V การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance)

ในกรณีที่มีประชากรตั้งแต่ 2 ประชากรขึ้นไป และต้องการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรว่าเท่ากันหรือไม่ เราทดสอบได้โดยการสุ่มตัวอย่างจากแต่ละประชากรโดยเป็นอิสระกัน และถือว่า ประชากรมีการแจกแจงปกติที่มีความแปรปรวน σ^2 เท่ากันหมด

เราจะทดสอบสมมติฐาน

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu$

H_a : มีอย่างน้อยที่สุด 1 คู่ไม่เท่ากัน

ได้โดยอาศัยตัวประมาณค่าของ σ^2 ซึ่งประมาณได้ 2 วิธี คือ

(1) ความแปรปรวนภายในตัวอย่าง คือ

$$S_e^2 = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)S_j^2/(n - k) \quad , \quad n = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

และ (2) ความแปรปรวนระหว่างค่าเฉลี่ยหรือกลุ่ม คือ

$$S_a^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{X}_j - \overline{X})^2/(k - 1)$$

ในเมื่อ $\overline{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยรวมของทุกกลุ่ม

$\overline{X}_j$ เป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มหนึ่ง ๆ

S_j^2 ความแปรปรวนของแต่ละกลุ่ม

เราทราบว่าตัวสถิติ $F = S_a^2/S_e^2$ มีการแจกแจงแบบเอฟที่มี $df = (k - 1, n - k)$ ดังนั้นเราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า

$$F_{\text{คำนวณ}} > f_{\alpha(k-1, n-k)}$$

ตัวอย่าง จากรายงานปริมาณการขายของพนักงานขาย 4 คน ในระยะเวลา 50 วัน ปรากฏผลดังนี้

	นาย ก	นาย ข	นาย ค	นาย ง
ค่าเฉลี่ย	68	74	70	68
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	11	12	8	10

ท่านจะสรุปผลที่ได้อย่างไร

วิธีทำ

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu$

   H_a : มีอย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

2. กำหนด $\alpha = 0.05, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 50, k = 4$

3. เราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า

   $F_{\text{คำนวณ}} > f_{.05(3,196)} = 2.60$

4.

$\overline{X}_j$	68	74	70	68	$\overline{X} = 70$
S_j	11	12	8	10	
S_j^2	121	144	64	100	
$n_jS_j^2$	6050	7200	3200	5000	ผลรวม = 21450
$n_j(\overline{X}_j - \overline{X})^2$	200	800	0	200	ผลรวม = 1200

นั่นคือ

$$F = S_a^2/S_e^2 = \frac{1200/3}{21450/196} = 3.65$$

5. ปฏิเสธ H_0 สรุปได้ว่า ปริมาณขายของคนทั้ง 4 ต่างกัน

หมายเหตุ ในที่นี้ถือว่า n_j มีขนาดโต เราประมาณ $n_j - 1$ ด้วย n_j

โดยทั่วไป การทดสอบการเท่ากันของ k ค่าเฉลี่ย มักจะนิยมทำในรูปของตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance : ANOVA)

การวิเคราะห์ความแปรปรวน เป็นเครื่องมือทางสถิติที่มีประสิทธิภาพสำหรับวิเคราะห์ข้อมูลจากการทดลองที่วางแผนไว้ดีแล้ว และเกี่ยวข้องกับที่มาของความผันแปรต่าง ๆ โดยแยกความผันแปรที่มีทั้งหมด ออกเป็นส่วนประกอบย่อยที่ใช้วัดที่มาของความผันแปรต่าง ๆ แล้วประมาณค่าและทดสอบนัยสำคัญที่มีผลต่อส่วนประกอบย่อยนั้น

การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-way Analysis of Variance)

สมมติฐานเกี่ยวกับประชากร หรือกรรมวิธีต่าง ๆ ซึ่งเราต้องการจะทดสอบหรือเปรียบเทียบจะเป็นดังนี้

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \mu$

H_a : ไม่เท่ากันหมด

การวิเคราะห์ความแปรปรวน อาจจะทำได้โดยพิจารณาสมการแสดงค่าของข้อมูล ซึ่งในกรณีนี้คือ

$$X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, n_j, \; j = 1, 2, \ldots, k$$
$$= \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

ในเมื่อ X_{ij} เป็นค่าของข้อมูลจากหน่วย i ในตัวอย่าง (กรรมวิธี) j

μ ค่าเฉลี่ยร่วมของส่วนต่าง ๆ

α_j ผลจากตัวอย่าง

ε_{ij} เทอมแสดงความคลาดเคลื่อน

k จำนวนตัวอย่าง (กรรมวิธี) ทั้งหมด

n_j ขนาดของตัวอย่าง j

ข้อกำหนดของสมการหรือตัวแบบนี้คือ

(1) X_{ij} มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_j และความแปรปรวน σ^2 และเป็นอิสระกัน

(2) $\mu_j = \alpha_j + \mu$

โดยที่ $\mu = \Sigma\mu_j/k$ ในตัวแบบนี้เราถือว่า μ และ α_j เป็นตัวคงที่ที่มี $\sum_j n_j\alpha_j = 0$

(3) ε_{ij} มีการกระจายปกติ $N(0, \sigma^2)$

วิธีวิเคราะห์ข้อมูล จากสมการแสดงข้อมูล

$$X_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

เราจะเห็นได้ว่า ข้อมูล X_{ij} ใด ๆ ที่เป็นผลของการทดลอง สามารถจะเขียนให้อยู่ในรูป

$$\sum_{i,j} (X_{ij} - \overline{X})^2 = \sum_{i,j} (\overline{X}_j - \overline{X})^2 + \sum_{i,j} (X_{ij} - \overline{X}_j)^2$$

หรือ $$\sum_{i,j} X_{ij}^2 - c = (\sum_j X_j^2/n_j - c) + (\sum_{i,j} X_{ij}^2 - \sum_j X_j^2/n_j)$$

ในเมื่อ $C = (\sum_{i,j} X_{ij})^2/n \quad , \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

นั่นคือ ความผันแปรทั้งหมด เท่ากับ ความผันแปรเนื่องจากกรรมวิธี กับ ความผันแปรภายในกรรมวิธี โดยการใช้สัญลักษณ์ เราได้

$$SST = SST_r + SSE$$

ความผันแปรต่อหน่วย ซึ่งเรียกว่ากำลังสองเฉลี่ย (Mean Square : MS) กำหนดว่า

$$MS = SS/df$$

จะเป็นค่าประมาณของความแปรปรวน σ^2 ดังนี้

(1) $MSE = SSE/(n - k)$

เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 ไม่ว่า H_0 จะเป็นจริงหรือไม่

(2) $MST_r = SST_r/(k - 1)$

เป็นตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 ก็ต่อเมื่อ H_0 เป็นจริง เมื่อผลกระทบของกรรมวิธีไม่เป็นศูนย์ MST_r จะใช้เป็นตัวประมาณค่าปริมาณ $\sigma^2 + \sum_j n_j\alpha_j/(k - 1)$ ซึ่ง $\sum_j n_j\alpha_j^2/(k-1)$ เป็นตัวเอียงทางบวก (Positive bias) และใช้วัดขนาดหรือดีกรีของความแตกต่างในกรรมวิธี

(3) $MST = SST/(n - 1)$

เป็นตัวประมาณค่าแบบเอียงเฉของ σ^2 เช่นเดียวกับ MST_r แต่ถ้า H_0 เป็นจริง จะเป็นตัวไม่เอียงเฉของ σ^2

สำหรับอัตราส่วน $F = MST_r/MSE$ จะมีการแจกแจงแบบเอฟ ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $(k - 1), (n - k)$

เราเปรียบเทียบค่าของอัตราส่วนที่คำนวณได้ กับค่าจากตารางเอฟที่มี $df = (k - 1), (n - k)$ ณ ระดับนัยสำคัญที่ต้องการ และเราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า $F_{\text{คำนวณ}} > f_{\alpha(k-1, n-k)}$

สรุปว่า กรรมวิธีต่าง ๆ มีผลกระทบทำให้ข้อมูลที่ได้ต่างกัน

ผลสรุปของการคำนวณเทอมต่าง ๆ จะอยู่ในตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA table) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

ANOVA TABLE

แหล่งความผันแปร SOV	องศาความเป็นอิสระ df	ผลรวมกำลังสอง SS	กำลังสองเฉลี่ย MS	อัตราส่วน F F - ratio
กรรมวิธี Treatment	$k - 1$	SST_r	MST_r	$\frac{MST_r}{MSE}$
ความคลาดเคลื่อน Error	$n - k$	SSE	MSE	
ยอดรวม Total	$n - 1$	SST		

เราสรุปขั้นตอนในการคำนวณเทอมต่าง ๆ ที่อยู่ในตารางดังนี้

(1) คำนวณผลรวมในตัวอย่าง j เป็น X_j

(2) หาผลรวมของค่าในข้อ (1) เป็น X

(3) หาผลรวมของขนาดตัวอย่าง j ได้ n

(4) เอาค่าในข้อ (1) ยกกำลังสอง แล้วหารด้วยขนาดตัวอย่างของมัน จะเท่ากับ X_j^2/n_j แล้วหาผลรวมที่ได้ทุกตัวอย่าง ได้เท่ากับ $\sum_j X_j^2/n_j$

(5) คำนวณผลรวมของกำลังสองของข้อมูลในตัวอย่าง j ได้ผลลัพธ์เป็น $\sum_i X_{ij}^2$ แล้วหายอดรวมจากทุกตัวอย่าง ได้เท่ากับ $\sum_j \sum_i X_{ij}^2$

(6) คำนวณค่า

$$C = X^2/n$$

$$SST = \sum_j \sum_i X_{ij}^2 - C$$

$$SST_r = \sum_j X_j^2/n_j - C$$

$$SSE = SST - SST_r$$

ตัวอย่าง คนเลี้ยงหมูอยากรู้ว่า อาหารสำหรับเลี้ยงหมู 4 ชนิด คือชนิด ก ข ค และ ง จะให้ผลเท่าเทียมกันหรือไม่ จึงทำการทดลองโดยใช้หมู 12 ตัว แบ่งเป็น 4 กลุ่ม ๆ ละ 3 ตัว แต่ละกลุ่มให้อาหารต่างชนิดกัน เลี้ยงไว้ชั่วระยะหนึ่ง แล้วชั่งน้ำหนัก ได้ผลดังต่อไปนี้

อาหาร ก	194.11	182.80	187.43
อาหาร ข	216.06	203.50	216.88
อาหาร ค	178.10	189.20	181.33
อาหาร ง	197.11	202.68	209.18

ผลสรุปที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 จะเป็นอย่างไร

วิธีทำ

1. H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

   H_a : อย่างน้อยที่สุด 1 คู่ไม่เท่ากัน

2. $\alpha = .01$, $n = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$, $k = 4$

3. เราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า

   อัตราส่วน $F > f_{.01(3,8)} = 7.59$

4. คำนวณหา

	อาหาร ก	อาหาร ข	อาหาร ค	อาหาร ง	ยอดรวม
	194.11	216.06	178.10	197.11	
	182.80	203.50	189.20	202.68	
	187.43	216.88	181.33	209.18	
X_j	564.34	636.44	548.63	608.97	2358.38
X_j^2/n_j	106159.87	135018.62	100331.62	123614.82	465124.93
ΣX_{ij}^2	106224.53	135131.10	100396.81	123687.80	465440.24

น้ำหนักหมู

$$C = (2358.38)^2/12 = 463496.35$$
$$SST = 465440.24 - 463496.35 = 1943.89$$
$$SST_r = 465124.93 - 463496.35 = 1628.58$$
$$SSE = 1943.89 - 1628.58 = 315.31$$

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นดังนี้

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ผลรวมกำลังสอง	กำลังสองเฉลี่ย	อัตราส่วน F
อาหารหมู	3	1628.58	542.86	13.773
ความคลาดเคลื่อน	8	315.31	39.4137	
ยอดรวม	11	1943.89		

5. อัตราส่วน F มากกว่า 7.59 จึงปฏิเสธ H_0 สรุปว่า อาหารทั้ง 4 ชนิดนี้ให้ผลแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ตัวอย่าง การศึกษาถึงคุณภาพของปุ๋ย 4 ชนิด ว่าให้ผลเหมือนกันหรือไม่ ได้ทดลองการใช้ปุ๋ย 4 ชนิดในการปลูกข้าวโพด ภายใต้สภาวการณ์เดียวกัน ได้จำนวนผลผลิตในแต่ละแปลงทดลองดังนี้

ปุ๋ย ก	49	42	47	76	69	58		
ปุ๋ย ข	49	44	50	58	70			
ปุ๋ย ค	44	57	34	48	50			
ปุ๋ย ง	58	54	64	60	53	64	52	42

ผลสรุปที่ระดับนัยสำคัญ .05 จะเป็นอย่างไร

วิธีทำ

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

   H_a : มีอย่างน้อย 1 คู่แตกต่างกัน

2. $\alpha = .05,\ k = 4,\ n = 24$

3. เราจะปฏิเสธ H_0 ถ้า

   อัตราส่วน $F > f_{.05(3,20)} = 3.10$

4. คำนวณค่าในเทอมต่าง ๆ ดังนี้

	ปุ๋ย ก	ปุ๋ย ข	ปุ๋ย ค	ปุ๋ย ง	ผลรวม
X_j	341	271	233	447	1292
n_j	6	5	5	8	24
X_j^2/n_j	19380.166	14688.2	10857.8	24976.125	69902.291
$\sum_i X_{ij}^2$	20275	151011	11145	25349	71870

$$C = (1292)^2/24 = 69552.666$$

$$SST_r = 69902.291 - 69552.666 = 349.625$$

$$SST = 71870 - 69552.666 = 2317.334$$

สร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ผลรวมกำลังสอง	กำลังสองเฉลี่ย	อัตราส่วน F
ปุ๋ย	3	349.625	116.5	1.18
ความคลาดเคลื่อน	20	1967.709	98.4	
ยอดรวม	23	2317.334		

5. อัตราส่วน F น้อยกว่า 3.10 ดังนั้นเรายอมรับ H_0 จึงสรุปว่า คุณภาพของปุ๋ย 4 ชนิดเหมือนกัน

หมายเหตุ ในตัวอย่างทั้งสอง เราอาจจะตั้งสมมติฐานได้ดังนี้

$H_0 : \alpha_j = 0$

$H_a : \alpha_j \neq 0 \ ; \ j = 1, 2, 3, 4$

แบบทดสอบสำหรับเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากร

ในกรณีที่เมื่อใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนแล้วทราบว่า ประชากรเหล่านั้นแตกต่างกัน เราสรุปได้จากการวิเคราะห์ความแปรปรวนแต่เพียงว่า ค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน แต่ไม่ทราบว่าแตกต่างกันที่ใดหรือกลุ่มใดบ้างที่แตกต่างกัน กรณีที่ F ไม่มีนัยสำคัญแล้วโดยทั่วไป เราจะไม่เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของกลุ่มต่าง ๆ อีก นอกจากได้วางแผนไว้ก่อนแล้วว่าจะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย วิธีการเปรียบเทียบมีหลายวิธี แต่ในที่นี้เราจะพูดถึงเฉพาะวิธีผลต่างนัยสำคัญน้อยสุด

ผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด (Least Significant Difference, LSD)

$$\text{LSD}(\alpha) = t_{\alpha/2,\nu} \cdot \sqrt{\text{MSE}(1/n_i + 1/n_j)} \quad , \quad i \neq j$$

$$= \sqrt{f_{\alpha(1,\nu)}\,\text{MSE}(1/n_i + 1/n_j)}$$

ในเมื่อ $\nu = n - k$

โดยทั่วไปจะใช้ LSD กับกรณีที่วางแผนไว้ล่วงหน้าแล้วก่อนที่จะเริ่มเก็บรวบรวมข้อมูล เมื่อจะเปรียบเทียบควรเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสูงสุดกับต่ำสุดก่อน เรานิยมใช้ LSD เฉพาะเมื่อทดสอบแล้วได้ค่าของอัตราส่วน F มีนัยสำคัญ

ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย หรืออีกนัยหนึ่งก็คือการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \mu_i = \mu_j$$

เราใช้เกณฑ์ตัดสินดังนี้

ถ้า

$$|\bar{X}_i - \bar{X}_j| > \text{LSD}(\alpha)$$

เราจะสรุปว่า μ_i และ μ_j แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

หมายเหตุ ถ้าทุกตัวอย่างมีขนาดตัวอย่างเท่ากันคือ n_0 เราเปรียบเทียบผลต่างของค่าเฉลี่ยของตัวอย่างทุกคู่กับค่าของ LSD (α) เพียงค่าเดียวคือ

$$\text{LSD}(\alpha) = t_{\alpha/2,\nu} \sqrt{2\text{MSE}/n_0}$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างในการทดสอบอาหารสำหรับเลี้ยงหมู ถ้าเราต้องการจะเปรียบเทียบว่าอาหารคู่ใดบ้างที่ให้ผลแตกต่างกัน เราทดสอบได้ดังนี้

ในที่นี้ขนาดตัวอย่างเท่ากันหมดคือ 3 เราคำนวณค่า LSD (α) ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{LSD}(.01) &= t_{.005,8}\sqrt{2\text{MSE}/3} \\
&= 3.355 \times \sqrt{2(39.4137)/3} \\
&= 26.2758
\end{aligned}
$$

คำนวณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ยแต่ละคู่ดังตารางต่อไปนี้

ผลต่างของ $|\overline{X}_i - \overline{X}_j|$, $i > j$

	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$
	188.133	212.147	182.877
$\overline{X}_1$: 188.113	-		
$\overline{X}_2$: 212.147	24.034	-	
$\overline{X}_3$: 182.877	5.236	29.270	-
$\overline{X}_4$: 202.99	14.877	9.157	20.113

เปรียบเทียบค่าที่ได้จากตารางแต่ละค่ากับ 26.2758 จะเห็นว่ามีเพียงค่าเดียวที่มากกว่า 26.2758 คือค่าของ $|\overline{X}_3 - \overline{X}_2|$ ซึ่งเท่ากับ 29.27 เราจึงสรุปว่า อาหาร ข กับอาหาร ค ให้ผลแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ นอกนั้นให้ผลเหมือนกัน

การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two-way Analysis of Variance)

เมื่อกลุ่มของค่าสังเกตหรือข้อมูล สามารถแบ่งประเภทได้ด้วยกฎเกณฑ์แบ่งประเภทหรือแฟกเตอร์ 2 แบบ คือ A และ B A มี r ระดับ B มี c ระดับ

ตัวแบบของข้อมูล จะอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$
\begin{aligned}
X_{ij} &= \mu_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, c \\
&= \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}
\end{aligned}
$$

สมมติฐานที่จะทดสอบ จะเป็น

(1) $H_0 : \alpha_i = 0 , \forall_i$

(2) $H_0 : \beta_j = 0 , \forall_j$

ผลการวิเคราะห์ สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

SOV	SS	df	MS	F-ratio
A	SSA	r-1	MSA	MSA/MSE
B	SSB	c-1	MSB	MSB/MSE
Error	SSE	(r-1)(c-1)	MSE	
Total	SST	rc-1		

ในการคำนวณหาผลรวมกำลังสองของแหล่งผันแปรต่าง ๆ เรามีวิธี ดังนี้

(1) $C = (\sum_{i,j}^{r,c} X_{ij})^2/rc = X^2/rc$

(2) $SST = \sum_{i,j}^{r,c} X_{ij}^2 - C$

(3) $SSA = \sum_{i} X_{i\cdot}^2/c - C$, $MSA = SSA/(r-1)$

(4) $SSB = \sum_{j} X_{\cdot j}^2/r - C$, $MSB = SSB/(c-1)$

(5) $SSE = SST - SSA - SSB$, $MSE = SSE/(r-1)(c-1)$

จะปฏิเสธ $H_0 : \alpha_i = 0, \forall_i$ เมื่อ $MSA/MSE > F_{\alpha((r-1),(r-1)(c-1))}$

จะปฏิเสธ $H_0 : \beta_j = 0, \forall_j$ เมื่อ $MSB/MSE > F_{\alpha((c-1),(r-1)(c-1))}$

การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทางเมื่อมีผลร่วม (Interaction)

ในการทดลองบางประเภท ที่ A กับ B จะต้องมีผลร่วมกัน เราต้องใช้การทดลองทำซ้ำ ๆ (Replicated) n ครั้ง ดังนั้น สมการข้อมูลจะเป็น

$$X_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, c;\ k = 1, 2, \ldots, n$

สมมติฐานที่จะทดสอบ จะเป็น

(1) $H_0 : \alpha_i = 0, \forall_i$

(2) $H_0 : \beta_j = 0, \forall_j$

(3) $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall_{i,j}$

ผลการวิเคราะห์ สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

SOV	SS	df	MS	F
A	SSA	r − 1	MSA	MSA/MSE
B	SSB	c − 1	MSB	MSB/MSE
AB	SS(AB)	(r − 1)(c − 1)	MS(AB)	MS(AB)/MSE
Error	SSE	rc(n − 1)	MSE	
Total	SST	rcn − 1		

สูตรสำหรับคำนวณผลรวมกำลังสอง จะเป็นดังนี้

(1) $C = X^2/rcn$

(2) $SST = \sum_{i,j,k} X_{ijk}^2 - C$

(3) $SSG = \sum_{i,j} X_{ij\cdot}^2/n - C$

(4) $SSA = \sum_{i} X_{i\cdot\cdot}^2/cn - C$

(5) $SSB = \sum_{j} X_{\cdot j\cdot}^2/rn - C$

(6) $SS(AB) = SSG - SSA - SSB$

(7) $SSE = SST - SSG$

จะปฏิเสธ $H_0 : \alpha_i = 0, \forall_i$ ถ้า $MSA/MSE > F_{\alpha((r-1),rc(n-1))}$

จะปฏิเสธ $H_0 : \beta_j = 0, \forall_j$ ถ้า $MSB/MSE > F_{\alpha((c-1),rc(n-1))}$

จะปฏิเสธ $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall_{i,j}$ ถ้า $MS(AB)/MSE > F_{\alpha((r-1)(c-1),rc(n-1)}$

คำถาม-คำตอบ

1. ข้อใดที่จัดว่า เป็นข้อกำหนดในการวิเคราะห์ความแปรปรวน
   ก) สมการแทนข้อมูลแต่ละชุดต้องเป็นแบบเชิงเส้น
   ข) กรรมวิธีและกรรมวิธีผสมต้องมีแฟกเตอร์อย่างน้อย 2 แฟกเตอร์
   ค) ความผันแปรทั้งหมด แยกเป็นส่วนตามแหล่งที่ก่อให้เกิดความผันแปร
   ง) ความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเป็นอิสระแก่กัน มีการแจกแจงแบบ $N(0, \sigma^2)$
2. การทดลอง คืออะไร
   ก) กลุ่มของหน่วยที่จะได้รับกรรมวิธีอย่างเดียวกัน
   ข) การสอบถามหรือแสวงหาคำตอบที่ได้ตระเตรียมไว้แล้ว
   ค) วิธีการที่จะนำไปใช้กับหน่วยทดลองเพื่อวัดผลกระทบ
   ง) ลักษณะของสภาพการณ์ต่าง ๆ ที่ผู้ทำการทดลองกำหนดให้
3. ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่าง คืออะไร
   ก) ความผันแปรเนื่องมาจากข้อมูลของหน่วยทดลองเดียวกัน
   ข) ความผันแปรเนื่องมาจากข้อมูลที่มาจากกรรมวิธีต่างกัน
   ค) ความผันแปรเนื่องมาจากข้อมูลที่ขึ้นอยู่กับหลักการสุ่ม
   ง) ความผันแปรใด ๆ อันเกิดจากขนาดของความเปลี่ยนแปลงข้อมูล
4. กำลังสองเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน (MSE) คืออะไร
   ก) ตัวประมาณค่าแบบเอียงเฉของ σ^2 เมื่อ H_0 เป็นจริง
   ข) ตัวประมาณค่าแบบเอียงเฉของ σ^2 เมื่อ H_0 ไม่เป็นจริง
   ค) ตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 ไม่ว่า H_0 จะเป็นจริงหรือไม่
   ง) ตัวประมาณค่าแบบไม่เอียงเฉของ σ^2 เมื่อผลกระทบกรรมวิธีไม่เป็น 0
5. การวิเคราะห์ความแปรปรวน จะให้ผลสรุปอย่างไร
   ก) กรรมวิธีใดบ้าง มีค่าเฉลี่ยต่างกัน
   ข) ค่าเฉลี่ยตัวใดที่ทำให้เกิดความแตกต่าง
   ค) ความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีมีนัยสำคัญหรือไม่
   ง) ค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีคู่ใดมีผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด

6–11 บริษัทผู้ผลิตได้ซื้อเครื่องจักรมาใหม่ 4 เครื่อง ซึ่งทำจากโรงงานต่างกัน และต้องการทราบว่าเครื่องไหนจะผลิตสินค้าได้เร็วกว่า บริษัทได้ทำการทดลองและวิเคราะห์ผลที่ได้โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวน ถ้าตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนกำหนดไว้ข้างล่างนี้

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ผลบวกกำลังสอง	กำลังสองเฉลี่ย	อัตราส่วน F
เครื่องจักร		1032		
ความคลาดเคลื่อน			69.44	
ยอดรวม	19	2143		

6. กำลังสองเฉลี่ยของเครื่องจักรเป็นเท่าใด

ก) 103.2 ข) 111.1 ค) 258 ง) 344

7.,8. ความผันแปรภายในเครื่องจักร (หรือกำลังสองของความคลาดเคลื่อน) จะเป็นเท่าใด

ก) 1111 ข) 2580 ค) 3175 ง) 6944

และมีองศาความเป็นอิสระเท่าใด

ก) 3 ข) 4 ค) 15 ง) 16

9.,10.,11. ตัวสถิติทดสอบสำหรับผลกระทบกรรมวิธี (เครื่องจักร) จะมีการแจกแจงแบบใด

ก) แบบที ข) แบบเอฟ ค) แบบปกติ ง) แบบคายกำลังสอง

ค่าของตัวสถิติทดสอบ จะเป็นเท่าใด

ก) $\frac{344}{69.44}$ ข) $\frac{344}{1111}$ ค) $\frac{69.44}{344}$ ง) $\frac{69.44}{16}$

จะสรุปว่า เครื่องจักรมีประสิทธิภาพต่างกัน เมื่อค่าของตัวสถิติทดสอบจะต้องมากกว่าเท่าใด ($\alpha = 0.05$)

ก) 1.645 ข) 3.24 ค) 6.314 ง) 7.815

12–14 ศึกษาถึงผลกระทบของพันธุ์ข้าว 3 สายพันธุ์ และปุ๋ย 4 ชนิดว่ามีผลต่อผลผลิตเฉลี่ยของข้าวหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

12. องศาความเป็นอิสระของความคลาดเคลื่อนจะเป็นเท่าใด

ก) 2 ข) 3 ค) 6 ง) 11

13. จะถือว่า ไม่มีผลต่างในผลผลิตเฉลี่ยจากพันธุ์ข้าวทั้ง 3 เมื่อค่าของตัวสถิติทดสอบ น้อยกว่าเท่าใด

ก) 1.645 ข) 1.943 ค) 2.920 ง) 4.86

14. จะถือว่า มีผลต่างในผลผลิตเฉลี่ยของข้าวเมื่อใช้ปุ๋ยต่างชนิดกัน เมื่อค่าของตัวสถิติทดสอบมากกว่าค่าใด

ก) 4.86 ข) 5.14 ค) 7.815 ง) 12.592

15—16 ศึกษาว่าอะไรเป็นแหล่งสำคัญของความผันแปรในกระบวนการผลิตสินค้าอย่างหนึ่ง โดยสุ่มสินค้าที่ผลิตมาแห่งละ 2 หน่วย จากคนคุมเครื่องที่มี 8 คน ใช้วัตถุดิบ 4 ชนิด แล้วทดสอบความคงทนของสินค้า ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

15.,16. ตัวสถิติทดสอบสำหรับผลร่วมระหว่างคนคุมเครื่องและวัตถุดิบจะมีการแจกแจงแบบใด

ก) แบบเอฟ ข) แบบปกติ ค) แบบที ง) แบบคายกำลังสอง

จะสรุปว่า มีผลร่วมระหว่างคนคุมเครื่องและวัตถุดิบ เมื่อค่าของตัวสถิติทดสอบจะต้องมากกว่าเท่าใด

ก) 1.645 ข) 3.49 ค) 3.00 ง) 21.026

คำตอบ :	ง	ข	ก	ค	ค	ง	ก	ง
	ข	ก	ข	ค	ง	ข	ก	ค

แบบฝึกหัดที่ 5

1. ในการทดลองเพื่อทดสอบผลผลิตของพันธุ์ข้าว 5 สายพันธุ์ แต่ละสายพันธุ์ถูกนำมาปลูกในแปลงทดลองที่เตรียมเอาไว้อย่างละ 9 แปลง โดยใช้ปุ๋ยอย่างเดียวกันและมีการควบคุมเหมือนกัน ภายหลังการเก็บเกี่ยว บันทึกผลผลิตที่ได้ของข้าวแต่ละสายพันธุ์ในแต่ละแปลงทดลอง

   ก. จงเขียนสมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ

   ข. จงกำหนดเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสิน ณ ระดับนัยสำคัญ .05

   ค. จงสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน แสดงแหล่งความผันแปร และองศาความเป็นอิสระ

2. ก) จงเติมตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้สมบูรณ์

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ผลรวมกำลังสอง	กำลังสองเฉลี่ย	อัตราส่วน F
กรรมวิธี	3		143	
ความคลาดเคลื่อน		800		
ผลรวม	23	1229		

   ข) ถ้าสมการแสดงข้อมูล คือ

$$X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$$

$$= \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \text{ , } i = 1, 2, \ldots, 6, j = 1, 2, 3, 4$$

   เราจะตั้งสมมติฐานในการทดสอบนี้อย่างไร

   ค) จะสรุปผลที่ได้ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 อย่างไร

3. ในการทดสอบความเหนียวของลวดทองแดง ซึ่งผลิตจากโรงงาน ก ข และ ค เพื่อจะดูว่ามีความเหนียวโดยเฉลี่ยเท่ากันหรือไม่ จากการสุ่มลวดทองแดงมาโรงงานละ 10 เส้น บันทึกความเหนียวที่วัดเป็นปอนด์

   ก) จงตั้งสมมติฐาน

   ข) จงเติมตารางวิเคราะห์ให้สมบูรณ์

แหล่งความผันแปร	องศาความเป็นอิสระ	ผลรวมกำลังสอง	กำลังสองเฉลี่ย	อัตราส่วน F
โรงงาน		7170		
ความคลาดเคลื่อน				
ผลรวม		35520		

ค) ท่านจะสรุปผลที่ได้อย่างไร ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05

ง) ถ้าค่าเฉลี่ยของลวดทองแดงจากโรงงาน ก และ ข เท่ากับ 95 ละ 72 ปอนด์ ตามลำดับ จงใช้วิธีของผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด (LSD) ทดสอบว่า ค่าเฉลี่ยที่แท้จริงของความเหนียวของลวดทองแดง จากโรงงาน ก และ ข แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่

4. รายได้ต่อสัปดาห์ของพนักงานขาย 5 คน จากการสุ่มตัวอย่างมา 3 สัปดาห์ ปรากฏผลดังนี้

นาย ก	นาย ข	นาย ค	นาย ง	นาย จ
167	151	147	171	114
177	179	134	166	120
199	156	121	143	150

จากผลที่ได้ จะแสดงว่า รายได้โดยเฉลี่ยของคนทั้ง 5 เท่ากัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หรือไม่

5. ในการทดลองคุณภาพของรถยนต์ 4 ยี่ห้อ ได้นำรถยนต์มายี่ห้อละ 3 คัน ทดลองวิ่งในสถานที่เดียวกัน และรถแต่ละคันใช้น้ำมันอย่างเดียวกัน 1 แกลลอน บันทึกระยะทางเป็นไมล์ที่รถแต่ละคันวิ่งได้ ปรากฏผลดังนี้

ยี่ห้อ ก	ยี่ห้อ ข	ยี่ห้อ ค	ยี่ห้อ ง
18	21	23	20
20	22	26	19
22	26	26	21

ท่านจะสรุปผลที่ระดับนัยสำคัญ .05 ว่า ระยะทางที่วิ่งเป็นไมล์โดยเฉลี่ยของรถยนต์ทั้ง 4 ยี่ห้อไม่เท่ากันได้หรือไม่

6. ในการทดลองเพื่อทดสอบอาหาร 4 ชนิด ว่า อาหารทั้ง 4 ชนิดนี้จะลดน้ำหนักได้เท่ากันหรือไม่ ใช้คน 17 คน แบ่งออกเป็น 4 พวก ดูน้ำหนักที่ลดลงเท่าไรในช่วงเวลาหนึ่ง บันทึกผลไว้ดังนี้

ชนิดของอาหาร	1	2	3	4
ขนาดตัวอย่าง (n_j)	5	3	4	5
ผลรวมของน้ำหนักที่ลดลง (X_j)	3.0	3.9	6.4	3.7
X_j^2/n_j	1.8	5.07	10.24	2.738
$\sum_i X_{ij}^2$	1.9	5.15	10.5	2.79

ก) จงแสดงการทดสอบและสรุปผล ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

ข) จงใช้วิธีของผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด เปรียบเทียบประสิทธิผลในการลดน้ำหนัก

ระหว่างอาหารชนิดที่ 1 กับชนิดที่ 2 และระหว่างชนิดที่ 2 กับชนิดที่ 3

7. ในการศึกษารายได้ของคนใน 3 จังหวัด เพื่อดูว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่ ได้สุ่มตัวอย่างมาจังหวัดละ 100 คน ให้ X_{ij} เป็นรายได้ของอันดับที่ i ในจังหวัด j บันทึกผลดังตารางต่อไปนี้

จังหวัด (j)	ขนาดตัวอย่าง (n_j)	X_j	$\sum_i X_{ij}^2$
1	100	20,000	4,225,200
2	100	22,400	6,384,000
3	100	19,600	4,400,000

ก) จงแสดงการทดสอบและสรุปผล ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ข) ถ้าผลจากข้อ ก ปรากฏว่า ประชากรมีรายได้เฉลี่ยต่างกัน จงเปรียบเทียบให้เห็นชัดว่าประชากรจังหวัดใดบ้างที่มีรายได้ต่างกัน

8. บริษัทซีดีทีมีโรงงานผลิตสินค้าอยู่ในเขตต่าง ๆ 4 เขต ในการศึกษาถึงจำนวนผลผลิตที่แต่ละโรงงานผลิตได้ในแต่ละวัน นักวิจัยได้สุ่มตัวอย่างสินค้าจากแต่ละโรงงานมาแห่งละ 5 วัน ได้จำนวนผลผลิต (พันหน่วย) ดังต่อไปนี้

โรงงาน

1	2	3	4
13.75	13.75	12.75	16.75
13.00	14.50	12.50	14.25
14.25	12.75	12.00	14.50
12.00	14.50	14.00	15.50
12.25	13.25	13.00	13.75

ท่านจะสรุปผลที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 อย่างไร

9. โรงงานพลาสติคต้องการทดสอบแรงดึงของวัตถุดิบ 4 ประเภท จากการสุ่มตัวอย่างวัตถุดิบแต่ละประเภทมาอย่างละ 6 ชิ้น วัดแรงดึงเป็นปอนด์ต่อตารางนิ้ว ได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ประเภทของวัตถุดิบ			
1	2	3	4
490	525	475	527
450	506	460	507
510	473	525	492
476	5 2 6	420	505
504	502	499	530
402	505	472	555

ผู้จัดการโรงงานกล่าวว่า แรงดึงของวัตถุดิบแต่ละประเภทไม่แตกต่างกัน จะใช้ข้อเท็จจริงจากตัวอย่างที่รวบรวมไว้ สนับสนุนได้หรือไม่

10. ใส่ปุ๋ยผสมชนิด ก ข และ ค ในแปลงทดลองที่เตรียมไว้ปลูกข้าวสาลี ชนิดละ 6 แปลง ภายหลังการปลูกข้าวในที่ดินแต่ละแปลง และเก็บเกี่ยวผลผลิตที่ได้เป็นบุชเชลต่อเอเคอร์ ได้ผลดังนี้

ปุ๋ยผสม n	ปุ๋ยผสม ข	ปุ๋ยผสม ค
50	55	70
55	57	66
57	59	66
56	60	71
59	57	67
53	54	66

เราจะถือว่า ปุ๋ยผสมทั้ง 3 ชนิดมีประสิทธิผลเหมือนกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ได้หรือไม่