ (1000/\sqrt{100}\ ) \\ &= 6000 \pm 196 = 5804{,}6196 \end{aligned}$$

(2) จากตัวอย่างของรายได้ต่อปีของครัวเรือนเกษตรกรนั้น ถ้าเราไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของรายได้ และเราประมาณได้จากตัวอย่างของครัวเรือนเกษตรกร 100 ราย สมมติว่าได้เป็น 1100 บาท แล้วเราจะได้ขีดจำกัดเชื่อมั่น 95% สำหรับรายได้เฉลี่ยแท้จริงเป็น

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{X} \pm Z_{05/2}\, S/\sqrt{n} \\ &= 6000 \pm 1.96\ (1100/\sqrt{100}) \\ &= 6000 \pm 215.60 = 5784.40, 6215.60 \end{aligned}$$

(3) เกษตรกรต้องการประมาณผลผลิตต่อไร่ของข้าวพันธ์ กขค จึงทำการทดลองกับแปลงข้าว 16 แห่ง ๆ ละไร่ ปรากฏว่าได้ข้าวเฉลี่ยต่อไร่เป็น 90 ถัง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 ถัง

จงประมาณผลผลิตเฉลี่ยต่อไร่ที่แท้จริง (μ) ของข้าวพันธ์นี้ โดยใช้ระดับความเชื่อมั่น 0.99

จากตารางที เมื่อ $\alpha = .01$, $n-1 = 16-1 = 15$ เราได้ $t^{(15)}_{01/2} = t^{(15)}_{005} = 2.95$

และจากข้อมูลเรามี $\bar{x}$ = 90 กับ S = 20 แล้วเราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 99% สำหรับผลผลิตข้าวเฉลี่ยต่อไร่ของพันธ์ข้าว กขค ดังนี้

$$\mu = \bar{X} \pm t^{(16-1)}_{.01/2} S/\sqrt{n}$$
$$= 90 \pm (2.95)(20/\sqrt{16})$$
$$= 90 \pm 14.75 = 75.25, 104.75$$

เมื่อพิจารณาความกว้างของช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ μ ที่ว่า

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

เราได้ความกว้างของช่วงเป็น $2Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ และขนาดของความกว้างนี้จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับ (1) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร σ (2) ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ หรือ $Z_{\alpha/2}$ และ (3) ขนาดตัวอย่าง n นั่นคือถ้า σ มากช่วงจะกว้าง ถ้า $1-\alpha$ มากช่วงจะกว้าง และถ้า n มากช่วงจะแคบ

ตัวอย่าง อาจารย์สอนวิชาเศรษฐศาสตร์ธุรกิจทราบว่า เวลาที่เขาใช้เดินทางจากบ้านมาที่ทำงานมีการแจกแจงแบบปกติที่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2 นาที ในเดือนหนึ่งซึ่งมีวันทำงาน 22 วัน เขาบันทึกเวลาจริง ๆ ที่เขาเดินทางไว้ และพบว่ามีค่าเฉลี่ยของเวลาเดินทาง 28.5 นาที และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2.5 นาที

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 80% ของ μ คือ

$$\mu = (28.5 \pm 1.28(2)/\sqrt{22}) = (27.95,\ 29.05)$$

ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ μ คือ

$$\mu = (28.5 \pm 1.64(2)/\sqrt{22}) = (27.80,\ 29.20)$$

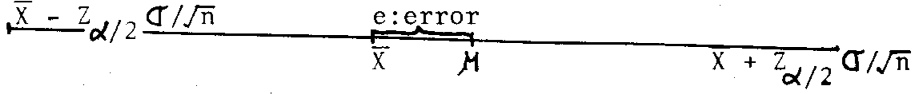
โดยที่ $Z_{.10} = 1.28$ และ $Z_{.05} = 1.64$

เราจะเห็นได้ว่าช่วงมั่น 90% จะยาวกว่าช่วงเชื่อมั่น 80% ดังนั้นเมื่อเราต้องการประมาณค่าที่มีความเชื่อมั่นสูง ๆ เราจึงจำเป็นต้องใช้ช่วงยาว ๆ

จากช่วงเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ย μ นั้น เราสามารถพิจารณาความถูกต้องของค่าประมาณแบบจุด $\bar{X}$ ได้ นั่นคือ ถ้า μ มีค่าจริงเท่ากับค่ากว้างของช่วง แล้ว $\bar{X}$ จะประมาณ μ โดยไม่มีความคลาดเคลื่อนแต่ส่วนมาก $\bar{X}$ จะไม่เท่ากับ μ จึงเกิดความคลาดเคลื่อนซึ่งมีขนาดเป็น

$$|\mu - \bar{X}| \leq Z_{\alpha/2}\ \sigma/\sqrt{n}$$

ด้วยความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ นั่นคือ ถ้า $\bar{X}$ เป็นตัวประมาณค่าของ μ แล้วเราสามารถเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ว่า ความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ $Z_{\alpha/2}\ \sigma/\sqrt{n}$



สำหรับตัวอย่างที่ผ่านมาเราเชื่อมั่น 80% ว่า $\bar{x} = 28.5$ นี้จะแจกแจงจาก μ น้อยกว่า 0.55 และเชื่อมั่น 90% ว่าผลต่างจะน้อยกว่า 0.70

บ่อยครั้งเราต้องการทราบว่าจะต้องใช้ตัวอย่างขนาดโตเท่าใดที่จะประกันว่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าเฉลี่ย μ จะน้อยกว่าจำนวนที่กำหนดไว้ (e) เราหาได้จากความคลาดเคลื่อนที่ว่า

$$|\mu - \bar{x}| = e = Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$
$$n = (Z_{\alpha/2}\sigma/e)^2$$

นั่นคือถ้าใช้ $\bar{X}$ เป็นค่าประมาณของ μ เราสามารถเชื่อมั่นถึง $100(1-\alpha)\%$ ว่าความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่าจำนวนที่กำหนด e ถ้าขนาดตัวอย่างกำหนดไว้ดังที่กล่าวมาแล้ว

ในการกำหนดขนาดตัวอย่าง n นั้นเราทำได้ก็ต่อเมื่อทราบความแปรปรวนของประชากรที่เลือกสุ่มมาเท่านั้น ในทางปฏิบัติเราไม่ทราบความแปรปรวน ดังนั้นจึงต้องประมาณด้วยตัวอย่างแรกเริ่ม (Preliminary Sample) ขนาดโต ($n \geqslant 30$)

ตัวอย่าง ต้องให้ตัวอย่างขนาดเท่าไรในตัวอย่างที่แล้วมา ถ้าเราต้องการเชื่อมั่น 90% ว่าค่าประมาณของ μ หรือ $\bar{X}$ จะห่างจาก μ น้อยกว่า 0.25

จากตัวอย่างแรกเริ่มขนาด 22 เราได้ $S = 2.5$ นาที ซึ่งจะใช้เป็นค่าประมาณของ σ ดังนั้น

$$n = \pm(1.96(2.5)/0.25))^2 = (19.6)^2$$
$$= 384.16$$

เพราะฉะนั้นเราเชื่อมั่น 90% ว่าตัวอย่างสุ่มขนาด 385 จะได้ค่าประมาณ $\bar{X}$ ที่แตกต่างจาก μ ไม่เกิน 0.25

บางครั้งเราต้องการที่จะสร้างช่วงเชื่อมั่นทางเดียว (One-sided Confidence Interval) ซึ่งเราต้องสังเกตช่วงทางเดียวที่มีความน่าจะเป็นอย่างน้อย $1-\alpha$ ที่จะรวมพารามิเตอร์ไว้ด้วย

ตัวอย่าง จากประสบการณ์ผู้จัดการฝ่ายผลิตหลอดไฟเชื่อมั่นว่าอายุใช้งานของหลอดไฟ จะแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 50 ชั่วโมง ผู้จัดการมีความคิดว่าค่าเฉลี่ย μ ใกล้ 1,500 ชั่วโมง แต่เพื่อการโฆษณา เขาอยากจะหาจำนวนชั่วโมงที่เขาเชื่อแน่ว่า μ จะมากกว่า เขาตัดสินใจว่าช่วงเชื่อมั่น 99% ล่าง (Lower 99% Confidence Interval) จะบรรลุจุดประสงค์นี้ นั่นคือถ้าเราต้องสังเกตค่าของตัวสถิติ L_1 ที่ทำให้ $P(L_1 \leqslant \mu) = .99$ หรือ $P(\mu \geqslant L_1) = .99$

สมมติว่าเลือกสุ่มตัวอย่างของหลอดไฟมีอายุใช้งานเป็น $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ชั่วโมง แต่เราทราบว่า $(\bar{X}-\mu)/(50/\sqrt{n})$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐาน เราจึงได้ว่า

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{50/\sqrt{n}} \le Z_\alpha\right) = 1-\alpha$$

ซึ่งจะเหมือนกับ $P(\bar{X} - Z_\alpha\, 50/\sqrt{n} \le \mu) = 1-\alpha$

$$P(\mu \ge \bar{X} - Z_\alpha\, 50/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

ดังนั้น $L_1 = \bar{X} - Z_\alpha\, 50/\sqrt{n}$ จะระบุถึงช่วงเชื่อมั่นล่างของ μ

5.4.2 การประมาณผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากรเมื่อตัวอย่างเป็นอิสระกัน

ในประชากรแบบปกติ 2 ประชากร ที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และ μ_2 และความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 นั้นถ้าเราต้องการประมาณผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากร $\mu_1-\mu_2$ ก็ทำได้ โดยอาศัยตัวประมาณค่า $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ โดยที่ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสุ่มที่เป็นอิสระกันจาก 2 ประชากรนั้นและมีขนาดเป็น n_1 และ n_2 สำหรับการประมาณแบบช่วงของ $\mu_1-\mu_2$ ทำได้ดังเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) เมื่อทราบความแปรปรวนทั้งสองประชากร เราจะได้ขีดจำกัดช่วงเชื่อมั่น 100 $(1-\alpha)\%$ ของ $\mu_1-\mu_2$ เป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}$$

ในกรณีที่ประชากรไม่เป็นแบบปกติ จะใช้ช่วงเชื่อมั่นนี้ได้ดีก็ต่อเมื่อ n_1 และ n_2 ต่างก็มากกว่า 30 และบางครั้งในประชากรแบบปกติหรือไม่เป็นปกติ แต่ไม่ทราบ σ_1^2 และ σ_2^2 ก็อาศัยช่วงนั้นได้เช่นกัน แต่ต้องประมาณ σ_1^2 และ σ_2^2 ด้วยตัวอย่างขนาดโต นั่นคือช่วงเชื่อมั่นจะเป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}$$

ตัวอย่าง (1) บริษัทผลิตรถยนต์ได้บันทึกอายุใช้งานของแบตเตอรี่สองยี่ห้อ ที่ใช้กับรถยนต์ชนิดหนึ่งของบริษัทยี่ห้อหนึ่งมี 40 หน่วย ได้ค่าเฉลี่ย 32 เดือน อีกชนิดหนึ่งมี 45 หน่วย ได้ค่าเฉลี่ย 30 เดือน จากประสบการณ์ทราบว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของทั้งสองยี่ห้อเท่ากัน คือ 4 เดือน

ช่วงเชื่อมั่น 95% ของผลต่างของอายุใช้งานที่แท้จริงของแบตเตอรี่ทั้งสองอยู่ในช่วง

$$\mu_1-\mu_2 = (32-30) \pm 1.96\sqrt{4^2/40+4^2/25}$$
$$= 0.3,\ 3.7$$

ตัวอย่าง (2) นักเศรษฐศาสตร์ประจำภาคใต้กล่าวว่า รายได้ครอบครัวในภาคใต้มีมากกว่าทางภาคเหนือ 500 บาท เพื่อจะทดสอบคำกล่าวนี้ว่าจะเชื่อถือได้หรือไม่ จึงจ้างนักสถิติมาศึกษา นักสถิติแก้ปัญหาโดยประมาณผลต่างระหว่างรายได้ครอบครัวของสองภาคนั้น เขาได้เลือกตัวอย่างสุ่ม

จากสองภาค และได้ผลดังนี้

ภาคใต้	ภาคเหนือ
$n_1 = 100$	$n_2 = 120$
$\bar{X}_1 = 5900$	$\bar{X}_2 = 5800$
$S_1^2 = 9050$	$S_2^2 = 8700$

เนื่องจากไม่ทราบความแปรปรวนของประชากร นักสถิติจึงใช้ความแปรปรวนจากตัวอย่างประมาณความแปรปรวนประชากร (ใช้ได้เมื่อตัวอย่างมีขนาดโต)

นักสถิติได้สร้างช่วงเชื่อมั่น 99% สำหรับ $\mu_1-\mu_2$ ดังนี้

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{S^2/n_1 + S_2^2/n_2}$$

$$= (5900-5800) \pm 2.58\sqrt{9050/100+8700/120}$$

$$= 62.20,\ 137.80$$

จะเห็นได้ว่ารายได้ของภาคใต้มากกว่าภาคเหนือ แต่ไม่มากเท่ากับที่นักเศรษฐศาสตร์ได้กล่าวไว้เพราะฉะนั้นคำกล่าวของเขาจึงเชื่อถือไม่ได้

(2) เมื่อไม่ทราบความแปรปรวนทั้งสองประชากร แต่ถือว่าไม่แตกต่างกัน $(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2)$ ถ้าอาศัยตัวอย่างขนาดโต เราก็อาศัยช่วงเชื่อมั่นดังได้กล่าวมาแล้ว แต่ใช้ตัวอย่างขนาดเล็กจากประชากรแบบปกติหรือเกือบปกติเราจะได้ขีดจำกัดช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\mu_1-\mu_2$ เป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2}^{(\nu)}\ S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$$

ในเมื่อ S_p^2 เป็นความแปรปรวนเฉลี่ยของความแปรปรวนตัวอย่างทั้งสอง นั่นคือ

$$S_p^2 = ((n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2)/(n_1+n_2-2)$$

$t_{\alpha/2}^{(\nu)}$ เป็นค่าของ t ที่มีองศาความเป็นอิสระ $\nu = n_1+n_2-2$ และทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น $\alpha/2$

ตัวอย่าง ผู้จัดการฝ่ายตลาดต้องการทราบผลต่างของจำนวนชิ้นที่ลูกค้าสั่งของจากพนักงานขายสองพวก ที่ใช้การฝึกอบรมการขายต่างกัน เขาจึงสุ่มพนักงานขายมา 2 กลุ่ม และดูจำนวนชิ้นที่ลูกค้าสั่งของกับพนักงานขายนั้น ได้ผลสรุปของข้อมูลดังนี้

พนักงานขายกลุ่มที่ 1	พนักงานขายกลุ่มที่ 2
$n_1 = 12$	$n_2 = 10$
$\bar{X}_1 = 85$	$\bar{X}_2 = 81$
$S_1^2 = 16$	$S_2^2 = 25$

สมมติจำนวนชิ้นที่ลูกค้าสั่งของจากพนักงาน 2 พวก มีการแจกแจงแบบปกติที่ไม่ทราบ

ค่าความแปรปรวน แต่ถือว่าเท่ากัน แล้วเราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ $\mu_1 - \mu_2$ คือ

$$\mu_1 - \mu_2 = (85-81) \pm 1.725\,(4.478)\sqrt{1/12 + 1/10}$$
$$= 0.69,\ 7.31$$

โดยมี $S_p^2 = ((12-1)16 + (10-1)15)\,/\,(12+10-2) = 20.05$ นั่นคือ

$S_p = 4.478$ สำหรับ $t_{.05} = 1.725$ เมื่อ $\nu = 12+10-2 = 20$

ขบวนการสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับ $\mu_1 - \mu_2$ จากตัวอย่างขนาดเล็กที่ได้จากประชากรแบบปกติ ที่มีความแปรปรวนของประชากรเท่ากันนั้น ถึงแม้ว่าข้อสมมติเหล่านี้ผิดแผกไปบ้างเล็กน้อย ดีกรีของความเชื่อมั่นสำหรับช่วงนั้นจะไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก นั่นคือยังใช้ได้อยู่ ถ้าประชากรมีความแตกแต่างกันมาก ผลอันนั้นยังจะใช้ได้ดี เมื่อประชากรเป็นแบบปกติ และขนาดตัวอย่างเท่ากัน $(n_1 = n_2)$ ดังนั้น ในการวางแผนการทดลอง เราจึงพยายามทำให้ขนาดของตัวอย่างเท่า ๆ กัน

(3) เมื่อไม่ทราบความแปรปรวนทั้งสองประชากร และถือว่าแตกต่างกัน $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ ในกรณีตัวอย่างขนาดเล็กจากประชากรแบบปกติ และขนาดตัวอย่างนั้นก็ไม่สามารถทำให้เท่ากันได้ ตัวสถิติที่ใช้กันบ่อย ๆ ก็คือ

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบ t โดยประมาณ และมีองศาความเป็นอิสระ ν

$$\nu = \frac{(S_1^2/n + S_2^2/n_2)^2}{(S_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (S_2^2/n_2)^2/(n_2-1)}$$

ค่า ν นี้มักจะไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงต้องทำให้เป็นจำนวนเต็ม

จากตัวสถิตินั้นเราจึงได้ขีดจำกัดช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\mu_1 - \mu_2$ เป็น

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\alpha/2}^{(\nu)} \sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}$$

ตัวอย่าง สุ่มตัวอย่าง 15 จากประชากรแบบปกติที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน ปรากฏว่าได้ $\bar{X}_1 = 1.94$ และ $S_1 = 0.45$ ในทำนองเดียวกันสุ่มตัวอย่างขนาด 10 จากประชากรอื่นที่เป็นแบบปกติที่ไม่ทราบค่าความแปรปรวนได้ $\bar{X}_2 = 1.04$ และ $S_2 = 0.26$ ถ้าประชากรทั้งสองมีความแปรปรวนไม่เท่ากัน เราจะสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\mu_1 - \mu_2$ ดังนี้

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha/2}^{(\nu)} \sqrt{S_1^2/n_1 = S_2^2/n_2}$$

$$\nu = \frac{(.45^2/15 + .26^2/10)^2}{(.45^2/15)^2/14 + (.26^2/10)^2/9} = 22.7 \cong 23$$

$t_{.025} = 2.069$ เมื่อ $\nu = 23$

นั่นคือช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\mu_1 - \mu_2$ จะเป็น

$$\mu_1 - \mu_2 = (1.94 - 1.04) \pm 2.069 \sqrt{.45^2/15 + .26^2/10}$$
$$= 0.61,\ 1.19$$

เนื่องจากคำนวณ ν ยุ่งยาก ในทางปฏิบัติเราจึงแทน $t^{(\nu)}_{\alpha/2}$ ด้วย $Z_{\alpha/2}$ ในเมื่อ $n_1 + n_2$ มากกว่า 20

5.4.3 การประมาณผลต่างของค่าเฉลี่ยเมื่อตัวอย่างมีสหสัมพันธ์กัน หรือค่าสังเกตจับคู่กัน

ถ้าเราพิจารณาการประมาณค่าของผลต่างของค่าเฉลี่ย เมื่อตัวอย่างไม่เป็นอิสระกัน และความแปรปรวนของสองประชากรไม่จำเป็นต้องเท่ากัน และถ้าสังเกตในสองตัวอย่างเกิดขึ้นเป็นคู่ ๆ โดยที่แต่ละคู่สัมพันธ์กัน เช่นถ้าทดลองยาลดความอ้วนกับคน 15 คน จะเห็นว่าก่อนการทดลองและหลังการทดลองจะทำให้เกิดตัวอย่างสองตัวอย่างมีความสัมพันธ์กัน เพราะค่าสังเกตแต่ละคู่ทำกับหน่วยเดียวกัน เราพิจารณาผลต่างของแต่ละคู่ ผลต่างเหล่านี้จะแจกแจงเป็นปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_D และความแปร ปรวนที่ไม่ทราบค่า σ_D^2 เราจะประมาณ σ_D^2 ด้วยตัวสถิติ S_D^2 โดยที่

$$S_D^2 = \Sigma(D - \bar{D})^2/(n-1)$$

ตัวประมาณค่าของ $\mu_1 - \mu_2 = \mu_D$ คือ $\bar{D}$ และช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{D} \pm t^{(\nu)}_{\alpha/2} S_D/\sqrt{n}$$

ในเมื่อ $\nu = n - 1$

ตัวอย่าง พนักงานขาย 20 คน แบ่งเป็น 10 คู่ โดยที่แต่ละคู่มีสติปัญญาและความสามารถเหมือน ๆ กัน แต่ละคู่จะจับฉลากกันว่าจะเข้าอบรมโปรแกรมที่หนึ่งหรือที่สอง หลังจากฝึกอบรมแล้วก็ออกไปทำงานพอครบ 6 เดือน ก็มาดูจำนวนชิ้นของสินค้าที่ขายได้ต่อวัน ปรากฏว่าได้ผลดังนี้

คู่	โปรแกรมที่ 1	โปรแกรมที่ 2	ผลต่าง
1	76	81	-5
2	60	52	8
3	85	87	-2
4	58	70	-12

5	91	86	5
6	75	77	-2
7	82	90	-8
8	64	63	1
9	79	85	-6
10	88	83	5

เราหาช่วงเชื่อมั่น 98% สำหรับผลต่างที่แท้จริงในโปรแกรมทั้งสอง ได้ดังนี้

$$\bar{D} = -16/10 = -1.6$$

$$S_D^2 = \Sigma(D-\bar{D})^2/(n-1) = (\Sigma D^2-(\Sigma D)^2/n)/(n-1)$$

$$= (392-(-16)^2/10)\ /10 = 40.7$$

$$S_D = 6.38$$

จากตารางได้ $t_{.01} = 2.821$ เมื่อ $\nu = 9$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 98% สำหรับ $\mu_1-\mu_2$ หรือ μ_D คือ

$$\mu_D = \bar{D} \pm t^{(\nu)}_{\alpha/2} S_D/\sqrt{n}$$

$$= -1.6 \pm 2.821\ (6.38)/\sqrt{10}$$

$$= -7.29,\ 4.09$$

5.4.4 ผลรวมเชิงเส้นของค่าเฉลี่ยในหลายประชากร (Linear Combination of Means of Several Populations)

จากประชากรแบบปกติที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน ถ้าต้องการประมาณผลรวมเชิงเส้นของค่าเฉลี่ย L

$$L = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots\dots + a_k u_k$$

ในเมื่อ $a_1, a_2, \dots, a_k$ เป็นค่าคงที่ซึ่งอาจจะเป็น บวก ลบ หรือศูนย์ ก็ได้ แล้วจะอาศัยตัวอย่างขนาด n_i จากประชากรต่าง ๆ นั้น โดยที่ตัวอย่างต่าง ๆ จะเป็นอิสระกัน และมีค่าเฉลี่ยกับความแปรปรวนตัวอย่างเป็น $\bar{X}_i$ และ S_i^2 ($i = 1, 2, \dots, k$) นั่นคือได้ตัวประมาณแบบจุดของ L เป็น $\hat{L}$

$$\hat{L} = a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 + \ldots\ldots + a_k\bar{X}_k$$

ถ้าประชากรต่าง ๆ มีความแปรปรวนไม่แตกต่างกัน หรือมีความแปรปรวนร่วมกัน แล้วความแปรปรวนร่วมก็กำหนดได้โดยการเฉลี่ยความแปรปรวนตัวอย่างเหล่านั้น ดังนี้

$$S^2 = \left((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + \ldots\ldots + (n_k - 1)S_k^2\right) / (n-k)$$

ในเมื่อ $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$

ช่วงเชื่อมั่น สำหรับผลรวมเชิงเส้นของค่าเฉลี่ย L จะกำหนดได้ดังนี้

(ก) เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ $\{a_i\}$ เพียงเซทเดียวก่อน การทดลอง แล้วจะได้ช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ L เป็น

$$L = \hat{L} \pm \sqrt{F_\alpha(1, n-k)}\ \sqrt{S^2(a_1^2/n_1 + a_2^2/n_2 + \ldots + a_k^2/n_k)}$$

ในเมื่อ $F_\alpha(1, n-k)$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มที่แจกแจงแบบเอฟ (F) ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 และ $n-k$ โดยทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเท่ากับ α

(ข) เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ $\{a_i\}$ ไว้หลายเซท หรือกำหนดสัมประสิทธิ์ $\{a_i\}$ หลังการทดลอง ช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ L ซึ่งขึ้นอยู่กับวิธีการของเชฟฟี (Scheffe 's Mehod) จะเป็นดังนี้

$$L = \hat{L} \pm \sqrt{(k-1)\ F_\alpha(k-1, n-k)}\ \sqrt{S^2 \sum a_i^2 / n_i}$$

ในเมื่อ $F_\alpha(k-1, n-k)$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบเอฟ ด้วยองศาความเป็นอิสระ : $k-1$ และ $n-k$ โดยทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเท่ากับ α

ถ้าประชากรต่าง ๆ มีความแปรปรวนไม่เท่ากันหมด ช่วงเชื่อมั่นสำหรับ L จะกำหนดได้เป็น

$$L = \hat{L} \pm \sqrt{F_\alpha(1, \nu)}\ \sqrt{\sum a_i^2 S_i^2 / n_i}$$

ในเมื่อเซทเดียวของ $\{a\}$ นั้นกำหนดไว้ก่อนการทดลอง และ ν กำหนดได้จาก

$$\nu = \left(\sum a_i S_i^2 / n_i\right)^2 / \sum\left((a_i S_i^2/n_i)^2/(n_i - 1)\right)^{-2}$$

ถ้าขนาดตัวอย่างแต่ละตัวอย่างโตกว่า 25 จะใช้ $X_\alpha^2(1)$ แทน $F_\alpha(1,\nu)$ เพื่อหลีกเลี่ยงการคำนวณ ν ซึ่งยุ่งยาก

ในกรณีที่ตัวอย่างจากประชากรต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กัน ช่วงเชื่อมั่นสำหรับ L ก็จะกำหนดได้ดังนี้

(1) เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ $\{a_i\}$ เพียงเซทเดียวก่อนการทดลอง

$$L = \hat{L} \pm \sqrt{F_{\alpha}^{(1,\nu)}}\sqrt{S^2\sum a_i^2/n}$$

ในเมื่อ $\nu = (n-1)(k-1)$

(2) เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ $\{a_i\}$ ไว้หลายเซท หรือกำหนดสัมประสิทธิ์ $\{a_i\}$ หลังการทดลอง

$$L = \hat{L} \pm \sqrt{(k-1)F_{\alpha}^{(\nu_1,\nu_2)}}\sqrt{S^2\sum a_i^2/n}$$

ในเมื่อ $\nu_1 = k-1$ และ $\nu_2 = (n-1)(k-1)$

สำหรับ S^2 เป็นค่าประมาณของความแปรปรวนประชากรต่าง ๆ ที่ถือว่าไม่แตกต่างกันแล้ว S^2 จะกำหนดได้จาก

$$S^2 = \sum((X_{ij}-\bar{X}) - (\bar{X}_i-\bar{X}) - (\bar{X}_j-\bar{X}))^2 / (n-1)(k-1)$$

$$= (\sum X_{ij}^2 - \sum X_i^2/k - \sum X_j^2/n + C)/(n-1)(k-1)$$

ในเมื่อ X_{ij} เป็นค่าสังเกตจากหน่วยทดลอง i ในตัวอย่าง j ; X_i เป็นผลรวมของค่าสังเกตจากหน่วยทดลอง (บลอค) i ($i = 1, 2, \ldots, n$); X_j เป็นผลรวมของค่าสังเกตจากตัวอย่าง j ($j = 1, 2, \ldots k$) และ $C = (\Sigma X_{ij})^2/nk$

5.5 การประมาณความแปรปรวนของประชากรแบบปกติ

5.5.1 การประมาณความแปรปรวนสำหรับประชากรเดียว

ในประชากรแบบปกติความแปรปรวนจะเป็น σ^2 ซึ่งมีตัวประมาณค่าแบบจุดเป็น S^2 การประมาณ σ^2 แบบช่วงก็อาศัยตัวสถิติ X^2

$$X^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ $n-1$ นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ σ^2 จะเป็น

$$\frac{(n-1)S^2}{X^{2(\nu)}_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{X^{2(\nu)}_{1-\alpha/2}} \quad ; \quad \nu = n-1$$

หรือ
$$\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{X^{2(\nu)}_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{X^{2(\nu)}_{1-\alpha/2}}$$

ในเมื่อ $X^{2(\nu)}_{\alpha/2}$ และ $X^{2(\nu)}_{1-\alpha/2}$ เป็นค่าตัวแปรไคสแควร์ที่ทำให้เกิดพื้นที่เหมือนเป็น $\alpha/2$ และ $1-\alpha/2$ ตามลำดับ

สำหรับประชากรปกติที่ทราบค่าเฉลี่ย μ แต่ไม่ทราบความแปรปรวน σ^2 นั้นตัวประมาณค่าแบบจุดจะเป็น S_o^2

$$S_o^2 = (1/n)\sum X_i^2 - \mu(2\bar{X}-\mu)$$

และช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)$ % สำหรับ σ^2 จะเป็น

$$nS_o^2 / X^{2(n)}_{\alpha/2} \leq \sigma^2 \leq nS_o^2 / X^{2(n)}_{1-\alpha/2}$$

ตัวอย่าง โรงงานผลิตน้ำมะเขือเทศต้องการควบคุมน้ำหนักเฉลี่ยและน้ำหนักของแต่ละกระป๋องที่เครื่องจักรบรรจุ จากตัวอย่างสุ่มของน้ำมะเขือเทศ 10 กระป๋อง ได้เป็นดังนี้

15.4	16.1	15.8	16.4	16.0
15.9	16.7	16.3	15.7	15.7

จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของความแปรปรวนที่แท้จริงของน้ำมะเขือเทศทั้งหมดที่ผลิตออกมา

จากการคำนวณเราได้ $\bar{X} = 160/10 = 16.0$

$(n-1)S^2 = \sum(X-\bar{X})^2 = 1.34$

สำหรับ $\nu = 9$ เราได้ $X^2_{.975} = 2.70$ และ $X^2_{.025} = 19.02$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% ของ σ^2 คือ

$$1.34/19.02 < \sigma^2 < 1.34/2.70$$

$$0.07 < \sigma^2 < 0.95$$

ถ้าใช้ตัวอย่างขนาดโต $(n \geq 100)$ จากประชากรปกติเมื่อประมาณความแปรปรวน σ^2 แล้วตัวประมาณค่า S^2 จะแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนดังนี้

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad \text{และ} \quad V(S^2) = 2\sigma^4/(n-1)$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)$% สำหรับ σ^2 จึงเป็น

$$\frac{S^2}{1+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}} < \sigma^2 < \frac{S^2}{1-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}}$$

ตัวอย่าง ตัวอย่างสุ่มของน้ำมะเขือเทศ 250 กระป๋องมีความแปรปรวนของน้ำหนักเป็น 5 ออนซ์ ถ้าสมมติว่าน้ำหนักมีการแจกแจงปกติแล้ว ช่วงเชื่อมั่น 99% สำหรับ σ^2 จะเป็น

$$5/(1 + 2.58\sqrt{2/249}) < \sigma^2 < 5/(1 - 2.58\sqrt{2/249})$$

$$4.065 < \sigma^2 < 6.494$$

บางครั้งต้องการประมาณช่วงเชื่อมั่นของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ก็ทำได้ง่าย ๆ โดยการหารากที่สองของช่วงเชื่อมั่นสำหรับ σ^2 นั่นเอง นั่นคือเราจะได้

$$\sqrt{(n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}(\nu)} \leq \sigma \leq \sqrt{(n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(\nu)} \; ; \; \nu = n-1$$

$$\sqrt{S^2/(1+Z_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)})} \leq \sigma \leq \sqrt{S^2/(1-Z_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)})}$$

แต่สำหรับตัวอย่างขนาดโต $(n \geq 100)$ จะสร้างช่วงเชื่อมั่นของ σ โดยตรงก็ได้ นั่นคืออาศัยการแจกแจงของตัวสถิติ S ซึ่งมีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็น

$$E(S) = \sigma \text{ และ } V(S) = \sigma^2/2n$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ σ จะเป็น

$$S/(1+Z_{\alpha/2}\sqrt{1/2n}) < \sigma < S/(1-Z_{\alpha/2}\sqrt{1/2n})$$

ตัวอย่าง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความเหนียวของเชือก 200 เส้น ที่เลือกมาแบบสุ่ม ปรากฏว่าเป็น 10 ปอนด์ จงประมาณช่วงเชื่อมั่น 95% ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ)

ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ σ คือ

$$10(1 + 1.96/\sqrt{2(200)}) < \sigma < 10/(1 - 1.96/\sqrt{2(200)})$$

$$9.1 < \sigma < 11.1$$

5.5.2 การประมาณอัตราส่วนของความแปรปรวนประชากร

สำหรับตัวอย่างจากประชากรทั้งสองที่เป็นอิสระกันนั้น ตัวประมาณค่าแบบจุดของอัตราส่วนความแปรปรวน σ_1^2/σ_2^2 จะเป็นตัวสถิติ

$$(S_1^2/S_2^2)(n_2-3)/(n_2-1)$$

แต่ช่วงเชื่อมั่นของอัตราส่วนความแปรปรวนจะอาศัยตัวสถิติ F

$$F = (S_1^2/\sigma_1^2)/(S_2^2/\sigma_2^2)$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอฟ ด้วยองศาความเป็นอิสระ ν_1 และ ν_2 โดยที่ $\nu_1 = n_1-1$ และ $\nu_2 = n_2-1$ นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ σ_1^2/σ_2^2 จึงเป็น

$$(S_1^2/S_2^2)\,/F_{\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)} \le \sigma_1^2/\sigma_2^2 \le (S_1^2/S_2^2)/F_{1-\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)}$$

ในเมื่อ $F_{\alpha/2}$ และ $F_{1-\alpha/2}$ เป็นค่าของตัวแปรเอฟที่ให้พื้นที่ทางขวามือเป็น $\alpha/2$ และ $1-\alpha/2$ ตามลำดับ และ $F_{1-\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)} = 1/F_{\alpha/2}^{(\nu_2,\nu_1)}$

ถ้าสนใจอัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ_1/σ_2 ก็จะอาศัยอัตราส่วน σ_1^2/σ_2^2 โดยหารากที่สองนั่นเอง

ตัวอย่าง ข้อทดสอบทางเศรษฐศาสตร์ที่เป็นแบบมาตรฐาน ได้ลองทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างของนักศึกษาชายและหญิงเป็นจำนวน 25 คน และ 16 คน นักศึกษาชายทำได้คะแนนเฉลี่ย 82 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8 แต่นักศึกษาหญิงได้ 78 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 7 จงหาช่วงเชื่อมั่น 98% ของ σ_1^2/σ_2^2 และ σ_1/σ_2

โดยที่ $n_1 = 25$, $n_2 = 16$, $S_1 = 8$, $S_2 = 7$ และสำหรับ $\nu = (24, 15)$ เราได้ $F_{.01} = 3.29$, $F_{.99} = 1/2.89$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 98% สำหรับ σ_1^2/σ_2^2 กับ σ_1/σ_2 คือ

$(64/49)/3.29 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < (64/49)/(1/2.89)$

ในกรณีที่ตัวอย่างมีสหสัมพันธ์กันหรือค่าสังเกตเป็นคู่ตัวประมาณค่าของความแปรปรวนในผลต่าง σ_D^2 จะเป็น S_D^2

$$S_D^2 = \Sigma(D-\overline{D})^2/(n-1)$$

นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ σ_D^2 จะเป็น

$$(n-1)S_D^2\,/\chi_{\alpha/2}^{2\,(n-1)} \le \sigma_D^2 \le (n-1)S_D^2\,/\,\chi_{1-\alpha/2}^{2\,(n-1)}$$

5.5.3 ความแปรปรวนร่วมของประชากรต่าง ๆ สำหรับประชากรปกติที่เป็นอิสระกัน โดยที่ไม่ทราบทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนส่วน (Commón Variance) นั้น เมื่อต้องการประมาณความแปรปรวนร่วม (σ^2) โดยอาศัยตัวอย่างขนาด n_i จากประชากร i ซึ่งจะให้ความแปรปรวนตัวอย่าง S_i^2 แล้วตัวประมาณค่าของ σ^2 จะเป็น S^2

$$S^2 = \sum S_i^2\,/(n-k) \quad ; \; n = n_1+n_2+\dots+n_k$$

และช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับความแปรปรวนร่วม σ^2 จะเป็น

$$(n-k)S^2\,/\,\chi_{\alpha/2}^{2(\nu)} \le \sigma^2 \le (n-k)S^2\,/\,\chi_{1-\alpha/2}^{2(\nu)}$$

ในเมื่อ $\nu = n-k$

แต่ถ้าค่าสังเกตมีความสัมพันธ์กัน แล้วตัวประมาณค่าของความแปรปรวนร่วม σ^2 เป็น S^2

$$S^2 = \sum\{(X_{ij} - \bar{X}) - (\bar{X}_i - \bar{X}) - (\bar{X}_j - \bar{X})\}^2 / (n-1)(k-1)$$

และช่วงเชื่อมั่น 100(1 − α)% สำหรับ σ^2 จะเป็น

$$(n-1)(k-1)S^2/X^{2(\nu)}_{\alpha/2} < \sigma^2 < (n-1)(k-1)S^2 / X^{2(\nu)}_{1-\alpha/2}$$

ในเมื่อ $\nu = (n-1)(k-1)$

5.6 การประมาณสัดส่วนของประชากรทวินาม

5.6.1 การประมาณสัดส่วนประชากร (π) ตัวประมาณค่าแบบจุดของสัดส่วน π จากการทดลองแบบทวินามกำหนดไว้เป็น $P = x/n$ โดยที่การแจกแจงของ P จะเป็นแบบปกติ ถ้าขนาดตัวอย่างโตพอ ($n \geq 20$) และมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนเป็น

$E(P) = \pi$ และ $V(P) = \pi(1-\pi)/n$

เมื่อตัวอย่างขนาดโตเราประมาณ $V(P)$ ได้เป็น $\hat{V}(P) = PQ/n$ โดยที่ $Q = 1-P$ ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 100(1 − α)% สำหรับสัดส่วนประชากร π เป็น

$$\pi = P \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาครอบครัวที่มีโทรทัศน์โดยใช้ตัวอย่างขนาด 500 ราย พบว่า 160 ครอบครัวมีโทรทัศน์สี ช่วงเชื่อมั่น 95% ของสัดส่วนจริงของครอบครัวที่มีโทรทัศน์สีจะเป็นเท่าใด ?

$$P = 160/500 = 0.32 \quad Q = 0.68$$

ช่วงเชื่อมั่น 95% ของ π คือ

$$\pi = 0.32 \pm 1.96\sqrt{0.32(0.68)/500}$$
$$= 0.28,\ 0.36$$

ช่วงเชื่อมั่นของ π ที่กล่าวมานี้จะต้องใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่ และถ้าค่าของ P ห่างจาก 1/2 มากเท่าใดก็ต้องใช้ขนาดตัวอย่างมากขึ้นเท่านั้น W.G. Cochran ได้เสนอแนะขนาดตัวอย่างไว้ดังนี้

สัดส่วนจากตัวอย่าง	ขนาดตัวอย่าง
0.5	30
0.4 หรือ 0.6	50
0.3 หรือ 0.7	80
0.2 หรือ 0.8	200

0.1 หรือ 0.9	600
0.05 หรือ 0.95	1400

ถ้า π เป็นค่ากลางของช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ แล้ว P จะประมาณ π โดยไม่มีความคลาดเคลื่อน อย่างไรก็ตามส่วนมาก P จะไม่เท่ากับ π พอดี และค่าประมาณแบบจุดจะมีความคลาดเคลื่อน ขนาดของความคลาดเคลื่อนนี้จะเป็นผลต่างระหว่าง π และ P และจะมากที่สุดเมื่อ π อยู่ใกล้ปลายขั้วใดขั้วหนึ่งของช่วงเชื่อมั่น เพราะฉะนั้น P จะแตกต่างจาก π อย่างมากไม่เกิน $Z_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n}$

$P - Z_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n}$ e: Error $P+Z_{\alpha/2}\sqrt{PQ/n}$

π P

ขนาดตัวอย่างที่ผ่านมาเราเชื่อมั่น 95% ที่สัดส่วนของตัวอย่าง แตกต่างจากสัดส่วนจริง π ด้วยจำนวนน้อยกว่า 0.04

ขนาดของตัวอย่างจะโตสักเท่าใดมีที่จะประกันว่าความคลาดเคลื่อนในการประมาณจะน้อยกว่าจำนวน **e** ที่กำหนดไว้นั้น เราพิจารณาได้ดังนี้

ถ้า P เป็นตัวประมาณค่าของ π เราเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ว่าความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่าจำนวน e ที่กำหนดไว้นั้น ตัวอย่างจะต้องมีขนาด

$$n = PQ\,(Z_{\alpha/2}/e)^2$$

เนื่องจาก PQ มีค่าอย่างมากเท่ากับ 1/4 ดังนั้นขอบเขตบนสำหรับขนาดตัวอย่างจึงเป็น

$$n = (1/4)\,(Z_{\alpha/2}/e)^2$$

ตัวอย่าง ตัวอย่างจะเป็นสักเท่าใดถ้าเราต้องการ (ก) เชื่อมั่น 95% (ข) เชื่อมั่นอย่างน้อย 95% ที่ค่าประมาณของ π ห่างจาก π ไม่เกิน 0.02 ?

ให้ตัวอย่างเบื้องต้นมีขนาด $n = 500$ และมี $P = 160/500 = 0.32$

ดังนั้น $n = (.32)(.68)(1.96/0.02)^2$

$= 2090$

เพราะฉะนั้น ถ้าเราประมาณค่าของ π ด้วยตัวอย่างสุ่มขนาด 2090 เราจะเชื่อมั่น 95% ที่สัดส่วนของตัวอย่างจะแตกต่างจากสัดส่วนจริงไปมากกว่า 0.02

ตามทฤษฎีข้างบนเราเชื่อมั่นอย่างน้อย 95% ที่ P จะไม่แตกต่างจาก π เกิน 0.02 ถ้าเราเลือกตัวอย่างขนาด

$$n = (1/4)\,(1.96/.02)^2 = 2401$$

เมื่อเปรียบเทียบผลของ (ก) และ (ข) จะเห็นได้ว่า ข้อมูลข่าวสารที่เกี่ยวกับที่ได้จากตัวอย่างแรกเริ่ม (Preliminary Sample) หรือจากประสบการณ์นั้นจะทำให้เราสามารถเลือกตัวอย่างมีขนาดน้อยกว่าได้ นั่นคือจะลดค่าใช้จ่ายลงอีก

ในกรณีที่ใช้ตัวอย่างขนาดเล็ก ($n < 20$) การประมาณสัดส่วนประชากร π กระทำได้โดยอาศัย (1) แผนภูมิ (Charts) (2) ตารางทวินาม (Binomial Tables) และ (3) ตารางเอฟ (F-distribution) สำหรับวิธีที่ใช้ตารางเอฟ หรือการแจกแจงแบบเอฟนั้นก็โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงทวินามกับการแจกแจงแบบเอฟ นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ π จะพิจารณาได้จาก

$$\frac{n-r}{r+1}\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) \leq F_{\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)}$$

และ

$$\frac{n-r}{r+1}\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) \geq F_{1-\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)}$$

$$\nu_1 = 2(r+1), \quad \nu_2 = 2(n-r)$$

นั่นคือ

$$\pi = \left(1+\frac{n-r}{r+1}F_{\alpha/2}^{(\nu_2,\nu_1)}\right)^{-1}, \quad \left(1+\frac{n-r}{r+1} \Big| F_{\alpha/2}^{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{-1}$$

ตัวอย่าง สุ่มสินค้าที่ผลิตจากเครื่องจักรมา 18 ชิ้น จากสินค้าที่ผลิตเป็นจำนวนมาก เมื่อตรวจสอบคุณภาพปรากฏว่ามีสินค้าที่ใช้การได้ 14 ชิ้น สัดส่วนที่สินค้าใช้การได้ (π) จะเป็นเท่าได้ ถ้าใช้ระดับความเชื่อมั่น .95 ?

$$n = 18, \quad r = 14, \quad \nu_1 = 2(14+1) = 30, \quad \nu_2 = 2(18-14) = 8$$

$$F_{.025}^{(30,8)} = 3.89$$

$$F_{.025}^{(8,30)} = 2.65$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ π จะเป็น

$$\pi = \left(1+\frac{18-14}{14+1}(2.65)\right)^{-1}, \quad \left(1+\frac{18-14}{14+1}\Big|3.89\right)^{-1}$$

$$= 0.586, \ 0.936$$

5.6.2 การประมาณผลต่างระหว่างสัดส่วนประชากร

ผลต่างระหว่างสัดส่วนประชากร $\pi_1 - \pi_2$ นั้นใช้ตัวประมาณค่าแบบจุดเป็น $P_1 - P_2$ ซึ่ง

เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงสุด สำหรับตัวอย่างที่เป็นอิสระกันขนาด n_1 และ n_2 จากประชากรทวินามสองประชากร ตัวสถิติ $P_1 - P_2$ จะแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนดังต่อไปนี้ถ้าตัวอย่างขนาดโต $(n_1, n_2 \geq 20)$

$$E(P_1 - P_2) = \pi_1 - \pi_2$$

$$V(P_1 - P_2) = \pi_1(1-\pi_1)/n_1 + \pi_2(1-\pi_2)/n_2$$

ความแปรปรวน $V(P_1 - P_2)$ ประมาณได้เป็น $P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2$ แล้วช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $\pi_1 - \pi_2$ จึงเป็น

$$\pi_1 - \pi_2 = (P_1 - P_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2}$$

ตัวอย่าง ผู้จัดการธนาคารต้องการทราบผลต่างของสัดส่วนที่แท้จริงของลูกค้าที่มีรายได้มากกว่า 100,000 บาทต่อปี สำหรับธนาคารสองสาขา จากตัวอย่างสุ่มได้ผลดังนี้

สาขาที่ 1, $n_1 = 150, P_1 = .50, Q_1 = .50$

สาขาที่ 2, $n_2 = 160, P_2 = .18, Q_2 = .82$

ช่วงเชื่อมั่น 90% สำหรับผลต่างของสัดส่วนแท้จริง จะเป็น

$$\pi_1 - \pi_2 = (.50 - .18) \pm 1.65\sqrt{.50(.50)/150 + .18(.82)/160}$$

$$= 0.236,\ 0.404$$

ในเมื่อมีประชากรมากกว่าสอง และตัวอย่างขนาดโตที่สุ่มมาจากประชากรเหล่านั้นเป็นอิสระกัน การประมาณช่วงเชื่อมั่นสำหรับ ผลต่างสัดส่วนระหว่างสองประชากรได้ $\pi_i - \pi_j$, $(i < j)$ พิจารณาได้จากช่วง

$$\pi_i - \pi_j = (P_i - P_j) \pm \sqrt{\chi^{2}_{\alpha}(k-1)}\sqrt{P_iQ_i/n_i + P_jQ_j/n_j}$$

ในเมื่อ k เป็นจำนวนตัวอย่าง

สำหรับการประมาณผลต่างสัดส่วนที่มีสห สัมพันธ์กันของสองประชากร หรือหลายประชากรพิจารณาได้ดังนี้

(1) กรณีสองตัวอย่าง ตัวอย่างจากสองประชากรจะแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2	S	F	รวม
ตัวอย่าง 1 S	X_{11}	X_{12}	$X_{1.}$
F	X_{21}	X_{22}	$X_{2.}$
รวม	$X_{.1}$	$X_{.2}$	n

ตัวประมาณค่าแบบจุดของ $\pi_1 - \pi_2$ หรือ $\pi_{1.} - \pi_{.1}$ จะเป็น $P_1 - P_2$ หรือ $P_{1.} - P_{.1}$ และช่วงเชื่อมั่นสำหรับ $\pi_{1.} - \pi_{.1}$ จะเป็น

$$\pi_{1.} - \pi_{.1} = (P_{1.} - P_{.1}) \pm Z_{\alpha/2}\, S_{(P_{1.} - P_{.1})}$$

ในเมื่อ $S^2_{(P_{1.} - P_{.1})} = P_{1.}Q_{1.}/n + P_{.1}Q_{.1}/n - 2(P_{11} - P_{1.}P_{.1})/n$ และ $P_{11} = X_{11}/n$

ส่วนประชากรที่มีมากกว่าสอง แล้วตัวอย่างขนาด n จะแสดงได้เป็น

ตัวอย่าง	1	2		k	รวม
หน่วยทดลอง 1	X_{11}	X_{12}		X_{1k}	$X_{1.}$
2	X_{21}	X_{22}		X_{2k}	$X_{2.}$
			X_{ij}		
n	X_{n1}	X_{n2}		X_{nk}	$X_{n.}$
รวม	$X_{.1}$	$X_{.2}$		$X_{.k}$	N

ในเมื่อ $X_{ij} = 0,1$ และ k เป็นจำนวนตัวอย่าง

ตัวประมาณค่าแบบจุดของสองสัดส่วนใดๆ $\pi_{.i} - \pi_{.j} (i<j)$ จะเป็น $P_{.i} - P_{.j}$ และช่วงเชื่อมั่น 100 (1- α)% สำหรับ $\pi_{.i} - \pi_{.j}$ จะเป็น

$$\pi_{.i} - \pi_{.j} = (P_{.i} - P_{.j}) \pm \sqrt{X^{2(k-1)}_{\alpha}} \sqrt{V(P_{.i} - P_{.j})}$$

$$V(P_{.i} - P_{.j}) = 2(kN - \Sigma X^2_{i.}) / n^2 k(k-1)$$

5.7 การประมาณค่าของพารามิเตอร์ในประชากรแบบอื่น ๆ

ที่กล่าวมาเราสนใจแต่พารามิเตอร์ของประชากรที่เป็นแบบปกติ (หรือใกล้ ๆ แบบปกติ) กับแบบทวินามเท่านั้น นั่นคือสนใจสัดส่วน, ค่าเฉลี่ย, และความแปรปรวน ต่อไปเราจะสนใจพารามิเตอร์ของประชากรอื่น ๆ บ้าง เช่น

(1) **การประมาณค่าของพารามิเตอร์ในประชากรแบบเอกซโพเนนท์ (λ)** จะพิจารณาถึงวิธีสร้าง 100(1-α)% ช่วงเชื่อมั่นทางเดียวสำหรับพารามิเตอร์ในประชากรแบบเอกซ์โพเนนท์ เป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า อายุใช้งาน (Time to Failure) ของอุปกรณ์ทางอิเลคโทรนิคหลายชนิดมีการแจกแจงแบบนี้ และค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่มแบบนี้เป็น $1/\lambda$ ถ้าเราต้องการจะประกันว่าอายุใช้งานจะมีค่าคาดหวังอย่างน้อย k ชั่วโมง (k เป็นจำนวนเลขซึ่งมากกว่าศูนย์) นั้นเราจะต้องพูดว่า λ ไม่โตกว่าเลขจำนวนหนึ่ง ($1/\lambda \geq k$ หรือ $\lambda \leq 1/k$) ในทางปฏิบัติเรามักจะสร้างช่วงเชื่อมั่นทางเดียวข้างขวา (One-sided upper confidence interval) สำหรับ λ ซึ่งก็หมายถึงช่วงเชื่อมั่นทางเดียวข้างซ้ายสำหรับ $1/\lambda$ นั่นเอง

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรแบบเอกซ์โพเนนท์ x ที่มีพารามิเตอร์ λ แล้ว 100(1 - α) % ช่วงเชื่อมั่นทางขวาสำหรับ λ กำหนดไว้ดังนี้

$$\lambda \leq \chi^{2(2n)}_{\alpha} / 2n\bar{X}$$

หรือ 100 (1 - α) % ช่วงเชื่อมั่นทางซ้ายสำหรับ E(X) คือ

$$E(X) \geq 2n\bar{X} / \chi^{2(2n)}_{\alpha}$$

ในเมื่อ $\bar{X} = \Sigma x_i/n$ และ χ^2 เป็นค่าไคสแควร์ที่มี $\nu = 2n$ และทำให้ $P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha}) = \alpha$

ตัวอย่าง อายุใช้งานของหลอดอีเลคตรอนแบบหนึ่งมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนท์ที่มีพารามิเตอร์ λ ถ้าสุ่มหลอดชนิดนี้มา 12 หลอด และทดสอบอายุใช้งานของมัน ปรากฏว่าได้อายุใช้งานรวมกันเป็น 11.196 ชั่วโมง

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่นทางขวา 90% สำหรับ λ คือ

$$\lambda \leq \frac{33.2}{2(12)(11196/12)} = 0.0015$$

หรือช่วงเชื่อมั่นทางซ้าย 90% สำหรับค่าคาดหวังของอายุใช้งาน E(X) = $1/\lambda$ เป็น

$$E(X) \geq 1/0.0015 = 674.5$$

(2) **การประมาณค่าของพารามิเตอร์ในประชากรแบบปัวซอง (λ)** มีปรากฏการณ์อย่างที่มีการแจกแจงแบบปัวซอง ดังที่กล่าวมาแล้วในเรื่องการแจกแจงมาตรฐานที่สำคัญ ๆ โดยที่ λ เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา (พื้นที่, ปริมาตร) หนึ่ง ซึ่งเราจำเป็นที่จะต้องประมาณนั้น เราจะทำได้ดังนี้

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ เมื่อ n มีขนาดโต แล้วช่วงเชื่อมั่น 100 (1 - α) % สำหรับ λ หรือ E(X) กำหนดไว้ดังนี้

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{X}/n} < \lambda < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{X}/n}$$

ในเมื่อ $\bar{X} = \Sigma x/n$ และ $Z_{\alpha/2}$ เป็นค่าของ Z ในตารางปกติที่ทำให้ $P(Z > Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$