7. การวางแผนการทดลอง และการวิเคราะห์ความแปรปรวน

Nothing is good or bad
but by Comparison
Thomas Fuller

ในการทำการวิจัยหรือศึกษาข้อเท็จจริงเพื่อที่จะค้นหาคำตอบให้แก่ปัญหาต่าง ๆ ที่ตั้งขึ้นตามความสนใจนั้นเรามักจะนึกถึงการทดลอง การทดลองจะกระทำขึ้นก็โดยการใช้ตัวอย่างซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของประชากร ดังนั้นการทดลองจึงเป็นความพยายามพย่างหนึ่งที่จะตอบคำถามในปัญหาที่ตั้งขึ้น แต่ส่วนมากคำตอบที่ได้โดยอาศัยตัวอย่างนั้นก็มิใช่จะแน่นอนเสมอไป อย่างไรก็ตามการทดลองก็ช่วยให้เราสามารถพิจารณาแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้จนน่าพอใจ เช่น กระทรวงศึกษาธิการอยากจะทราบว่าวิธีการสอนภาษาไทยแก่เด็กเริ่มเรียนแบบหนึ่งจะดีกว่าวิธีที่ใช้อยู่ในปัจจุบันหรือไม่ ในการตอบปัญหาข้อนี้กระทรวงศึกษาธิการก็จะต้องให้หน่วยงานที่มีความรับผิดชอบทางด้านนี้ทดลองวิธีสอนแบบใหม่และแบบเก่าจากการทดลองนี้กระทรวงศึกษาธีการก็จะได้คำตอบที่น่าพอใจ ในการทดลองต่าง ๆ นั้นถ้าใช้วิธีการทางสถิติช่วยเป็นหลักในการวางแผนการทดลองแล้วจะช่วยให้การตีความหมายผลของการทดลองได้เหมาะสมและน่าเชื่อถือยิ่งขึ้น

เป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า การทดลอง (Enperiment) นั้นเป็นการสืบสวน หรือเสาะแสวงหาคำตอบ (Inquiry) ที่ได้ตระเตรียมไว้แล้ว เพื่อที่จะค้นหาข้อเท็จจริงใหม่ หรือเพื่อที่จะสนับสนุน (ขัดแย้ง) กับผลที่ได้จากการทดลองซึ่งเคยกระทำมาแล้ว การทดลองแบ่งได้เป็น 3 ชนิด ดังนี้

(1) การทดลองเบื้องต้น (Basic or Preliminary Experiment) เป็นการทดลองที่ผู้ทำการวิจัยต้องการจะค้นคว้าทดลองกรรมวิธี (Treatment) ต่าง ๆ เพื่อประโยชน์ในการปฏิบัติงานภายหน้า

(2) การทดลองแท้ (Critical Experiment) เป็นการทดลองที่ผู้ทำการวิจัยค้นคว้าเปรียบเทียบผลอันเกิดจากการใช้กรรมวิธีต่าง ๆ โดยให้มีหน่วยแสดงผลพอเพียงที่จะทำให้สามารถเห็นข้อแตกต่างกันได้

(3) การทดลองเชิงสาธิต (Demonstrational Experiment) เป็นการทดลองเพื่อต้องการจะเปรียบเทียบกรรมวิธีใหม่กับกรรมวิธีมาตรฐาน

การวางแผนแบบทดลอง (Enperimental Design) เป็นการระบุแผน (Layout) ของหน่วยทดลอง (Enperimental Unit) ที่กรรมวิธีจะได้รับ หรือเป็นการกำหนดวิธีการที่กรรมวิธีจะแจกจ่ายไปตามหน่วยทดลองแบบแผนทดลองเปรียบเสมือนแบบแปลนของสถาปนิกนั่นเอง และผู้วามแผนก็มีบทบาทเช่นเดียวกับสถาปนิก ส่วนผู้ทำการทดลองก็เปรียบเสมือนเจ้าของอาคารสถานที่ แต่ผู้วางแผนกับผู้ทำการทดลองอาจจะเกี่ยวข้องกันได้ เช่น ผู้ทดลองอาจจะมีส่วนในการวางแผนทดลองนั้น ๆ ได้ ในการทดลองเพื่อให้บรรลุจุดประสงค์นั้นอาจจะมีวิธีการทดลองหลายแบบด้วยกัน ดังนั้นผู้วางแผนออกแบบการทดลองจะต้องชี้ให้เห็นข้อดีข้อเสียของแต่ละแบบ

เพื่อให้ผู้ทำการทดลองตัดสินใจเอาเองว่าจะเลือกแบบใด

ผู้ออกแบบแผนทดลองใด ๆ ควรจะทราบถึงสิ่งที่ใช้ในการทดลองนั้น ๆ บ้าง อย่าง-น้อยก็ควรสอบถามถึงคุณลักษณะอย่างสั้น ๆ จากผู้จะดำเนินการทดลอง ทั้งนี้ก็เพื่อประโยชน์ในการวางแผนทดลองเอง และผู้ออกแบบแผนทดลองควรจะรอบรู้แบบแผนทดลองต่าง ๆ ที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ พร้อมทั้งสามารถเปรียบเทียบข้อดีและข้อเสียของแบบต่าง ๆ อย่างดีอีกด้วย แบบแผนทดลองที่ดีจะทำให้ผู้ทำการทดลองแน่ใจว่าข้อมูลที่จะเก็บมานั้นจะมีประโยชน์ต่อการตอบปัญหาที่สนใจ และเป็นการเก็บข้อมูลอย่างประหยัดทั้งค่าใช้จ่าย, แรงงาน, และเวลา อย่างไรก็ตามต้องระลึกไว้เสมอว่าเราจะตอบคำถามใด ๆ ให้แน่นอนลงไปไม่ได้ ทั้งนี้เพราะข้อมูลที่เก็บมาย่อมผิดพลาดได้เสมอ แต่เราก็จะนำข้อมูลที่เก็บได้นั้นมาแสดงว่าคำตอบนั้นน่าจะเป็นจริงหรือน่าจะไม่เป็นจริงได้

1. ศัพท์ที่ใช้ในการวางแผนแบบทดลอง

(1) หน่วยทดลอง (Experimental Unit or Plot) เป็นหน่วยหรือกลุ่มของหน่วยที่จะได้รับกรรมวิธีอย่างเดียวกัน หน่วยทดลองคงจะเป็นเด็ก 1 คน พื้นที่ 1 ไร่ หมู 10 ตัว หรือไก่ครึ่งตัวก็ได้

(2) กรรมวิธี (Treatment) เป็นวิธีการหรือสิ่งที่ผู้ทำการทดลองนำไปใช้กับหน่วยทดลองเพื่อวัดผลกระทบ (Effect) ของมัน หรือเพื่อเปรียบเทียบกับกรรมวิธีอื่น ๆ กรรมวิธีอาจจะเป็นบรรยากาศในการทำงาน, วิธีการสอน เป็นต้น

(3) หน่วยตัวอย่าง (Sampling Unit) เป็นส่วนหนึ่งของหน่วยทดลองบางครั้งก็เป็นหน่วยทดลองเอง

(4) ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experimental Error) เป็นสิ่งที่ใช้วัดความแปรปรวนระหว่างข้อมูลที่ได้จากหน่วยทดลองต่าง ๆ ในกรรมวิธีเดียวกัน ความคลาดเคลื่อนนี้อาจจะเนื่องมาจากสาเหตุใหญ่ ๆ 2 ประการ ดังนี้ .—

ก. ความผันแปรภายใน (Inherent Variability) เนื่องจากสิ่งที่ได้รับกรรมวิธีแตกต่างกันเอง นั่นคือเป็นความแตกต่างที่มีอยู่ในสิ่งทดลองนั้นแล้วก่อนการทดลอง

ข. ความผันแปรภายนอก (Extraneous Variability) เนื่องมาจากความไม่สม่ำเสมอหรือขาดความเป็นแบบเดียวกัน (Uniformity) ของวิธีการในการทดลอง

(5) ความคลาดเคลื่อนจากระบบ (Systematic Error) เป็นความคลาดเคลื่อนที่ไม่เป็นแบบสุ่ม (Nonrandom Error) ซึ่งเป็นตัวนำความเอียงเฉเข้าไปในข้อมูลสถิติทั้งหมด เช่นความเคลื่อนคลาดอันเกิดจาเครื่องมือวัดที่ไม่ดี เป็นต้น

(6) ความคลาดเคลื่อนจากตัวอย่าง (Sampling Error) โดยทั่วไปหมายถึงผลต่างระหว่าง

ค่าสังเกตของตัวสถิติกับปริมาณที่จะกะประมาณหรือพารามิเตอร์นั่นเอง ส่วนในการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA, Analysis of Variance) นั้น ความผันแปรอันเนื่องมาจากข้อมูลสถิติของหน่วยทดลองเดียวกันจะเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนจากตัวอย่าง แต่ถ้าความผันแปรระหว่างข้อมูลสถิติในหน่วยทดลองต่างกันจะเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง

(7) การซ้ำ (Replication) เป็นการใช้กรรมวิธีมากกว่าครั้งหนึ่งในการทดลองเดียวกัน การซ้ำมีประโยชน์ ดังนี้

ก. สามารถประมาณความคลาดเคลื่อนจากการทดลองได้

ข. ทำให้เพิ่มความเที่ยงตรง (Precision) แก่การทดลอง โดยลดค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของกรรมวิธี (Treatment mean)

ค. สามารถขยายผลสรุปของการวิเคราะห์การทดลองออกไปได้

ง. ทำให้สามารถควบคุมความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (Error Variance) ได้

สิ่งที่จะเป็นตัวกำหนดขนาดของการซ้ำได้แก่ขนาดของความเที่ยงตรงของข้อมูลที่เราต้องการ วัสดุที่ใช้ในการทดลอง, กรรมวิธีที่ใช้, แบบแผนการทดลอง, และค่าใช้จ่ายกับเวลที่มีอยู่

(9) หลักการสุ่ม (Randomization) เป็นวิธีการกำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยทดลองในลักษณะแบบสุ่มโดยที่แต่ละกรรมวิธีมีโอกาสเท่า ๆ กันในอันที่จะได้รับการทดลองภายใต้สภาวะการณ์ที่เหมาะสม และแหล่งของความผันแปรที่เป็นไปได้จะไม่ก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนแบบระบบ (Systematic Error) นั่นคือหลักการสุ่มจะทำให้เราแน่ใจว่าเรามีค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนและของค่าเฉลี่ยจากกรรมวิธีโดยไม่มีความเอียงเฉ โดยทั่วไปการจัดสิ่งทดลองโดยหลักการสุ่ม เราจะใช้ตารางเลขสุ่ม (Random Number Table) ช่วย

(10) ความแม่นยำและความเที่ยงตรง (Accuracy and Precision) ความแม่นยำ หมายถึง การใกล้เคียงกับเป้าหมายที่ต้องการ แต่ความเที่ยงตรง หมายถึงการซ้ำที่หมายเดิม จะเป็นเป้าหมายที่ต้องการหรือไม่ก็ได้ ความเที่ยงตรงของค่าประมาณจากตัวอย่างวัดได้โดยความคลาดเคลื่อนจากตัวอย่าง ส่วนความแม่นยำของค่าประมาณจากตัวอย่างเป็นผลต่างระหว่างประมาณจากตัวอย่าง และค่าจริงของประชากร หรือพารามิเตอร์ที่จะประมาณ

ในการเพิ่มพูนความแม่นยำของการทดลองทำได้ดังนี้

ก. เพิ่มขนาดของการทดลองค้นคว้า นั่นคือเพิ่มจำนวนซ้ำและเพิ่มจำนวนกรรมวิธี

ข. ปรับปรุงเทคนิคการทดลองให้ดี และให้ละเอียดลออขึ้น

ค. จัดหาวัตถุทดลองให้มีความผันแปรลดลงโดยคัดเลือกวัตถุทดลองด้วยความระมัด

ระวัง วัด ชั่ง ตวง ให้บ่อยครั้งขึ้น และจัดกลุ่มหน่วยทดลองให้ดีเพื่อให้กลุ่มที่แบ่งมีความสม่ำเสมอกัน

2. ขั้นดำเนินงานเกี่ยวกับการทดลองทางสถิติ

ในการดำเนินการทดลองโดยอาศัยสถิติไม่ว่าจะเป็นการทดลองง่าย ๆ หรือจะเป็นงานวิจัยกว้างขวางเพียงใดก็ตาม ควรจะดำเนินการเป็นขั้น ๆ ดังนี้

ก. กำหนดจุดประสงค์ของการทดลองหรือวิจัยนั้น ๆ ไว้ให้แจ้งชัด ในการกำหนดจุดประสงค์ควรจะอาศัยข้อเท็จจริงที่ทราบแล้ว ควรจะปรึกษาผู้ที่ออกแบบแผนการทดลองหรือนักสถิติเสียแต่แรกเริ่ม การกำหนดจุดประสงค์ของการทดลองจะมีผลถึงการเลือกสภาพของการทดลองอีกด้วย และที่สำคัญก็คือจะมีผลถึงการกำหนดสมมติฐานขึ้น เพื่อจะได้ใช้วิธีทางสถิติทดลองว่าจะยอมรับหรือไม่ ดังนั้นในการกำหนดจุดประสงค์จึงสามารถกำหนดไว้ในรูปคำถามแบบให้หาคำตอบของสมมติฐานที่จะทดสอบ หรือสิ่งที่ต้องการกะประมาณก็ได้ การกำหนดจุดประสงค์ยังควรรวมถึงการกำหนดสิ่งที่ต้องการจะให้การทดลองครอบคลุมไปถึงโดยเฉพาะเวลาสรุปผล กล่าวคือต้องการจะให้คลุมถึงประชากรได้

ข. ร่างแบบแผนการทดลอง ในขั้นร่างแบบนี้ควรจะได้อาศัยเรื่องความผิดพลาดจากการทดลองและวิธีการกะประมาณความผิดพลาดนั้น และควรพิจารณาเรื่องใช้จ่ายในการดำเนินการทดลองด้วย ในร่างแบบแผนทดลองควรจะมีจุดประสงค์ที่ตั้งใจรวมอยู่ด้วย และต้องมีคำอธิบายเกี่ยวกับกรรมวิธีที่จะใช้ในการทดลอง จำนวนหน่วยการทดลองที่ใช้ และวัสดุที่จะใช้ในการทดลดง ที่สำคัญยิ่งก็คือต้องมีแนวระเบียบวิธีการวิเคราะห์ผลที่ได้จากการทดลองไว้ด้วย

ค. ปรึกษาหารือ เรื่องแบบแผนการทดลองกับผู้ร่วมงาน เป็นงานขั้นพินิจพิจารณาร่างแบบแผนการทดลองที่ได้จัดร่างขึ้นแล้ว พยายามหาทางปรับปรุงแก้ไขแบบแผนการทดลองนั้นให้ดีขึ้น และเหมาะสมแก่สภาพการที่จะทำการทดลองจริงให้ประสบผลตามที่ได้ตั้งจุดประสงค์ไว้

ง. เขียนแบบแผนการทดลองขั้นสุดท้ายเพื่อนำไปใช้ในการทดลอง เมื่อนำร่างแบบแผนการทดลองไปพินิจพิจารณาอย่างถ้วนถี่แล้ว ก็ทำการปรับปรุงแก้ไขให้สมบูรณ์ เขียนแนวการปฏิบัติขั้นสุดท้ายให้ชัดเจนเพื่อที่จะให้สามารถนำไปใช้ได้จริง ๆ โดยมิได้มีสิ่งใดยังเป็นที่ข้องใจอยู่ ควรพิจารณาคาดหมายให้ได้ว่าจะมีผลอย่างใดในทางสถิติ เมื่อนำเอาแบบแผนการทดลองนั้นไปใช้จริง ๆ ให้แน่ใจว่าสภาพการต่าง ๆ ที่จำเป็นแก่การดำเนินการนั้นเป็นภาที่เป็นจริงสมตามที่เรายึดถือ หรือที่เราเหมาะเอาว่าควรจะเป็นเช่นนั้น เพราะว่าจะมีผลถึงการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองด้วย ควร**กำหนดให้ชัดแจ้งไปว่าจะใช้กรรมวิธีซ้ำกี่ครั้งในการทดลองนั้น ๆ วิธีการ**

วัดข้อมูลจะทำอย่างไรก็ควรจะชี้แจงไว้ด้วย ในร่างแบบแผนการทดลองขั้นนี้ควรจะเขียนวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลไว้เป็นขั้น ๆ ให้ละเอียด จะสรุปผลประการใดได้บ้างและในกรณีใดจึงจะสรุปผลดังกล่าวนั้น ๆ ควร**เขียนการวิเคราะห์ความแปรปรวน** (Analysis of variance) **หรือการวิเคราะห์ความแปรปรวนรวม (Analysis of covariance)** ไว้ **ในรูปตาราง เขียนวิธีการทดสอบสมมติฐานต่าง ๆ รวมทั้งการกะประมาณค่าต่าง ๆ ที่ต้องการไว้ด้วย**

จ. **ลงมือทำการทดลองหรือวิจัย** เป็นขั้นการกระทำให้**ได้ข้อมูลสถิติที่ต้องการมา** ควรจะดำเนินการแผนการที่วางไว้เป็นขั้น ๆ ในขณะดำเนินการทดลองต้องพยายามติดต่อกับผู้ร่วมงานอย่างใกล้ชิด เมื่อมีปัญหาใด ๆ เกิดขึ้นควรจะได้ปรึกษาหารือกัน เพื่อที่จะได้ช่วยกันแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นโดยมิได้คาดหมายมาก่อน แม้จำเป็นต้องปรับปรุงแก้ไขแบบแผนการทดลองจะได้ทำได้ หรือแม้แต่ได้ผลหรือข้อมูลสถิติมาบ้างแล้วก็ยังอาจจะประสบปัญหาได้เช่นเดียวกัน ปัญหาเรื่องเก็บข้อมูลไม่ได้ (Non response or Missing plots) ก็เป็นเรื่องที่ควรจะได้อภิปรายกัน แม้ว่าจะมีระเบียบวิธีการกะประมาณค่าได้ในเชิงสถิติแล้วก็ตาม

ฉ. **วิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง** ในการวิเคราะห์ข้อมูลสถิติที่เก็บได้จากการทดลองควรจะกระทำตามแบบแผนที่ได้วางไว้แล้วในขั้นก่อน **ถ้านักสถิติได้ร่วมดำเนินการด้วยหรือได้รับการปรึกษาหารือเกี่ยวกับการทดลองนั้น ๆ แต่เริ่มแรก ปัญหาเรื่องการวิเคราะห์ข้อมูลมักจะไม่ค่อยมี เพราะการทดลองได้กระทำไปโดยมีระเบียบแบบแผน มีโครงการสำหรับใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลไว้แล้วอย่างดี** ปัญหาที่เผชิญนักสถิติอยู่เสมอก็คือ ผู้ดำเนินการทดลองนำเอาปัญหามาปรึกษานักสถิติก็ต่อเมื่อสายไปเสียแล้ว บางครั้งข้อมูลที่ได้มาจะไม่มีประโยชน์ในการวิเคราะห์เชิงสถิติเลยก็มี บางครั้งก็พอจะวิเคราะห์ได้ แต่ก็ต้องเหมาเอาว่าสภาพการต่าง ๆ ที่ใช้ในการทดลองเป็นไปตามที่จะช่วยให้วิเคราะห์ข้อมูลได้ ในบางกรณีนักสถิติจะช่วยอะไรไม่ได้เลย จะช่วยได้ก็เพียงแต่แนะว่าควรจะทำอย่างไรในการวิจัยหรือทำการทดลองต่อไปในอนาคต ควรระลึกอยู่เสมอว่าจะต้องปรึกษาปัญหาทางสถิติแก่นักสถิติ ตั้งแต่เมื่อเริ่มคิดว่าจะทำการวิจัยหรือการทดลองใด ๆ งานวิจัยบางชนิดเป็นการสำรวจด้วยตัวอย่างต้องการประมาณค่าที่เกี่ยวกับประชากรที่เกี่ยวข้อง บางชนิดเป็นการทดสอบสมมติฐานซึ่งกระทำได้โดยการทดลองจริง ๆ ซึ่งเป็นงานที่มีแบบแผน มิใช่กระทำขึ้นมาโดยปราศจากโครงการ การวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองจะทำให้สามารถสรุปผลหรือกะประมาณที่สิ่งที่ต้องการได้ ควรจะมีเครื่องวัดความคลาดเคลื่อนของตัวประมาณค่า ควรดูว่าสิ่งที่เรายึดถือเป็นหลักในการวินิจฉัยข้อมูลนั้นเป็นจริงหรือไม่

ช. **เสนอรายงาน** ในการเขียนรายงานการทดลองตามแบบแผนนั้นควรจะเสนอข้อมูล**ที่ได้จากการทดลองให้ชัดเจน** อาจจะเสนอในรูปตารางหรือกราฟ **หรือใช้ทั้งสองอย่างพร้อม**ทั้งคำอธิบายด้วย ต้องอธิบายแบบแผนการทดลองโดยละเอียด เสนอการดำเนินการทดลองการเลือกวัสดุเพื่อการทดลองการกำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยการทดลอง การวัดขนาดของข้อมูล

ตารางตัวเลขแสดงวิธีวินิจฉัยข้อมูลพร้อมทั้งเปรียบเทียบกับจุดประสงค์ของการทดลองที่ได้ตั้งไว้แต่เริ่มแรก นอกจากนี้ควรจะรวบรวมปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นพร้อมทั้งข้อเสนอแนะในการทดลองคล้าย ๆ กันในภายหน้าว่าควรจะดำเนินการอย่างไร มีอะไรควรจะได้รับความสนใจเป็นพิเศษหรือไม่ หรือควรจะทำอะไรเพิ่มเติม ไม่ควรเหมาสภาพการใด ๆ บ้างหรือไม่ ควรจะวิเคราะห์การดำเนินการทดลองครั้งนี้ไว้ด้วย เพื่อประโยชน์แก่ผู้ที่จะทำการทดลองหรือวิจัยเรื่องเดียวกันหรือคล้าย ๆ กันในภายหน้า

3. การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance ANOVA)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นเครื่องมือทางสถิติที่มีประสิทธิภาพสำหรับวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองซึ่งวางแผนไว้ดีแล้ว R.A.Fisher เป็นผู้พัฒนาวิธีการนี้ขึ้นมา และนำไปใช้กันแพร่หลายในการวิเคราะห์ข้อมูลจากสาขาวิชาต่าง ๆ ถ้าจะกล่าวให้ชัดเราจะได้ว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นวิธีการทางสถิติแบบหนึ่ง (Collection of statistical Methods) ที่ใช้แยกความผันแปรทั้งหมด (Total Variation) ของข้อมูลที่ได้จากการทดลองซึ่งวางแผนไว้ดีแล้วออกเป็นส่วน ๆ ตามแหล่งที่ก่อให้เกิดความผันแปร (Sources of Variations) และยังใช้กะประมาณกับทดสอบนัยสำคัญของผลกระทบ (Effects) ของส่วนต่าง ๆ เหล่านี้ด้วย

แหล่งของความผันแปรที่ต้องการจะกะประมาณก็จะมี (1) ความผันแปรเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experitnental Error) หรือที่เรียกกันว่า ความผันแปรที่อธิบายไม่ได้ (Unexplained Variation) (2) ความผันแปรเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลองรวมกับความผันแปรใด ๆ อันเนื่องจากกรรมวิธีทดลอง (Experimental Treatment) และ (3) ความผันแปรเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลองรวมกับความผันแปรใด ๆ อันเนื่องจากแหล่งความผันแปรอื่น ๆ ความผันแปรใน (2) และ (3) จะเรียกว่าความผันแปรอธิบายได้ (Explaihed Variation)

ลองพิจารณาการทดลองวิธีการสอนภาษาไทยแก่เด็กเริ่มเรียน 3 วิธี และสนใจที่จะทดสอบสมมติงานหลัก (H_0) ที่ว่า วิธีสอน 3 วิธีนี้ให้คะแนนเฉลี่ยของการสอบปลายปีเท่ากัน ในการทดสอบว่าวิธีสอน 2 วิธีจาก 3 วิธีนี้ว่าจะให้ผลแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่นั้น เราก็ใช้แบบทดสอบ Z หรือ T ตามที่กล่าวมาแล้ว และในการทดสอบว่าวิธีสอน 3 วิธีให้คะแนนเฉลี่ยเท่า ๆ กันนั้น เราได้ใช้แบบทดสอบ F ซึ่งก็คือเราใช้เทคนิคการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) นั่นเอง ในการทดลองนี้เราจะได้แหล่งความผันแปร 2 แหล่ง โดยแหล่งแรกจะวัดความผันแปรที่เนื่องมาจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Experimental Error) และแหล่งที่สองจะวัดความผันแปรที่เนื่องมาจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง รวมกับความผันแปรใด ๆ ที่เนื่องมาจากวิธีสอน ถ้าสมมติฐานหลักเป็นจริงแล้วความผันแปรจาก 2 แหล่งนี้

จะเป็นค่าประมาณที่เป็นอิสระของความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง ดังนั้นเราจึงใช้แบบทดสอบ F ทดสอบสมมติฐานหลักนั้นได้

ถ้าการทดลองนั้นได้แยกเด็กตามฐานะของเศรษฐกิจของพ่อแม่ แล้วเราต้องการจะทดสอบว่าความผันแปรในคะแนนสอบภาษาไทยเนื่องมาจาก (1) วิธีสอนหรือไม่ (2) ฐานะทางเศรษฐกิจของพ่อแม่หรือไม่ (3) หรือบางทีทั้งวิธีสอนและฐานะทางเศรษฐกิจหรือไม่นั้น การวิเคราะห์ความแปรปรวนจะให้วิธีการแยกความผันแปรทั้งหมดออกเป็น 3 ส่วน โดยมี (1) ส่วนแรกวัดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองอย่างเดียว (2) ส่วนที่สองวัดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองรวมกับความผันแปรใด ๆ จากวิธีสอนต่าง ๆ กัน และ (3) ส่วนที่สามวัดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองรวมกับความผันแปรใด ๆ เนื่องจากฐานะทางเศรษฐกิจของพ่อแม่ ดังนั้นในการเปรียบเทียบฐานะทางเศรษฐกิจระดับต่าง ๆ เราจึงใช้ส่วนที่หนึ่ง และส่วนที่สามเปรียบเทียบกัน

ข้อมูลที่ได้จากการทดลองนั้น ถ้าใช้เกณฑ์อย่างเดียวมาแจกแจง เช่น แจกแจงด้วยวิธีสอนภาษาไทย แล้วการแจกแจงข้อมูบได้ชื่อว่าการแจกแจงข้อมูลทางเดียว (One-Way Classification) การวิเคราะห์ข้อมูลแจกแจงทางเดียวจะเรียกว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-Way ANOVA) ถ้าข้อมูลแจกแจงโดยใช้เกณฑ์ 2 อย่าง เช่น วิธีสอน และฐานะทางเศรษฐกิจ แล้วการวิเคราะห์ข้อมูลจะเรียกว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two-way ANOVA) และถ้าข้อมูลแจกแจงโดยใช้เกณฑ์ตั้งแต่ 3 อย่างขึ้นไปแล้วการวิเคราะห์จะได้ชื่อว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายทาง (Multiway ANOVA)

ในการประยุกต์เทคนิคการวิวเคราะห์ความแปรปรวนต่อข้อมูลที่ได้รับจากการทดลอง สิ่งที่ควรทำอันดับแรกคือ เขียนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) แทนข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ตัวแบบนี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ (1) สมการแทนข้อมูลแต่ละชุด สมการนี้แสดงให้เห็นว่าข้อมูลแต่ละหน่วยประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ อะไรบ้าง เช่น ส่วนที่แทนส่วนเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมด ส่วนที่เนื่องมาจากการใช้กรรมวิธีต่าง ๆ กัน และส่วนที่ความคลาดเคลื่อนของการทดลอง เป็นต้น (2) คุณสมบัติหรือข้อกำหนด (Assumption) บทส่วนต่าง ๆ ในหัวแบบเชิงคณิตศามสตร์ ซึ่งเราจะถือเป็นรากฐานในการวิเคราะห์ข้อมูล ในแบบแผนการทดลองแต่ละแบบว่ามีหัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หรือต่างกันออกไปจากคุณสมบัติบางส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องสำหรับในส่วนที่เกี่ยวกับการประมาณค่าต่าง ๆ โดยเฉพาะที่เกี่ยวกับเรื่องการทดลองแล้วเรามักจะใช้วิธีวัดส่วนน้อยที่สุด (Method of least Squares) สำหรับการประมาณค่า

ในการใช้เทคนิคการวิเคราะห์ความแปรปรวนทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลกระทบของแหล่งความผันแปรที่อธิบายได้นั้นเราจะต้องถือว่า

(1) ผลกระทบอันเกิดจากกรรมวิธีและสิ่งแวดล้อมรวมกันได้

(2) ความคลาดเคลื่อนจากการทดลองตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ

(3) ความคลาดเคลื่อนจะมีส่วนเฉลี่ยเป็นศูนย์และมีความแปรปรวนเท่ากันหมด รวมทั้งเป็นอิสระต่อกันเองด้วย

กรณีที่ขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่งจะมีผลกระทบถึงระดับนัยสำคัญและความฉับไว (Sensitivity) ของตัวสถิติ F หรือ t.

ในหัวข้อ 4, 6 และ 7 จะได้กล่าวถึงแบบแผนการทดลองชนิดต่าง ๆ ที่สำคัญและเป็นพื้นฐานของแบบแผนอื่น ๆ

7.4 แบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์ (Completely Randomized Design, CRD)

แบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์เป็นแบบแผนที่กำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยทดลองเป็นไปโดยสุ่มทั้งหมด คือไม่มีการกำหนดว่ากรรมวิธีใดจะใช้กับหน่วยทดลองใด ที่ใดหรือบริเวณและเวลาใดเลย แต่ละกรรมวิธีอาจจะซ้ำ ๆ ได้หลายครั้ง และจำนวนครั้งที่ซ้ำอาจแตกต่างกันไปแต่ละกรรมวิธีได้

แบบแผนการทดลองแบบนี้เรามักเลือกใช้เมื่อหน่วยทดลองหรือวัสดุที่ใช้ในการทดลองไม่ค่อยผิดแผกกันมากนัก (Homogeneous) หน่วยทดลองแต่ละหน่วยจะมีโอกาสที่ได้รับกรรมวิธีใด ๆ เท่ากันทั้งหมดซึ่งในทางปฏิบัติเราใช้วิธีการให้เหมาะสม

แบบแผนการทดลองแบบนี้เป็นแบบง่ายที่สุด แบบอื่น ๆ อาจจได้จากแบบนี้โดยการเพิ่มข้อผูกมัดเกี่ยวกับกำหนดกรรมวิธีให้แก่แต่ละหน่วยทดลองในบริเวณที่ทำการทดลอง การวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากแบบแผนการทดลองวิธีนี้ ถ้าเข้าใจวิธีการดีก็จะช่วยให้เข้าใจวิธีวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองชนิดอื่น ๆ ได้รวดเร็วขึ้น

7.4.1 การกำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยทดลอง ถ้าเรามีหน่วยทดลอง n หน่วย และต้องการกำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยทดลองเหล่านี้โดยที่จะไม่กำหนดเงื่อนไขพิเศษอะไรเลย เราก็ทำโดยเลือกหน่วยทดลองมาอย่างสุ่ม ๆ จำนวน n_1 หน่วย แล้วกำหนดกรรมวิธีหนึ่งโดยการสุ่มจากทั้งหมด

กรรมวิธีให้แก่หน่วยต่าง ๆ ที่เลือกมานี้ ต่อไปก็เลือกหน่วยทอลองมาอีก n_2 หน่วยจากที่เหลืออยู่ $n-n_1$ หน่วย และกำหนดกรรมวิธีหนึ่งโดยการสุ่มจาก k-1 กรรมวิธีที่เหลือ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนหมดทุกหน่วยทดลองและทุกกรรมวิธี

ถ้าเรากำหนดว่าจะใช้ทุกกรรมวิธีซ้ำเท่า ๆ กันนั้น คือเราได้ $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$ และ $\sum_j^k n_j = n$ โดยทั่วไปมักจะใช้ทุกกรรมวิธีซ้ำเท่า ๆ กัน เว้นแต่ว่าจะไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติเช่นแบ่งหน่วยทดลองออกเป็นพวกละเท่า ๆ กันไม่ได้ หรือสนใจกรรมวิธีหนึ่งมากกว่ากรรมวิธีอื่น ๆ หรือเมื่อมีกรรมวิธีบางชนิดสำคัญกว่ากรรมวิธีอื่น ๆ

ในการสุ่มนั้นเราใช้ตารางเลขสุ่มเพื่อช่วยให้แต่ละหน่วยทดลองมีโอกาสที่จะได้กรรมวิธีใด ๆ เท่ากัน ตัวอย่างในการใช้ตารางเลขสุ่มกับแบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์ทำได้ดังนี้

ถ้ามีกรรมวิธี 4 ชนิด คือ ก, ข, ค, และ ง และจะทดลองกับหน่วยทดลองทั้งหมด 20 หน่วย ให้แต่ละกรรมวิธีซ้ำ 5 ครั้ง เราอาจจะกำหนดหน่วยทดลองเป็นหน่วยที่

อย่างสุ่ม ๆ ไว้ก่อน ต่อไปก็กำหนดกรรมวิธีให้แก่แต่ละหน่วยทดลองโดยใช้ตารางเลขสุ่ม เช่น

(1) หาจุดตั้งต้นในตารางเลขสุ่ม R.K Som สมมติว่าได้แถวนอน 16 แถว ตั้ง 11 แล้วเราก็เลือกจำนวนที่เป็นตัวเลขทีละ 2 หลักตามแนวนอนไปเรื่อย ๆ ซึ่งจะได้จำนวนต่อไปนี้ 40, 33, 20, 38, 26, 13, 89, 51, 03, 74, 17, 76, 37, 13, 04, 07, 74, 21, 19, 30, 56, 62, 18,.....ต่อไปเอา 20 หารจำนวนเหล่านี้และเก็บเฉพาะเศษไว้ (ถ้าซ้ำก็ตัดทิ้งไป) จะได้จำนวนต่อไปนี้ 0, 13, 18, 6, 9, 11, 3, 14, 17, 16, 4, 7, 1, 19, 10, 2, 15, 12, 5, 8 ดังนั้น 5 จำนวนแรกจะเป็นหน่วยทดลองที่จะรับกรรมวิธี ก 5 จำนวนต่อไปรับกรรมวิธี ข, และต่อ ๆ ไป สำหรับ 0 จะใช้แทนหน่วยทดลองที่ 20

(2) หาจุดเริ่มต้นในตารางเลขสุ่ม เช่นได้แถวนอนที่ 33 แถวตั้งที่ 9 และเลือกจำนวนที่เป็นตัวเลขทีละ 3 หลักไปตามแนวนอน แต่อ่าน 3 หลักแล้วเว้น 5 หลัก แล้วอ่านอีก 3 หลัก ให้ได้จำนวนจนครบ 20 จำนวนซึ่งจะต้องไม่มีซ้ำกันเลย ถ้าพบเลขซ้ำกันก็ข้ามไป เมื่อนำเอาจำนวนที่ได้มาจัดอันดับตั้งแต่ 1 ถึง 20 จากจำนวนใหญ่สุดไปสู่เล็กสุดซึ่งจะได้ดังนี้

จำนวนเลข	003	751	629	....	223
อันดับ	20	2	5	-------	14

เรากำหนดกรรมวิธี ก ให้แก่ 5 หน่วยแรก ส่วน ข, ค และ ง ให้ 5 หน่วยถัด ๆ ไปตามลำดับ

7.4.2 ข้อได้เปรียบและเสียเปรียบของแบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์

(1) เป็นแบบแผนทดลองที่ง่ายที่สุด ไม่สลับซับซ้อนเลยการกำหนดกรรมวิธีให้แก่หน่วยทดลองทำได้ง่าย ๆ

(2) เป็นแบบแผนทดลองที่ดัดแปลงแก้ไขได้ง่าย จะให้มีสักกี่กรรมวิธี หรือจะให้ซ้ำสักกี่ครั้งก็ได้ จำนวนซ้ำในแต่ละกรรมวิธีอาจจะแตกต่างกันได้ซึ่งทำให้สามารถใช้หน่วยทดลองได้ทุกหน่วยที่มีอยู่

(3) เป็นแบบแผนการทดลองที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระของความผันแปรของความคลาดเคลื่อนจากการทดลองสูงอันเป็นสิ่งที่เราต้องการในการทดลอง

(4) เป็นแบบแผนการทดลองที่มีวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลง่ายที่สุด ถึงแม้ว่าจะให้แต่ละกรรมวิธีมีการซ้ำต่าง ๆ กันก็ตาม ถึงแม้ว่าผลจากหน่วยทดลองใด ๆ ขาดหายไปหรือไม่มีผลปรากฏก็ยังมีวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลได้ง่ายกว่าวิธีอื่น และข้อเท็จจริงที่ขาดหายไปเนื่องจากข้อมูลบกพร่องจะมีขนาดเล็กน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับแบบแผนการทดลองแบบอื่น

แบบแผนนี้ก็มีข้อเสียเปรียบอยู่บ้างในด้านความแม่นยำ (Accuracy) คืออาจจะให้ความแม่นยำต่ำถ้ามีจำนวนกรรมวิธีมากเพราะเมื่อมีกรรมวิธีมากหน่วยทดลองที่ใช้ในกรรมวิธีก็ต้องมากซึ่งเป็นเหตุให้ผลลัพธ์แตกต่างกันมาก ถ้าหน่วยทดลองที่ใช้แตกต่างกันมากก็ยิ่งทำให้ความแม่นยำต่ำมาก เมื่อเป็นเช่นนี้เราก็สามารถเลือกแบบแผนการทดลองแบบอื่นที่มีประสิทธิภาพสูงกว่าได้ ซึ่งจะให้ผลในด้านตัวประมาณค่าที่ถูกต้องมากกว่า

พอสรุปได้ว่าแบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์จะเหมาะสมในกรณีที่หน่วยทดลองที่ใช้ในการทดลองไม่ผิดแผกกันมากเกินไป และในกรณีที่คาดว่าจะเก็บข้อมูลไม่ได้ครบทุกหน่วยและการทดลองนั้นเป็นการทดลองขนาดย่อม

7.4.3 ตัวแบบแสดงข้อมูลจากการทดลอง

ให้การทดลองที่ใช้แบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์ประกอบด้วย หน่วยทดลองซึ่งได้รับกรรมวิธี k กรรมวิธี และแต่ละกรรมวิธีมีหน่วยทดลองเป็น

กรรมวิธีทดลอง		1	2	3	j	k	
ค่าสังเกต	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{1j}	x_{1k}	
(Observations)	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{2j}	x_{2k}	
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{3j}	x_{3k}	
	i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$\boxed{x_{ij}}$	x_{ik}	
	n_j	$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	$x_{n_3 3}$	$x_{n_j j}$	$x_{n_k k}$	
จำนวนหน่วยทดลอง		n_1	n_2	n_3	n_j	n_k	n
ผลรวมของค่าสังเกต		$X_{.1}$	$X_{.2}$	$X_{.3}$	$X_{.j}$	$X_{.k}$	$X_{..}$
ค่าเฉลี่ย		$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.2}$	$\bar{X}_{.3}$	$\bar{X}_{.j}$	$\bar{X}_{.k}$	$\bar{X}_{..}$

ในการวิเคราะห์และแบ่งความหมายของข้อมูลที่ได้มาด้วยเทคนิควิเคราะห์ความแปรปรวนนั้น เราจะต้องมีข้อกำหนด (assumptions) ที่ถือว่าเป็นจริงเสียก่อน จึงจะทำให้ข้อมูลที่รวบรวมได้สามารถวิเคราะห์ข้อเท็จจริงได้อย่างมีเหตุผลและให้ผลสรุปได้ถูกต้อง ข้อกำหนดที่ว่าก็คือว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของข้อมูลเป็น**ตัวแบบชนิดบวกเชิงเส้น** (Linear additine Model) นั่นคือข้อมูลที่ได้อาจแยกออกได้เป็นผลบวกของส่วนย่อย ๆ คือค่าเฉลี่ย และส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปได้ (Random element) และค่าเฉลี่ยของก็ยังอาจจะประกอบด้วยส่วนย่อย ๆ ได้อีกด้วย สำหรับกรณีของแบบแผนการทดลองชนิดสุ่มสมบูรณ์มีสมการแสดงข้อมูลเป็น

$$x_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$$

หรือ

$$x_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

x_{ij} เป็นค่าของข้อมูลจากหน่วยทดลองที่ i ซึ่งได้รับกรรมวิธี j, μ_j เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมดที่ได้รับกรรมวิธี j, μ คือค่าเฉลี่ยทั่วไป, τ_j คือผลกระทบจากการใช้กรรมวิธี j, ε_{ij} เป็นความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเมื่อใช้กรรมวิธี j กับหน่วยทดลองที่ i, k เป็นจำนวนกรรมวิธีทั้งหมด, และ n_j คือจำนวนครั้งที่ใช้กรรมวิธี j ในการทดลองนั้น

ตัวแบบนี้ยังมีคุณสมบัติพิเศษของแต่ละส่วน ซึ่งแยกออกเป็น 2 กรณี คือกรณีตัวแบบคงที่ และตัวแบบสุ่ม ดังนี้

ก. **ตัวแบบคงที่** (Fined Model) ซึ่งถือว่า(1) x_{ij} เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย μ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ (2) $\mu_j = \mu + \tau_j$ หรือ $\tau_j = \mu_j - \mu$ และถือว่า $\sum^{k} n_j \tau_j = 0$ โดยที่ $\mu = \sum^{k} \mu_j / k$ และ(3) x_{ij} มีความแปรปรวน σ^2 เท่ากันหมด และมีการแจกแจงปกติแบบหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ซึ่งเป็นอิสระกัน

ดังนั้นในตัวแบบคงที่นี้เราถือว่า μ และ τ_j เป็นตัวคงที่ซึ่งมี $\sum^{k} n_j \tau_j = 0$, และ $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ ที่เป็นอิสระกัน เมื่อสิ่งที่กล่าวมานี้เป็นจริงเราก็สามารถทดสอบและการประมาณค่าของผลกระทบของกรรมวิธีได้ และสามารถวัดความถูกต้องของการวิเคราะห์ได้

ตัวแบบเชิงสุ่ม (Random Model) จะถือว่า (1) x_{ij} เป็นค่าของตัวแปรเชิงร่วมที่มีค่าเฉลี่ยร่วมกันคือ μ และเป็นผลบวกของตัวแปรเชิงร่วม τ_j และ ε_{ij} (2) τ_j และ

ε_{ij} เป็นตัวแปรงเชิงร่วมที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 ทั้งคู่ และมีความแปรปรวนเป็น σ_k^2 และ σ^2 ตามลำดับ และ (3) $\mathcal{T}_j$ และ ε_{ij} มีการแจกแจงปกติและเป็นอิสระกัน

7.4.4 วิธีวิเคราะห์ข้อมูล จากสมการแสดงข้อมูลที่ว่า $x_{ij} = \mu + \mathcal{T}_j + \varepsilon_{ij}, (i = 1, 2, ..., n_j; j = 1, ..., k)$ เมื่อเราจะทดสอบสมมติฐานว่าต้องพิจารณาก่อนว่าเราจะใช้ตัวแบบคงที่หรือตัวแบบเชิงสุ่ม

เมื่อใช้ตัวแบบคงที่สมมติฐานหลักจะเป็น Ho คือ

$$H_0 : \mathcal{T}_j = 0, \text{หรือ} \quad H_0 : \sum_{j=1}^{k} n_j \mathcal{T}_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, ..., k$$

เมื่อใช้ตัวแบบเชิงสุ่ม สมมติฐานหลัก คือ

$$H_0 : \sigma_k^2 = 0$$

ทั้งสองกรณีเราต้องการจะทดสอบสมมติฐานที่ว่า กรรมวิธีต่าง ๆ ที่ใช้จะไม่มีผลทำให้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลแตกต่างกัน

ข้อมูลใด ๆ X_{ij} ในตารางที่เป็นผลของการทดลองนั้น เราสามารถจะเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างผลกระทบต่าง ๆ ได้เป็น

$$X_{ij} = \bar{X}_{..} + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{.j})$$

ซึ่งมีความหมายว่า X_{ij} ใด ๆ เป็นผลกระทบมาจาก 3 ส่วน ดังนี้ (1) $\bar{X}_{..}$ ค่าเฉลี่ยทั่วไปของข้อมูลที่ศึกษาได้ (2) $(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})$ ผลกระทบของกรรมวิธี j และ (3) $(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ ผลกระทบของตัวแปรเชิงสุ่มที่หน่วยทดลอง i ตอบสนองต่อกรรมวิธี j และแตกต่างเล็กน้อยจากหน่วยทดลองอื่นที่ได้รับกรรมวิธีเดียวกัน

ดังนั้นเทอม $(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})$ จะให้ค่าสังเกตของความผันแปรของค่าเฉลี่ย (ในกรรมวิธี) ต่าง ๆ จากค่าเฉลี่ยทั่วไป และเทอม $(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ จะให้ค่าสังเกตของความแตกต่างในผลที่ได้ระหว่างหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีเดียวกัน ถ้ามองอีกแง่หนึ่ง เราจะเห็นว่าเทอม $(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})$ จะเป็นมาตรวัดความผันแปรระหว่างหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีต่างกัน และเทอม $(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$ จะเป็นมาตรวัดความผันแปรระหว่างหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีเดียวกัน

ในวิธีการทางสถิติ จะต้องยกกำลังสองของเทอมเหล่านี้ แล้วรวมผลแต่ละหน่วย นั่นคือเราจะได้

$$\sum_{j}^{k} \sum_{i}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 = \sum_{j} \sum_{i} (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{j} \sum_{i} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2$$

หรือ

$$SST = SSTR + SSE$$

ในเมื่อ SST เป็นผลรวมกำลังสองทั้งหมด (Total Sum Squared Deviation); SSTR เป็นผลรวมกำลังสองของกรรมวิธี (Treatment Sum Squared Deviation) และ SSE เป็นผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Errov Sum Squared Deviation) เราจะเห็นได้ว่าผลรวมกำลังสองทั้งหมดของส่วนเบี่ยงเบนที่ข้อมูลห่างไปจากค่าเฉลี่ยทั่วไปจะแบ่งได้เป็น 2 ส่วน คือ

(1) ความผันแปรในประสิทธิผล (Effectiveness) ของกรรมวิธีต่าง ๆ กัน ส่วนนี้จะเป็นมาตรวัดของสิ่งที่ผู้ทดลองสนใจ

(2) ความผันแปรที่เกิดขึ้นระหว่างหน่วยทดลองที่ได้รับกรรมวิธีเหมือนกัน ส่วนนี้จะเป็นมาตรวัดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองและจะเป็นตัวประเมินผลของความผันแปรในประสิทธิผลกรรมวิธีต่าง ๆ กัน

ก่อนที่จะนำความผันแปรเหล่านี้มาเปรียบเทียบกัน เราต้องเฉลี่ยต่อหน่วยเสียก่อน ดังนั้นผลรวมกำลังสอง (SS) จึงได้รับการแปลงให้เป็นต่อหน่วยโดยหารด้วยจำนวนที่เหมาะและจำนวนที่เหมาะ นี้เรียกว่า จำนวนองศาแห่งความเป็นอิสระ (df) สำหรับผลหารนั้นเราเรียกว่า กำลังสองเฉลี่ย (Mean Square, MS) นั่นคือ

$$MS = SS/df$$

จำนวนองศาแห่งความเป็นอิสระของทั้งสามส่วนจึงเป็น n-1, k-1 และ n-k ตามลำดับ ดังนั้นกำลังลองเฉลี่ยของทั้งสามเทอมจึงเป็น

(1) $MST = SST/(n-1)$

(2) $MSTr = SSTr/(k-1)$

(3) $MSE = SSE/(n-k)$

สองเทอมหลังจะมีค่าเฉลี่ยดังนี้

(1) สำหรับหัวแบบคงที่

$$E(MSTr) = \sigma^2 + \sum_j n_j \tau_j^2/(k-1)$$

$$= \sigma^2 \text{ ถ้า } \tau_j = 0$$

$$E(MSE) = \sigma^2$$

(2) ตัวแบบเชิงสุ่ม

$$E(MSTr) = \sigma^2 + \left(n - \frac{\sum n_j^2}{n}\right)\sigma_k^2$$

$$= \sigma^2 \text{ ถ้า } \sigma_k^2 = 0$$

$$E(MSE) = \sigma^2$$

เราจะเห็นได้ว่า MSE เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของ σ^2 และ $MSTr$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของ σ^2 ถ้า $\tau_j = 0$ หรือ $\sigma_k^2 = 0$

ดังนั้นในการทดสอบสมมติฐานหลัก

$$H0 : \tau_j = 0 ; \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

หรือ

$$H0 : \sigma_k^2 = 0$$

เราจึงใช้ตัวสถิติ $F = MSTr/MSE$ สำหรับทดสอบสมมติฐานหลัก Ho นั้น ถ้าสมมติฐานหลักเป็น

จริง F จะมีค่าใกล้ 1 และมีการแจกแจงแบบเอฟด้วยตามความเป็นอิสระ (k-1), (n-k) แต่ถ้า F ต่างจาก 1 มาก หรือมากกว่า $F_2(k-1, n-k)$ เราจะปฏิเสธ Ho และสรุปว่ากรรมวิธีต่าง ๆ ที่ใช้มีผลนำให้ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่ได้แตกต่างกันในการวิเคราะห์ความแปรปรวนนี้สรุปได้ในตารางต่อไปนี้

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน

แหล่งความผันแปร SOV	องศาความเป็นอิสระ df	ผลรวมกำลังสอง SS	กำลังสองเฉลี่ย MS	อัตราส่วน F
ระหว่างกรรมวิธี	$k-1$	SSTr	MSTr	MSTr/MSE
ความคลาดเคลื่อนทดลอง (ระหว่างหน่วยทดลอง)	$n-k$	SSE	MSE	
ผลรวม	$n-1$	SST		

อัตราส่วน F ในตารางนี้นัยสำคัญ $\alpha = .05$ เราจะใช้* กำกับค่า F ไว้ แต่ถ้ามีนัยสำคัญ $\alpha = .01$ เราใช้ * * กำกับไว้ ซึ่งแสดงว่ามีนัยสำคัญยิ่ง และ $\alpha = .001$ เราใช้ * * * ซึ่งแสดงว่ามีนัยสำคัญอย่างยิ่ง

สำหรับ SS ของเทอมต่าง ๆ ในทางปฏิบัติเราคำนวณได้ตามขั้นตอนดังนี้

(1) $C = (X..)^2/n$ เรียกว่าตัวแก้ (Correction factor)

(2) $SST = \sum_{i,j}(x_{ij} - \bar{x}..)^2 = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - C$

(3) $SSTr = \sum_{i,j}(\bar{x}_{.j} - \bar{x}..)^2 = \sum_{j} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 = \sum_{j} x_{.j}^2/n_j - C$

(4) $SSE = \sum_{i,j}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - \sum_{j} x_{.j}^2/n_j = SST - SSTr$

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบวิธีสอนภาษาไทยแก่เด็กเริ่มเรียน 4 แบบ โดยใช้ตัวอย่างของเด็กที่มีความพร้อมคล้าย ๆ กัน 20 ราย ได้ข้อมูลซึ่งเป็นคะแนนสอบไล่ปลายปีดังนี้

วิธีสอน	1	2	3	4	
	90	97	67	61	
	80	84	74	73	
	69	93	70	69	
	65	79	78	65	
	76	77	61	72	
รวม	380	430	350	340	1500

ผลการเปรียบเทียบจะเป็นอย่างไร ?

สมการแสดงข้อมูลจะเป็น

$$X_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots 5 ; j = 1, 2, 3, 4)$$

สมมติฐาน

$$H0 : \tau_j = 0 \text{ ทุกค่า } j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$
$$H0 : \tau_j \neq 0 \text{ บางค่า } j$$

ผลรวมกำลังสอง SS คำนวณได้ดังนี้

(1) $C = (380+430+350+340)^2 = (1500)^2/20 = 112500$

(2) $SST = (90^2+80^2+6 + \ldots + 65^2+72^2) - C = 114436 - 112500 = 1936$

(3) $SS\ Tr = 380^2/5 + 430^2/5 + 350^2/5 + 340^2/5 - C = 113480 - 112500 = 980$

(4) $SSE = SST - SSTn = 1936 - 980 = 956$

สร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ดังนี้

SOV	df	SS	MS	F
วิธีสอนภาษาไทย	4-1 = 3	980	326.67	5.467**
ความคลาดเคลื่อน	20-4 = 16	956	59.75	
รวม	20-1 = 19	1936		

จากตารางเอฟ เราได้ $F_{.05}^{(3,16)} = 5.29$ จึงสรุปได้ว่า วิธีสอนภาษาไทยแก่เด็กเริ่มเรียน 4 วิธีนี้มีผลทำให้คะแนนเฉลี่ยแตกต่างกัน นั่นคือ วิธีสอนมีผลกระทบ

7.4.5 *วิธีวิเคราะห์ข้อมูลเมื่อมีตัวอย่างย่อย* (Subsamples) บางทีหน่วยทดลองอาจจะประกอบขึ้นด้วยหน่วยย่อย ที่เรียกว่าหน่วยตัวอย่าง (Sampling) หรือตัวอย่างย่อย (Subsamples) ก็ได้ ดังนั้นเราจะได้ข้อมูลหลายตัวจากหน่วยทดลองแต่ละหน่วยโดยเก็บข้อมูลจากหน่วยตัวอย่างภายในแต่ละหน่วยทดลองอีกทีหนึ่ง เช่นใช้วิธีสอนแต่ละวิธีกับนักเรียน 10 คน และนักเรียนคนหนึ่งจะทดสอบข้อสอบ 2 ชุดในเวลาเดียวกัน ซึ่งจะได้ข้อมูลมาคนละ 2 ตัว

ในกรณีหน่วยทดลองมีตัวอย่างย่อยนี้ แหล่งกำเนิดของความผันแปรอันมีผลถึงความแปรปรวนที่นำไปใช้การเปรียบค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีจะมีดังนี้

(1) ความคลาดเคลื่อนจากหน่วยตัวอย่างภายในหน่วยทดลองที่ใช้กรรมวิธีเดียวกัน กำลังสองเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนชนิดนี้เราเรียกว่าความคลาดเคลื่อนจากการสุ่ม (Sampling Error)

(2) ความคลาดเคลื่อนจากหน่วยทดลองต่าง ๆ ที่ใช้กรรมวิธีเดียวกัน กำลังสองเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนชนิดนี้เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (Enperimental Error) โดยทั่วไปแล้วความคลาดเคลื่อนจากการทดลองจะมากกว่าความคลาดเคลื่อนจากการสุ่ม

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของข้อมูลจากการทดลองที่มีตัวอย่างย่อยจะเป็นดังนี้

$$x_{ijk} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

ในเมื่อ $j = 1, 2, \ldots, t$; $i = 1, 2, \ldots, r_j$; โดยที่ X_{ijk} เป็นค่าของข้อมูลที่เก็บได้จากหน่วยตัวอย่างที่ k ภายในหน่วยทดลอง i โดยใช้กรรมวิธี j ; μ คือค่าเฉลี่ยทั่วไป ; τ_j ผลกระทบจากกรรมวิธี j ; ε คือผลจากหน่วยทดลอง i ที่รับกรรมวิธี j ; และ δ_{ijk} เป็นผลกระทบจากหน่วยตัวอย่างที่ k ภายในหน่วยทดลอง i และได้รับกรรมวิธี j

สำหรับตัวแปรคงที่จะถือว่า (1) τ_j เป็นตัวคงที่ และ $\sum_j^t \sum_i^{r_j} r_{ij} \tau_j = 0$; (2) ε_{ij} มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 ความแปรปรวน σ^2 และเป็นอิสระกัน (3) δ_{ijk} มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน σ^2 และเป็นอิสระกัน ; และ (4) ε_{ij} และ δ_{ijk} ทั้งหลายเป็นอิสระกัน

ในการวิเคราะห์ข้อมูลนั้น เราใช้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนต่อไปนี้

ANOVA Table

SOV	SS	df	MS	F
กรรมวิธี	SST_r	$t-1$	MST_r	MST_r/MSE
ความคลาดเคลื่อนทดลอง	SSE	$r.-t$	MSE	MSE/MSS
ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่ม	SSS	$r..-r.$	MSS	
รวม	SST	$r..-1$		

ในการคำนวณ SS ทำได้เป็นขั้น ๆ ดังนี้

(1) $C = (x...)^2/r..$; $\sum_{i,j,k} x_{ijk} = x...$

(2) $SST = \sum_{ijk} x_{ijk}^2 - C$

(3) $SST_r = \sum_j x_{j\cdot}^2/r_{\cdot j} - C.$

(4) SSU $= \sum_{ij} x^2_{ij} / r_{ij} - c$

(5) SSS $=$ SST $-$ SSU

(6) SSE $=$ SSU $-$ SSTr

นเมื่อ $r_{.j} = \sum_{i}^{r} r_{ij}$, $r_{..} = \sum_{i,j} r_{ij}$, และ $r_{.} = \sum_{j} r_{j}$

เราจะเห็นว่า df ของความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเป็น $\sum_{j} (r_{j} - 1) = r_{.} - t$ และ df ของความคลาดเคลื่อนจากการสุ่ม เป็น $\sum_{i,j} (r_{ij} - 1) = r_{..} - r_{.}$

ในการทดสอบสมมติฐาน $H0: \tau_j = 0;\ j = 1, 2, \ldots, t$ และ $H0: \sigma^2_\varepsilon = 0$ เราใช้ตัวสถิติทดสอบ MSTr / MSE และ MSE / MSS ซึ่งมีการแจกแจง F ที่มี df = $(t-1)$, $(r_{.}-t)$ และ$(r_{.}-t)$, $(r_{..}-r_{.})$ ตามลำดับ ทั้งนี้เพราะในตัวแบบคงที่เราทราบว่า

$$E(MSS) = \sigma^2$$

$$E(MSE) = \sigma^2 + c_1 \sigma^2_\varepsilon$$

$$E(MSTr) = \sigma^2 + c_2 \sigma^2_\varepsilon + \sum_{j} r_{.j} \tau_j^2 / (t-1)$$

ในเมื่อ

$$c_1 = \frac{1}{r_{.} - t} \left[r_{..} - \sum_{j} \left(\sum_{i}^{r_j} r^2_{ij} / r_{.j} \right) \right]$$

$$c_2 = \frac{1}{t-1} \left[\sum_{j} \left(\sum_{i}^{r_j} r^2_{ij} / r_{.j} \right) - \left(\sum_{j} \sum_{i} r_{ij} / r_{..} \right) \right]$$

$$c_3 = \frac{1}{t-1} \left[r_{..} - \sum_{j} r^2_{.j} / r_{..} \right]$$

ในกรณีที่มีตัวอย่างย่อยเท่ากัน สมการของข้อมูลจะเป็น

$$x_{ijk} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, t; \quad k = 1, 2, \ldots, s$$

ดังนั้น df ทั้งหมดแยกได้ตาม ss ดังนี้

$$SST = SSTr + SSE + SSS$$

$$(rst - 1) = (t-1) + t(r-1) + rt(s-1)$$

และเราจะได้ว่า

$$E(MSS) = \sigma^2$$

$$E(MSE) = \sigma^2 + s\sigma^2_\varepsilon$$

$$E(MSTr) = \sigma^2 + s\sigma^2_\varepsilon + rs\sum \tau_j^2 / (t-1)$$

ตัวอย่าง ในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบวิธีสอนภาษาอังกฤษแก่เด็ก ป.5 โดยใช้เด็กที่มีความถนัดด้านภาษาไทยคล้าย ๆ กัน ได้คะแนนจากการทดสอบ 2 ครั้ง ดังนี้

วิธีสอน	1	2	3
ทดสอบครั้งที่ 1	9, 7, 8, 5, 6 (35)	4, 5, 7, 5, 4 (25)	4, 4, 5, 4, 3 (20)
2	8, 7, 7, 6, 7 (35)	5, 7, 6, 6, 6 (30)	5, 4, 4, 3, 4 (20)
รวม	70	55	40

ผลการทดลองจะสรุปได้อย่างไร ?

สมการแสดงข้อมูลจะเป็น

$$t_{ijk} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$

สมมติฐาน $H0 : \tau_j = 0$; ทุกค่าของ j

$H0 : \tau_j \neq 0$ บางค่าของ j $\quad j = 1, 2, 3$

คำนวณ SS ได้ดังนี้

(1) $C = (20 + 55 + 40)^2/30 = 907.50$

(2) $SST = (9^2 + 7^2 + \ldots + 3^2 + 4^2) - C = 979 - 907.50 = 71.50$

(3) $SSTr = P\ ^2/_0\ 10\ ^2/5\ 10 + {}^1/0^2\ 10 - C = 952.50 - 907.50 = 45$

(4) $SSU = 35^2/5 + 35^2/5 + 25^2/5 + 30^2/5 + 20^2/5 + 20^2/6 - C$

$955 - 901.50 = 41.50$

(5) $SSS = SST - SSU = 71.50 - 47.50 = 3.4$

(6) $SSE = SSU - SSTr = 47.50 - 45 = 8.50$

สร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนได้เป็น

SOV	df		SS	MS	F
วิธีสอน	3-1	= 2	45	22.50	135 **
ระหว่างนักเรียน	5(3)(2-1)	= 15	2.50	0.167	
ภายในนักเรียน	3(5-1)	= 12	34	2.83	
รวม	5(2)(3)-1	= 29	71.50		

จากตารางเราได้ $F_{.01}^{(2,15)} = 6.36$ จึงสรุปได้ว่า วิธีสอนภาษาอังกฤษมีผลกระทบ

7.5 การตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ย (Inspection of Mean Differences)

จากการทดสอบหลักที่ว่า "ค่าเฉลี่ยของประชากรต่าง ๆ ไม่แตกต่างกัน หรือไม่มีผลกระทบของกรรมวิธีทดลอง" โดยอาศัยตัวสถิติ F นั้น ถ้าเราปฏิเสธสมมติฐานหลักแล้วเราก็เพียงสรุปได้ว่าค่าเฉลี่ยของประชากรต่างกัน (หรือไม่เท่ากันหมด) แต่ไม่ทราบว่าค่าเฉลี่ยใดบ้างต่างกัน ถ้าต้องการทราบก็จำเป็นต้องตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเหล่านั้นซึ่งก็ทำได้หลายวิธี สำหรับกรณีที่ไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานหลักได้ หรือค่า F ไม่มีนัยสำคัญ แล้วโดยทั่วไปจะไม่ตรวจสอบหรือเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยต่าง ๆ อีก นอกจากว่าได้วางแผนเปรียบเทียบไว้ก่อนแล้ว วิธีการวิเคราะห์เพื่อตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่น่าสนใจมีดังนี้

7.5.1 ผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด (Least Significant Diffeerence, LSD) แบบทดสอบหรือวิธีการนี้มีชื่อเรียกอย่างอื่นอีกคือ ผลต่างวิกฤต (Critical Difference) หรือแบบทดสอบเป็นคู่ (Pairwise Test) วิธีการนี้เป็นที่นิยมใช้กันมากเนื่องจากคำนวณง่าย อย่างไรก็ตามจุดมุ่งหมายของ LSD ก็เพื่อใช้ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย 2 ค่า หรือค่าเฉลี่ยคู่ใดคู่หนึ่ง ในกรณีที่มีค่าเฉลี่ยหลายค่าก็นิยมใช้เปรียบเทียบระหว่างค่าเฉลี่ยที่อยู่ติดกันทีละคู่ (เมื่อค่าเฉลี่ยทั้งหมดได้เรียงกันตามความมากน้อยแล้ว) หลักในการใช้หรือไม่ใช้ LSD มีดังนี้

(1) ใช้ LSD ก็ต่อเมื่อแบบทดสอบ F แสดงผลว่ามีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญระหว่างสิ่งทดสอบ (กรรมวิธี) ในกรณีที่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญที่ .05 เราจะคำนวณ LSD (.05) หากแตกต่างที่ระดับ .01 ก็คำนวณทั้ง LSD (.05) และ LSD (.01)

(2) อย่าใช้ LSD ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยทั้งหมดทุกคู่ เมื่อการทดลองนั้นมีจำนวนสิ่งทดลองหรือกรรมวิธีมากกว่า 5 ขึ้นไป

(3) การใช้ LSD อย่างมีประสิทธิภาพก็ต่อเมื่อการทดลองนั้นวางแผนไว้ล่วงหน้าว่า

ต้องการทดสอบความแตกต่างระหว่างสิ่งทดลองไหน โดยเฉพาะกรณีที่มีสิ่งทดลองมาตรฐานหรือสิ่งทดลองเปรียบเทียบ (Standard or check or Control Treatment) รวมอยู่ และผู้ทดลองนิยมเปรียบเทียบกรรมวิธีทดลองต่าง ๆ กับกรรมวิธีมาตรฐาน

วิธีการของ LSD นี้ เราต้องสร้างผลต่างนัยสำคัญน้อยที่สุด ณ ระดับนัยสำคัญดังนี้

$$LSD(\alpha) = t^{\nu}_{\alpha/2} \, S_{\bar{d}} = t^{\nu}_{\alpha/2} \sqrt{2s^2/n}$$
$$= t^{\nu}_{\alpha/2} \sqrt{2\,MSE/n}$$

ในเมื่อ $t^{\nu}_{\alpha/2}$ เป็นค่าจากตาราง t ที่มีระดับนัยสำคัญ α และ ν เท่ากับจำนวนองศาสามเป็นอิสระของ MSE ; $S_{\bar{d}}$ เป็นความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างระหว่าง 2 ค่าเฉลี่ย และ n เป็นตัวหารในการหาค่าเฉลี่ยของกรรมวิธีนั้น (หรือจำนวนข้อมูลที่ใช้หาค่าเฉลี่ย)

ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน จะต้องคำนวณค่า LSD(α) หลายครั้งตามจำนวนที่จะเปรียบเทียบกัน และ $S_{\bar{d}}$ จะกำหนดไว้เป็น

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{MSE\,(1/n_i + 1/n_j)}$$

ในเมื่อ n_i และ n_j เป็นจำนวนข้อมูลในกรรมวิธีที่จะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยกัน

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของ CRD เราพบว่ามีความแตกต่างระหว่างวิธีสอน ณ ระดับนัยสำคัญ .01 เราจึงหาค่า LSD(.05) และ LSD(.01) ได้เป็น

$$LSD(.05) = t^{(16)}_{.025} \sqrt{2(59.75)/5}$$
$$2.120 \;(4.88877) = 10.364$$

$$LSD(.01) = t^{(16)}_{.005} \sqrt{2(59.75)/5}$$
$$= 2.921\;(4.88877) = 14.280$$

หนวยของ LSD จะเหมือนกับหน่วยของค่าเฉลี่ยนั้น ๆ

ถ้าผู้ทดลองต้องการเปรียบเทียบวิธีสอน 1, 2 และ 3 กับวิธีสอน 4 ซึ่งเป็นวิธีสอนมาตรฐานที่ใช้ในปัจจุบัน แล้วเราจะได้ผลดังนี้

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_4 = 380/5 - 340/5 = 8 < 10.364\,, \quad LSD(0.5)$$

$$** \quad \bar{x}_2 - \bar{x}_4 = 430/5 - 340/5 = 18 > 14.280, \ LSD(.01)$$
$$\bar{x}_3 - \bar{x}_4 = 350/5 - 340/5 = 2 < 10.364, \ LSD(.05)$$

จะเห็นได้ว่าวิธีสอนภาษาไทยวิธี 2 เท่านั้นที่ให้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่าวิธีสอนมาตรฐาน

ส่วนความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสูงสุด (วิธีสอน 2) กับต่ำสุด (วิธีสอน 3) เราได้

$$** \quad \bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 430/5 - 350/5 = 16 > 14.280, \ LSD(.01)$$

ซึ่งแสดงว่าวิธีสอน 2 ดีกว่าวิธีสอน 3

7.5.2 แบบทดสอบนิสัยเชิงพหุคูณของดันคัน (Duncan's New Multiple Range Test) ดันคัน (D.B Duncan,1951) ได้เสนอแบบทดสอบสำหรับเปรียบเทียบเชิงพหุคูณ (Multiple Comparison Test) เพื่อที่จะใช้เปรียบเทียบแต่ละค่าเฉลี่ยกับค่าเฉลี่ยอื่น ๆ วิธีการนี้จะประกอบด้วย 3 ขั้น ซึ่งจะเสียเวลามากถ้ามีค่าเฉลี่ยที่จะเปรียบเทียบกันถึง 10 ค่าขึ้นไป ต่อมาดันคัน (1955) ได้เสนอแบบทดสอบนิสัยเชิงพหุคูณใหม่ซึ่งได้รวม 3 ขั้นของวิธีการเก่าเป็นขั้นเดียวกัน วิธีการใหม่ถึงแม้จะมีอำนาจทดสอบน้อยกว่า แต่ก็ใช้กันมากเพราะสะดวกกว่า วิธีนี้นิยมใช้ในกรณีที่มีหลาย ๆ กรรมวิธีทดลองและต้องการเปรียบเทียบกรรมวิธีทดลองทั้งหมดในคราวเดียวกัน ซึ่งวิธี LSD ไม่สามารถใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

แบบทดสอบนิสัยเชิงพหุคูณนี้ไม่จำเป็นต้องพิจารณาว่า ค่าของตัวสถิติทดสอบ F นั้นมีนัยสำคัญหรือไม่ นั่นคือใช้ได้ทั้งมีและไม่มีนัยสำคัญ สิ่งที่ใช้เปรียบเทียบกันสำหรับแบบทดสอบนี้ ก็คือนิสัยนัยสำคัญน้อยที่สุด (Least Significant Range, LSR) ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$LSR(\alpha, p) = SSR(\alpha, p)(S_{\bar{x}})$$

ในเมื่อ $S_{\bar{x}} = \sqrt{MSE\,(1/n_i + 1/n_j)/2}$ หรือ $S_{\bar{x}} = \sqrt{MSE/n}$

ถ้า $n_i = n_j$ ส่วน $SSR(\alpha, p)$ เป็นนิสัยนัยสำคัญแบบสตูเดนท์ (Significant Studentized Ranges) ซึ่งพิจารณาได้จากตารางตามระดับนัยสำคัญ และองศาความเป็นอิสระของ MSE และ P เป็นจำนวนของค่าเฉลี่ย

สำหรับช่วงของการทดสอบซึ่งมีค่าเป็น P = ผลต่างของอันดับ

วิธีการของแบบทดสอบนิสัยเชิงพหุคูณของดันคันทำเป็นขั้น ๆ ได้ดังนี้

ก. พิจารณา $S_{\bar{x}}$ จาก MSE นั่นคือ $S_{\bar{x}} = \sqrt{MSE/n}$ และพิจารณา $LSR(\alpha, p)$ ซึ่งมีอยู่หลายค่า แล้วแบ่งจำนวนค่าเฉลี่ยที่จะเปรียบเทียบกัน

ข. จัดเรียงค่าเฉลี่ยตามลำดับ

ค. ทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยตามลำดับดังนี้ ค่าเฉลี่ยสูงสุดกับต่ำสุด ; สูง

สุดกับต่ำสุดอันดับสอง,.... สูงสุดกับสูงสุดอันดับสอง ; แล้วสูงสุดอันดับสองกับต่ำสุด ; สูงสุดอันดับสองกับต่ำสุดอันดับสอง, และต่อ ๆ ไปจนถึงต่ำสุดอันดับสองกับต่ำสุด

วิธีการในข้อ ค. นี้ทำได้ง่าย อีกอย่างซึ่งจะทำให้เสียเวลาคำนวณน้อยกว่า โดยเฉพาะเมื่อมีค่าเฉลี่ยในการเปรียบเทียบมาก วิธีการนั้นก็คือเอาค่าเฉลี่ยสูงสุดลงด้วย LSR (α, p) แล้วดูว่าค่าเฉลี่ยไหนบ้างมีค่าต่ำกว่าผลต่างนั้น ถ้าต่ำกว่าก็แสดงว่าแตกต่างกับค่าเฉลี่ยสูงสุด และทำต่อ ๆ ไปกับค่าเฉลี่ยสูงสุดรองลงไป

ง. จัดกลุ่มของค่าเฉลี่ยตามความแตกต่าง โดยการขีดเส้นใต้ค่าเฉลี่ยที่ไม่แตกต่างกัน

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของ CRD เราตรวจสอบผลต่างของค่าเฉลี่ยได้ดังนี้

(ก) พิจารณา $S_{\bar{x}}$ จาก MSE

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{MSE/n} = \sqrt{59.75/5} = 3.457$$

และพิจารณา LSR (α, p) เมื่อ $\nu = 16$ ได้เป็น

p	2	3	4
SSR (.05, p)	3.00	3.65	4.05
SSR (.01, p)	4.13	4.78	5.19
LSR (.05, p)	10.371	12.618	14.000
LSR (.01, p)	14.277	16.524	17.942

(ข) จัดเรียงค่าเฉลี่ยตามลำดับ

$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$
86	76	70	68

(ค) ทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยตามลำดับ

$** \quad \bar{x}_2 - \bar{x}_4 = 18 > 17.942$, LSR (.01, 4)

$* \quad \bar{x}_2 - \bar{x}_3 = 16 > 12.618$, LSR (.05, 3)

$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 10 < 10.379$, LSR (.05, 2)

$\bar{x}_1 - \bar{x}_4 = 8 < 12.618$, LSR (.05, 3)

$\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 6 < 10.371$, LSR (.05, 2)

$\bar{x}_3 - \bar{x}_4 = 2 < 10.371$, LSR (.05, 2)

(ง) จัดกลุ่มของค่าเฉลี่ยตามความแตกต่างโดยการขีดเส้นใต้ของค่าเฉลี่ยที่ไม่แตกต่างกัน

$\bar{X}_2$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$
86	76	70	68

สรุปผล (1) วิธีสอน 3 และ 4 ต่างจากวิธีสอน 2

(2) วิธีสอน 1, 3 และ 4 ไม่แตกต่างกัน

(3) วิธีสอน 1 และ 2 ไม่แตกต่างกัน

(4) วิธีสอน 2 ให้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่าวิธีอื่น

7.5.3 การวิเคราะห์ความแปรปรวนด้วยการแยกค่าเฉลี่ย (Analysis of Variance with Mean Separation) วิธีนี้มักเรียกกันว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวนเชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis of Variance) ในการเปรียบเทียบบางกรรมวิธีทดลองที่ต้องการนั้น วิธีการนี้จะแยกความผันแปรหรือผลรวมกำลังสอง และองศาความเป็นอิสระของกรรมวิธีทดลองออกเป็นส่วนตามการเปรียบเทียบที่เห็นว่าเหมาะสม ลองพิจารณาตัวอย่างจาก CRD โดยสมมติให้วิธีสอน 4 เป็นวิธีสอนมาตรฐานแบบของตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน เป็นดังนี้

SOV	df	SS	MS
วิธีสอนภาษาไทย	3	980	326.67 **
มาตรฐาน VS อื่นๆ (1, 2 และ 3)	1		
ภายในอื่น	2		
2 VS 1 และ 3			
3vs 1			
ความคลาดเคลื่อน	16	956	59.15
รวม	19	1936	

ในการหาค่าผลรวมกำลังสอง (SS) ของการเปรียบเทียบต่าง ๆ นั้นเรามีวิธีหาอยู่ 2 แบบ คือ

(1) แบบธรรมดา

การเปรียบเทียบ 1 วิธีมาตรฐาน VS วิธีอื่น

$$SS(1) = \frac{(\text{ผลรวมวิธีมาตรฐาน})^2}{\text{จำนวนซ้ำ}} + \frac{(\text{ผลรวมวิธีอื่นๆ})^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})(\text{จำนวนวิธีอื่นๆ})}$$

$$- \frac{(\text{ผลรวมวิธีมาตรฐานและอื่นๆ})^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})(\text{จำนวนวิธีทั้งหมด})}$$

$$= \frac{340^2}{5} + \frac{(380+430+350)^2}{5(3)} - \frac{1500^2}{5(4)}$$

$$= 23120 + 89706.67 - 112500$$

$$= 326.67$$

การเปรียบเทียบ 2 (ภายในวิธีอื่น ๆ)

$$SS(2) = SST_{r} - SS(1) = 980 - 326.67 = 653.33$$

หรือ

$$SS(2) = \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 1)^2}{\text{จำนวนซ้ำ}} + \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 2)^2}{\text{จำนวนซ้ำ}} + \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 3)^2}{\text{จำนวนซ้ำ}} - \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 1,2,3)^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})(\text{จำนวนวิธีอื่นๆ})}$$

$$= (380)^2/5 + (430)^2/5 + (350)^2/5 - \frac{(380+430+350)^2}{5(3)}$$

$$= 90360 - 89706.67 = 653.33$$

การเปรียบเทียบ 3 (วิธี 2 VS หรือ 1 และ 3)

$$SS(3) = \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 2)^2}{\text{จำนวนซ้ำ}} + \frac{(\text{ผลรวมวิธี 1 และ 3})^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})(\text{จำนวนวิธีในตัวตั้ง})} - \frac{(\text{ผลรวมวิธี 2, 1 และ 3})^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})(\text{จำนวนวิธีในตัวตั้ง})}$$

$$= \frac{430^2}{5} + \frac{(380+350)^2}{5(2)} - \frac{(430+380+350)^2}{5(3)}$$

$$= 36980 + 53240 - 89706.67 = 563.33$$

การเปรียบเทียบ 4 (วิธี 3vs วิธี 1)

$$SS(4) = \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 3)^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})} + \frac{(\text{ผลรวมวิธี } 1)^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})} - \frac{(\text{ผลรวมวิธี 3 และ 1})^2}{(\text{จำนวนซ้ำ})(\text{จำนวนวิธีในตัวตั้ง})}$$

$$= (350)^2/5 + (380)^2/5 - \frac{(350-380)^2}{5(2)}$$

$$= 24500 + 28880 - 53.290 = 90$$

หรือ

$$SS(4) = SS(2) - SS(3) = 653.33 - 563.33$$

$$= 90$$

(2) แบบลัด แบบนี้ใช้หลักที่เรียกว่า การเปรียบเทียบอิสระ (Orthogonal or Independent Comparison) ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบที่ให้ค่าเฉลี่ยใด ๆ เกิดขึ้นครั้งเดียวในการเปรียบเทียบครั้งหนึ่ง วิธีการหา SS แบบลัดทำได้ดังนี้

ก. เขียนตารางซึ่งประกอบด้วย กรรมวิธีทดลองต่าง ๆ ผลรวมของแต่ละกรรมวิธี จำนวนซ้ำในแต่ละกรรมวิธี ค่าสัมประสิทธิ์ในการเปรียบเทียบ และตัวตั้งกับตัวหารเพื่อหาค่า SS ของการเปรียบเทียบ ดังนี้

กรรมวิธีทดลอง	1	2	... j	$L_i = \sum_j a_{ij} x_{.j}$	$\sum_j n_j a_{ij}^2$	$SS = (L_i)^2 / \sum n_j a_{ij}^2$
ผลรวม	$x_{.1}$	$x_{.2}$	... $x_{.j}$			
จำนวนซ้ำ	n_1	n_2	... n_j			
การเปรียบเทียบ						
1.	a_{11}	a_{12}	a_{1j}			
2.	a_{21}	a_{22}	a_{2j}			
i.	a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}			

ข. การหาค่าสัมประสิทธิ์ a_{ij} ที่เกี่ยวข้องในการเปรียบเทียบมีหลักเกณฑ์ดังนี้

- ผลรวมของสัมประสิทธิ์ในแต่ละการเปรียบเทียบจะต้องเท่ากับ 0 ในกรณีนี้จะเรียกการเปรียบเทียบว่า "ความแผกกัน (Contrast)" ซึ่งเขียนสัมประสิทธิ์ได้เป็น

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots a_{ij} = 0$$

ในเมื่อ a_{ij} หมายถึงสัมประสิทธิ์ของการเปรียบเทียบที่ i กับกรรมวิธีที่ j

วิธีคิดค่า a_{ij} อย่างง่าย ก็โดยดูว่าการเปรียบเทียบนั้นแต่ละพวกมีจำนวนกี่กรรมวิธี แล้วหา ค.ร.น.ของจำนวนทั้งสองนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ (a_{ij}) ทั้งสองพวกนั้น จะให้พวกหนึ่งเป็นบวก (+) อีกพวกเป็นลบ (-) เช่นจากตัวอย่าง CRD เราเปรียบเทียบวิธีมาตรฐานกับวิธีอื่น ๆ อีก 3 วิธี แล้วเราได้ ค.ร.น.เป็น 3 ให้คูณวิธีมาตรฐานด้วย 3 และคูณแต่ละตัวของวิธีอื่นด้วย 1 ลองพิจารณาการเปรียบเทียบ 1 ที่กล่าวมาดังนี้

การเปรียบเทียบ 1 (วิธีมาตรฐานกับวิธีอื่น ๆ)

วิธีมาตรฐาน	วิธี 1	วิธี 2	วิธี 3
- 3	+ 1	+ 1	+ 1

+ 3	- 1	- 1	- 1

สำหรับกรรมวิธีทดลองอื่น ๆ ที่ไม่เกี่ยวข้องในการเปรียบเทียบชุดนั้นให้มีสัมประสิทธิ์เป็น 0 เช่นการเปรียบเทียบ 2 (วิธี 2 VS วิธี 1 และ 3)

วิธีมาตรฐาน (4)	วิธี 1	วิธี 2	วิธี 3
0	+ 1	- 2	+ 1
0	- 1	+ 2	- 1

- ในกรณีที่การเปรียบเทียบแต่ละชุดไม่ได้เกี่ยวข้องกัน หรือเป็นอิสระต่อกัน (Orthogonal) **นั้นจะใช้**หลักเกณฑ์แรก แต่มีข้อแม้ว่าผลรวมของผลคูณระหว่างสัมประสิทธิ์ในกรรมวิธีเดียวกันของสองการเปรียบเทียบจะต้องเท่ากับศูนย์ (0) และเขียนได้ในรูปดังนี้

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{j} \cdot a_{2j} = 0$$

จากสมการนี้จะเห็นได้ว่าการเปรียบเทียบ 1 กับ 2 เป็นอิสระต่อกัน เพราะว่า

$$(-3)\,0) + (1)\,(1) + (1)\,(-2) + (1)\,(1) = 0$$

- เมื่อได้ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดแล้ว ก็สามารถคำนวณหา SS ของแต่ละการเปรียบเทียบได้จากสูตร

$$\text{SS (แต่ละการเปรียบเทียบ)} = \frac{(L_i)^2}{\sum_j n_j a_{ij}^2} = \frac{(\sum_j a_{ij} X_{.j})^2}{\sum_j n_j a_{ij}^2}$$

- เมื่อได้ค่า SS ของแต่ละการเปรียบ แล้วก็จะได้ค่า MS ทันที (ซึ่งเท่ากับค่า SS นั่นเอง) เพราะว่าแต่ละการเปรียบเทียบแบบนี้จะองศาความเป็นอิสระ (df) เป็น 1 หรืออีกนัยหนึ่งเสมือนกับว่าการเปรียบเทียบนั้นมีเพียง 2 กรรมวิธี คือ พวกบวก (+) และ พวกลบ (-1) ดังนั้น df = 2-1 = 1

จากตัวอย่างการเปรียบเทียบวิธีสอนภาษาไทย 4 วิธี แบบ CRD จะได้ผลการเปรียบเทียบดังนี้

วิธีสอน	1	2	3	4 (มาตรฐาน)	L_i	$\sum n_j a_{ij}^2$	SS
ผลรวม	380	430	350	340			
จำนวนซ้ำ	5	5	5	5			
การเปรียบเทียบ							
1 . มาตรฐาน VS	+1	+1	+1	-3	140	60	326.67

อื่น ๆ							
2. วิธี 2 vs วิธี 1 และ 3	+1	-2	+1	0	130	30	563.33
3. วิธี 1 vs วิธี 3	+1	0	-1	0	30	10	90

โดยที่ $L_1 = \sum_j a_{1j} x_{.j} = (1)(380)+(1)(430)+(1)(350)+(-3)(340) = 140$

$$\sum_j n_j a_{1j}^2 = (5)(1)^2+(5)(1)^2+(5)(1)^2+(5)(-3)^2 = 60$$

$$SS(1) = (L_1)^2/\sum_j n_j a_{1j}^2 = (140)^2/60 = 392$$

สำหรับการเปรียบเทียบ 2 และ 3 ก็หาได้เช่นเดียวกันดังนี้

$$L_2 = \sum_j a_{2j} x_{.j} = (1)(380)+(-2)(430)+(1)(350)+(0)(340) = -130$$

$$\sum n_j a_{2j}^2 = 5(1)^2+5(-2)^2+5(1)^2+5(0)^2 = 30$$

$$SS(2) = (L_2)^2/\sum n_j a_{2j}^2 = (-130)^2/30 = 563.33$$

และ $L_3 = (1)(380)+(0)(430)+(-1)(350)+(0)(340) = 30$

$$\sum n_j a_{3j}^2 = 5(1)^2+5(0)^2+5(-1)^2+5(0)^2 = 10$$

$$SS(3) = (30)^2/10 = 90$$

ดังนั้นผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของการเปรียบเทียบวิธีสอนจะเป็นดังนี้

SOV	df	ss	M S
วิธีสอน	3	980	326.67'
วิธีมาตรฐาน vs วิธีอื่น ๆ	1	326.67	326.67*
วิธี 2 VS วิธี 1 และ 3	1	563.33	563.33"
วิธี 1 VS วิธี 3	1	90	90
ความคลาดเคลื่อน	16	956	59.75
รวม	19	1936	

แต่ละการเปรียบเทียบก็ทดสอบโดยอาศัยตัวสถิติ F ซึ่งมี MSE เป็นตัวหารเช่นเดียวกัน

จากตารางนี้เราสรุปได้ว่า (1) วิธีสอน 1, 2 และ 3 ให้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่าวิธีมาตรฐาน

วิธีสอน 2 ให้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่าวิธี 1 และ 3, $\alpha = .01$ และ (3) วิธีสอน 1 และ 3 ไม่มีความแตกต่างกัน

จากตารางเราจะเห็นว่า SS ของวิธีสอนจะเท่ากับผลรวมของ SS ในแต่ละการเปรียบเทียบ หากได้ไม่เท่ากันแสดงว่ามีการผิดพลาดเกิดขึ้น ซึ่งอาจเป็นเพราะค่าสัมประสิทธิ์กำหนดไม่ถูกต้อง หรือการคำนวณผิดพลาด

หลักที่กล่าวมาทั้งหมดในการเปรียบเทียบแบบอิสระ (Orthogonal Comparison) ใช้กับกรณีที่จำนวนซ้ำ (n) เท่ากัน หากไม่เท่ากันแล้วต้องดัดแปลงหลักเกณฑ์เป็นดังนี้

ความแผกกัน (Contrast)

$$n_1 a_{i1} + n_2 a_{i2} + \dots + n_j a_{ij} = 0$$

การใช้อิสระ (Orthogonal)

$$n_1 a_{11} a_{21} + n_2 a_{12} a_{22} + \dots + n_j a_{1j} + a_{2j} = 0$$

วิธีการตรวจสอบผลต่างของค่าเฉลี่ยทั้งสามวิธีที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นที่นิยมใช้กัน นอกจากนี้ยังมีวิธีอื่น ๆ อีกดังต่อไปนี้

7.5.4 **วิธีการของสตูเดนท์-นิวแมน-คูลส์** (Student-Newman-Keuls Method) วิธีการนี้มักเรียกง่าย ๆ ว่า วิธีการของคูลส์ และเป็นวิธีการที่คล้ายกับวิธีของดันแคน นั่นคือเป็นแบบทดสอบนิสัยเชิงพหุคูณ วิธีนี้ใช้ได้โดยไม่ต้องคำนึงว่า F จะมีนัยสำคัญหรือไม่

วิธีการนี้จะพิจารณาค่าของตัวสถิติ $W_p - W_p$

$$W = q_\alpha^{(p,\nu)} (S_{\bar{x}})$$

โดยที่ $q_\alpha^{(p,\nu)}$ เป็นค่าที่ได้จากตารางพิเศษ เช่นเดียวกับวิธีของ **ทูกี้** แต่ต้องใช้ $q_\alpha^{(p,\nu)}$ หลายค่า ตามค่าของ p เพื่อเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของตัวอย่างต่าง ๆ ที่เรียงลำดับอยู่ p ค่า

7.5.5 **วิธีการของทูกี้** (Tukey's W-procedure) วิธีการนี้บางทีเรียกว่า วิธีผลต่างนัยสำคัญเที่ยงตรง (Honestly Significant Difference, HSD) เพราะวิธีการนี้คล้ายคลึงกันกับวิธี LSD นั่นเอง J.W. Tukey ได้เสนอวิธีพิจารณานัยสำคัญของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยไว้ดังนี้

$$W = q_\alpha^{(p,\nu)} (S_{\bar{x}})$$

ในเมื่อ $q_\alpha^{(p,\nu)}$ เป็นค่าที่ได้จากตารางนี้ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนตัวอย่าง p และองศาแห่ง

ความเป็นอิสระของ MSE คือ ν

$$S_{\bar{x}}^2 = MSE\,(1/n_i + 1/n_j)$$

สำหรับวิธีการของทูกี้นี้อาจจะใช้สร้างช่วงเชื่อมั่นของผลต่างของความเจริญของประชากรได้ ดังนั้นผลต่างที่แท้จริงของค่าเฉลี่ยของประชากรที่ประมาณด้วย $\bar{X}_{.i}$ และ $\bar{X}_{.j}$ จะประมาณด้วยช่วง

$$\mu_{.i} - \mu_{.j} = (\bar{X}_{.i} - \bar{X}_{.j}) \pm W$$

7.5.6 วิธีการดันเนทท์ (Dunnett's procedure) วิธีการนี้ใช้ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยต่าง กับค่าเฉลี่ยที่ควบคุมไว้ วัตถุประสงค์ของวิธีนี้ก็เพื่อดูว่าค่าเฉลี่ยอันไหนแตกต่างและดีกว่ามาตรฐาน แต่จะไม่เปรียบเทียบกันเอง

การเปรียบเทียบอาจจะเป็นด้านเดียว หรือสองด้านก็ได้ (One-and two-sided Comparisons) และยังใช้สร้างความเชื่อมั่นได้อีกด้วย C.W. Dunnett ใช้ตัวสถิติ D ในการเปรียบเทียบ

$$D = t_D S_d$$

ในเมื่อ t_D เป็นค่านัยสำคัญของผลต่างที่ได้จากตาราง A.9 ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนตัวอย่างที่มีอยู่โดยไม่รวมกับที่ควบคุมไว้ 1 ตัวอย่าง และ $S_d = MSE\,(1/n_i + 1/n_j)$

ช่วงเชื่อมั่นของผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรหนึ่ง ๆ กับค่าเฉลี่ยของประชากรนี้ควบคุมไว้ กำหนดไว้ดังนี้

สองทาง : $\mu_{.1} - \mu_{.0} = (\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.0}) \pm t_D S_d$

ทางเดียว : $\mu_{.1} - \mu_{.0} = (\bar{x}_{.1} - \bar{x}_{.0}) - t_D S_d$

ตัวอย่าง ในการทดลองอย่างหนึ่งเพื่อจะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของ 6 ประชากร โดยอาศัยตัวอย่างขนาด 5 ในแต่ละตัวอย่าง ได้ผลสรุปดังนี้

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_6$
28.8	24.0	14.6	19.9	13.3	18.7

และ MSE = 11.79

(1) LSD, $LSD\,(.05) = t_{.025}^{(24)} S_d$

$$LSD(.05) = 2.064\sqrt{2(11.79)/5} = 4.5$$

เมื่อผู้ทดลองวางแผนที่จะเปรียบเทียบตัวอย่าง 1 กับ 2, ตัวอย่าง 3 กับ 4, และตัวอย่าง 5 กับ 6 ณ ระดับนัยสำคัญ .05 เราจะสรุปได้ว่า

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 28.8 - 24.0 = 4.8$$
$$\bar{X}_3 - \bar{X}_4 = 14.6 - 19.9 = -5.3$$
$$\bar{X}_5 - \bar{X}_6 = 13.3 - 18.7 = -5.4$$

เราจะเห็นได้ว่าทุกคู่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญ ณ $\alpha = 0.5$

ก. พิจารณา $S_{\bar{x}} = \sqrt{11.79/5} = 1.54$ และสำหรับ $\alpha = .05$ เราหา LSR (α, p) ได้ดังนี้

$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_6$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_5$
24.8	24.0	19.9	18.7	14.6	13.3

ข. จัดอันดับค่าเฉลี่ยได้เป็น

$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_6$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_5$
28.8	24.0	19.9	18.7	14.6	13.3

ค. ทดสอบความแตกต่าง

$\bar{X}_1 - \bar{X}_5$	=	28.8 − 13.3	=	15.5 **	>	5.1
$\bar{X}_1 - \bar{X}_3$	=	28.8 − 14.6	=	14.2 **	>	5.0
$\bar{X}_1 - \bar{X}_6$	=	28.8 − 18.7	=	10.1 **	>	4.9
$\bar{X}_1 - \bar{X}_4$	=	24.8 − 19.9	=	8.9 **	>	4.Y
$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	=	28.8 − 24.0	=	4.8 **	>	4.5

$\bar{X}_2 - \bar{X}_5$	=	24.0 − 13.3	=	10.7 **	>	5.0
$\bar{X}_2 - \bar{X}_3$	=	24.0 − 14.6	=	9.4 **	7	4.9
$\bar{X}_2 - \bar{X}_6$	=	24.0 − 18.7	=	5.3 **	>	4.7
$\bar{X}_2 - \bar{X}_4$	=	24.0 − 19.9	=	4.1 **	>	2.92

$\bar{X}_4 - \bar{X}_5$	=	14.9 − 13.3	=	6.6	>	4.9
$\bar{X}_4 - \bar{X}_3$	=	19.9 − 14.6	=	5.3 **	>	4.7
$\bar{X}_4 - \bar{X}_6$	=	19.9 − 18.7	=	1.2 **	<	3.07