ในเมื่อ $\triangle$ เป็นค่าที่ระบุไว้ของผลต่างสัดส่วนประชากร แล้วตัวสถิติทดสอบ Z จะกลายเป็น

$$Z = \{(P_1 - P_2) - \Delta\}/\sqrt{P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2}$$

$P_1 = X_1/n_1$, $P_2 = X_2/n_2$, $P_1 + Q_1 = 1$, $P_2 + Q_2 = 1$

เกณฑ์ตัดสินใจเมื่อใช้การแจกแจงปกติมาตรฐาน จะกำหนดไว้ดังนี้

(1) สำหรับ $Ha: \pi_1 - \pi_2 < \triangle$ หรือ $Ha: \pi_1 < \pi_2$ จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $Z < -Z_\alpha$

(2) สำหรับ $Ha: \pi_1 - \pi_2 > \triangle$ หรือ $Ha: \pi_1 < \pi_2$ จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $Z > Z_\alpha$

(3) สำหรับ $Ha: \pi_2 - \pi_2 \neq \triangle$ หรือ $Ha: \pi_1 \neq \pi_2$ จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $Z < -Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z > Z_{\alpha/2}$

ตัวอย่าง ในการสำรวจตัวอย่าง 2 ครั้ง (แบบสุ่มและเป็นอิสระกัน เพื่อที่ จะประมาณเปอร์เซนต์ของคนที่ทำงานในเมืองหนึ่ง ได้ผลสำรวจดังนี้

ตัวอย่าง	ขนาดตัวอย่าง	เปอร์เซนต์ของคนทำงาน
1	2000	39.60
2	1500	38.60

เราพอจะเชื่อได้ไหมว่า ความแตกต่างระหว่างเปอร์เซนต์ของทั้งสองตัวอย่างนี้เนื่องมาจากการสุ่มตัวอย่างไร?

สมมติฐาน $Ho: \pi_1 = \pi_2$; $Ha: \pi_1 \neq \pi_2$

ตัวสถิติทดสอบ $Z = (P_1 - P_2)/\sqrt{PQ(1/n_1 + 1/n_2)}$

เกณฑ์ตัดสินใจ เมื่อ $\alpha = .05$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{.025} = -1.96$ หรือ $Z > Z_{.025} = 1.96$

จากการสำรวจตัวอย่าง เราได้ $P_1 = 0.396$, $P_2 = 0.386$ และ P จะได้เป็น $P = (n_1P_1 + n_2P_2)/(n_1 + n_2) = \{2000(0.396) + 1500(0.386)\}/(2000 + 1500) = .40$

$$Z = (0.396 - 0.386)/\sqrt{0.40(0.60)(1/2000 - 1/1500)}$$
$$= 0.59$$

สรุปผล เนื่องจาก Z = 0.59 อยู่ในเขตยอมรับ จึงสรุปได้ว่า "ความแตกต่างระหว่างเปอร์เซนต์เนื่องมาจากวิธีสุ่มตัวอย่าง หรือความคลาดเคลื่อนตัวอย่าง (sampling Error)"

6.5.3 ทดสอบความแตกต่างของสองสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน ในกรณีที่สัดส่วนมีสหสัมพันธ์กันนั้น McNemar ได้เสนอวิธีการหรือเสนอแบบทดสอบที่สะดวกโดยไม่ต้องคำนวณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณค่าผลต่างสัดส่วน สำหรับตัวอย่างสุ่มที่เลือกมานั้นจะต้องมีความสัมพันธ์กัน นั่นคือแต่ละหน่วยตัวอย่าง (Sampling Unit) จะเกี่ยวข้องกับตัวอย่างทั้งสอง หรือเป็นการจับคู่กัน (Matched Pairs) เช่นฝาแฝด ครอกเดียวกัน และสิ่งที่เหมือนกัน เป็นต้น

สมมติฐานหลักที่ทดสอบจะเป็นดังนี้

$$Ho : \pi_1 = \pi_2$$

ค่าสังเกตที่ได้จากตัวอย่าง สรุปได้ดังตารางจรณ์ 2 2 ต่อไปนี้

	ตัวอย่าง 2	S	F	รวม
ตัวอย่าง 1	S	a	b	a+b
	F	c	d	c+d
รวม		a+c	b+d	n

ในเมื่อ a, b, c, d เป็นความถี่จากตัวอย่างขนาด n โดยที่ b, c เป็นความถี่ที่ไม่เหมือนกัน (Discordant) หรือมีการเปลี่ยนแปลงในสองตัวอย่าง และ c, d เป็นความถี่ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

ตัวสถิติทดสอบที่ Mc Nemar พัฒนาไว้จะเป็นดังนี้

$$Z = (b-c)/\sqrt{b+c} \quad \text{หรือ} \quad \chi^2 = (b-c)^2/b+c$$

ความแตกต่างระหว่างสัดส่วนตัวอย่าง หรือ P_1-P_2 นั้นจะเป็น (b-c)/n นั่นเอง ดังนั้นความแตกต่างระหว่างความถี่ b และ c ก็คือ b-c = $nP_1 - nP_2$ สำหรับ $\sqrt{b+c}$ ในตัวสถิติ Z นั้นจะเป็นความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของผลต่างความถี่ b-c ที่มีสหสัมพันธ์เกี่ยวข้องด้วย เพราะฉะนั้นการทดสอบความแตกต่างของสัดส่วนก็ทำได้โดยการทดสอบนัยสำคัญของการเปลี่ยนแปลง (change) ในความถี่นั่นเอง

ตัวสถิติทดสอบ Z นี้จะมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ส่วนตัวสถิติทดสอบ X^2 จะมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ 1 ตัวสถิติ Z นี้จะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อ $b+c \geq 10$

ตัวอย่าง นักวัดผลต้องการเปรียบเทียบข้อทดสอบ 2 ข้อ ที่สร้างขึ้นมาเพื่อเป็นคู่ขนานกันว่ามีความยากง่ายเท่า ๆ กันจริงหรือไม่ จึงนำข้อทดสอบไปสอบกับเด็ก 100 คน ปรากฏผลสอบดัง

	ข้อทดสอบ 2	ผ่าน	ไม่ผ่าน	รวม
ข้อทดสอบ 1	ผ่าน	55	5	60
	ไม่ผ่าน	15	25	40

รวม	70	30	100

สมมติฐาน Ho : $\pi_1 = \pi_2$; Ha : $\pi_1 \neq \pi_2$

$$Z = (5-15)/\sqrt{5+15} = -2.24$$

ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 ค่าวิกฤตจะเป็น $\pm Z_{.025} = \pm 1.96$ ดังนั้นข้อทดสอบทั้งสองจะมีความยากง่ายไม่เท่ากัน นั่นคือข้อ 1 จะยากกว่าข้อ 2

เมื่อปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho เราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่น 100(1-α) % สำหรับผลต่าง $\pi_1 - \pi_2$ ได้เป็น

$$\pi_1 - \pi = (P_1-P_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{P_1Q_1/n_1+P_2Q_2/n_2-2(P_{11}-P_1P_2)/n}$$

ในเมื่อ $P_1 = (a+b)/n$, $P_2 = (a+c)/n$, $P_{11} = a/n$, $Q_1 = 1-P_1$ $Q_2 = 1-P_2$

6.5.4 ทดสอบการเท่ากันของหลายสัดส่วนหรือเปอร์เซนต์ สำหรับ k ประชากรที่มีพารามิเตอร์ส่วน $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ ตามลำดับ เมื่อเราต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการเท่ากันของพารามิเตอร์สัดส่วนเหล่านั้น นั่นคือสมมติฐานที่ทดสอบจะเป็น

$$\text{Ho} : \pi_1 = \pi_2 = \ldots \pi_k = \pi$$

หรือ

$$\text{Ho} : \pi_j = \pi, \forall_j \qquad j = 1,2,\ldots k$$

$$\text{Ha} : \pi_j \neq \pi, \exists j$$

เราก็อาศัยตัวอย่างที่เป็นอิสระกันขนาด $n_1, n_2, \ldots n_k$ จากประชากรต่าง ๆ นั้น เมื่อให้ $x_1, x_2, \ldots x_k$ เป็นความถี่ที่เป็น k ในตัวอย่างเหล่านั้น แล้วค่าสังเกตจากตัวอย่างสามารถสรุปได้ดังตารางจรณ์ 2 2 x k ต่อไปนี้

ตัวอย่าง	1	2	.....	k	รวม
S	x_1	x_2		x_k	x
F	n_1-x_1	n_2-x_2		n_h-x_h	n-x
n_i	n_1	n_2		n_h	

ในเมื่อ $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ และ $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลัก Ho จะกำหนดไว้เป็น

$$X^2 = 1/PQ(\sum n_j P_j^2 - nP^2)$$
$$= n^2/X(n-X) \ (\sum X_j^2/n_j - X^2/n)$$

ในเมื่อ $P_j = X_j/n_j$, $P = X/n$, $Q = 1-P$

เมื่อสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง และขนาดตัวอย่างโตพอ ตัวสถิติ X^2 จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจจึงกำหนดไว้ว่า "จะปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $X^2 > X^{2(k-1)}_{\alpha}$"

ตัวอย่าง ในการสำรวจทัศนคติของกลุ่มตามสภาพเศรษฐกิจสังคมเกี่ยวกับวิธีแก้ปัญหาราคาน้ำมัน ได้ผลดังนี้

	กลุ่ม	ต่ำ	ปานกลาง	สูง	รวม
ทัศนคติ	เห็นด้วย	29	64	33	126
	ไม่เห็นด้วย	47	164	135	346
		76	228	168	472

จะสรุปได้ไหมว่า สัดส่วนที่กลุ่มต่าง ๆ มีทัศนคติต่อการแก้ปัญหาจะไม่แตกต่างกัน?

สมมติฐานทดสอบ Ho : $\pi_j = \pi$, $\forall_j$ $j = 1,2,3,$

Ha : $\pi_j \neq \pi$; $\exists_j$

ค่าประมาณของ π_1, π_2, π_3 จะเป็น P_1, P_2, P_3 ตามลำดับ และหาได้ดังนี้

$P_1 = 29/76 = 0.38$, $P_2 = 64/228 = 0.28$

$P_3 = 33/168 = 0.20$

และถ้า Ho เป็นจริง เราได้ค่าประมาณของ π เป็น P

$P = (29+64+33) / (76+228+168) = 126/472 = 0.27$

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 จะเป็น

$$\chi^2 = 1/0.27(0.73)(76(.38)^2+228(.28)^2+168(.20)^2-472(.27)^2)$$

$$= 9.54$$

หรือ $$\chi^2 = (472)^2/126(346)(29^2/76+64^2/228+33^2/168-126^2/472)$$

$$= 9.54$$

เมื่อ $\alpha = .05$ เราได้ $X^{2\,(3-1)}_{05} = 5.99$ จึงสรุปได้ว่า กลุ่มต่าง ๆ มีทัศนคติไม่เป็นแบบเดียวกันหมด

ถ้าสมมติฐานหลัก Ho : $\pi_j = \pi; \forall_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ได้รับการปฏิเสธ นั่นคือสัดส่วนจะแตกต่างกันอย่างน้อยหนึ่งคู่ ซึ่งเราก็ไม่ทราบว่าคู่ไหนแตกต่างกันบ้าง เมื่อเราต้องการทราบก็ทำได้โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)$ % สำหรับผลต่างของสัดส่วนประชากรคู่ใด ๆ $\pi_i - \pi_j$ เป็นดังนี้

$$\pi_i - \pi_j = (P_i - P_j) \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}} \sqrt{P_i Q_i/n_i + P_j Q_j/n_j}$$

$$i < j = 1, 2, \ldots k$$

ถ้าช่วงใดไม่รวม o ไว้ด้วย ก็แสดงว่าสัดส่วนประชากรทั้งสองนั้นแตกต่างกัน

เมื่อสมมติฐานหลัก Ho ได้รับการยอมรับ เราสามารถประมาณสัดส่วนร่วม π ได้ด้วย P

$$P = (X_1 + X_2 + \ldots X_k)/n$$

$$= (n_1 P_1 + n_2 P_2 + \ldots + n_k P_k)/n = X/n$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างทัศนคติที่แล้วมานี้ เราสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับผลต่างสัดส่วนประชากร ได้เป็น

$$\pi_1 - \pi_2 = (.38 - .28) \pm \sqrt{5.99}\sqrt{(.38)(.62)/76 + (.28)(.72)/228}$$

$$= .10 \pm .15$$

$$\pi_1 - \pi_3 = (.38 - .20) \pm \sqrt{5.99}\sqrt{(.38)(.62)/76 + (.20)(.80)/168}$$

$$= .18 \pm .16$$

$$\pi_2 - \pi_3 = .08 \pm .10$$

เราจะเห็นได้ว่ามีช่วงเชื่อมั่น $\pi_1 - \pi_3$ เท่านั้นไม่รวม o ไว้ด้วย จึงสรุปได้ว่าความแตกต่างในทัศนคติจะมีอยู่ในระหว่างกลุ่มสูงและต่ำ เท่านั้น

บางครั้งเราสนใจความแตกต่างระหว่างสัดส่วนประชากรซึ่งอยู่ในรูปของผลรวมแบบถ่วงน้ำหนักที่เรียกกันว่า ความแผกกัน (Contract) ถ้าให้ Ψ เป็นความแผกกัน แล้วจะเขียนได้เป็น

$$\Psi = a_1 \pi_1 + a_2 \pi_2 + \ldots + a_k \pi_k \quad ; \Sigma a_j = 0$$

ค่าประมาณของ Ψ เป็น $\hat{\Psi}$

$$\hat{\Psi} = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_k P_k$$

ซึ่งมีความแปรปรวนที่ประมาณได้เป็น

$$S^2_{\hat{\varphi}} = \Sigma a_j^2 P_j Q_j / n_j$$

ช่วงเชื่อมั่นของความแผกกัน φ จะได้เป็น

$$\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi^{2(k-1)}_{\alpha}} \sqrt{S^2_{\hat{\varphi}}}$$

จากตัวอย่างที่แล้วมา ถ้าเราต้องการทราบว่ากลุ่มสูงและปานกลางร่วมกันจะแตกต่างจากกลุ่มต่ำหรือไม่ เราก็ทำได้โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่นของความแผกกัน

$$\psi = \{n_2/(n_2+n_3)\}\pi_2 + \{n_3/(n_2+n_3)\}\pi_3 - \pi_1$$

ตัวประมาณค่า $\hat{\psi} = \frac{228}{228 + 168}(64/228) + \frac{168}{228 + 168}(33/168) - 29/76 = -.14$

$$S^2_{\hat{\psi}} = (228/396)^2(.28)(.72)/228 + (168/396)^2(.20)(.80)/168 + (1)(.38)(.62)/76$$
$$= 0.004$$

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ ψ จะเป็น

$$\psi = -.14 \pm \sqrt{5.99}\sqrt{0.004} = -.14 \pm .15$$

เนื่องจากช่วงเชื่อมั่นนี้รวม 0 ไว้ด้วย จึงสรุปได้ว่า ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้งสองนั้น

6.5.5 ทดสอบการเท่ากันของหลายสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน การทดสอบกรณีนี้จะเป็นวิธีการทั่วไปของการทดสอบความแตกต่างของสองสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน Cochran ได้เสนอแบบทดสอบสำหรับทดสอบการเท่ากันของหลายสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน แบบทดสอบที่ Cochran เสนอไว้นั้นมีหลักการและเหตุผลเช่นเดียวกับแบบทดสอบที่ McNemar เสนอไว้

สมมติฐานเกี่ยวกับการเท่ากันของหลายสัดส่วนที่มีสหสัมพันธ์กัน จะเป็น

$$H_o : \pi_j = \pi, \quad \forall_j \qquad j = 1,2,\ldots k$$
$$H_a : \pi_j \neq \pi, \quad \exists_j$$

ในเมื่อ k เป็นจำนวนสัดส่วนประชากร

ในการทดสอบสมมติฐานนี้จะอาศัยการวางแผนทดลองที่เรียกว่า การวางแผนทดลองชนิดแบ่งบลอคสมบูรณ์ (Completely Randomized Block Design, RBD) ซึ่งจะได้ค่าสังเกตที่เป็น S หรือ F (1 หรือ 0) เท่านั้น และสามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตัวอย่าง		1	2	...	k	
บลอค	1	X_{11}	X_{12}		X_{1k}	R_1
	2	X_{21}	X_{22}		X_{2k}	R_2
				X_{ij}		
	b	X_{b1}	X_{b2}		X_{bk}	R_b
		C_1	C_2		C_k	

ในเมื่อ X_{ij} = 0 หรือ 1, (i = 1, 2, ..., b ; j = 1, 2, ..., k); b เป็นจำนวนบลอคหรือหน่วยทดลอง (Subjects), R_i เป็นผลรวม X_{ij} หรือ 1 ในแนวนอน , และ C_j เป็นผลรวมของ X_{ij} ในตัวอย่าง j

ตัวสถิติทดสอบที่ Cochran เสนอไว้จะเป็น

$$Q = \{k(k-1)\sum(C_j-\bar{C})^2\}/\{k\sum r_1 - \sum r_2\}; \qquad \bar{C} = \sum C_j/k$$

$$= ((k-1)(K\sum C_j^2 - N^2))/(kN - \sum k_2^2)$$

ตัวสถิติ Q **นี้จะมีการแจกแจงไคสแควร์** ด้วยองศาความเป็นอิสระ k – 1 ถ้าขนาดตัวอย่างโตพอ (n > 30) และสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง

เมื่อสมมติฐานหลัก Ho ได้รับการปฏิเสธ นั่นคือ สัดส่วนต่าง ๆ ไม่เท่ากันหมด และเราต้องการทราบว่าสัดส่วนคู่ใดแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญบ้าง เราก็ทำได้โดยการสร้างช่วงเชื่อมั่น 100(1 – α)% สำหรับผลต่างสัดส่วนคู่ใด ๆ $\pi_i - \pi_j$ ดังนี้

$$\pi_i - \pi_j = (P_i - P_j) \pm \sqrt{\chi_{\alpha}^{2(k-1)}}\sqrt{KN - \sum r_i^2/bk(k-1)}\,(2/b)$$

$$i < j = 1,2,\ldots,k$$

ถ้าต้องการควบคุม α ไว้ เราก็ใช้อสมการดันน์-บอนเฟอร์โรนี (Dunn – Bonferroni Inequality) ซึ่งจะให้ช่วงเชื่อมั่นสั้นกว่าวิธีการข้างบน ซึ่งเป็นเทคนิคของเชฟฟี (Scheffe' Techniques) ดังนี้

$$\pi_i - \pi_j = (P_i - P_j) + Z_{q,\alpha}\sqrt{(kN - \sum r_i^2)/(bk(k-1))}\,(2/b)$$

ในเมื่อ $q = \binom{k}{2}$ และ $Z_{q,\alpha}$ เป็นค่าจากตารางพิเศษ

ถ้าต้องการหาช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแผกกัน ψ

$$\varphi = \sum a_j \pi_j \;;\; \sum a_j = 0$$

เราจะได้เป็น $\varphi = \hat{\varphi} \pm \sqrt{\chi_{\alpha}^{2(k-1)}}\,/S_{\hat{\varphi}}^2$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = \sum a_j P_j$ และ $S_{\hat{\varphi}}^2 = (kn - \sum r_j^2)/(bk(k-1))\sum a_j^2/b$

ตัวอย่าง ในการทดสอบสินค้า 3 ชนิด ว่าได้รับความนิยมแตกต่างกันหรือไม่ โดยทดลองกับลูกค้า 12 ราย ได้ผลดังนี้

ลูกค้า	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
สินค้า 1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	8
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
3	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	10
	2	2	1	3	2	2	0	1	0.	3	2	2	20

ในเมื่อ 0 และ 1 แทนไม่นิยม และนิยมสินค้า ตามลำดับ

Ho : สินค้าทั้งสามชนิดได้รับความนิยมเท่า ๆ กัน

Ha : สินค้าทั้งสามชนิดได้รับความนิยมแตกต่างกัน

$$Q = \left((3-1)(3(8^2+2^2+10^2) - 20^2)\right) / \left(3(20) + (2^2+2^2+1^2+\ldots+2^2)\right)$$

$$= 14.25$$

สำหรับ $\alpha = .05$ เราได้ค่าวิกฤต $\chi^{2(3-1)}_{.05} = 5.99$ ดังนั้น จึงปฏิเสธ Ho เพราะ $Q > 5.99$ แสดงว่าสินค้าทั้งสามชนิดได้รับความนิยมแตกต่างกัน

เมื่อต้องการทราบว่าสองสินค้าใด ๆ แตกต่างกันบ้าง เราก็สร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของผลต่างสัดส่วนคู่ใด ๆ $\pi_i - \pi_j$, $(i < j)$ ดังนี้

$$\pi_1 - \pi_2 = (8/12 - 2/12) \pm \sqrt{5.99}\sqrt{\frac{3(20) - 44}{12(3)(3-1)}(2/12)}$$

$$= 0.50 \pm 0.47$$

$$\pi_1 - \pi_3 = (8/12 - 10/12) \pm 0.47 = -0.17 \pm 0.47$$

$$\pi_2 - \pi_3 = -0.67 \pm 0.47$$

เราจะได้ว่า ช่วงเชื่อมั่น $\pi_1 - \pi_2$ และ $\pi_2 - \pi_3$ จะไม่รวม 0 ไว้ด้วย แต่ช่วงเชื่อมั่น $\pi_1 - \pi_3$ จะรวม 0 ไว้ด้วย ดังนั้น สินค้า 1 จะแตกต่างในด้านความนิยมกับสินค้า 2 แต่ไม่แตกต่างกับสินค้า 3 ส่วนสินค้า 2 จะแตกต่างกับสินค้า 3 นั่นคือ สินค้า 1 และ 3 ได้รับความนิยมมากกว่าสินค้า 2

6.6 การทดสอบพารามิเตอร์ของประชากรพหุนาม (Multinomial Population)

ประชากรพหุนามจะมีหน่วยแบ่งออกเป็น C ประเภท แต่ละประเภทของหน่วยจะมีสัดส่วนเป็น $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_c$ โดยที่ $\pi_1 + \pi_2 + + \ldots + \ldots + \pi_c = 1$ สมมติฐานเกี่ยวกับประชากรพหุนามที่น่าสนใจก็คือการทดสอบพารามิเตอร์สัดส่วนที่ระบุไว้ กับทดสอบความเป็นเอกภาพของหลายประชากรพหุนาม ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดดังนี้

6.6.1 ทดสอบพารามิเตอร์ที่ระบุไว้ สมมติฐานเกี่ยวกับประชากรพหุนามในพารามิเตอร์สัดส่วน $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_c$ ที่จะทดสอบก็คือ

$$Ho : \pi_1 = \pi_{10}, \quad \pi_2 = \pi_{20}, \ldots, \pi_c = \pi_{co}$$

หรือ $Ho : \pi_i = \pi_{io}\ ; \ \forall_i \quad i = 1, 2, \ldots, c$

$Ha : \pi_i \neq \pi_{io}\ ; \ {}_i$

ในเมื่อ $\pi_{10}, \pi_{20}, \ldots, \pi_{co}$ เป็นสัดส่วน ความน่าจะเป็น หรือเปอร์เซ็นต์ที่กล่าวไว้ และในการทดสอบสมมติฐานหลักก็อาศัยตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่สนใจนั้นโดยที่ค่าสังเกตจากตัวอย่างจะแบ่งออกเป็น c ประเภท เมื่อให้ O_i เป็นจำนวนค่าสังเกตที่ตกอยู่ในประเภท i $(i = 1, 2, \ldots, c)$ แล้วตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลักจะกำหนดไว้ดังนี้

$$X^2 = \Sigma(O_i - n\pi_{io})^2/n\pi_{io} = \Sigma(O_i - E_i)^2/E_i$$

ในเมื่อ $E_i = n\pi_{io}$ เป็นจำนวนความถี่คาดหวังภายใต้สมมติฐานหลัก H_o ที่เป็นจริง

ตัวสถิติทดสอบ x^2 นี้ ถ้าสมมติฐานหลัก H_0 เป็นจริง และขนาดตัวอย่างโตพอ ก็จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ c − 1 ดังนั้น เกณฑ์ตัดสินใจจึงอาศัยการแจกแจงไคสแควร์ นั่นคือ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $x^2 > x^{2(c-1)}_{\alpha}$ ในเมื่อ α เป็นระดับนัยสำคัญ

ตัวอย่าง ตำรวจทางหลวงตั้งข้อสงสัยว่า อุบัติเหตุบนถนนสายบางนา-ตราด ในวันเสาร์และอาทิตย์จะเป็นสองเท่าของวันอื่น ๆ จากอุบัติเหตุ 90 ครั้ง ที่สุ่มมาจากแฟ้มบันทึกอุบัติเหตุจะมีการแจกแจงดังนี้

วัน	อา	จ	อ	พ	พฤ	ศ	ส
จำนวนอุบัติเหตุ	30	6	8	11	7	10	18

ความสงสัยของตำรวจถูกต้องหรือไม่ ?

สมมติฐาน Ho : $\pi_1 = \pi_7 = 2/9, \pi_2 = \pi_3 = .. = \pi_6 = 119$

เนื่องจาก $E_1 = E_7 = 90(2/9) = 20$ และ $E_2 = E_3 = \ldots = E_6 = 90(1/9) = 10$ เราจึงได้ค่าของตัวสถิติทดสอบ x^2 เป็น

$$X^2 = (30-20)^2/20+(6-10)^2/10+(11-10)^2/10+..+(18-20)^2/20$$

$$= 8.20$$

เมื่อ α = .05 เราได้ $x^{2(7-1)}$ = 12.59 ดังนั้น $x^2 < 12.59$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือ ความสงสัยของตำรวจทางหลวงเป็นไปได้

6.6.2 ทดสอบการเท่ากันของพารามิเตอร์ในหลายประชากรพหุนาม หรือทดสอบความเป็นเอกภาพ (K-Sample Multiple Test or Chi-Sqnare Test of Homogeneity) เมื่อประชากรพหุนามต่าง ๆ นั้นมีหน่วยแบ่งออกเป็น c ประเภท แล้วเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประเภทนั้น ๆ ในแต่ละประชากรว่าแตกต่างกันหรือไม่ นั่นคือเรามีสมมติฐานที่จะทดสอบเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} Ho:\ & \pi_{11} = \pi_{12} = \ldots = \pi_{1k} = \pi_1 \\ & \pi_{21} = \pi_{22} = \ldots = \pi_{2k} = \pi_2 \\ & \ldots \\ & \pi_{c1} = \pi_{c2} = \ldots = \pi_{ck} = \pi_c \end{aligned}$$

หรือ Ho: $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ik} = \pi_i \quad ; \forall_i,\ i=1,2,..,c$

Ha: Ho ไม่เป็นจริง

ในการทดสอบสมมติฐานหลัก Ho นี้ก็อาศัยตัวอย่างจากประชากรต่าง ๆ ด้วยขนาด n_1, $n_2, \ldots, n_k$ ผลทดลองหรือข้อมูลจากตัวอย่างเมื่อแบ่งตามประเภทจะได้เป็นดังนี้

ตัวอย่าง		1	2	...	k	รวม
ประเภท	1	O_{11}	O_{12}		O_{1k}	$O_{1.}$
	2	O_{21}	O_{22}		O_{2k}	$O_{2.}$
				O_{ij}		
	c	O_{c1}	O_{c2}		O_{ck}	$O_{c.}$
ขนาดตัวอย่าง		n_1	n_2		n_k	n

ในเมื่อ O_{ij} แทนจำนวนข้อมูลของตัวอย่าง j ที่ตกอยู่ในประเภท i ($i = 1,2,\ldots,C$; $j = 1,2,\ldots,k$) และ $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

สำหรับตัวสถิติทดสอบของสมมติฐานหลักจะกำหนดไว้เป็น

$$X^2 \doteq \sum_{i,j}^{c,k} (O_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij} \quad ; \; E_{ij} = n_j(O_{i.}/n)$$

$$= n \sum O_{ij}^2/O_{i.}(n_j) - 1$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ (C-1)(k-1) ถ้าสมมุติฐานหลัก Ho เป็นจริง

ตัวสถิติทดสอบ X^2 นี้จะใช้ได้ดีถ้าจำนวนความถี่คาดหวัง E_{ij} ไม่น้อยกว่า 5 แต่ถ้าน้อยกว่า 5 ก็ต้องดูว่าจำนวน E_{ij} ที่มีค่าน้อยกว่า 5 นั้นมีถึง 20% ของจำนวน E_{ij} ทั้งหมดหรือไม่ ถ้ามีไม่ถึง 20% ก็จำเป็นต้องแบ่งประเภทในตัวอย่างใหม่

การแก้ไขความต่อเนื่องเราไม่ได้กล่าวถึง แต่จะใช้ในกรณีที่ค่าของตัวสถิติทดสอบมีค่าใกล้กับค่าวิกฤต ซึ่งจะนำไปสู่การปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho

ตัวอย่าง เราต้องการที่จะทราบว่านักศึกษามหาวิทยาลัยระดับต่าง ๆ กันมีความรู้สึกต่องานที่อาจารย์ให้ทำเช่นเดียวกันหรือไม่ การตัดสินใจเกี่ยวกับกรณีนี้จึงสุ่มตัวอย่างนักศึกษามหาวิทยาลัยมา 3 กลุ่ม คือ

(1) กลุ่มนักศึกษาปี 1-2 จำนวน 300 ราย

(2) กลุ่มนักศึกษาปี 3-4 ส่วน จำนวน 200 ราย

(3) กลุ่มนักศึกษาที่จบปริญญาแล้ว จำนวน 100 ราย

จากการสัมภาษณ์นักศึกษาแต่ละคนเกี่ยวกับความรู้สึกต่องานที่อาจารย์ให้ทำ ซึ่งนักศึกษาจะเลือกตอบประเภทหนึ่งใน 3 ประเภท ดังนี้

(ก) ให้งานทำมากเกินไป (ข) ให้งานพอดี (ค) ให้งานทำน้อยเกินไป
ผลของการสัมภาษณ์เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

กลุ่มนักศึกษา	ปี 1-2	ปี 3-4	หลังปริญญาตรี	
งานที่อาจารย์มอบหมาย มากไป	182	68	32	282
พอดี	33	72	15	120
น้อยไป	85	60	53	198
n_j	300	200	100	600

สมมติฐานที่จะทดสอบก็คือ สัดส่วนของนักศึกษาแต่ละระดับมีความรู้สึกต่องาน (แต่ละประเภท) เท่า ๆ กัน นั่นคือ

$$Ho: \pi_{i1} = \pi_{i2} = \pi_{i3} = \pi_{i4} \quad (i=1,2,3)$$

Ha: Ho ไม่เป็นจริง

ในเมื่อ π_{ij} เป็นความน่าจะเป็นของความรู้สึกต่องานที่ให้ทำในประเภท i ของนักศึกษากลุ่ม j

ถ้าสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง แล้วค่าประมาณที่ดีของ π_i (i = 1,2,3) จะเป็น

$P_1 = O_1/n = 282/600$, $P_2 = O_2/n = 120/600$ $P_3 = O_3/n = 198/600$

ดังนั้นในกลุ่มนักศึกษาปี 1-2 เราจึงหวังว่าจะมีนักศึกษาที่มีความรู้สึกในงานที่อาจารย์มอบหมายเป็นดังนี้

$E_{11} = 300(282/600) = 141$, $E_{21} = 300(120/600) = 60$ $E_{31} = 300(198/600) = 99$

สำหรับกลุ่มอื่น ๆ ก็จะทำได้ทำนองเดียวกัน

ตัวสถิติทดสอบ X^2 จึงมีค่าเป็น

$$X^2 = (181-141)^2/141 + (33-60)^2/60 + \ldots + (53-33)^2$$
$$= 77.55$$

หรือ

$$X^2 = 600\{182^2/282(300) + 33^2/120(300) + \ldots + 53^3/198(100) - 1\}$$
$$= 77.55$$

เมื่อ $\alpha = .05$ เราได้ $X^{2(3-1)(3-1)}_{.05} = 9.49$ จึงปฏิเสธ Ho นั่นคือนักศึกษามหาวิทยาลัยระดับต่าง ๆ จะรู้สึกในงานที่อาจารย์รับมอบหมายให้ไม่เป็นเช่นเดียวกัน

เมื่อปฏิเสธ Ho และต้องการทราบผลต่างสัดส่วนสำหรับคู่ใดในประเภทหนึ่งเราก็อาศัยช่วงเชื่อมั่น 100 $(1-\alpha)\%$, สำหรับ $\pi_{ia}-\pi_{ib}$, (a<b)ดังนี้

$$\pi_{ia} - \pi_{ib} = (P_{ia} - P_{ib}) \pm \sqrt{\chi^2_{\alpha\,(c-1)(k-1)}}\ \sqrt{P_{ia}Q_{ia}/n_a + P_{ib}Q_{ib}/n_b}$$

$$(i=1,2,..,c;\quad a,b=1,2,..,k;\quad a \quad b)$$

ถ้าต้องการสร้างช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างกันในประเภทหนึ่ง φ เราจะได้

$$\varphi = a_1\pi_{i1} + a_2\pi_{i2} + \dots + a_k\pi_{ik} \quad , a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$$

$$\varphi = \hat{\varphi} + \sqrt{\chi^2_{\alpha\,(c-1)(k-1)}\ S^2_{\hat{\varphi}}}$$

ในเมื่อ $\hat{\varphi} = a_1P_{i1} + a_1P_{i2} + \dots + a_kP_{ik}$

$$S^2_{\hat{\varphi}} = a_1^2P_{i1}Q_{i1}/n_1 + a_2^2P_{i2}Q_{i2}/n_2 + \dots + a_k^2P_{ik}Q_{ik}/n_k$$

ข้อสังเกต องศาความเป็นอิสระของค่าสถิติ X^2ที่ได้(c-1)(k-1) นั้นเป็นเพราะ

(1) ความถี่คาดหวังที่ประมาณได้ของตัวอย่างได้ใน C ประเภท (E_{ij}) รวมกันจะต้องเท่ากับ n_j จึงได้องศาความเป็นความถี่ที่ประมาณได้ของตัวอย่างใด ๆ เป็น (c-1) ดังนั้น k ตัวอย่างจึงมีอายุความเป็นอิสระ k(r-1)

(2) แต่ $\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_k$ ต้องประมาณจากข้อมูล และค่าประมาณเหล่านี้ต้องสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$n_1(P_1-P)+n_2(P_2-P)+\dots+n_k(P_k-P) = 0$$

ดังยกมาความเป็นอิสระทั้งหมดจึงเป็น

$$\nu = k(C-1)-(C-1) = (C-1)(k-1)$$

6.7 การทดสอบพารามิเตอร์ของประชากรไฮเปอร์จีออเมทริค (Hypergeometric Population)

ประชากรไฮเปอร์จีออเมทริคจะมีหน่วยทั้งหมด N หน่วยโดยมีลักษณะที่สนใจ k หน่วย เรามักไม่ทราบค่า k ถ้าเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับค่า k หรือสัดส่วนของ k ว่าเป็น k_o หรือ π_o ตามลำดับแล้ว สมมติฐานหลัก Ho จะเป็น

Ho : $k = k_o$ หรือ Ho : $\pi = \pi_o$; $\pi = k/n$ ส่วนสมมติฐานรอง Ha จะเป็นแบบทางเดียวหรือสองทางก็ได้

ในการทดสอบสมมติฐานหลัก Ho นี้ เราก็อาศัยตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่สนใจนั้น สำหรับตัวสถิติทดสอบที่ใช้ก็คือ X ซึ่งเป็นจำนวนครั้งหรือหน่วยที่มีลักษณะที่สนใจในตัวอย่างขนาด n ถ้าสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง และสอดคล้องกับเงื่อนไขของการทดลองแบบไฮเปอร์จีออเมทริค แล้วตัวสถิติ X : มีการแจกแจงดังนี้

$$f(x) = \binom{k_o}{x}\binom{N-k_o}{n-x}/\binom{N}{n} \quad ; \quad x=0,1,2,\ldots,\min(n,k_o)$$

ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจจึงกำหนดใจตามสมมติฐานรอง Ha และระดับนี้สำคัญ α ดังนี้

(1) สำหรับ Ha : $k>k_o$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p<\alpha$ ในเมื่อ $p = P(x \geq X)$

(2) สำหรับ Ha : $k<k_o$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p<\alpha$ ในเมื่อ $p = P(X \leq X)$

(3) สำหรับ Ha : $k \neq k_o$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p_1<\alpha/2$ หรือ $p_2<\alpha/2$ ในเมื่อ $p_1 = P(X \geq X)$ และ $p_2 = P(X \leq X)$

สำหรับตัวอย่างขนาดโต เรามักใช้การแจกแจงปกติมาตรฐานช่วย และสมมติฐานหลักมักจะกล่าวในรูปสัดส่วนนั่นคือ

$$Ho : \pi = \pi_o$$

ตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ดังนี้

$$Z = (P - \pi_o)/\sqrt{\pi_o(1 - \pi_o)/n} \qquad n/N < .10$$

$$Z = (P - \pi_o)/\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \qquad n/N \geq .10$$

ในเมื่อ $P = x/n$

ตัวอย่าง ในการศึกษาทัศนคติต่อการเรียนวิชาสถิติของนักศึกษาจำนวน 250 คน โดยใช้ตัวอย่างนักศึกษา 50 **เพื่อจะทดสอบคำกล่าวที่ว่า** "นักศึกษามากกว่า 75 % เห็นว่าวิชาสถิติมีประโยชน์ต่อ**อาชีพในอนาคต"**

จากการสอบถามนักศึกษาที่เป็นตัวแทน 50 คน ปรากฏว่ามี 40 คนเห็นว่ามีประโยชน์ แล้วเราจะสรุปผลในการทดสอบได้อย่างไร?

สมมติฐาน Ho : π = 0.75, Ha : π > 0.75

เนื่องจาก n/N = 50/250 = 0.20 ซึ่งมากกว่า 0.10 จึงใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$Z = (P - \pi_o)/\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

ดังนั้นเมื่อ n = 50, p = 40/50 = 0.8 เราจึงได้

$$Z = (0.80 - 0.75)/\sqrt{\frac{.75(.25)}{50}\left(\frac{250-50}{250-1}\right)} = 0.91$$

สำหรับ α = .05 เราได้ค่าวิกฤตเป็น Z_{05} = 1.645 จึงยอมรับ Ho ซึ่งแสดงว่า ค่ากว่านั้นไม่น่าจะเป็นไปได้

6.8 การทดสอบพารามิเตอร์ของประชากรปัวซอง (Poisson Population)

ประชากรปัวซองมีพารามิเตอร์ λ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนที่สนใจในช่วงเวลา พื้นที่หรือปริมาตรหนึ่ง ดังนั้นการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ λ จะเป็นดังนี้

1. **ทดสอบค่าเฉลี่ยที่กล่าวไว้** λ_o สมมติฐานหลัก Ho เกี่ยวกับค่าเฉลี่ย λ กำหนดไว้ดังนี้

$$Ho: \lambda = \lambda_o$$

ในการทดสอบสมมติฐานนี้ ก็อาศัยตัวอย่างขนาด n จากประชากรปัวซองที่สนใจนั้น แล้วเราจะได้ตัวสถิติทดสอบเป็น X ซึ่งแทนจำนวนที่สนใจในตัวอย่างนั้น และตัวสถิติ X จะมีการแจกแจงแบบปัวซองดังนี้

$$f(x) = e^{-n\lambda_o}(n\lambda_o)^x/x! \;;\quad x=0,1,2,\ldots$$

ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนี้สำคัญ α จึงกำหนดไว้เป็น

(1) สำหรับ Ha : $\lambda<\lambda_o$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p<\alpha$ ในเมื่อ $P(X\leq x)$

(2) สำหรับ Ha : $\lambda>\lambda_o$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p<\alpha$ ในเมื่อ $P(X\geq x)$

(3) สำหรับ Ha : $\lambda\neq\lambda_o$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p_1<\alpha/2$ โดยที่ $p_1 = P(X\leq x)$ เมื่อ $x<n\lambda_o$

หรือเกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $p = P(X\leq x) < \alpha = .05$

ง. คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ

$$p = \sum_{r=0}^{3} e^{-(1)(4.5)}(1(4.5)0^r/r! = 0.3432$$

จ. สรุปผล เนื่องจาก $p>.05$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือมาตร การด้านความปลอดภัยแบบใหม่ไม่ได้ลดจำนวนอุบัติเหตุลง.

ตัวอย่าง จำนวนอุบัติเหตุต่อวันในถนนสายหนึ่งเป็นดังนี้

จำนวนอุบัติเหตุ (x_j)	0	1	2	3	4	5
จำนวนวัน (f)	143	156	68	27	5	1

จากข้อมูลนี้พอเป็นประจักษ์พยานที่จะยอมรับสมมติฐานที่ว่าจำนวนอุบัติต่อวันเป็น 1 ได้หรือไม่?

ก. สมมติฐาน Ho : $\lambda = 1$, Ha : $\lambda \neq 1$

ข. ขนาดตัวอย่าง n = 400, ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$

ค. ตัวสถิติทดสอบ $Z = (X - n\lambda_o)/\sqrt{n\lambda_o}$

$p_2<\alpha/2$ โดยมี $p_2 = P(X\geq X)$ เมื่อ $X<n\lambda_o$

สำหรับตัวอย่างขนาดโต $(n\to\infty)$ เราอาศัยตัวสถิติทดสอบ f

$$Z = (X - n\lambda_o)/\sqrt{n\lambda_o} = (\bar{X} - \lambda_o)/\sqrt{\lambda_o/n}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

ตัวอย่าง จำนวนอุบัติเหตุต่อเดือนในโรงงานแห่งหนึ่งเฉลี่ยแล้ว 4.5 ครั้งหลังจากนำมาตรการด้านความปลอดภัยแบบใหม่มาใช้เป็นเวลา 1 เดือน จำนวนอุบัติเหตุลดลงมาเป็น 3 ครั้ง มาตรการความปลอดภัยแบบใหม่นี้สามารถลดจำนวนอุบัติเหตุได้หรือไม่?

ก. สมมติฐาน Ho : $\lambda = 4.5$, Ha : $\lambda < 4.5$

ข. ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$, ขนาดตัวอย่าง $n = 1$

ค. ตัวสถิติทดสอบ x เป็นตัวสถิติที่มีการแจกแจงแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ_0 ถ้า Ho เป็นจริง นั่นคือ

$$f(x) = e^{-n\lambda_0}(n\lambda_0)^x/x! \quad ; \quad x=0,1,2,...$$

ปฏิเสธ $|Z| > Z_{\alpha/2} = Z_{.025} = 1.96$

ง. คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ

$$x = \sum fx_i = 398$$

$$Z = (398 - 400(1))/\sqrt{400(1)} = -0.1$$

จ. สรุปผล เนื่องจาก $|Z| = .1 < 1.96$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือจำนวนอุบัติเหตุต่อวันจะเป็น 1

2. **ทดสอบการเท่ากันของสองค่าเฉลี่ย** (Test for Equality of two Means) สำหรับสองประชากรแบบปัวซองเรามีสมมติฐานหลักเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเป็นดังนี้

$$Ho: \lambda_1 = \lambda_2$$

ในการทดสอบสมมติฐานหลักนี้ก็อาศัยตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 จากสองประชากรนั้น ถ้า X_1 และ X_2 เป็นจำนวนที่สนใจในตัวอย่างทั้งสองตามลำดับ แล้วตัวสถิติทดสอบจะเป็น X_1 การแจกแจงเงื่อนไขของ X_1 เมื่อกำหนด $X_1 + X_2$ จะเป็นแบบทรินามที่มีพารามิเตอร์ $X_1 + X_2$ และ $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ดังนี้

$$f(x_1/x_1+x_2) = \binom{x_1+x_2}{x_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{x_1+x_2-x_1}$$

$$= \binom{x_1+x_2}{x_1}(1/2)^{x_1}(1/2)^{x_1+x_2-x_1} \quad ; \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$= \binom{x_1+x_2}{x_1}(1/2)^{x_1+x_2}$$

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α จึงกำหนดได้ตามสมมติฐานของดังนี้

(1) สำหรับ Ha : $\lambda_1 < \lambda_2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p < \alpha$ ในเมื่อ $p = P(X_1 \leq x_1)$

(2) สำหรับ Ha : $\lambda_1 > \lambda_2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p < \alpha$ ในเมื่อ $p = P(X_1 \geq x_1)$

(3) สำหรับ Ha : $\lambda_1 \neq \lambda_2$ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p_1 < \alpha/2$ หรือ $p_2 < \alpha/2$ ในเมื่อ $p_1 = P(X_1 \leq x_1)$ และ $p_2 = P(X_1 \geq x_1)$

ตัวอย่าง จำนวนคนที่ถึงแก่กรรมเนื่องจากอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในถนนสายหนึ่งสำหรับสองเดือนติดต่อกันเป็น 7 และ 3 คน ตามลำดับ การที่จำนวนคนที่ถึงแก่กรรมลดลงในเดือนที่สองนั้น เนื่องจากความบังเอิญหรือไม่?

ก. สมมติฐาน Ho : $\lambda_1 = \lambda_2$; Ha : $\lambda_1 < \lambda_2$

ข. ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$, ขนาดตัวอย่าง $n_1 = n_2 = 1$

ค. ตัวสถิติทดสอบ ใช้ตัวสถิติ X ซึ่งมีการแจกแจงดังนี้

$$f(x_1/x_1+x_2) = \binom{x_1+x_2}{x_1}(1/2)^{x_1+x_2}$$

เกณฑ์ตัดสินใจ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $p = P(X_1 \leq x_1) < \alpha = .05$

ในเมื่อ $p = P(X_1 \leq x_1) < \alpha = .05$

$$p = \sum_{s=0}^{x_1}\binom{x_1+x_2}{s}(1/2)^{x_1+x_2}$$

ง. คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ เมื่อ $x_1 = 3$, $_2 = 7$ เราได้

$$p = \sum_{s=0}^{3}\binom{3+7}{s}(1/2)^{3+7} = 0.172$$

จ. สรุปผลเนื่องจาก $p > .05$ จึงยอมรับ Ho นั่นคือการลดลงเนื่องจากความบังเอิญ

3. ทดสอบการเท่ากันของหลายค่าเฉลี่ย (Test for Equality of k Means) สำหรับประชากรแบบปัวซองที่เป็นอิสระกัน k ประชากร และมีพารามิเตอร์เป็น $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ตามลำดับ เมื่อเราต้องการทดสอบว่าทั้ง k ประชากรเหล่านี้มีค่าเฉลี่ยเท่ากันหรือไม่ นั่นคือสมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็น

$$\text{Ho: } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda$$

หรือ
$$\text{Ho: } \lambda_i = \lambda \;;\; i=1,2,\ldots,k$$
$$\text{Ha: } \lambda_i \neq \lambda$$

ในการทดสอบสมมติฐานหลัก Ho เราก็อาศัยตัวอย่าง และใช้ตัวสถิติทดสอบดังนี้

$$\chi^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2/\bar{x} = (\sum x_i^2 - k\bar{x}^2)/\bar{x} \;;\; \bar{x} = \sum x_i/k$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์, องศาความเป็นอิสระ k – 1 ถ้า Ho เป็นจริงเกณฑ์ตัดสินใจก็คือ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}{}^{(k-1)}$

ตัวอย่าง จำนวนอุบัติเหตุในโรงงาน 3 เดือน ติดต่อกันเป็นจำนวน 12,10, และ 8 ครั้ง ตามลำดับ ความแตกต่างกันของจำนวนครั้งนั้นเนื่องมาจากความบังเอิญหรือไม่?

ก. สมมติฐาน Ho : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

Ha : $\lambda_i \neq \lambda$ สำหรับ i บทตัว (i = 1,2,3)

ข. ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$, ขนาดตัวอย่าง $n_1 = n_2 = n_3 = 1$

ค. ตัวสถิติทดสอบ

$$X^2 = \sum (X - \overline{X})^2 / \overline{X}$$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $X^2 > X^{2(3-1)}_{.05} = 5.99$

ง. คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 8 \quad , \quad \overline{X} = 30/3 = 10$$

$$X^2 = (12-10)^2/10 + (10-10)^2/10 + (8-10)^2/10$$

$$= .4 + 0 + .4 = .8$$

จ. สรุปผล เนื่องจาก $X^2 > 5.99$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือความแตกต่างของจำนวนครั้งในอุบัติเหตุเนื่องจากความบังเอิญ

6.9 การทดสอบความเป็นอิสระ (Chi-Square Test for Independence)

บ่อยครั้งที่เราสนใจว่าตัวแปรชนิดนามบัญญัติ หรือคุณลักษณะตั้งแต่สองขึ้นไปนั้นมีความสัมพันธ์หรือเป็นอิสระกันหรือไม่ เช่นสนใจความสัมพันธ์ระหว่างอาชีพของบิดาและการเลือกอาชีพของบุตร หรือสนใจความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการเลี้ยงดูเด็กและการก้าวร้าวของเด็ก เป็นต้น ถ้าให้ A และ B เป็นคุณลักษณะที่สนใจในประชากร แล้วสมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็น

Ho : คุณลักษณะ A กับ B เป็นอิสระกัน

Ha : คุณลักษณะ A กับ B มีความสัมพันธ์กันเนื่องจากคุณลักษณะ A และ B ต่างก็มีระดับหรือค่าต่าง ๆ เป็น r และ C ระดับ แล้วหน่วยทดลองในตัวอย่างขนาด n ซึ่งใช้สำหรับทดสอบสมมติฐานจะสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

A \ B	b_1	b	...	h	...	b_c	
a_1	O_{11}	O_{12}		O_{1j}		O_{1c}	O_1
a_2	O_{21}	O_{22}		O_{2j}		O_{2c}	O_2
			...		...		
a_i				O_{ij}			$O_{.j}$
			...		...		
a_r	O_{r1}	O_{r2}		O_{rj}		O_{rc}	$O_{r.}$

รวม $O_{.1}$ $O_{.2}$ $O_{.j}$ $O_{.c}$ $O_{..}=n$

ในเมื่อ O_{ij} เป็นค่าสังเกตหรือความถี่ของจำนวนผลทดลองที่ตกอยู่ในระดับ i และ j ของคุณลักษณะ A และ B ตามลำดับสำหรับ O_{i} หรือ O_{j} นั้นเป็นผลรวมของ O_{ij} ตามระดับ i หรือ J นั่นเอง

ถ้าให้ π_{ij} เป็นความน่าจะเป็นที่ผลทดลองจากประชากรจะตกอยู่ในระดับ i,j ของ A,B ตามลำดับ และให้ π_{i} และ π_{j} เป็นความน่าจะเป็นที่ผลทดลองจะตกอยู่ในระดับ i ของ A และระดับj ของ B ตามลำดับ แล้วสมมติฐานที่จะทดสอบจะสามารถเขียนได้เป็น

$$Ho : \pi_{ij} = \pi_{i.}\pi_{.j} \text{ ทุกค่า } i,j \qquad i = 1,2,..,r; j = 1,2,\ldots,c$$

$$Ha : \pi_{ij} \neq \pi_{i.}\pi_{.j} \text{ บางค่า } i,j$$

เมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง แล้วตัวประมาณค่าแบบน่าจะเป็นมากสุดของ π_{ij}, $\pi_{i.}$ และ $\pi_{.j}$ คือ P_{ij} P_{i} และ $P_{.j}$ ซึ่งกำหนดไว้เป็น

$P_{ij} = O_{ij}/n$, $P_{i.} = O_{i}/n$ และ $P_{.j} = O_{j}/n$

ดังนั้นตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลักเกี่ยวกับความเป็นอิสระ จึงกำหนดไว้ว่า ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum (O_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij} = \sum (O_{ij} - nP_{i.}P_{.j})^2/nP_{i.}P_{.j} \\ &= \sum (O_{ij} - O_{i.}O_{.j})^2/(O_{i.}O_{.j}/n) \\ &= n(\sum O_{ij}^2/O_{i.}O_{.j} - 1) \end{aligned}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ (rC-1) – (r-1) – (C-1) = (r-1)(C-1)

ตัวอย่าง สุ่มตัวอย่างคนอายุรุ่นเดียวกัน จำนวน 4,000 คน มาและสังเกตุถึงรายได้ต่อปีและการศึกษาที่ได้รับ เพื่อต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่ารายได้ขึ้นอยู่กับการศึกษาหรือไม่โดยใช้ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

จากผลของการสังเกตุได้ข้อมูลซึ่งเป็นจำนวนคนดังตารางต่อไปนี้

	รายได้ต่อปี	ต่ำกว่า 10,000	10,000-30,000	มากกว่า 30,000	รวม
การศึกษา	ประถมศึกษา	350	35	15	400
	มัธยมศึกษา	100	850	50	1,000
	อนุปริญญา	40	1,200	760	2,000
	ปริญญา	10	415	175	600
	รวม	500	2,500	1,000	4,000

Ho : รายได้ต่อปีไม่ขึ้นอยู่กับการศึกษาที่ได้รับ

Ha : รายได้ขึ้นอยู่กับการศึกษา

เมื่อสมมุติฐานหลัก Ho เป็นจริงเราหาค่า E_{ij} ซึ่งเป็นค่าคาดหวังของจำนวนผลทดลองที่ตกอยู่ในระดับ i,j ของ A,B ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$E_{11} = O_{1.}O_{.1}/n = 400(500)/4000 = 50$$

$$E_{21} = 1000(500)/4000 = 125$$

$$E_{43} = 600(1000)|4000 = 150$$

ดังนั้น $X^2 = (350-50)^2/50 + (100-125)^2|125 + \ldots + (175-150)^2/150$

$= 3667.7368$

หรือคำนวณค่าของ X^2 โดยไม่ต้องคำนวณค่า E_{ij} ได้ดังนี้

$$X^2 = 4000 \quad 350^2/400(500) + 100^2/1000(500) + \ldots$$

$$+ 175^2/600(1000) - 1| \qquad = 3667.7368$$

สำหรับ $\alpha = .05$ เราได้ $X^{2(\nu)}_{.05} = 12.6$ ในเมื่อ $\nu = (4-1)(3-1) = 6$ จึงสรุปได้ว่า "รายได้ต่อปีขึ้นอยู่กับการศึกษาที่ได้รับ"

ในการทดสอบความเป็นอิสระนี้ เมื่อปฏิเสธ Ho นั่นคือยอมรับว่าคุณลักษณะทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน ถ้าเราต้องการทราบขนาดของความสัมพันธ์ (degree of association or Strength of relationship) ก็สามารถวัดได้ด้วยมาตราวัดความเกี่ยวพันที่ชื่อว่า Cramer statistic ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$C = \sqrt{X^2/n(t-1)} \ ; \quad t=\min(r,c)$$

จากตัวอย่างที่กล่าวมานี้เราได้ $C = \sqrt{3667.7368/400(3-1)} = 0.67$

ถ้าเราสนใจคุณลักษณะมากกว่า 2 อย่าง นั่นคือผลการทดลองจะสรุปได้ในตารางหลายมิติ สมมติว่าสนใจ 3 คุณลักษณะก็จะได้ผลการทดลองที่สรุปได้ในตาราง 3 มิติ และจะมีสมมติฐาน เกี่ยวกับการเป็นอิสระดังนี้

– ทั้งสามคุณลักษณะเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

– คุณลักษณะใด ๆ จะเป็นอิสระกับสองคุณลักษณะอื่น ๆ

เมื่อเราสนใจคุณลักษณะ A,B, และ C มีความเป็นอิสระกันหรือไม่ เราจึงมีสมมติฐานหลักเป็นดังนี้

Ho : คุณลักษณะ A, B, C เป็นอิสระกัน

หรือ Ho : $\pi_{ijk} = \pi_{i..}\pi_{.j.}\pi_{..k}$ ทุกค่า i,j,k ในเมื่อ $i = 1,2,\ldots,r$; $j = 1,2,\ldots,c$; และ $k = 1,2,\ldots,m$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลักจะเป็น

$$\chi^2 = \sum (O_{ijk} - E_{ijk})^2 / E_{ijk}$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $(rcm-1)-(r-1)-(c-1)-(m-1) = cm-(r+c+m)+2$ โดยที่ $E_{ijh} = nP_{i..}P_{.j.}P_{..k}$ ในเมื่อ $P_{i..}$, $P_{.j.}$ และ $P_{..h}$ เป็นค่าประมาณแบบน่าจะเป็นมากสุดของ $\pi_{i..}$, $\pi_{.j.}$ และ $\pi_{..k}$

ตัวอย่าง นักวิจัยต้องการทดสอบว่าระดับสติปัญญา (A), ความถนัดในสาขา (B), และความสำเร็จในอาชีพ (C), เป็นอิสระกันหรือไม่ สมมติว่าทำการทดลองกับบุคคลในอาชีพนั้นได้ผลดังตาราง (ผลสำเร็จในอาชีพด้วยเงินเดือน ความรับผิดชอบ)

ความสำเร็จในอาชีพ (C)

		ต่ำ		สูง^2		
		สติปัญญา(A)		สติปัญญา (A)		
		ต่ำ	สูง	ต่ำ	สูง	
ความถนัดใน	ต่ำ	8	40	2	100	150
สาขา (B)^2	สูง	112	110	78	550	850
		120	150	80	650	1000

จากข้อมูลที่ศึกษาได้นี้จะสรุปผลได้อย่างไร (α = .01) ?

Ho : ระดับสติปัญญา,ความถนัดในสาขา และความสำเร็จในอาชีพต่างกันเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

สำหรับค่า E_{ijh} คำนวณได้ดังนี้

$$E_{111} = 1000(200/1000)(150/1000)(270/1000) = 8.1$$
$$E_{112} = 1000(200/1000)(150/1000)(730/1000) = 21.9$$
$$E_{222} = 1000(800/1000)(850/1000)(730/1000) = 496.4$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum (O_{ijk} - E_{ijk})^2/E_{ijk} \\ &= (8-8.1)^2/8.1 + (2-21.9)^2/21.9 + \ldots + (550-496.4)^2/496.4 \\ &= 169.2\end{aligned}$$

สำหรับ α = .01 เราได้ $\chi^2_{.01}$ 13.3 ในเมื่อ ν = 2(2)(2) − (2+2+2)+2 = 4 จึงสรุปได้ว่า "ระดับสติปัญญา,ความถนัดในสาขา และความสำเร็จในอาชีพต่างก็เป็นอิสระซึ่งกันและกันนั้นไม่น่าจะเป็นไปได้"

6.10 การทดสอบเกี่ยวกับตัวแบบของประชากร (Chi-Square Goodness-of-fit Test)

เราได้กล่าวถึงการทดสอบพารามิเตอร์ของประชากรมาแล้วโดยที่สมมติว่าได้ทราบการแจกแจงของประชากาว บางครั้งเราไม่ทราบการแจกแจงหรือตัวแบบของประชากร และเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับตัวแบบของประชากรที่เราสุ่มตัวอย่างมานั้น การทดสอบแบบนี้ได้ชื่อว่า การทดสอบการปรับที่ดีแบบไคสแควร์ (Chi-Sqnare Goodness-of-Fit Test) แต่เราจะเรียกการทดสอบเกี่ยวกับตัวแบบของประชากร

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับตัวแบบของประชากรนั้นจะอาศัยการแจกแจงพหุนามเป็นหลักดังทฤษฎีต่อไปนี้

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_k$ เป็นตัวแปรเช่าสุ่มพหุนามที่มีพารามิเตอร์ $n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ แล้วตัวแปรเช่มสุ่ม X^2

$$\chi^2 = \sum (X_i - n\pi_i)^2 / n\pi_i$$

จะมีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-1 ถ้า n โตพอ

จากทฤษฎีนี้ทำให้เราทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของประชากรพหุนามดังได้กล่าวมาแล้วได้ ในทางปฏิบัติ ถ้า $n\pi_i < 5$ เราจะต้องยุบรวมประเภทหรือชั้นที่ติดกันเพื่อให้ได้ $n\pi_i \geq 5$)

การทดสอบที่กล่าวมานี้มักเรียกว่า การทดสอบพหุนาม (Multinomial Test) ซึ่งจะเป็นหลักในการทดสอบสมมติฐานที่ว่าประชากรที่สนใจ (y) มีการแจกแจงเป็นอย่างหนึ่งได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

สมมติว่าประชากรที่สนใจ (y) มีการแจกแจงหนึ่ง และ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากร y นั้น ถ้าเรากำหนดช่วงของค่าสังเกตจากตัวอย่างนี้เป็น

$$I_1 = \{y / y \leq a_1\}, \quad I_2 = \{y / a_1 < y \leq a_2\}, \quad I_3 = \{y / a_2 < y \leq a_3\}$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad I_{k-1} = \{y / a_{k-2} < y \leq a_{k-1}\}, \quad I_k = \{y / a_{k-1} < y\}$$

และให้ $X_1, X_2, \ldots, X_k$ เป็นจำนวนของค่าสังเกตจากตัวอย่างที่ตกอยู่ในช่วง $I_1, I_2, \ldots, I_k$ ตามลำดับ แล้ว $X_1, X_2, \ldots, X_k$ จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบพหุนามที่มีพารามิเตอร์ $n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ ในเมื่อ π_i กำหนดไว้ดังนี้

$\pi_i = P(y$ ตกอยู่ในช่วง $I_i)$; $i = 1, 2, \ldots, k$

ดังนั้นไม่ว่าประชากร y จะมีการแจกแจงแบบไหน เราก็สามารถทดสอบสมมติฐานที่ว่า $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ต่างก็มีการแจกแจงอย่างหนึ่งได้โดยการทดสอบสมมติฐานที่ว่าแปรเชิงสุ่มพหุนาม $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ที่ได้จากตัวอย่าง $y_1, y_2, \ldots y_n$ จะมีพารามิเตอร์เป็น $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ นั่นคือทดสอบสมมติฐานหลัก

Ho : $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ต่างก็มีการแจกแจงแบบหนึ่ง f(y)

หรือ Ho : $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ มีการแจกแจงพหุนามที่มีพารามิเตอร์เป็น $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$

ถ้าเราปฏิเสธ Ho นี้แล้ว f(y) หรือประชากร y ที่กล่าวไว้จะไม่เป็นเช่นนั้น (จากการเปรียบเทียบกับตัวอย่างสุ่ม) แต่ถ้าเรายอมรับ Ho แล้ว f(y) ก็จะเป็นเช่นนั้น

ตัวอย่าง จากการสุ่มหน้าหนังสือมา 100 หน้าในหนังสือเล่มหนึ่ง เพื่อดูจำนวนคำที่พิมพ์ผิดต่อหน้า ปรากฏว่าเป็นดังนี้

จำนวนคำผิดต่อหน้า	0	1	2	3	4
จำนวนหน้า	65	25	8	2	0

จำนวนคำผิดต่อหน้าจะมีการแจกแจงแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = 0.4$ หรือไม่?

เนื่องจาก y (จำนวนคำผิดต่อหน้า) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องเราจึงกำหนดช่วงได้เป็น

$I_1 = \{y/y \le 0.5\} = \{y/y = 0\}$ $I_2 = \{y/0.5 < y \le 1.5\} = \{y/y = 1\}$

$I_3 = \{y/1.5 < y \le 2.5\} = \{y/y = 2\}$ $I_4 = \{y/2.5 < y\} = \{y/y = 3\}$

แล้วเรากำหนด $X_1, X_2, \ldots, X_4$ เป็นจำนวนตัวอย่าง (100 หน้า) ที่ตกในช่วง I_1 ถึง I_4 ตามลำดับ เราสามารถหาค่า $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ จากการแจกแจงปัวซอง f(y)

ซึ่งเราจะได้ f(y)

$$f(y) = e^{-.4}(.4)^y/y! \;;\quad y=0,1,2,\ldots$$

$$\pi_1 = P(Y \in I_1) = f(0) = 0.6703 \;,\quad \pi_2 = f(1) = 0.2681$$
$$\pi_3 = f(2) = 0.0536 \;,\quad \pi_4 = P(Y \ge 3) = 0.0080$$

เราจะเห็นได้ว่า $n\pi_4 = 0.80$ ซึ่งน้อยกว่า 5 จึงรวมกันเข้ากับช่องถัดไป

ดังนั้นถ้า Ho เป็นจริง แล้ว X_1, X_2, X_3 จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มพหุนามที่มีพารามิเตอร์ $n = 100$; $\pi_1 = 0.6703$, $\pi_2 = 0.2681$, $\pi_3 = 0.0616$ (X_3 เป็นจำนวนคำผิดของช่วง I_3 และ I_4)

ค่าสังเกตของตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$\chi^2 = \sum (X_i - n\pi_i)^2/n\pi_i = (165-67.03)^2/67.03 + (25-26.81)^2/26.81 + (10-6.16)^2/6.16$$
$$= 2.577$$

ค่าวิกฤตจากตารางเราได้ $\chi^{2(3-1)}_{.01} = 4.605$ ซึ่งเราปฏิเสธ Ho ไม่ได้นั่นคือจำนวนคำผิดต่อหน้ามีการแจกแจงแบบปัวซองที่มี $\lambda = 0.4$

การทดสอบตัวแบบของประชากรที่กล่าวมานี้จะเห็นว่าสมมติฐานได้ระบุการแจกแจงอย่างสมบูรณ์ นั่นคือระบุว่าประชากรแจกแจงแบบไหน มีพารามิเตอร์อะไร และมีค่าเท่าใด การระบุประชากรอย่างสมบูรณ์เช่นนี้จำเป็นสำหรับคำนวณค่าของ $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ แต่ในทางปฏิบัติเรามักระบุค่าของพารามิเตอร์ไม่ได้ จึงต้องประมาณเอาด้วยค่าประมาณ $P_1 P_2, \ldots, P_k$ และเราจะได้ทฤษฎีต่อไปนี้เป็นหลักในการทดสอบตัวแบบของประชากร

สมมติว่าประชากรที่สนใจ Y มีการแจกแจงอย่างหนึ่งที่มีพารามิเตอร์ $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ แต่ไม่ทราบค่า และให้ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากร Y

ถ้าให้ $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \ldots, \hat{Q}_p$ เป็นตัวประมาณค่าแบบน่าจะเป็นมากสุด (Maximum Likelihood Estimates MLE) ของพารามิเตอร์ $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ ตามลำดับและถ้ากำหนดช่วง $I_1, I_2, \ldots, I_k$ กับจำนวนค่าสังเกต $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ดังทฤษฎีก่อน ๆ และให้ P_i กำหนดไว้ดังนี้

P_i = P(Y จะตกอยู่ในช่วง I_j) ; $J = 1, 2, \ldots, k$

โดยที่ P_i พิจารณาจากการแจกแจงของ Y ที่พารามิเตอร์ประมาณด้วยค่าประมาณ $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \ldots, \hat{Q}_p$

แล้วการแจกแจงของตัวสถิติ X^2

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} (X_i - nP_i)^2 / nP_i$$

จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ k-p-1 ถ้าขนาดตัวอย่างโตพอ

ดังนั้นถ้าเราต้องการทดสอบว่าประชากรที่สนใจ Y มีการแจกแจงแบบหนึ่ง (ไม่ได้ระบุค่าของพารามิเตอร์ เราก็จะใช้ข้อมูลจากตัวอย่างประมาณค่าของพารามิเตอร์ด้วยวิธีน่าจะเป็นมากสุด (MLE) แล้วดำเนินการทดสอบเหมือนกับตัวอย่างที่แล้วมา สำหรับองศาความเป็นอิสระของตัวสถิติทดสอบ X^2 นั้นจะสูญเสียไปเป็นจำนวนเท่ากับพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าเสมอ (หรือ P ซึ่งเป็นจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณ)

ตัวอย่าง นักจิตวิทยาเชื่อว่า เวลาที่หนูชนิดหนึ่งใช้เดินทางเข้าวงกตจะมีการแจกแจงแบบปกติ จากการบันทึกของนักศึกษาที่ได้ทำการทดลองกันมา 300 ครั้ง ปรากฏว่าเป็นดังนี้

เวลาที่ใช้ (Y)	จำนวน (X)	เวลาที่ใช้ (Y)	จำนวน (X)
$35.7 < y \leq 35.8$	10	$36.0 < y \leq 36.1$	97
$35.8 < y \leq 35.9$	30	$36.1 < y \leq 36.2$	51
$35.9 < y \leq 36.0$	104	$36.2 < y \leq 36.3$	8

เราจะทดสอบความเชื่อหรือทดสอบตัวแบบของประชากรว่าเป็นแบบปกติหรือไม่นั้น

ก็ทำได้ดังนี้

Ho : เวลาที่หนูใช้เดินทางเข้าวงกตจะมีการแจกแจงแบบปกติค่าประมาณแบบน่าจะเป็นมากสุดของ μ และ σ^2 จะหาได้เป็น

$$\bar{Y} = 36.008, \; S = 0.111$$

และคำนวณหา P_i จากการใช้ตารางปกติได้เป็น

$P_1 = P(35.7 < y \leq 35.8) = 0.0301$

$P_2 = 0.1359, \quad P_3 = 0.3061, P_4 = 0.3246$

$P_5 = 0.1615, \quad P_6 = 0.0418$

ดังนั้นค่าคาดหวัง nP_i จะเป็น $nP_1 \doteq 9.03$, $nP_2 = 40.77$, $nP_3 = 91.83$, $nP_4 = 97.38$, $nP_5 = 48.45$, และ $nP_6 = 12.54$

ค่าสังเกตของตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$X^2 = \sum_{i=1}^{6} (X_i - nP)^2/nP_i$$

$$= (10-9.03)^2/9.03+\ldots+(8-12.54)^2/12.54$$

$$= 6.341$$

ค่าวิกฤต $X^{2\,(6-2-1)}_{10} = 6.25$ จึงปฏิเสธ Ho นั่นคือเวลาที่ใช้เดินทางจะไม่แจกแจงแบบปกติ (เมื่อใช้ระดับนัยสำคัญ 10 %)

ตัวอย่าง จากการสังเกตจำนวนอุบัติเหตุต่อเดือนที่เกิดขึ้นในโรงงานแห่งหนึ่งเป็นเวลา 5 ปี หรือ 60 เดือน ได้ข้อมูลมาดังนี้

อุบัติเหตุต่อเดือน (Y)	0	1	2	3
ความถี่ (X)	33	17	7	3

จำนวนอุบัติเหตุต่อเดือนนี้มีการแจกแจงแบบปัวซองหรือไม่ ?

Ho : จำนวนอุบัติเหตุต่อเดือนมีการแจกแจงแบบปัวซอง

ค่าประมาณแบบน่าจะเป็นมากสุดของพารามิเตอร์ λ ในการแจกแจงปัวซองคือ $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{1}{60}\left[0(33) + 1(17) + 2(7) + 3(3)\right] = 0.667$$

ดังนั้น $P_1 = P(y = 0) = 0.5314$

$P_2 = 0.3415$, $P_3 = 0.1181$, $P_4 = 0.0090$

สำหรับค่าคาดหวัง $nP_1 = 31.884$, $nP_2 = 20.490$, $nP_3 = 7.086$, และ $nP_4 = 0.54$ เนื่องจาก $nP_4 < 5$ จึงรวมเข้ากับ nP_3

ดังนั้นค่าสังเกตของตัวสถิติทดสอบ X^2 จะเป็น

$$X^2 = \sum_{i=1}^{3} (X_i - nP)^2/nP_i$$

$$= (33-31.884)^2/31.884 + (17-20.490)^2/20.490 + (10-7.626)^2/7.626$$

$$= 1.372$$

ค่าวิกฤต $X^{2\,(3-1-1)}_{.05} = 3.84$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือจำนวนอุบัติเหตุต่อเดือนมีการแจกแจงแบบปัวซอง