ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

Probability is the very Guide of Life.

Bishop Joseph Butler

ความน่าจะเป็นมีบทบาทสำคัญในกระบวนการตัดสินใจ (Decision-making Process) ไม่ว่า ปัญหานั้นจะเป็นปัญหาที่ประสบในทางธุรกิจ เศรษฐกิจ ดาราศาสตร์ สังคมศาสตร์ หรือในชีวิตประจำวันของตัวเราเอง การตัดสินใจในสภาวะที่มีข้อมูลข่าวสารพร้อมมูล (Perfect Information) หรือมีข้อเท็จจริงที่จำเป็นพร้อมมูลนั้นเห็นจะเกิดขึ้นไม่บ่อยนัก ส่วนมากเรามักจะทำการตัดสินใจในสภาวะที่มีข้อมูลข่าวสารไม่พร้อม หรือในสภาวะที่ไม่แน่นอน (Uncertainty) ดังนั้น ความน่าจะเป็นจึงเข้าไปมีบทบาทในกระบวนการตัดสินใจในฐานะตัวแทนของความแน่นอน (Certainty) หรือตัวแทนของความรู้ข้อเท็จจริงที่สมบูรณ์ (Complete Knowledge) นั่นเอง

ในสถิติอนุมาน (Statistical Inference) ความน่าจะเป็นเข้าไปมีบทบาทอย่างสำคัญ เพราะเป็นรากฐานของทฤษฎีและการประยุกต์ทางสถิติ งานที่สำคัญของนักสถิติก็คือทำการสรุปผลหรือทำการอ้างอิงจากการทดลองหรือปรากฏการณ์ซึ่งมีความไม่แน่นอนเกี่ยวข้องอยู่ จากทฤษฎีความน่าจะเป็นจะทำให้นักสถิติสามารถวางหลัก (Generalize) จากสิ่งที่รู้ไปหาสิ่งที่ไม่รู้ และการวางหลักก็สามารถทำด้วยความเชื่อมั่นสูง ๆ ได้ ดังนั้น ทฤษฎีความน่าจะเป็นจึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญ ในการวิเคราะห์ทางสถิติ

2.1 ความหมายของความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น (Probability) ก็เป็นอีกชนิดหนึ่งที่เราใช้กันบ่อย ๆ โดยเฉพาะในวงการพนัน แต่เราก็ยังใช้กันอยู่จำกัดมาก ทั้ง ๆ ที่เป็นคำที่มีบทบาทในชีวิตประจำวันของเราเป็นอย่างมาก และคำที่มีความหมายเช่นเดียวกับคำนี้ก็คือ โอกาสหรือโศลก (chance) และความเป็นไปได้ (Possibility) ความน่าจะเป็นมีความหมายอยู่สองประการคือ

ประการแรก ความน่าจะเป็นในฐานะที่เป็นศาสตร์ (Science) ซึ่งเป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับการทดลองเชิงสุ่ม (Random Experiment) หรือการทดลองที่ไม่สามารถบอกผลการทดลองได้ด้วยความแน่ใจ แต่จะบอกได้ด้วยความไม่แน่ใจหรือด้วยความน่าจะเป็น เช่นการทดลองโดยการโยนเหรียญ ทอดลูกเต๋า, นับจำ นวนเครื่องบินขึ้นลงในสนามบินดอนเมือง ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง เป็นต้น

ประการที่สอง ความน่าจะเป็นในฐานะที่เป็นตัวเลข (Numbers) ซึ่งเป็นมาตรงวัดเชิงปริมาณ (Quantitative Measure) ของความไม่แน่นอน ที่เหตุการณ์จากการทดลองเชิงสุ่มจะเกิดขึ้น ถ้าเหตุการณ์ที่สนใจจะต้องเกิดขึ้นแน่นอน แล้วความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นจะเป็น 1.00 แต่ถ้าการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่สนใจไม่มีทางเป็นไปได้ แล้วความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นจะเกิดขึ้นจะเป็น 0.00 ดังนั้นถ้าเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่การเกิดขึ้นของมันเป็นไปได้ แต่ไม่แน่ใจ

แล้วความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นของเหตุการณ์จะอยู่ระหว่าง 0.00 และ 1.00 เหตุการณ์ที่มีโอกาสเกิดขึ้นมาก ก็จะมีความน่าจะเป็นใกล้ 1.00 แต่ถ้ามีโอกาสเกิดขึ้นน้อยก็จะมีความน่าจะเป็นห่างจาก 1.00 หรืออยู่ใกล้ 0.00 นั่นเอง เราจะเห็นได้ว่าความน่าจะเป็นมีสเกลในเทอมของสัดส่วนเป็น (0,1) หรือในเทอมของเปอร์เซนต์ (ซึ่งใช้กันบ่อย ๆ) จะเป็น (0,100) เช่น ความน่าจะเป็นของการเกิดหน้าคู่จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกจะเป็น 0.5 หรือ 50% ความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านวิชาสถิติจะเท่ากับ 0.9 หรือ 90% เป็นต้น

2.2 การทดลอง (Experiment)

จากนิยามของความน่าจะเป็นซึ่งเกี่ยวข้องกับการทดลอง ดังนั้นเราจำเป็นต้องนิยามการทดลองกันก่อนดังนี้การทดลองเป็นกระบวนการที่กระทำขึ้นภายใต้กลุ่มของเงื่อนไขอย่างหนึ่ง และกระบวนการนั้นสามารถทำซ้ำ ได้ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน เมื่อสิ้นสุดลงกระบวนการก็จะให้ผลออกมาซึ่งจะเรียกว่าผลทดลอง (Outcomes) และผลทดลองที่เป็นไปได้จะมีตั้งแต่หนึ่งอย่างขึ้นไป การทดลองจะแบ่งออกเป็น 2 ชนิด ดังนี้

ก. การทดลองแบบกำหนดได้ (Deterministic Experiment) เป็นการทดลองที่เราทราบด้วยความแน่ใจว่าผลทดลองที่จะเกิดขึ้นจากการทดลองแต่ละครั้งเป็นอะไร การทดลองแบบนี้เป็นการทดลองที่เราคุ้นเคยกันมาก เช่นโยนของขึ้นไป เราจะบอกได้ล่วงหน้าว่าของชิ้นนั้นจะตกลงพื้นอย่างแน่นอน ถ้ากู้เงินจากธนาคาร 10,000 บาท ภายใน 1 ปี เราก็ทราบอย่างแน่นอนว่า เราต้องเสียดอกเบี้ย 1,500 บาท (ถ้าอัตราดอกเบี้ยในปีนั้นไม่เปลี่ยนแปลง)

ข. การทดลองเชิงสุ่ม (Random or Nondeterministic Experiment) การทดลองแบบนี้เป็นการทดลองที่เป็นจริงหรือสมมุติขึ้นมา (Real or Hypothetical) และต้องมีคุณสมบัติ 3 ประการ ต่อไปนี้

(1) ก่อนที่จะทำการทดลองนั้น ผลทดลองที่จะเกิดขึ้นจะทราบด้วยความไม่แน่ใจนั่นคือผลทดลองโคลก (Chance factors) เข้าไปเกี่ยวข้องด้วย

(2) กลุ่มผลทดลอง (Sample Space) หรือเซทของผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะทราบด้วยความแน่ใจ ก่อนที่จะทำการทดลอง และ

(3) ในสภาวการณ์ (Condition) เดียวกันนั้น การทดลองสามารถจะทำซ้ำ ๆ ได้

ข้อมูลดิบ (Raw Data) ที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ทางสถิติ ส่วนมากก็ได้มาจากการทดลองแบบนี้

ตัวอย่าง **การทดลอง** : ทอดลูกเต๋า (Fair die) และสังเกตหน้าที่เกิดขึ้นเราจะเห็นได้ว่า (1) ก่อนการทอดลูกเต๋าที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดนั้น เป็น $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ (3) การทอดลูกเต๋านี้สามารถจะทำซ้ำ ๆ ได้ในสภาวการณ์เดิม

ดังนั้นการทอดลูกเต๋านี้ จึงเป็นการทดลองเชิงสุ่ม

ตัวอย่างของการทดลองเชิงสุ่มอื่น ๆ

(1) โยนสตางค์ 2 ครั้ง และสังเกตหน้าที่ขึ้นทั้งสองครั้ง

(2) สังเกตกลุ่มเลือดของหญิงมีครรภ์ที่มาตรวจเลือดในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง

(3) สังเกตเวลาที่ใช้ในการปรับตัวเกี่ยวกับการเรียนในมหาวิทยาลัย

(4) สังเกตคะแนนของนักศึกษาที่ได้จากการสอบวิชาใดวิชาหนึ่งซึ่งมีคำถาม 100 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน

(5) สังเกตจำนวนครั้งที่ต้องซื้อลอตเตอรี่จนกว่าจะถูกรางวัลใดรางวัลหนึ่ง

2.3 กลุ่มผลทดลอง และเหตุการณ์ (Sample Space and Events)

(ก) กลุ่มผลทดลอง (Sample Space) เป็นเซทของผลทดลอง (Sample points, points, outcomes) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทำการทดลองเชิงสุ่ม เราจะใช้ S หรือ Ω, $\mathcal{U}$ หรือ แทนกลุ่มผลทดลอง และผลทดลองจะใช้สัญญลักษณ์ s, w, u, o ดังเช่น $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

สำหรับกลุ่มผลทดลองมีชื่อเรียกทางภาษาอังกฤษอย่างอื่นอีกคือ Outcome space, Event space หรือ Universal space และกลุ่มผลทดลองนั้น แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ

(1) กลุ่มผลทดลองไม่ต่อเนื่อง (Discrete Sample Space) เป็นกลุ่มผลทดลองที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวนจำกัด หรือไม่จำกัดแต่แจงนับได้ (Finite or Countablyinfinite))

(2) กลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง (Continuous Sample Space) เป็นกลุ่มผลทดลองที่มีผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวนไม่จำกัด และแจงนับไม่ได้ (Uncountably infinite)

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของการทดลองเชิงสุ่มอื่น ๆ ที่ผ่านมา เราจะได้กลุ่มผลทดลอง S ดังนี้

(1) $S = \{TT, TH, HT, HH\} = \{0, 1, 2\}$ S เป็นกลุ่มผลทดลองไม่ต่อเนื่อง

(2) $S = \{2, 3, 4, \ldots\}$ S เป็นกลุ่มผลทดลองไม่ต่อเนื่อง

(3) $S = \{T / T \geqslant 0\}$, T เป็นเวลาที่ใช้ในการปรับตัว มีหน่วยเป็นวัน S เป็นกลุ่มผลทดลองต่อเนื่อง

(4) $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, S เป็นจำนวนของที่ไม่ได้มาตรฐานทีผลิตออกมาในคาบเวลา 24 ชั่วโมง S เป็นกลุ่มผลทดลองไม่ต่อเนื่อง

(ข) เหตุการณ์ (Event) เป็นเซทย่อย (Subsets) ของกลุ่มผลทดลองหรือเป็นเซทของผลทดลองที่เป็นไปได้จากที่การทำการทดลองเชิงสุ่ม

เหตุการณ์ที่น่าสนใจมีดังนี้

(1) เกตุการณ์แบบง่าย (Simple or Elementary Event) เป็นเหตุการณ์หรือเซทที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้เพียงหนึ่งเท่านั้น

(2) เหตุการณ์ประกอบ (Compound Event) เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้มากกว่าหนึ่ง

(3) เหตุการณ์ที่เกิดแน่นอน (Certain or Sure Event) เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด เหตุการณ์นี้ก็คือกลุ่มผลทดลองนั่นเอง

(4) เหตุการณ์ที่เกิดไม่ได้ (Impossible, Null or Void Event) เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีผลทดลองที่เป็นไปได้เลย

ตัวอย่าง **การทดลอง** : โยนสตางค์ 3 ครั้ง และสังเกตผลทอลอง (คือหน้า) ที่จะเกิดขึ้นจากการโยน

ดังนั้น $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

ถ้าเรากำหนด E_1, E_2, E_3 และ E_4 เป็นเหตุการณ์ที่มีคุณสมบัติดังนี้

E_1 : เหตุการณ์ที่ได้หัวทั้งสามครั้ง

E_2 : เหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 2 ครั้ง

E_3 : เหตุการณ์ที่ได้หัว 3 ครั้ง หรือน้อยกว่า

E_4 : เหตุการณ์ที่ได้หัวมากกว่า 3 ครั้ง

แล้วเราจะได้ $E_1 = \{HHH\}$ เป็นเหตุการณ์แบบง่าย

$E_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$ เป็นเหตุการณ์ประกอบ

$E_3 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\} = S$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดแน่นอน

$E_4 = \{ \quad \} = \emptyset$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไม่ได้

2.4 การรวมตัวของเหตุการณ์ (Event Operations)

เนื่องจากเหตุการณ์เป็นเซท การรวมของเหตุการณ์จึงเหมือนกับการรวมตัวของเซทที่น่าสนใจมีดังนี้

(1) **ผลรวมของเหตุการณ์** (Union or Sum of Events) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ แล้วผลรวมของ A และ B หรือ $A \cup B$ จะเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้ที่อยู่ในเหตุการณ์ A หรือ B นั่นคือ

$$A \cup B = \{s_i \,/\, s_i \in A \text{ หรือ } s_i \in B\}$$

ในเมื่อ s_i เป็นผลทดลองที่เป็นไปได้ ส่วน<u>หรือ</u> (or) ในที่นี้มีความหมายเป็น " และ/หรือ (and/or)"

(2) **ผลร่วมของเหตุการณ์** (Intersection or Product of Events, or Joint events): A และ B เป็นเหตุการณ์ แล้วผลร่วมของ A และ B หรือ $A \cap B$ จะเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อทั้ง A และ B เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน หรือประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้ที่อยู่ใน A และ B พร้อม ๆ กัน นั่นคือ

$A \cap B = \{ s_i / s_i \in A \;\; \& \;\; s_i \in B \}$

สองเหตุการณ์ A และ B จะเรียกว่า **ไม่มีผลร่วมกัน** (Mutually exclusive or Disjoint event) ถ้าทั้งสองเหตุการณ์เกิดขึ้นพร้อมกัน นั่นคือ

(3) ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ (Complement or Absolute Complement of Events) ถ้า A เป็นเหตุการณ์ แล้วส่วนเติมเต็มของ A หรือ A, จะเป็นเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเหตุการณ์ A ไม่ได้เกิดขึ้น นั่นคือ

$$\overline{A} = \{ s_i | s_i \in S \; , \; s_i \notin A \}$$

(4) ผลต่างของสองเหตุการณ์ (Difference of Two Events) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ แล้วผลต่างของสองเหตุการณ์ A และ B หรือ A-B จะเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้ที่อยู่ในเหตุการณ์ A แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ B นั่นคือ

$$A - B = \{ s_i | s_i \in A \; , \; s_i \notin B \} = A \cap \overline{B}$$

(5) ส่วนแบ่งของเหตุการณ์ (Partition of Event) เหตุการณ์ A_i, A_2,......, A_n จะประกอบเป็นส่วนแบ่งของเหตุการณ์ B ถ้าสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $A_i \subseteq B$ (i = 1, 2, ... , n) นั่นคือ A_i เป็นเหตุการณ์ที่มีผลทดลองทั้ง หมดอยู่ใน B

(2) $A_i \cap A_j = \phi$ (i, j = 1, 2, ... , n, $i \neq j$) นั่นคือ A_i และ A_j ไม่มีผลร่วมกัน

(3) $A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n = B$ นั่นคือผลรวมของเหตุการณ์ A_1, A_2, ... A_n จะเป็นเหตุการณ์ B นั่นเอง

การรวมตัวของเหตุการณ์นั้นสามารถเป็นแผนภาพที่เรียกว่า Venn Diagram ซึ่งตั้งชื่อตาม John Venn (1834-1923) นักตรรกวิทยาชาวอังกฤษ แต่ถ้าแผนภาพได้แสดงผลทดลองที่เป็นไปได้ของกลุ่มผลทดลองด้วยจุดภายในวงกลม เราจะเรียกแผนภาพนั้นว่า Euler Diagram ซึ่งตั้งชื่อตาม Leonhard Euler(1707-1783) นักคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ชาวสวิส

ตัวอย่าง **การทดลอง** : โยนลูกเต๋าครั้งหนึ่ง และสังเกตหน้าที่ขึ้น

ดังนั้น S = {1, 2, 3, 4, 5, 6,}

ถ้ากำหนดเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

A : เกิดแต้มคู่ = {2, 4, 6}

B : ได้แต้มไม่เกิน 3 = {1, 2, 3}

C : เกิดแต้มคี่ = {1, 3, 5}

D : ได้แต้มเท่ากับ 6 หรือน้อยกว่า = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

E : ได้แต้มน้อยกว่า 1 = { }

แล้วเราจะได้การรวมตัวของเหตุการณ์ดังต่อไปนี้

ผลรวม $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$ $D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\} = S$

ผลร่วม : $A \cap B = \{2\}$ $A \cap C = \{\ \}$

$B \cap C = \{1, 3\}$ $D \cap E = \{\ \}$

ส่วนเติมเต็ม : $\bar{A} = \{1, 3, 5\} = C$ $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$

$\bar{D} = \{\ \} = E$

ผลต่าง : $A - B = \{4, 6\}$, $B - C = \{2\}$

ส่วนแบ่ง : พิจารณาเหตุการณ์ A และ C เราจะเห็นว่า (1) $A \cap C = \{\ \}$ และ (2) $A \cup C = S$ ดังนั้น A และ C เป็นส่วนแบ่งของ S

ตัวอย่าง กำหนดให้ F เป็นเหตุการณ์ของครอบครัวทั้งหมดในไทย

(ก) ให้ A_1 เป็นครอบครัวที่มีรายได้น้อยกว่า 10,000 บาท ; A_2 มีรายได้ระหว่าง 10,000 บาท และ 50,000 บาท ; A_3 มีรายได้ระหว่าง 50,000 บาท และ 100,000 บาท A_4 มีรายได้ระหว่าง 100,000 บาท และ 200,000 บาท ; และ A_5 มีรายได้อย่างน้อย 200,000 บาท ต่อปี

ถ้าเราให้ $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ เราจะเห็นได้ว่า

(1) $A_i \subset F; i = 1, 2, 3, 4, 5,$

(2) $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = F$

จึงสรุปได้ว่า S เป็นส่วนแบ่งของ F

(ข) ถ้าให้ B_1 เป็นเหตุการณ์ของครอบครัวที่ผู้มีรายได้หลักมีอายุน้อยกว่า 20 ปี ; B_2 มีอายุระหว่าง 20 ปี ถึง 30 ปี ; B_3 ระหว่าง 30 ถึง 40 ; B_4 ระหว่าง 40 ถึง 50 ; B_5 ระหว่าง 50 ถึง 65 ; และ B_6 อายุตั้งแต่ 65 ปีขึ้นไป

เราจะเห็นได้ว่า

(1) $B_i \subset F; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$

(2) $B_i \cap B_j = \phi, i \neq j$

(3) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 = F$

เราจึงสามารถสรุปได้ว่า $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_6$ ประกอบเป็นส่วนแบ่งของ F

(ค) ถ้าเราพิจารณาผลร่วมของเหตุการณ์ B_i และ A_k หรือเหตุการณ์ $B_i \cap A_k$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ และ $k = 1, 2, 3, 4, 5,$ เราจะเห็นได้ว่า

(1) $(B_i \cap A_k) \subset F$

(2) $(B_i \cap A_k) \cap (B_j \cap A_l) = \phi; i \neq j, k \neq l$

(3) $(B_1 \cap A_1) \cup (B_2 \cap A_1) \cup \ldots\ldots \cup (B_6 \cap A_5)$

$$= (\bigcup_{i=1}^{6} B_i) \cap (\bigcup_{k=1}^{5} A_k)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{6} \bigcup_{k=1}^{5} (B_i \cap A_k) = F$$

ดังนั้นเหตุการณ์ $B_i \cap A_k$ เหล่านี้จะประกอบเป็นส่วนแบ่งของ F แต่ในกรณีนี้เราจะเรียกว่า ส่วนแบ่งร่วม (Cross Partition)

ตัวอย่าง นักจิตวิทยาสังเกตเวลาที่สัตว์ชนิดหนึ่งใช้เรียนรู้ สมมุติว่าเป็น t ดังนั้นกลุ่มผลทดลองจะเป็นดังนี้

$$S = \{t/t \geqslant 0\}$$

ถ้าให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่กำหนดไว้ดังนี้.-

$A = \{t/t < 100\}$; $B = \{t/50 \leq t \leq 200\}$; $C = \{t/t > 150\}$

แล้วจะได้ว่า $A \cup B = \{t/t \leq 200\}$, $B \cup C = \{t/t \geq 50\}$

$A \cap B = \{t/50 \leq t < 100\}$

$B \cap C = \{t/50 < t \leq 200\}$

$A \cup C = \{t/t < 100 \text{ or } t > 150\}$ $A \cap C = \emptyset$

$\overline{A} = \{t/t \geq 100\}$; $\overline{C} = \{t/t \leq 150\}$

$A - B = \{t/t < 50\}$; $B - C = \{t/50 \leq t \leq 150\}$

สำหรับเหตุการณ์ A, B และ C นั้น ไม่เป็นส่วนแบ่งของ S เพราะ $A \cap B \neq \emptyset$ หรือ $B \cap C \neq \emptyset$

โดยที่ (1) A, B และ C มีผลรวมเป็น S นั่นคือ $A \cup B \cup C = S$; (2) A, B, C ต่างก็เป็นเซทย่อยของ S นั่นคือ $A \subset S$, $B \subset S$, หรือ $C \subset S$ เราจะเรียกเหตุการณ์ A, B และ C ว่าเป็นเหตุการณ์ผลรวม (Exhaustive events)

2.5 วิธีนับจำนวนผลทดลองในเหตุการณ์หรือกลุ่มผลทดลอง (Methods of Enumeration)

ในการทดลองซึ่งจะให้ผลทดลองออกมานั้น ถ้าเราต้องการทราบจำนวนผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด เราก็ทำการแจงนับเอา แต่การทดลองบางอย่างจะทำการแจงนับยาก ต้องอาศัยหลักคำนวณ และก็เช่นเดียวกันสำหรับเหตุการณ์ที่เราสนใจซึ่งเราต้องการทราบจำนวนผลทดลอง เรามีกฎหรือหลักดังนี้

(1) **หลักการคูณ** (Multiplication Principle) ถ้ามีวิธีการ (Procedures) k วิธีการ และวิธีการที่ 1, 2,....., k สามารถกระทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ วิธีตามลำดับแล้ววิธีการที่จะประกอบด้วยวิธีการที่ 1, ตามด้วยวิธีการที่ 2, ... , ตามด้วยวิธีการที่ k จะสามารถกระทำได้ $n_1 (n_2) (n_3) \ldots (n_k)$ วิธี

ตัวอย่าง นักศึกษา 30 คน จะมีหนทางที่เขาจะไม่เกิดวันที่เดียวกันได้กี่วิธี (ถ้าให้ 1 ปีมี 365 วัน)

คนแรกจะเลือกเกิดได้ 365 วิธี

คนที่สองจะเลือกเกิดได้ 364 วิธี

คนที่ 30 จะเลือกเกิดได้ [365 − (30 − 1)] วิธี

ดังนั้น วิธีที่ทั้งหมดจะเป็น

$$365\,(364)\,(363)\ \ldots\ [365 - (30 - 1)] \text{ วิธี}$$

(2) หลักการบวก (Addition Principle) ถ้ามีวิธีการอยู่ k วิธี และวิธีการที่ 1, 2, 3, ..., k สามารถกระทำได้ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับ แล้วจำนวนวิธีที่สามารถกระทำวิธีการ 1 หรือ วิธีการ 2 หรือ ...... หรือวิธีการใด ๆ สามารถกระทำร่วมกันได้

ตัวอย่าง ถ้าเราวางแผนที่จะไปเที่ยวเชียงใหม่ และกำลังตัดสินใจระหว่างการเดินทางโดยรถไฟและรถยนต์ เรารู้ว่าทางรถไปทางเชียงใหม่มีทางเดียว แต่ทางรถยนต์มี 3 ทาง

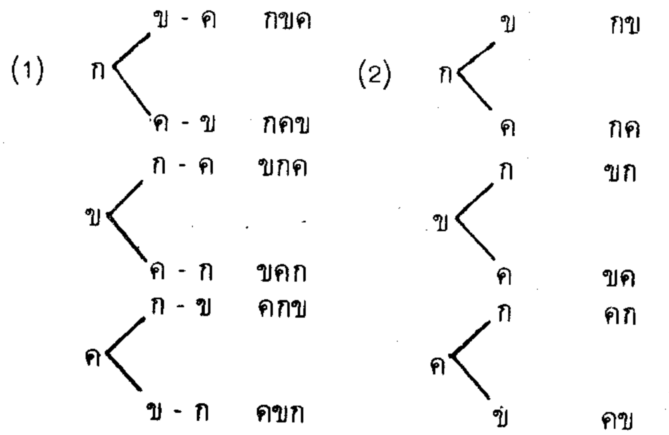
ดังนั้น วิธีที่จะไปเที่ยวเชียงใหม่จะมี 1 + 3 = 4 วิธี

(3) การจัดเรียงอันดับ (Permutation) การจัดเรียงอันดับเป็นการจัดเรียงสิ่งของทั้งหมดหรือเพียงบางส่วน โดยคำนึงถึงอันดับที่

ตัวอย่าง วิธีที่จะจัดเรียงอักษร ก, ข, และ ค มีดังนี้

(1) จัดเรียงทั้งหมด

(2) จัดเรียงเพียง 2 ตัว



ในการจัดเรียงอันดับ เรามีกฎสำหรับคำนวณวิธีการดังนี้

กฎที่ 1 สิ่งของที่ต่างกัน n สิ่ง ถ้านำมาจัดเรียงกันทีละ r สิ่ง โดยคำนึงถึงอันดับ **แต่ไม่มีการแทนที่** แล้ว วิธีการจัดเรียงทั้งหมดจะเป็น

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ; r \leq n$$

หมายเหตุ (1) ถ้า n เป็นเลขโดดที่เป็นบวก (Positive Integer) เรานิยาม n! ซึ่งเรียกว่า n - factorial ได้ดังนี้

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1) \; ; \; 0! = 1$$

ตัวอย่างเช่น $5! = 5(4)(3)(2)(1) = 120$

(2) $P(n,r)$ อาจเขียนได้เป็น ^nP_r หรือ nPr หรือ$(n)r$ เช่น $P(5,2) = {}^5P_2 = 5P2 = (5)2$

(2) การจัดกลุ่ม และการจัดเรียงอันดับมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$P(n,r) = r!C(n,r)$$

ตัวอย่าง เลือกกรรมการชุมนุมจิตวิทยา 4 คน จากผู้สมัคร 9 คน โดยการจับฉลากวิธีที่กรรมการจะได้รับเลือกมีเท่าใด ?

$$C(9,4) = 9!/(4!(9-4)!) = 126$$

หมายเหตุ (1) $C(n, r)$ อาจจะเขียนได้เป็น $\binom{n}{r}$, ^nC_r, nCr

(2) $C(n, r)$ มักจะเรียกว่า**สัมประสิทธิ์ทวินาม** (Binomial Coefficients) เพราะมันปรากฏในการกระจาย $(a+b)^n$ ของทฤษฎีทวินาม (Binomial Theorem) นั่นคือ

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n, r)\, a^r\, b^{n-r}$$

(3) ถ้า n และ r เป็นเลขบวกจำนวนเต็มโดยที่ $0 \leq r \leq n$ แล้วเรามีทฤษฎีเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ทวินามที่น่าสนใจดังนี้

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

2. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

กฎที่ 6 สิ่งของที่เท่ากัน n สิ่ง จะนำมาจัดกลุ่มทีละ r สิ่ง โดยการแทนที่จะได้วิธีการจัดกลุ่มเป็น

$$C_1(n, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} ; r \geq 1$$

ตัวอย่าง มีคน 3 คน และมีงานอยู่ 2 งาน จะมีวิธีกำหนดงานให้คนทำได้กี่วิธี?

$$C_1(3, 2) = \frac{(3+2-1)!}{n!(3-1)!} = 6$$

ตัวอย่าง มีคน 2 คน แต่มีงานอยู่ 3 งาน จะมีวิธีกำหนดงานให้คนทำได้กี่วิธี?

$$C_1(2, 3) = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = 4$$

กฎที่ 7 สิ่งของที่ต่างกัน n สิ่ง ถ้าแบ่งออกเป็น k พวก (Cell or Subsets) โดยให้พวกที่ 1 มี n_1 สิ่ง, พวกที่ 2 มี n_2 สิ่ง,....,พวกที่ k มี n_k สิ่ง แล้วจำนวนวิธีจัดกลุ่มเป็น

$$C_2(n, n) = \frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\ldots(n_k!)} ; \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

ตัวอย่าง คนงาน 10 คน ถ้ากำหนดให้ไปทำงาน 3 ชนิด ชนิดแรกต้องการใช้คน 3 คน ชนิดที่สองใช้คน 5 คน และชนิดที่สามใช้ 2 คน จะมีวิธีกำหนดได้กี่วิธี?

$$C_2(10, 10) = 10!/(3!5!2!) = 2520 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง เลข 0ถึง 9 ถ้าจะนำมาประกอบเป็นจำนวนเลข 2 หลัก จะได้กี่วิธี (ไม่ให้เลขซ้ำกัน)

เลข 0 ถึง 9 จะมีตัวเลขอยู่ 10 ตัว

ดังนั้น $P(10, 2) = 10!/(10-2) = 90$ วิธี

กฎที่ 2 จำนวนการจัดเรียงอันดับของสิ่งของที่ต่างกัน n สิ่ง ซึ่งนำมาจัดเรียงทีละ r สิ่ง โดยการแทนที่ จะได้

$$P_1(n, r) = n^r, r \geq 1$$

ตัวอย่าง จำนวนเลข 2 หลัก ที่ประกอบขึ้นจากเลข 0 ถึง 9 จะได้กี่จำนวน?

$$P_1(10, 2) = 10^2 = 100$$

กฎที่ 3 การจัดเรียงอันดับแบบวงกลม (Circular Permutations) : จำนวนวิธีของการจัดเรียงอันดับของสิ่งของที่ต่างกัน n สิ่ง โดยจัดเรียงเป็นวงกลม จะได้

$$P_2(n, n) = (n-1)!$$

ตัวอย่าง นักศึกษา 3 คน นั่งเรียงกันเป็นวงกลม จะได้กี่วิธี?

$$P_2(3, 3) = (3-1)! = 2$$

กฎที่ 4 ถ้าสิ่งของ n สิ่ง แบ่งเป็นออกเป็นพวกที่เหมือนกัน k พวก, พวกแรกมี n_1 สิ่ง, พวกที่สองมี n_2 สิ่ง, ... , พวกที่ k มี n_k สิ่ง แล้วจำนวนการจัดเรียงอันดับกำหนดไว้ดังนี้

$$P_3(n, n) = n!/\{(n_1!)(n_2!)\ldots\ldots(n_k!)\}\ ;\ n_1 + n_2 \ldots\ldots + n_k = n$$

ตัวอย่าง **วิธีที่จะจัดเรียงอันดับของคำว่า** "Statistics" ได้กี่วิธี?

Statistics มี S จำนวน 3 ตัว, t 3 ตัว, i 2 ตัว, และ a, c อย่างละตัว

ดังนั้น จำนวนจัดเรียงอันดับจะเป็น

$$P_3(10, 10) = \frac{10!}{(3!)(3!)(2!)(1!)(1!)} = 50400 \text{ วิธี}$$

(4) **การจัดกลุ่ม** (Combination) : การจัดกลุ่มก็คือการจัดเรียงโดยไม่คำนึงถึงอันดับ เรามีวิธีการคิดคำนวณดังกฎต่อไปนี้

กฎที่ 5 สิ่งของที่ต่างกัน n สิ่ง จะนำมาจัดกลุ่มทีละ r สิ่ง โดยไม่แทนที่ จะได้จำนวนวิธีการจัดกลุ่มเป็น

$$C(n,r) = n!/(r!\ (n-r)!)\ ,\quad r \leq n$$

จะเห็นได้ว่า (1) การจัดกลุ่มเหมือนกับการจัดเรียงอันดับสิ่งของ n สิ่ง ที่มี r สิ่งเหมือนกัน และอีก (n-r) สิ่ง เหมือนกัน นั่นเอง (ดูกฎที่ 4)

2.6 วิธีวัดความน่าจะเป็น (Methods of Measuring Probability)

จากนิยามของความน่าจะเป็นจะเห็นว่าความน่าจะเป็นนี้คือมาตรวัดชนิดหนึ่งที่ใช้วัดความไม่แน่นอนของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ นั่นคือ ใช้วัดว่าเหตุการณ์ที่สนใจจะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงไร ผลที่วัดออกมาจะเป็นจำนวนเลข จำนวนเลขนั้นมักจะอยู่ในรูปทศนิยม, สัดส่วน, หรือเปอร์เซ็นต์ ในการกำหนดจำนวนเลขให้แก่เหตุการณ์หนึ่ง หรือในการวัดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่ง ๆ นั้นมีวิธีการกำหนดอยู่ 2 วิธีคือ

ก. **วิธีปรนัย** (Objective View) วิธีวัดแบบนี้จะได้ความน่าจะเป็นเชิงปรนัย (Objective Probability) ซึ่งอาศัยหลักเกณฑ์ดังนี้

(1) หลักความจริง หรือหลักเหตุผล (Axiomatic approach or Logical View) หรือหลักสมมาตร (Symmetry Principle) การวัดที่อาศัยเกณฑ์นี้พัฒนามาจากเกมส์พนันที่ยึดถือความจริง หรือเหตุผล และข้อสมมุติที่ว่า "ผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองจะไม่มีผลร่วมกัน แต่มีโอกาสจะเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน (Mutually exclusive and Equally likely) ดังนั้นจำนวนเลขหรือความน่าจะเป็นที่จะกำหนดให้แก่แต่ละผลทดลองจึงเท่า ๆ กัน นั่นคือ ถ้ามีผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ n แล้ว เราจะกำหนดจำนวนเลข หรือความน่าจะเป็นให้แก่แต่ละผลทดลองเป็น 1/n เช่น ทอดลูกเต๋า ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าใดหน้าหนึ่งเท่ากันหมด คือ 1/6

สำหรับเหตุการณ์หนึ่งที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้จำนวนหนึ่ง เรามีวิธีการกำหนด ความน่าจะเป็นได้ดังนี้

นิยาม ถ้ากลุ่มผลทดลอง S ประกอบด้วยผลทดลองที่ไม่มีผลร่วมกันเลย แต่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน เป็นจำนวน n(S) และถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่สนใจ ซึ่งกำหนดขึ้นจาก S ประกอบด้วยผลทดลองเป็นจำนวน n(E) แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E, P(E), จะเป็นอัตราส่วนของ n(E) ต่อ n(S) นั่นคือ

$$P(E) = n(E)/n(S)$$

ตัวอย่าง ในการทอดลูกเต๋า ถ้าสนใจหน้าที่ขึ้น เราจะได้จำนวนผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด, n(S) เป็นจำนวน 6 และถ้าสนใจเหตุการณ์ที่ได้หน้าคู่ ซึ่งมีจำนวนผลทดลอง n(E) เป็น 3 ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้หน้าคู่, P(E) เป็น 3/6 หรือ 1/2

การกำหนดความน่าจะเป็นแบบนี้ John Maynard Keynes เป็นผู้กำหนดคนแรกในผลงานเรื่อง "A Treatise on Probability", (1921)

(2) หลักการทดลอง (Empirical Approach) หรือหลักความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency Principle) การวัดที่อาศัยหลักนี้จะกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจในเทอมของความถี่สัมพัทธ์ระยะยาวของการเกิดขึ้น (Long-run relative frequency of Occurrence) นั่นคือคิดเป็นอัตราส่วนของจำนวนครั้งที่เหตุการณ์เกิดขึ้นกับจำนวนครั้งทั้งหมดที่ทำการทดลอง

และจะเรียกอัตราส่วนนี้ว่า ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ ถ้าทำการทดลองซ้ำ ๆ กันเป็นจำนวนมากครั้งแล้ว เราเรียกอัตราส่วนนั้นว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้น

เนื่องจากคำว่า ระยะยาว และจำนวนมากครั้งที่กล่าวมา เป็นคำที่เข้าใจยาก จึงหลีกเลี่ยงคำเหล่านี้ในการกำหนดความน่าจะเป็น แต่จะกำหนดว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่งเป็นขีดจำกัด (Limit) ของความถี่สัมพัทธ์ที่เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้น ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม ในการทดลอง n ครั้ง ถ้าเหตุการณ์ที่สนใจเกิดขึ้น f ครั้ง ความถี่สัมพัทธ์ f/n (ในเมื่อ n ไม่จำกัดจำนวน) จะเข้าใกล้เลขจำนวนหนึ่ง เลขจำนวนนี้จะเรียกว่าขีดจำกัดของความถี่สัมพัทธ์ ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E กำหนดได้ว่าเป็นขีดจำกัดของความถี่สัมพัทธ์ของมันนั่นคือ

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} f/n$$

นิยามเช่นนี้ ยุ่งยากในทางปฏิบัติ เพราะจำนวนครั้งที่ทำการทดลองนั้น เราทำได้เพียงจำกัดจำนวนครั้งเท่านั้น ไม่ใช่ไม่จำกัดจำนวนครั้ง แต่อย่างไรก็ตามจากกฎของธรรมชาติที่บอกให้เราทราบว่า "ในการทดลองต่าง ๆ ที่สามารถทำซ้ำ ๆ ได้ครั้งแล้วครั้งเล่า ภายใต้สภาวการณ์คงที่อย่างหนึ่งนั้น จะมีคุณลักษณะที่น่าสนใจอย่างหนึ่ง คือ ถ้าทำการทดลองซ้ำ ๆ เป็นจำนวนครั้งไม่จำกัดความถี่สัมพัทธ์หรือสัดส่วนของครั้งในเหตุการณ์ใด ๆ ที่เกิดขึ้นจะคงที่มากขึ้น ๆ ขณะที่จำนวนครั้งของการทดลองได้เพิ่มขึ้น ๆ และแนวโน้มของสัดส่วนนี้ จะมุ่งเข้าหาค่าคงที่ค่าหนึ่ง คุณลักษณะเช่นนี้ได้ชื่อว่าสภาวะปกติเชิงสถิติ (Statistical Regularity) หรือความคงที่ของความถี่สัมพัทธ์ (Stability of Relative Frequencies) ดังนั้น นิยามที่ใช้วัดความน่าจะเป็นโดยอาศัยหลักการทดลองที่นิยมกันมากก็คือ

นิยาม ในการทดลองเชิงสุ่มที่ทำการทดลองจำนวน n ครั้ง เหตุการณ์ที่สนใจ E เกิดขึ้น f ครั้ง สัดส่วน f/n จะมีแนวโน้มจะคงที่ (Stabilize) ณ ค่า P(E) ในเมื่อ n เพิ่มขึ้นไม่จำกัดจำนวน และสัดส่วน f/n นี้ จะเรียกว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E นั้น นั่นคือ

$$P(E) = f/n$$

เราเห็นได้ว่าจำนวนครั้ง f ที่เกิดขึ้นของเหตุการณ์จะผันแปรจากค่าต่ำสุด (นั่นคือเหตุการณ์ไม่เกิดขึ้นสักครั้ง) ถึงค่าสูงสุด (นั่นคือเหตุการณ์จะเกิดขึ้นทุกครั้งที่ทำการทดลอง) ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E จะผันแปรจากค่าต่ำสุด ถึงสูงสุด นั่นคือ

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

สำหรับการทดลองที่จำกัดจำนวนครั้ง ความถี่สัมพัทธ์ f/n ที่สังเกตได้จะเป็นแต่เพียงค่าประมาณ (Estimate) ของค่าจริง ๆ ของ P(E) เท่านั้น อย่างไรก็ตามถ้าจำนวนครั้งของการทดลองมากพอ เราก็หวังอย่างมีเหตุผลว่า ความถี่สัมพัทธ์ที่สังเกตได้จะใกล้เคียงกับความน่าจะเป็นจริง ๆ ของเหตุการณ์ E นั้น เช่น เมื่อสงครามโลกครั้งที่สอง J.E. Kerrick ได้ทอดเหรียญ 10,000 ครั้ง

ปรากฏว่า ขึ้นหัว 5067 ครั้ง ดังนั้น 5067/10000 เป็นค่าประมาณของค่าจริงคือ 0.50 ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นจริงของเหตุการณ์ที่สตางค์จะขึ้นหัว

การจัดความน่าจะเป็นโดยวิธี John Venn เป็นผู้สนใจมาก่อน ต่อมาก็มี Von Mises และ Reichenbach

ข. วิธีอัตนัย (Subjective View) โดยวิธีนี้เราจะได้ความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัย (Subjective Probability) ในการกำหนดความน่าจะเป็นเชิงปรนัยที่กล่าวมาแล้วว่าเป็นความถี่สัมพัทธ์นั้นจะมีเหตุผลก็ต่อเมื่อการทดลองสามารถทำซ้ำ ๆ ได้ แต่บางครั้งเราก็ทำไม่ได้ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องหาวิธีวัดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจด้วยวิธีอื่น นั่นคือ ได้ใช้วิธีอัตนัย ซึ่งวิธีนี้ยึดตัวบุคคลเป็นหลัก และได้ใช้ระดับความเชื่ออย่างมีเหตุผล (Degree of Rational Belief) เป็นประโยชน์ในการกำหนดความน่าจะเป็น ปัจจุบันการกำหนดความน่าจะเป็นวิธีนี้กลายเป็นหลักสำคัญในทฤษฎีการตัดสินใจ

ตามปกติสภาวการณ์ของการตัดสินใจที่ประสบอยู่มาก ไม่ได้เกิดขึ้นมาในอดีตและบางครั้งก็ไม่เกิดขึ้นอีกในแบบเดิม ดังนั้น จึงไม่มีความถี่สัมพัทธ์ของการเกิดขึ้นสำหรับเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่สนใจหรือไม่มีพื้นฐานในหลักเหตุผลอย่างแจ่มชัดเพื่อที่จะกำหนดความน่าจะเป็นนั่นก็คือ ทำให้เราไม่สามารถกำหนดในเชิงปรนัยได้ ตัวอย่างเช่น ในการแข่งม้า อาจจะมีม้าเข้าแข่ง 8 ตัวม้าใดจะเข้าหลักชัยที่หนึ่งนั้น เป็นผลจากการทดลองเชิงสุ่ม ซึ่งบอกไม่ได้เลยว่าแต่ละตัวนั้นมีโอกาสที่จะเข้าหลักชัย เป็นที่หนึ่งได้เท่า ๆ กัน (คือเท่ากับ 1/8) ทั้งนี้ เพราะทำให้เกิดขึ้นซ้ำ ๆ ในสภาวะการณ์เดียวกันไม่ได้เราจึงวัดความน่าจะเป็นแบบวิธีปรนัยไม่ได้ ดังนั้น วิธีที่เราจะวัดความน่าจะเป็นได้ก็คือ ใช้วิธีประมาณโดยการชั่งใจของเราเองในเชิงจิตวิสัย หรืออัตนัย ซึ่งใช้ความรู้ที่ว่า ก่อนแข่งม้าเขามักจะเอาม้ามาเดินผ่านอัฒจรรย์ให้คนได้ดูลักษณะท่าทางของม้า และอาจมีสถิติการวิ่งเก่า ๆ พิมพ์แจก นั่นก็คือทำให้เราสามารถกำหนดความน่าจะเป็นคร่าว ๆ ว่าความน่าจะเป็นที่ม้าตัวหนึ่งตัวใดจะเข้าหลักชัยเป็นเท่าใด

การกำหนดความน่าจะเป็นเช่นนี้เป็นการกำหนดเชิงจิตวิสัย คือ ใช้ความรู้สึกของตนเองเป็นเครื่องกำหนด การกำหนดแบบนี้จะถูกต้องตามความน่าจะเป็นที่แท้จริงหรือใกล้เคียงเท่าไรก็ไม่สามารถพิสูจน์ได้ในเฉพาะกรณี แต่จากประสพการณ์ที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นว่าการใช้ความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัยมาช่วยประกอบในการตัดสินใจ จะได้ผลประโยชน์บ้าง ซึ่งดีกว่าที่จะไม่ใช้ความน่าจะเป็นเสียเลย

การวัดหรือกำหนดในเชิงอัตนัยนี้ James Bernoulli ได้สนใจและพิมพ์หนังสือชื่อ Ars Conjectandi (the Art of Guessing) ซึ่งได้กำหนดความน่าจะเป็นในเทอมของดีกรีของความเชื่อมั่นและ August De Morgan ได้กำหนดความน่าจะเป็นในเทอมของความเชื่อ ต่อมา L.J.

Savage R.Schlaifer และ H.Raiffa ได้นำการกำหนดความน่าจะเป็นเชิงอัตนัยไปใช้ในทฤษฎีการตัดสินใจ

2.7 ฟังก์ชั่น และ สัจจพจน์ความน่าจะเป็น (Probability Functions and Axioms)

นิยาม ให้ S เป็นกลุ่มผลทดลองของการทดลองเชิงสุ่ม และให้ $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ เป็นเหตุการณ์ใน S หรือ $A_i \subset S$ (i= 1,2,3,.) ฟังก์ชั่น P ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นที่กำหนดจำนวนเลขจริง $P(A_i)$ ให้แก่แต่ละเหตุการณ์ A_i ที่อยู่ใน S นั้นจะเรียกว่า ฟังก์ชั่นน่าจะเป็น ถ้าค่า $P(A_i)$ ของฟังก์ชั่นสอดคล้องกับสัจจพจน์ต่อไปนี้

สัจจพจน์ 1. $0 \leq P(A_i) \leq 1$; i = 1, 2, 3,......

สัจจพจน์ 2. $P(S) = 1$

สัจจพจน์ 3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ในเมื่อ $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$

$P(A_i)$ เรียกว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A_i และ คู่ (S,P) เรียกว่าตัวแบบน่าจะเป็น (Probability Model or Space)

บทแทรกของสัจจน์ 3 ถ้า s_i เป็นผลทดลองที่เป็นไปได้ที่อยู่ในเหตุการณ์ A_i แล้ว

$$P(A_j) = \sum_{s_i \in A_i} P(s_i)$$

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋าครั้งหนึ่ง และสังเกตหน้าที่ขึ้น

กลุ่มผลทดลอง S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ถ้าความน่าจะเป็นที่จะกำหนดให้แก่แต่ละผลทดลองตามหลักความจริงแล้ว เราจะได้ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นดังนี้

เหตุการณ์ A_i	1	2	3	4	5	6
ความน่าจะเป็น $P(A_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

เราสามารถตรวจสอบได้ว่าตารางนี้เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็น เพราะ

(1) $P(A_i)$ เท่ากับ 1/6 ซึ่งอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

(2) $P(S) = 1$

(3) กำหนด A_1, A_2 โดยที่ $A_1 \cap A_2 = \phi$ จะได้ว่า

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \text{ นั่นคือ } 2/6 = 1/6+1/6$$

ตัวอย่าง นักธุรกิจผู้มั่งคั่งคนหนึ่งมีหุ้นอยู่ 3 ชนิด สาธารณูปโภค, อุตสาหกรรม และธนาคาร ซึ่งคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ตามลำดับ ดังนี้ 20, 30, และ 50 ถ้าเลือกหุ้นมาหุ้นหนึ่ง (แต่ละหุ้นที่จะถูกเลือกเท่า ๆ กัน) แล้วแบบของหุ้นที่จะเลือกจะเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน A = [สาธารณูปโภค, อุตสาหกรรม, ธนาคาร]

ดังนั้น P(สาธารณูปโภค) = 20/100 = .20

P (อุตสาหกรรม) = 20/100 = .30

P (ธนาคาร) = 50/100 = .50

ข้อสังเกต ฟังก์ชั่น (Function) เป็นคำที่ใช้กันบ่อย ๆ ในทางคณิตศาสตร์ ความน่าจะเป็นและสถิติ สามารถอธิบายได้ดังนี้

กำหนดให้ A และ B เป็นเซท และกฎของการสัมนัย (Rule of Correspondence) ที่กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของ A กับสมาชิกของ B ในลักษณะที่ว่าทุก ๆ สมาชิก x ของ A จะมีสมาชิก ตัวหนึ่งและตัวเดียว (Unique) ของ B ที่สมนัยกับ x แล้วกฎนี้จะระบุเซทของคู่ลำดับ (Ordered pairs), f และเซท f นี้ เรียกว่าฟังก์ชั่นจาก A ไป B (function from A to B)

ฟังชั่น f สามารถเขียนได้เป็น f = {(x, y)/สำหรับทุก $x \in A$ จะมี $y \in B$ ตัวหนึ่งตัวเดียวเท่านั้น}

มีสิ่งที่น่าสนใจจากนิยามของฟังก์ชั่นดังนี้

(1) ฟังก์ชั่นเป็นเซท

(2) ฟังก์ชั่นจะแทนด้วยอักษรโรมัน เช่น f,g,h,F,G,.....เป็นต้น

(3) สมาชิก y ในเซท B อาจเขียนได้ f(x) ในเมื่อ x เป็นสมาชิกหนึ่งใน A ดังนั้น f(x) และ y จึงแทนสิ่งเดียวกัน

(4) ฟังก์ชั่นจาก A ไป B จะให้เซทของคู่ลำดับในรูป (x,y) หรือ (x, f(x)) และฟังก์ชั่นจาก B ไป A จะให้เซทคู่ลำดับในรูป (y, x) หรือ (y, f(y))

(5) ถ้า f เป็นฟังก์ชั่นจาก A ไป B แล้วเซท A จะเรียกว่าโดเมน (Domain) ของฟังก์ชั่น และเซท B เรียกว่า พิสัย (Range) ของฟังก์ชั่น กระบวนการที่สร้างความสมนัย หรือคู่ลำดับเรียกว่าการฉาย (mapping) เซท A ที่ฉาย (map) เข้าไปในเซท B จะแทนด้วย $A \longrightarrow B$

ฟังก์ชั่นที่มีพิสัยเป็นเลขจำนวนจริง (Real numbers) จะเรียกว่าฟังก์ชั่นค่าจริง (Real-valued function) ในทฤษฎีน่าจะเป็นจะใช้ฟังก์ชั่นค่าจริงนี้

ในการกล่าวถึงฟังก์ชั่น เรามักจะสรุปได้ดังนี้

(1) ฟังชั่นมักจะระบุโดยการบรรยายถึงกฎของการสมนัยเท่านั้น ซึ่งบ่อยครั้งจะอยู่ในรูปของสมการ

(2) โดเมนและพิสัยของฟังก์ชั่นมักจะสมมุติว่าเป็นเซทของเลขจำนวนจริง

(3) x จะใช้แทนสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชั่น

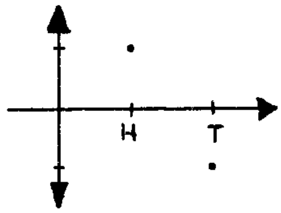
(4) y = f(x) ใช้แทนสมาชิกในเซทพิสัย (Range set)

ฟังก์ชั่นสามารถแสดงได้หลายวิธี ดังนี้

- การบรรยาย
    - ทอดสตางค์อันหนึ่ง ถ้าได้หัวจะได้เงิน 5 บาท ถ้าได้ก้อยจะเสีย 5 บาท
    - เซ็ทของคู่ระดับ

$$f = \{(H,5), (T-5)$$

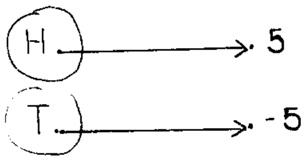
- กราฟ



- ตาราง

ผลทดลอง	เงินที่ได้รับ
H	5
T	-5

- แผนภาพ

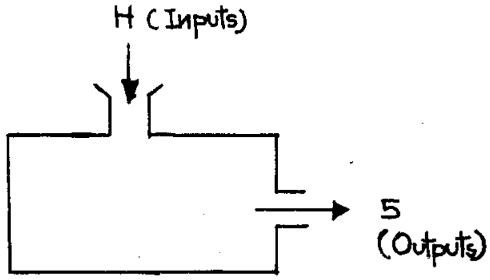


- สูตรหรือสมการ

$$f(H) = 5$$

$$f(T) = -5$$

- เครื่องจักร



2.8 ความน่าจะเป็นร่วมและทางเดียว (Joint and Marginal Probability)

ในกลุ่มผลทดลอง **S** ซึ่งประกอบด้วย n ผลทดลอง และแต่ละผลทดลองมีความน่าจะเป็น $1/n$ ถ้ามีเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ประกอบเป็นส่วนแบ่งของ **S** และเหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots, B_m$ ถ้าประกอบเป็นส่วนแบ่งของ **S** อีก แล้วเราสามารถสร้างกลุ่ม

ผลทดลองเป็นตาราง 2 ทาง(Two-way Table) ได้ดังนี้

	B_1	B_2	B_j	B_m	
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{1j}	n_{1m}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{2j}	n_{2m}	$n_{2\cdot}$
A_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{ij}	n_{im}	$n_{i\cdot}$
A_k	n_{k1}	n_{k2}	n_{kj}	n_{km}	$n_{k\cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	n_{j}	$n_{\cdot m}$	n

ในเมื่อ n_{ij} ($i = 1,2,\ldots\ldots, k$. $j = 1,2,\ldots\ldots,m$) เป็นจำนวนผลทดลองที่มีทั้งลักษณะของ A_i และ B_j เช่น n_{11} มีลักษณะของ A_1 และ B_1 , n_{23} มีลักษณะของ A_2 และ B_3 เป็นต้น

ผลรวมของทุก ๆ n_{ij} จะเท่ากับ n นั่นคือ $\sum_{i}^{k}\sum_{j}^{m} n_{ij} = n$

$n_{i\cdot}$ เป็นผลรวมของ A_i โดยไม่คำนึงถึงลักษณะอื่น

$n_{\cdot j}$ เป็นผลรวมของ B_j โดยไม่คำนึงถึงลักษณะอื่น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A_i และ B_j $P(A_i \cap B_j)$ นั้นจะเท่ากับ n_{ij}/n ซึ่งเราจะเรียกว่า ความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability) ของเหตุการณ์ A_i และ B_j

ถ้าเราสนใจเพียงลักษณะเดียว เช่น A_2 (ไม่สนใจลักษณะ B_j) แล้ว ความน่าจะเป็นของ A_2 , $P(A_2)$, จะเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= (n_{21}+n_{22}+\ldots\ldots+n_{2m})/n \\
&= \sum_{j=1}^{m} n_{2j}/n = n_{2\cdot}/n
\end{aligned}
$$

$P(A_2)$ นี้เรียกว่าความน่าจะเป็นทางเดียว (Marginal Probability) โดยทั่ว ๆ ไปเราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &= \sum_{j=1}^{m} n_{ij}/n = n_{i\cdot}/n \\
&= \sum_{j=4}^{m} P(A_i \cap B_j)
\end{aligned}
$$

และในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นทางเดียวของ B_j คือ

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}/n = n_{.j}/n$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B_j)$$

ตัวอย่าง นักวิจัยได้สัมภาษณ์หัวหน้าครอบครัวเกี่ยวกับรายได้ต่อปีและจำนวนรถที่ครอบครองอยู่เป็นจำนวน 600 ราย ได้ข้อมูลมาดังนี้

รายได้ต่อปี (บาท)

		−1500	1500−37500	37500 − 50000	50000 −
จำนวนรถ	2^+	1	10	30	180
	1	21	100	200	30
	0	10	8	6	4

ให้ C_1, C_2, C_3 เป็นจำนวนที่มีอยู่ในครอบครัวเป็นจำนวน 2 คัน หรือมากกว่าเพียงคันเดียว และไม่มีรถเลยตามลำดับ

R_1, R_2, R_3, R_4 เป็นครอบครัวที่มีรายได้น้อยกว่า 15,000, 15,000 ถึง 37,500, 37,500 ถึง 50,000 และ 50,000 บาท ขึ้นไปตามลำดับ

เราสามารถกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$P(C_2 \cap R_3) = 200/600 = 2/3$$
$$P(R_4 \cap C_1 = 180/600 = 0.30$$
$$P(C_1) = (1+10+30+180)/600 = 221/600$$
$$P(C_2) = (21+100+200+30)/600 = 351/600$$
$$P(C_3) = (10+8+6+4)/600 = 28/600$$
$$P(R_1) = (1+21+10)/600 = 32/600$$
$$P(R_2) = (10+100+8)/600 = 118/600$$
$$P(R_3) = (30+200+6)/600 = 236/600$$
$$P(R_4) = (180+30+4)/600 = 214/600$$

2.9 ความน่าจะเป็นเงื่อนไข (Conditional Probability)

ตามปกติเราจะหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ เราก็เอาเหตุการณ์นั้นไปเทียบกับกลุ่มผลทดลองของมัน ดังตัวอย่างเช่น

ทอดลูกเต๋าสองลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมเป็น 7 จะเท่ากับ 6/36 ทั้งนี้เพราะว่า

กลุ่มผลทดลอง $S = \{(1,1), (1,2) \ldots\ldots (6,5), (6,6)\}$ จะมีจำนวน $n(S) = 36$

ถ้า E เป็นเหตุการณ์ของผลรวมเท่ากับ 7 แล้ว $E = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ และ $n(E) = 6$

แต่ E สามารถเขียนได้เป็น $E \cap S$ ดังนั้น $n(E) = n(E \cap S) = 6$

ฉะนั้นความน่าจะเป็นของ E, $P(E) = n(E \cap S)/n(S) = 6/36$

ความน่าจะเป็นที่กำหนดโดยการนำไปเทียบกับกลุ่มผลทดลองนี้บางทีเรียกว่า ความน่าจะเป็นไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Probability)

บางครั้งเราสนใจเหตุการณ์ที่เกี่ยวพันกับเหตุการณ์อื่น ความน่าจะเป็นของมันจะกำหนดได้โดยนำไปเทียบกับเหตุการณ์ที่เกี่ยวพันกันนั้น และความน่าจะเป็นนั้นเรียกว่า ความน่าจะเป็นเงื่อนไข (Conditional Probability) เหตุการณ์อื่นนี้จะมีผลทำให้เหตุการณ์ที่เราสนใจมีความน่าจะเป็นเปลี่ยนไปจากเดิม คือเปลี่ยนไปจากที่เราเทียบกับกลุ่มผลทดลอง และมันจะทำหน้าที่เสมือนกลุ่มผลทดลอง ซึ่งจะได้ชื่อว่ากลุ่มผลทดลองทดแทน (Reduced Sample Space)

ตัวอย่างเช่น ถ้าทราบว่าผลรวมของลูกเต๋าที่เป็น 7 นั้น มีหน้า 5 อยู่ด้วย แล้วความน่าจะเป็นของผลรวมเป็น 7 จะเปลี่ยนเป็นอย่างไร เมื่อให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่เกิดหน้า 5 ด้วย นั่นคือ

$$E_1 = \{(5,1), (5,2), \ldots\ldots, (1,5)\} \quad ; \quad n(E_1) = 11$$

ดังนั้น P (E เทียบกับ E_1) $= P(E/E_1) = n(E \cap E_1)/n(E_1)$

$$= 2/11$$

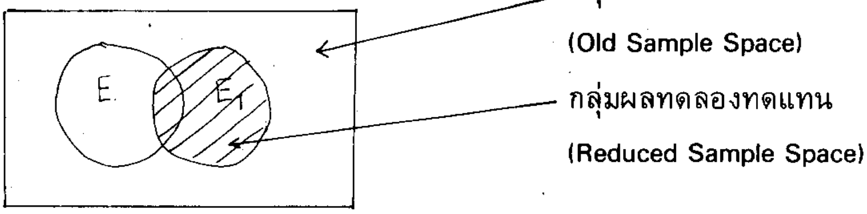
เพราะว่า $E \cap E_1 = \{(5,2), (2,5)\}$ $n(E \cap E_1) = 2$

เมื่อเหตุการณ์ E_1 ซึ่งมีความเกี่ยวพันกับเหตุการณ์ E ที่เราสนใจทำให้ความน่าจะเป็นของ E เปลี่ยนไปเช่นนี้ เราจะพูดว่า E ขึ้นอยู่กับ E_1 หรือ E และ E_1 ขึ้นอยู่แก่กัน (Statistically dependent) ต่อไปเราจะได้นิยามของความน่าจะเป็นเงื่อนไข

นิยาม ให้ S เป็นกลุ่มผลทดลอง และ E, E_1 เป็นเหตุการณ์ที่กำหนดใน S ความน่าจะเป็นของ E เมื่อกำหนดว่า E_1 เกิดขึ้นแล้วนี้จะเรียกว่าความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ

E ซึ่งเขียนได้เป็น $P(E/E_1)$ และกำหนดไว้ดังนี้

$$P(E/E_1) = P(E \cap E_1)/P(E_1) \; ; \; P(E_1) \neq 0$$



เราจะเห็นว่าเมื่อ E_1 เกิดขึ้นแล้วนั้นทำให้สมาชิกของ S เกิดขึ้นไม่ทั้งหมด ส่วนที่เกิดขึ้นจะเป็นของ E_1 ทั้งหมด นั่นคือ $E_1 \subseteq S$ สำหรับสมาชิกของ E นั้นก็จะเกิดขึ้นบางส่วน และส่วนที่เกิดขึ้นก็จะเป็นของ E_1 ด้วย นั่นคือ เป็นของ $E \cap E_1$ นั่นเอง

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของ E ที่เกิดขึ้นโดยกำหนด E_1 เกิดขึ้นแล้ว, $P(E/E_1)$, เราจะหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(E/E_1) &= n(E \cap E_1)/n(E_1) \\ &= \frac{n(E \cap E_1)/n(S)}{n(E_1)/n(S)} \\ &= P(E \cap E_1)/P(E_1) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า $P(E_1/E) = P(E_1 \cap E/P(E) \; ; P(E) \neq 0$

เราสามารถแสดงได้ว่าความน่าจะเป็นเงื่อนไข $P(E/E_1)$ นี้ สอดคล้องกับสัจจพจน์ของความน่าจะเป็นด้วย นั่นคือ

(1) $0 \leq P(E/E_1) \leq 1$

(2) $P(S/E_1) = 1$

(3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots / E_1) = \sum P(A_i/E_1); \; A_i \cap A_j = \phi, \; i \neq j$

ตัวอย่าง ในชมรมจิตวิทยามีสมาชิกอยู่ 1,000 คน ซึ่งมีทั้งนักศึกษา ชาย (M) และ หญิง (F) และมีทั้งนักศึกษาที่อยู่ในกรุงเทพมหานคร (U) และต่างจังหวัด R จำนวนของแต่ละอย่างแสดงได้ดังตาราง

	U	R	
M	200	100	300
F	400	300	700
	600	400	1000

ถ้าสุ่มสมาชิกในชมรมมาคนหนึ่งปรากฏว่าเป็นหญิง โอกาสที่เธอจะอยู่ต่างจังหวัดเป็นเท่าใด ?

ความน่าจะเป็นที่เราต้องการทราบคือ แต่เราทราบว่า เป็นกลุ่มผลทดลองทดแทนมีจำนวน 700 เราจึงได้ว่า

$$P(R/F) = n(R \cap F)/n(F)$$
$$= 300/70 = 3/7$$

แต่จากนิยาม

$$P(R/F) = P(R \cap F)/P(F)$$
$$= (300/1000)/(700/100)$$

ซึ่งเท่ากันกับที่คำนวณมาแล้วนั่นเอง

2.10 กฎของความน่าจะเป็นเบื้องต้น (Fundamental Probability Rules)

จากสัจจพจน์ของความน่าจะเป็นเราจะได้กฎของความน่าจะเป็นซึ่งใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่สนใจ ดังนี้

1. **กฎเติมเต็ม** (Complementation Rule) ถ้าเหตุการณ์ E และส่วนเติมเต็มของมัน $\bar{E}$ ประกอบเป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S แล้ว

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

หรือ

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

ตัวอย่าง ปัญหาเกี่ยวกับวันเกิด (Classical Birthday Problem) ; นักศึกษาในห้องหนึ่งมี n คน โอกาสที่นักศึกษาอย่างน้อย 2 คน มีวันเกิดตรงกันเป็นเท่าใด ?
(สมมติว่า 1 ปี มี 365 วัน)

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่นักศึกษาอย่างน้อย 2 คน มีวันเกิดร่วมกัน

$\bar{E}$ เป็นเหตุการณ์ที่นักศึกษาไม่มีวันเกิดร่วมกัน

เราจะเห็นได้ว่าวิธีหรือผลทดลองซึ่งเป็นไปได้ที่นักศึกษา n คน จะเกิดใน 365 วัน มีทั้งหมด 365 (365) (365).....(365) = $(365)^n$ วิธี

ส่วนวิธีที่นักศึกษาจะไม่มีวันเกิดร่วมกันมี $365\ (364)\ (363)\ldots\ldots$
$[365-(n-1)] = {}_{365}P_n$ วิธี

ดังนั้น $n(S) = 365^n$ และ $n(\bar{E}) = {}_{365}P_n$ ซึ่งเรากำหนดความ

น่าจะเป็นให้แก่เหตุการณ์ E นี้ได้เป็น

$$P(\bar{E}) = {}_{365}P_n / 365^n$$

นั่นคือ $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

$$= 1 - {}_{365}P_n / 365^n$$

โดยที่ $P(\bar{E}) = {}_{365}P_n / 365^n$

$$= \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\left(\frac{363}{365}\right)\cdots\cdots\frac{365-(n-1)}{365}$$

$$= (1)\,(1-1/365)(1-2/365)\cdots[1-(n-1)/365]$$

จากทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ว่า $\ln(1-x) \cong -x$ เราจะได้

$$\ln P(\bar{E}) \cong \sum_i (-i/365)$$

ดังนั้น $P(\bar{E}) \cong \exp\left[\sum_i (-i/365)\right]$

ถ้า $n = 26$ เราจะได้ว่า $P(\bar{E}) \cong 0.412$

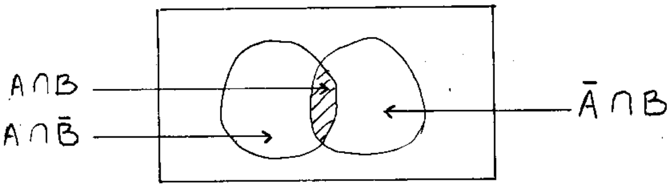
2. **กฎผลรวม** (Addition Rule) ถ้า A และ B เป็นสองเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

บทแทรก (1) ถ้า $A \cap B = \phi$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(2) ถ้า $A \cap B \neq \phi$ แล้ว $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

และ $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$



(3) ถ้า A, B และ C เป็นสามเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้ว

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(4) กฎผลบวกทั่วไป ก. ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็น k เหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_k) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j=2} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \cdots\cdots (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_k)$$

ข. ถ้า $A_i \cap A_j = \phi;\ i \neq j$ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_k)$$

ตัวอย่าง แพทย์ผู้เชี่ยวชาญด้านมะเร็งได้รวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับการตรวจคนไข้ไว้ ดังนี้

ผู้ป่วยรู้สึกเป็นมะเร็ง และจากการตรวจก็พบว่าจริง	5 %
ผู้ป่วยรู้สึกเป็นมะเร็ง แต่จากการตรวจก็ไม่พบ	45 %
ผู้ป่วย**ไม่รู้สึก**ว่า**เป็น** แต่ตรวจพบว่าเป็น	10 %
ผู้ป่วยไม่รู้สึกว่าเป็น และจากการตรวจก็ไม่พบ	40 %

จะหาความน่าจะเป็นที่ (1) ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็ง

(2) แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง

(3) แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง **หรือ** ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็น

ให้ **A** เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็ง

B เป็นเหตุการณ์ที่แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง

จากข้อมูลจะได้ว่า $P(A \cap B) = .05,\ P(A \cap \bar{B}) = .45$

$P(\bar{A} \cap B) = .10,\ P(\bar{A} \cap B) = .40$

ดังนั้น (1) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$= 05 + .45 = .5$

(2) $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$= 05 + .10 = .15$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= .5 + .15 - 05 = .60$

3. **กฎการคูณ** (Multiplication Rule) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ในกลุ่มผลทดลอง S แล้ว

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A/B)\ P(B) \\ P(B/A)\ P(A) \end{cases}$$

บทแทรก (1) ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใน S แล้ว

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

ตัวอย่าง นายกอไผ่เป็นนักศึกษาจิตวิทยา โอกาสนี้เขาจะผ่านสถิติศาสตร์ประมาณ .90 ถ้าเขาผ่านสถิติศาสตร์แล้วโอกาสที่เขาจะผ่านระเบียบวิธีวิจัยเป็น .99 ดังนั้นโอกาสที่กอไผ่จะผ่านทั้งสถิติศาสตร์และระเบียบวิธีวิจัยเป็นเท่าใด ?

ให้ S เป็นเหตุการณ์ที่ผ่านสถิติศาสตร์ และ R เป็นเหตุการณ์ที่ผ่านระเบียบวิธีวิจัย แล้วความน่าจะเป็นที่ต้องการ คือ $P(S \cap R)$

$$P(S \cap R) = P(S)\,P(R/S)$$
$$= .90(.99) = .891$$

บ่อยครั้งเราทราบว่าเหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้นแล้ว แต่ก็ไม่มีผลทำให้ความน่าจะเป็นของอีกเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนไป นั่นคือ $P(E/E_1) = P(E)$ หรือ $P(E_1/E) = P(E_1)$ นั่นเอง เราจะพูดว่าสองเหตุการณ์นี้เป็นอิสระกันเชิงสถิติ (Statistical Independence) ซึ่งเราจะให้นิยามต่อไปนี้

สองเหตุการณ์ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นอิสระกันในเชิงสถิติ ถ้าการเกิดขึ้นของเหตุการณ์หนึ่งไม่มีผลกระทบต่อการเกิดขึ้นของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

จากกฎของการคูณนั้นเมื่อเหตุการณ์เป็นอิสระกันในเชิงสถิติเราจะได้บทแทรก ดังนี้

(2) เหตุการณ์ A และ B ซึ่งอยู่ในกลุ่มผลทดลอง S นั้น จะเป็นอิสระกันในเชิงสถิติก็ต่อเมื่อ (if and only iff)

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

(3) ถ้า $E_1, E_2, \ldots, E_n$ เป็นเหตุการณ์ใน S ซึ่งเป็นอิสระกันในเชิงสถิติแล้ว

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\,P(E_2) \ldots P(E_n)$$

บทกลับของบทแทรก (3) นี้ไม่เป็นจริงเสมอไป

ตัวอย่าง เครื่องมือทางจิตวิทยาซึ่งมีส่วนประกอบเป็นไฟฟ้าที่สำคัญอยู่ 2 ส่วน แต่ละส่วนทำงานเป็นอิสระกัน เครื่องมือนี้จะทำงานได้ถ้าส่วนประกอบอันหนึ่งอันใดทำงานได้ ถ้าโอกาสที่ส่วนประกอบอันใดอันหนึ่งจะทำงานไม่ได้เป็น 0.01 แล้วโอกาสที่เครื่องมือทางจิตวิทยานี้จะใช้งานไม่ได้เป็นเท่าใด ?

ให้ E_1 และ E_2 เป็นส่วนประกอบตัวแรกและตัวที่สองทำงานไม่ได้แล้ว

$$P(E_1) = P(E_2) = .01$$

ดังนั้น เครื่องมือทางจิตวิทยาจะทำงานไม่ได้ $P(E_1 \cap E_2)$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1)\,P(E_2) \\ &= (.01)(.01) = .0001 \end{aligned}$$

ข้อควรระวัง เหตุการณ์ที่เป็นอิสระกันในเชิงสถิติกับเหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกันนั้นเป็นคนละเรื่องกัน อย่าเอามาปนกัน **ความเป็นอิสระในเชิงสถิติ** เป็นแนวความคิดที่เกี่ยวข้องกับการกำหนดความน่าจะเป็น แต่**ความไม่มีผลร่วมกัน**ไม่ได้นิยามในเทอมของความน่าจะเป็น (นั่นคือ นิยามในเทอมของเหตุการณ์)

แผนภาพเวนนี้สามารถแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติของความไม่มีผลร่วมกันของเหตุการณ์ได้ แต่ไม่สามารถแสดงความเป็นอิสระในเชิงสถิติด้วยแผนภาพเวนนี้ได้

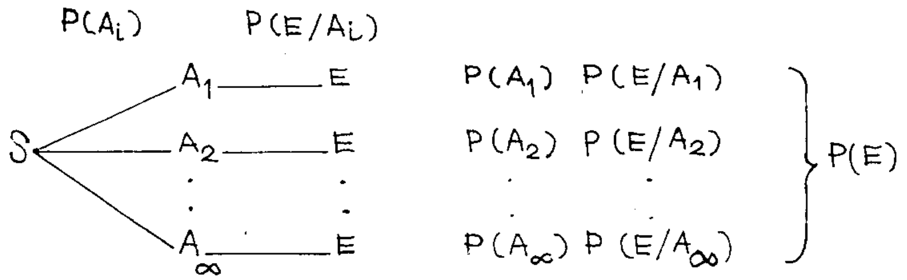
4. **กฎผลรวมทั้งหมด** (Law of Totai Probability) ถ้า A_1, A_2 .....ประกอบเป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S และ E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S โดยที่ $E \neq \phi$ แล้ว

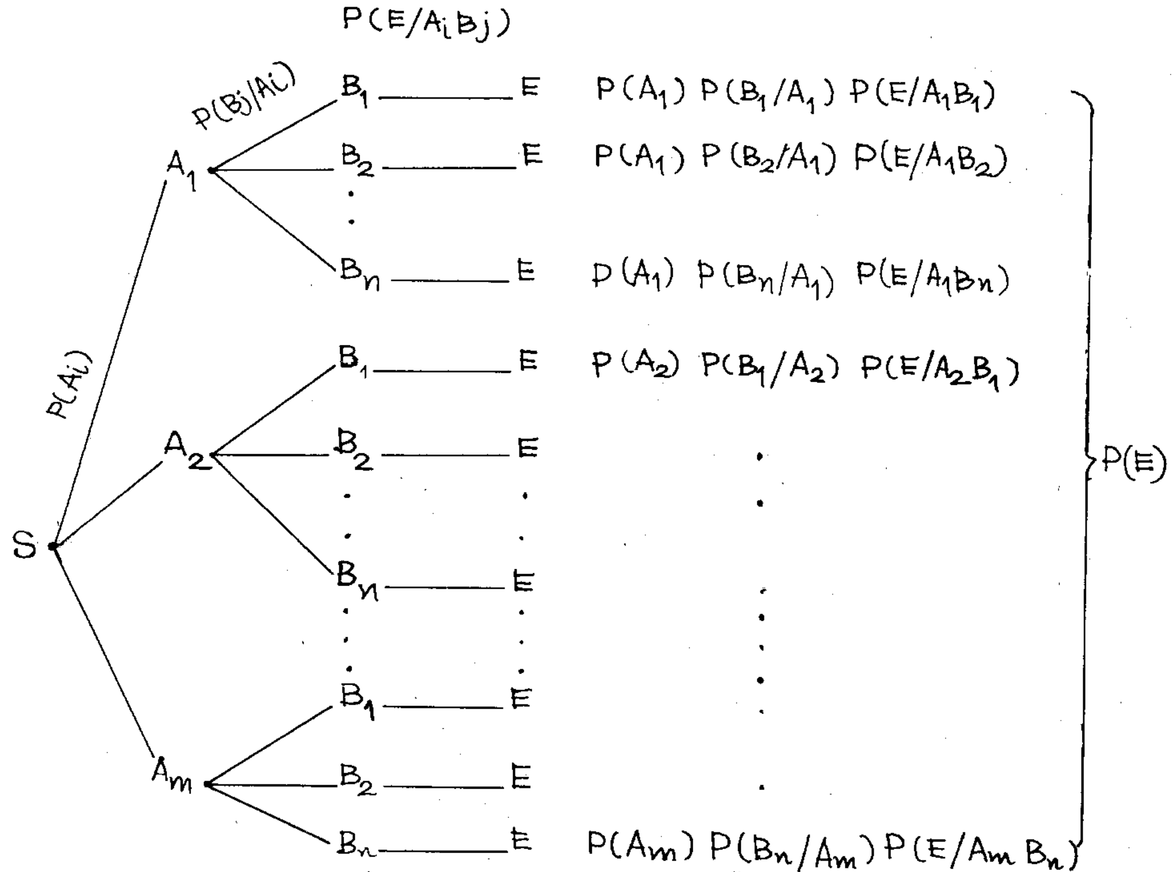
$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_i P(E \cap A_i) \\ &= \sum_i P(A_i)\,P(E/A_i) \end{aligned}$$

บทแทรก ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ และ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ต่างก็ประกอบเป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S และถ้า E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ซึ่ง $P(E) \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_i^m \sum_j^n P(E \cap A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \sum_j P(A_i)P(B_j/B_i)P(E/A_iB_j) \end{aligned}$$

จากกฎและบทแทรกเราสามารถแสดงให้เห็นได้ชัดเจนด้วยแผนภาพแขนง (Tree diagrams) ดังนี้





ตัวอย่าง ในการศึกษาผู้ปกครองของเด็กนักเรียนในโรงเรียนหนึ่งพบว่ามีระดับการศึกษาคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ ดังนี้

ประถมศึกษา	50	อุดมศึกษา	10
มัธยมศึกษา	40		

และยังพบว่าผู้ปกครองที่มีระดับการศึกษาต่าง ๆ นี้ มีเปอร์เซ็นต์ที่ว่างงานดังนี้

ประถมศึกษาว่างงาน	5	อุดมศึกษาว่างงาน	0.1
มัธยมศึกษาว่างงาน	2		

ความน่าจะเป็นที่ผู้ปกครองเด็กในโรงเรียนนี้ว่างงานเป็นเท่าใด ?

ให้ G_1, G_2, G_3 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ปกครองเด็กมีการศึกษาระดับประถม, มัธยม และอุดมศึกษา ตามลำดับ และ U เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ปกครองเด็กว่างงาน

ดังนั้น $P(U) = P(G_1)P(U/G_1) + P(G_2)P(U/G_2) + P(G_3)P(U/G_3)$

$= .5(.05) + .4(.02) + .1(.001)$

$= .0331$

ตัวอย่าง ผู้จัดการภัตตาคารแห่งหนึ่งประมาณว่าในวันสุดสัปดาห์ของต้นเดือนจะมีคนออกไปทานอาหารนอกบ้าน 50% คนที่ทานอาหารนอกบ้านจะดื่มเหล้า 70% แต่คนที่อยู่บ้านจะดื่มเหล้า 20% ผู้ที่ทานอาหารนอกบ้านและดื่มเหล้านั้นโอกาสที่จะเที่ยวคลับต่ออีกประมาณ 80% และผู้ทานอาหารนอกบ้านแต่ไม่ดื่มเหล้าโอกาสที่จะเที่ยวคลับต่อประมาณ 20% ส่วนผู้ที่ทานอาหารอยู่กับบ้าน และดื่มเหล้าโอกาสที่จะเที่ยวคลับประมาณ 20% และผู้ทานอาหารที่บ้านแต่ไม่ดื่มเหล้าโอกาสที่จะไปเที่ยวคลับประมาณ 0.5%

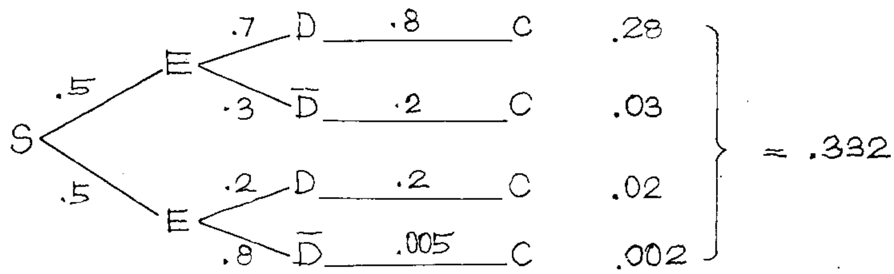
จงประมาณเปอร์เซ็นต์ของคนที่ไม่ได้ไปเที่ยวคลับในวันสุดสัปดาห์ของต้นเดือน

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่คนทานอาหารนอกบ้านในวันสุดสัปดาห์ของต้นเดือน

D แทนเหตุการณ์ที่คนดื่มเหล้า

C แทนเหตุการณ์ที่คนไปเที่ยวคลับ

จากข้อมูลเราสร้างแผนภาพพฤกษาได้ ดังนี้



ดังนั้นความน่าจะเป็นที่คนจะไม่ไปเที่ยวคลับในวันสุดสัปดาห์ของต้นเดือน

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C)$$

$$= 1 - 0.332 = .668$$

5. **ทฤษฎีเบยส์** (Bayes Theorem) ทฤษฎีเบยส์เป็นกฎที่ใช้กำหนดความน่าจะเป็นเงื่อนไขนั่นเอง แต่เป็นทฤษฎีที่มีความสำคัญมากทฤษฎีหนึ่งโดยเฉพาะในวิชาทฤษฎีตัดสินใจและสถิติแบบเบยส์ (Bayesian Statistics) ทฤษฎีเบยส์กล่าวไว้ดังนี้

(1) ถ้าเหตุการณ์ E เกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ซึ่งเป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S ได้เกิดขึ้นแล้ว

(2) ถ้าทราบความน่าจะเป็นก่อนทดลอง (Prior Probabilities) ของเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ โดยที่ไม่ทราบเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ E

และ (3) ยังทราบความน่าจะเป็นเงื่อนไขของเหตุการณ์ E ที่จะเกิดขึ้นโดยทราบว่า $A_1, A_2, \ldots, A_m$ เกิดขึ้นแล้ว ซึ่งจะเป็น $P(E/A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$

แล้วความน่าจะเป็นหลังทดลอง (Posterior Probabilities) ของ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ เมื่อทราบว่า E เกิดขึ้นแล้ว, $P(A_i/E)$, $i=1,2,\ldots,m$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(A_i/E) &= P(E \cap A_i)/P(E) \\ &= \frac{P(A_i)\,P(E/A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j)\,P(E/A_j)}, \quad i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

ทฤษฎีของเบยส์นี้ Thomas Bayes (1702-1761) นักคณิตศาสตร์และปรัชญาชาวอังกฤษได้ประยุกต์จากความน่าจะเป็นเงื่อนไข เขาได้เขียนผลงานไว้ในบทความชื่อ An Essay Toward Soluing a Problem in the Dectrine of Chances แต่บทความนี้เพิ่งตีพิมพ์เมื่อ 1763 (หลังมรณกรรม) ในวารสาร The Philosophical Transactions ของ The Royal Society บทความนี้มีทฤษฎีหรือคำกล่าว (Statement) และวิธีพิสูจน์ของข้อเสนอ (Proposition) ต่อ ๆ มาได้พัฒนาไปอีกจนได้ชื่อว่า Bayee' the news ซึ่งในปัจจุบันเป็นที่สนใจกันมากในทฤษฎีตัดสินใจ ข้อเสนอเริ่มแรกเป็นสมการ

$$P(A/E) = \frac{P(E/A)\,P(A)}{P(E)}$$

Thomas Bayes เป็นคนแรกที่ทำงานเกี่ยวกับการปรับปรุงความน่าจะเป็นโดยใช้ข้อมูลข่าวสารตัวอย่าง (Sample Information) เหตุการณ์ E นี้เรียกว่าข้อมูลข่าวสารตัวอย่าง ทฤษฎีของเบยส์จึงเป็นการพิจารณากำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดได้ (A_i) ด้วยการใช้ข้อมูลข่าวสารตัวอย่างแบบหนึ่ง

สำหรับเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ นั้น ได้ชื่อว่าสมมติฐานหรือเหตุ (Hypoleses or Causes) และความน่าจะเป็นที่กำหนดให้แก่สมมติฐานนี้จะเรียกว่าความน่าจะเป็นก่อนทดลอง นั่นคือเหตุการณ์เหล่านี้ได้รับการกำหนดความน่าจะเป็นก่อนที่จะได้รับข้อมูลข่าวสารใด ๆ จากการทดลอง ความน่าจะเป็นนี้จะกำหนดโดยยึดถือข้อมูลข่าวสารเชิงปรนัยหรือเชิงจิตวิสัยก็ได้ เมื่อทำการทดลองหรือหาข้อมูลข่าวสารตัวอย่างมาใหม่ ซึ่งจะได้ว่าเหตุการณ์ E นั้น เกิดขึ้นแล้ว และเราก็สามารถกำหนดความน่าจะเป็นให้แก่สมมติฐานเหล่านั้นจากความจริงที่ว่าเหตุการณ์ E ได้เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นเช่นนี้จะได้ชื่อว่าความน่าจะเป็นหลังทดลองหรือปรับปรุงแล้ว (Posterior or Revised Probabilities)

ตัวอย่าง สมมติว่านักศึกษาจิตวิทยามีเพศชายและหญิงเป็นสัดส่วนเท่ากับ .55 และ .45 ตามลำดับ จากการศึกษาด้วยตัวอย่างทราบว่า 40% ของนักศึกษาหญิง และ 30% ของนักศึกษาชาย

ได้เกรดเฉลี่ยมากกว่า 2.5 ถ้าสุ่มนักศึกษาจิตวิทยามาคนหนึ่งปรากฏว่าได้เกรดเฉลี่ยมากกว่า 2.5 โอกาสที่จะเป็นนักศึกษาหญิงเท่าใด?

ก. สมมติฐานจะเป็นว่า "นักศึกษาที่สุ่มมาจะเป็นเพศชาย และเป็นเพศหญิง" ซึ่งจะแทนด้วย A_1 และ A_2 ตามลำดับ

ให้ E เป็นข้อมูลข่าวสารตัวอย่างซึ่งก็คือเหตุการณ์ที่นักศึกษาจิตวิทยาจะได้เกรดเฉลี่ยมากกว่า 2.5

ดังนั้น $P(A_1) = .55$, $P(A_2) = .45$

ข. ความน่าจะเป็นเงื่อนไขที่กำหนดจากข้อมูลข่าวสารใหม่ที่ได้จากการสังเกตหรือทดลองโดยกำหนดว่าสมมติฐานเกิดขึ้นแล้ว นั่นคือเราจะได้ว่า

$$P(E/A_1) = .30 \quad , \quad P(E/A_2) = .40$$

ค. ความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probabiliton) ระหว่างสมมติฐานและข้อมูลข่าวสารใหม่คำนวนได้ดังนี้

$$P(EA_1) = P(A_1)\,P(E/A_1) = (.55)(.30) = .165$$

$$P(EA_2) = P(A_2)\,P(E/A_2) = (.45)(.40) = .180$$

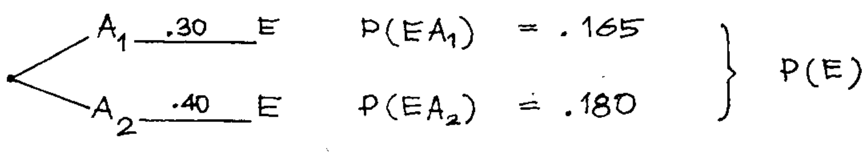
ง. ความน่าจะเป็นหลังทดลองหาได้จากทฤษฎีของเบยส์ ดังนี้

$$P(A_i/E) = \frac{P(A_i)\,P(E/A_i)}{P(A_1)\,P(E/A_1) + P(A_2)\,P(E/A_2)}, \quad i = 1,2$$

$$P(A_1/E) = \frac{(.165)}{(.165 + .180)} = .48$$

$$P(A_2/E) = \frac{(.180)}{(.165 + .180)} = .52$$

จากทั้งหมดนี้สามารถแสดงได้ด้วยแผนภาพพฤกษา ดังนี้



ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ต้องการคือ $P(A_2/E) = .52$