การวิเคราะห์สหสัมพันธ์

The statistical method is more than an array of techniques. Thd statistical method- is a mode of thought; it is sharpened thinking; it is power.

W. Edwards Deming

การวิเคราะห์สหสัมพันธ์ (Correlation Analysis) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรว่ามีความสัมพันธ์กันขนาดไหน (How Well) หรือเป็นการศึกษาถึงระดับ (Degree) ของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนั่นเอง จะเห็นได้ว่าการวิเคราะห์ถดถอยกับการวิเคราะห์สหสัมพันธ์จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเช่นเดียวกัน แต่การถดถอยเกี่ยวข้องกับการทำนายตัวแปร จากความรู้ของตัวแปรอื่น ส่วนสหสัมพันธ์จะเกี่ยวข้องกับการอธิบายถึงระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร มาตราวัดของสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ได้ชื่อว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Cofficient) นั้นมีอยู่หลายแบบซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของตัวแปร มาตราวัดความสัมพันธ์ที่เรารู้จักกันมากคือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน (Pearson Product Moment Correlation Coefficient) มาตราวัดนี้เป็นมาตราวัดระดับความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear Relationship) ระหว่างตัวแปร x และ y กำหนดไว้ดังนี้

$$P = E\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$= \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{\{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2\}\{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2\}}}$$

ตัวประมาณค่าของ ρ โดยมีตัวอย่างจะเป็นดังนี้

$$r = \frac{1}{n-1}\,\Sigma\left(\frac{X-\bar{X}}{S_x}\right)\left(\frac{Y-\bar{Y}}{S_y}\right)$$

$$= \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{\{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2\}\{n\Sigma Y^2 - (\Sigma y)^2\}}}$$

ค่าของ r จะอยู่ระหว่าง +1 กับ −1 ถ้าค่าของ r เป็น − ก็แสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางตรงกันข้าม นั่นคือถ้าตัวแปรหนึ่งมีค่ามาก อีกตัวหนึ่งจะมีค่าน้อย แต่ถ้า r เป็น + ก็แสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์ไปในทางเดียวกัน นั่นคือถ้าตัวแปรตัวหนึ่งมีค่ามาก (หรือน้อย) อีกตัวหนึ่งจะมีค่ามาก (หรือน้อย) เช่นเดียวกัน

ถ้า $r = -1$ หรือ $r = +1$ ก็จะแสดงว่ามีความสัมพันธ์กันมากหรือสมบูรณ์ (Perfect Correlation) แต่ถ้า $r = 0$ เราจะถือว่าไม่มีความสัมพันธ์ (Uncorrelated) ในเชิงเส้น

การประมาณค่าแบบช่องและการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สันนี้ ได้อธิบายมาแล้วในการทดสอบสมมุติฐาน

10.1 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแบบนามบัญญัติ (Association Between Nominal Variables)

สำหรับสองตัวแปร (หรือมากกว่า) ที่สนใจนั้นกำหนดข้อมูลแบบนามบัญญัติ เรามีมาตราวัดดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอยู่หลายแบบ ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดพร้อมกับมาตราวัดและแบบทดสอบอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องด้วย ดังนี้

10.1.1 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันแบบยูล (Yule's Q And Y) สัมประสิทธิ์ Q นี้ยูล (Yule, 1900) ได้เสนอขึ้น แต่ใช้อักษร Q เพื่อเป็นเกียรติแก่ Quetelet นักสถิติชาวเบลเยี่ยม สัมประสิทธิ์ Q นี้จะบอกถึงดีกรีที่ความถี่ซึ่งสังเกตได้ในการแจกแจงแบบสองค่า (dichotomous distribution) นั้นเบี่ยงเบนจากเงื่อนไขของความเป็นอิสระเชิงสถิติ และกำหนดไว้ดังนี้

$$Q = \frac{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}}{P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21}}$$

ในเมื่อ P_{ij}, $(i, j = 1, 2)$ เป็นความน่าจะเป็นข้อสังเกตในเซล (i, j) ของตารางจรณ์ 2×2

ตัวประมาณค่าของ Q กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{Q} = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}{f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21}}$$

ในเมื่อ f_{ij}, $(i, j = 1, 2)$ เป็นความถี่หรือเปอร์เซนต์ที่สังเกตได้จากตารางจรณ์ 2×2 ดังนี้

	Y	Y_1	Y_2	รวม
X	X_1	f_{11}	f_{12}	$f_{1\cdot}$
	X_2	f_{21}	f_{22}	$f_{2\cdot}$
	รวม	$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	n

โดยที่ $f_{i\cdot}$ และ $f_{\cdot j}$V เป็นผลรวมของค่า X และ Y ตามลำดับ $(i, j = 1, 2)$

สำหรับสัมประสิทธิ์ Q นี้ ถ้าตัวแปรทั้งสองกำหนดข้อมูลแบบอันดับ (Ordinal Data) แล้ว Q จะเหมือนกับสัมประสิทธิ์ Q ของกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal) ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

ค่าของสัมประสิทธิ์ $\hat{Q}$ จะอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 เมื่อ $\hat{Q} = O$ ก็จะแสดงว่าความถี่ที่สังเกตได้เป็นไปตามเงื่อนไขของความเป็นอิสระเชิงสถิติ สำหรับตารางจรณ์ 2×2 นั้น เงื่อนไขของความเป็นอิสระจะแสดงถึงคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $f_{11} / (f.1) = f_{12} / (f.2) = (f1.) / n$

(2) $f_{21} / (f.1) = f_{22} / (f.2) = (f2.) / n$

(3) $f_{11} / (f1.) = f_{21} / (f2.) = (f.1) / n$

(4) $f_{12} / (f1.) = f_{22} / (f2.) = (f.2) / n$

(5) $f_{11}\, f_{22} = f_{12}\, f_{21}$ หรือ $f_{11}\, f_{22} - f_{.2}\, f_{21} = 0$

ตัวสถิติ $\hat{Q}$ มีความแปรปรวนที่ประมาณได้ดังนี้

$$S^2_{\hat{Q}} = \frac{(1-\hat{Q}^2)^2}{4} (1/f_{11} + 1/f_{12} + 1/f_{21} + 1/f_{22})$$

ในเมื่อ $f_{ij} > 0$ (ทุกค่า i, j) ดังนั้นในการประมาณช่วงเชื่อมั่นหรือทดสอบสมมติฐานเดียวกับ Q เมื่อใช้ตัวอย่างขนาดโต เราจึงใช้ตัวสถิติ Z

$$Z = \hat{Q} / S_{\hat{Q}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N (0, 1)

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างเพศของนักศึกษา (X) และทัศนคติในการทำแท้งของหญิงมีครรภ์ (Y) โดยอาศัยตัวอย่างสุ่มของนักศึกษา มร. 40 ราย ได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่มาดังนี้

ทัศนคติ (Y)	Y_1 เห็นด้วย	Y_2 ไม่เห็นด้วย	รวม
เพศ X_1 : หญิง	9	16	25
X_2 : ชาย	11	4	15
รวม	20	20	40

$$\hat{Q} = \frac{9(4)-(16)(11)}{9(4)+(16)(11)} = \frac{36-176}{36+176} = -140/212 = -0.66$$

$$S^2_{\hat{Q}} = \frac{\{1-(-.66)^2\}^2}{4}(1/9+1/16+1/11+1/4) = 0.041$$

$$S_{\hat{Q}} = 0.201$$

เมื่อเกี่ยวข้องกับสองตัวอย่างและประชากร เราก็สนใจความแตกต่างระหว่างพารามิเตอร์ของสองประชากร Q_1 และ Q_2 ความแตกต่างระหว่าง Q_1 และ Q_2 จะได้เป็น δ_q ตัวประมาณค่าของ Q_1, Q_2 และ δ_q จะได้เป็น $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$ และ d_q

ถ้าตัวอย่างจากประชากรทั้งสองมีขนาดโต แล้วเราจะได้ว่า

$$Z = \frac{d_q - \delta_q}{S^2_{d_q}}$$

มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N (0, 1) ในเมื่อ $S^2 d_q$ กำหนดไว้ว่า

$$S^2 d_q = S^2_{\hat{Q}1} + S^2_{\hat{Q}2}$$

ดังนั้นในการทดสอบความแตกต่างของพารามิเตอร์ Q_1 และ Q_2 หรือทดสอบสมมติฐานหลัก Ho

$$Ho: \quad Q_1 - Q_2 = \Delta$$

เราจึงใช้ตัวสถิติทดสอบ Z

สำหรับช่วงเชื่อมั่นสำหรับ $Q_1 - Q_2 = \delta_q$ ก็อาศัยตัวสถิติ Z เช่นเดียวกัน ซึ่งจะเป็น

$$Q_1 - Q_2 = d_q \pm Z\alpha/_2 \sqrt{S^2 d_q}$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ยูล Y ซึ่งบางทีเรียกว่าสัมประสิทธิ์ของการร่วมกัน (Coefficient of Colligation) นั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$Y = \frac{\sqrt{P_{11} P_{22}} - \sqrt{P_{12} P_{21}}}{\sqrt{P_{11} P_{21}} + \sqrt{P_{12} P_{21}}} \qquad = \frac{1 - \sqrt{P_{12} P_{21} / P_{11} P_{22}}}{1 + \sqrt{P_{12} P_{21} / P_{11} P_{22}}}$$

ตัวประมาณค่า $\hat{Y}$ กำหนดไว้ว่า

$$\hat{Y} = \frac{1 - \sqrt{f_{12} f_{21} / f_{11} f_{22}}}{1 + \sqrt{f_{12} f_{21} / f_{11} f_{22}}}$$

สัมประสิทธิ์ Y จะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับสัมประสิทธิ์ Q ถึงแม้ว่าในข้อมูลชุดเดียวกันจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยปกติ $|Y| \angle |Q|$ ยกเว้นแต่ตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระ หรือมีความสัมพันธ์กันอย่างสมบูรณ์

ความแปรปรวนที่ประมาณได้ของตัวสถิติ $\hat{Y}$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$S^2_{\hat{y}} = \frac{(1 - \hat{Y}^2)^2}{16} (1/f_{11} + 1/f_{12} + 1/f_{22} + 1/f_{22})$$

ในเมื่อ $f_{ij} > 0$ (ทุกค่า i, j)

10.1.2 แบบทดสอบที่แท้จริงเกี่ยวกับความเป็นอิสระของสองตัวแปรชนิดสองค่า (Exact Test of Independence for two Dichotomous Variables)

สำหรับสองตัวแปร x และ y มีแต่ละตัวแปรมีเพียงสองค่านั้น เมื่อเป็นอิสระกันเราจะได้ว่า

$$P(X_1 | Y_1) = P(X_1 | Y_2) = P(X_1)$$

หรือ $$P(X_1 \cap X_2) = P(X_1)\ P(Y_1)$$

และยังได้ความสัมพันธ์อื่น ๆ อีกดังนี้

$$P(X_1 \cap Y_2) = P(X_1)\ P(Y_2),\ P(X_2 \cap Y_1) = P(X_2)\ P(Y_1)$$

$$P(X_2 \cap Y_2) = P(X_2)\ P(Y_2)$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้ใช้พิจารณาการแจกแจงน่าจะเป็นของค่า f_{11}, f_{12}, f_{21} และ f_{22} จากตัวอย่างขนาด n ที่ว่า

$$f(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}) = \binom{n}{f_{11}\ f_{12}\ f_{21}\ f_{22}} p_{11}^{f_{11}} p_{12}^{f_{12}} p_{21}^{f_{21}} p_{22}^{f_{22}}$$

ในเมื่อ $P_{11}=P(X_1 \cap Y_1)$, $P_{12}=P(X_1 \cap Y_2)$, $P_{21}=P(X_2 \cap Y_1)$ และ $P_{22}=P(X_2 \cap Y_2)$

ถ้าสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระเป็นจริง แล้วการแจกแจงดังกล่าวแต่มีเงื่อนไขกับ $f_{1\cdot}$, $f_{2\cdot}$, $f_{\cdot 1}$, $f_{\cdot 2}$ จะเป็น

$$f(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} \mid f_{1\cdot}, f_{2\cdot}, f_{\cdot 1}, f_{\cdot 2}) = \binom{f_{1\cdot}}{f_{11}} \binom{f_{2\cdot}}{f_{22}} \Big/ \binom{n}{f_{\cdot 1}}$$

ซึ่งการแจกแจงเงื่อนไขนี้เป็นแบบไฮเปอร์จีโอเมทริคนั่นเอง ดังนั้นการทดสอบความเป็นอิสระจึง อาศัยการแจก แจงเงื่อนไข ซึ่งเป็น แบบไฮเปอร์จีโอเมทริคนี้ช่วยพิจารณาเขตปฏิเสธ เมื่อ $n < 15$ เราจะอาศัยตาราง 28 แต่เมื่อ $n > 15$ เราจะอาศัยการแจกแจงดังกล่าวนั้นพิจารณาเขตปฏิเสธ หรือจะอาศัยการประมาณค่าตัวสถิติเพียร์สัน r^2

แบบทดสอบดังกล่าวนี้มีอำนาจทดสอบมาก (Most Powerful) สำหรับสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระ ถึงแม้ว่าจะขึ้นอยู่กับการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมทริค

ตัวอย่าง ในการศึกษาการยอมรับทางสังคม (X) และการมีส่วนร่วมทางศาสนา (Y) ของเด็กที่เป็นตัวอย่าง 17 ราย โดยตั้งคำถามเกี่ยวกับตัวแปรทั้งสอง แต่ละถามจะมีคำตอบว่า เคยและไม่เคย ให้เด็กตอบ ปรากฏว่าได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่ดังนี้

Y	เคย	ไม่เคย	
X เคย	5	1	6
ไม่เคย	5	6	11
	10	7	17

H_0 : การยอมรับทางสังคมและการมี ส่วนร่วมทาง ศาสนาไม่มีความสัมพันธ์กัน

เนื่องจาก $n = 17$ ซึ่งมากกว่า 15 เราจึงต้องคำนวนความน่าจะเป็นจริงจากการแจกแจงไฮเปอร์จีโอเมทริค และสมมติฐานเองไม่ได้บ่งทิศทางของความสัมพันธ์ ดังนั้นทั้งสองทางของการแจกแจงจะเป็นเขตวิกฤต

ถ้า f_{11} เป็นจำนวนความถี่ที่ตอบว่าเคยทั้งสองคำถาม แล้วค่าที่เป็นไปได้จะเป็น $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ความน่าจะเป็นของค่าเหล่านั้นจะคำนวนได้ดังนี้

$$f(f_{11}) = \binom{6}{f_{11}}\binom{10}{11-f_{11}} \Big/ \binom{16}{17};\ f_{11} = 0, 1 \ldots 6$$

$$f(0) = 0.00056,\quad f(1) = 0.01696,\quad f(2) = 0.12726$$

$$f(3) = 0.33936,\quad f(4) = 0.35633,\quad f(5) = 0.14253$$

$$f(6) = 0.01699$$

เมื่อ $\alpha \leq 0.05$ เขตวิกฤตจะเป็น $\{0, 1, 6\}$ เนื่องจาก $f_{11} = 5$ จึงปฏิเสธ H_0 ไม่ได้

การปฏิเสธ H_0 ไม่ได้สำหรับข้อมูลเหล่านี้เกิดขึ้น เพราะสองตัวแปรเป็นอิสระกันจริงในประชากรของเด็ก หรือเป็นเพราะขนาดตัวอย่างเล็กและเซทของค่า f_{11} น้อยไปที่จะกำหนดเขตปฏิเสธซึ่งจะป้องกันการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรแห่งนี้

10.1.3 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันธ์ที่อาศัยตัวสถิติไคสแควร์ของเพียร์สัน (Association Coefficient Based on Pearson Chi–Square Statistic)

สำหรบสองตัวแปรที่กำหนดข้อมูลแบบนามบัญญัตินั้น ถ้าต้องการทดสอบเป็นอิสระของมัน นั่นคือทดสอบสมมติฐานหลักที่ว่า

Ho: ตัวแปร X กับตัวแปร Y เป็นอิสระกัน เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบไคสแควร์ (Chi–Square Test for Independence) ซึ่งเป็นแบบทดสอบที่รู้จักกันดี นั่นคือตัวสถิติทดสอบไคสแควร์กำหนดไว้ดังนี้

$$X_r^2 = \sum_{i,j}^{r,c} (f_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij} = \left\{ \sum_{i,j}^{r,c} f_{ij}^2 / f_{i.} \cdot f_{.j} - 1 \right\} n$$

ในเมื่อ f_{ij} เป็นความถี่ที่สังเกตได้ในค่าที่ i ของ x (แถวนอน) และค่าที่ j ของ Y (แถวตั้ง) โดยมี $i = 1, 2, \ldots, r$ และ $j = 1, 2, \ldots, c$; e_{ij} เป็นที่คาดหวังภายใต้สมมติฐานที่ว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระกัน และคำนวณได้จาก $f_{i.}(f_{.j})/n$ โดยที่ $f_{i.}$ เป็นผลรวมความถี่ในค่ามี i ของ X และ $f_{.j}$ เป็นผลรวมความถี่ในค่ามี j ของ Y; และ n เป็นขนาดตัวอย่าง

ถ้าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระกันจริง แล้วตัวสถิติทดสอบไคสแควร์จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ (r–1) (c–1) สำหรับองศาความเป็นอิสระนี้พิจารณาได้ดังนี้ เนื่องจากเราทราบขนาดตัวอย่าง n ก่อน จำนวนเซลความถี่ที่เป็นอิสระจึง

เป็น (rc–1) จำนวนพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระ, $P(Xi) = Pi$ ซึ่งต้องประมาณสำหรับตัวแปร X จะเป็น (r–1) เนื่องจากผลรวมของความน่าจะเป็นทางเดียว $P(x_i)$ เหล่านั้นรวมกันต้องเป็น 1 ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นจำนวน (r – 1) นี้จึงจะช่วยพิจารณาควบน่าจะเป็นที่ r ได้ ในทำนองเดียวกัน จำนวนพารามิเตอร์ที่เป็นอิสระ $P(y_j) = P_{.j}$ ซึ่งต้องประมาณตัวแปร Y จะเป็น (c–1) ดังนั้นจำนวนองศาความเป็นอิสระของตัวสถิติ X^2 จึงเป็น

$$\nu = (rc-1)-(r-1)-(c-1) = rc-r-c+1$$

$$= (r-1)(c-1)$$

กรณีที่ $r = 2$ และ $c = 2$ หรือข้อมูลในรูปตาราง 2×2 ตัวสถิติไคสแควร์จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\chi^2 = \frac{n\,(f_{11}\,f_{22}-f_{12}\,f_{21})^2}{f_{1.}\,f_{2.}\,f_{.1}\,f_{.2}}$$

เมื่อทดสอบความสัมพันธ์ด้วยตัวสถิติทดสอบไคสแควร์แล้วพบว่าความสัมพันธ์มีจริง ถ้าเราต้องการทราบดีกรีความสัมพันธ์เราก็ไม่ได้ใช้ x^2 เป็นมาตราวัดโดยตรง เพราะค่าของมันไม่จำกัด นั่นคือ $0 < x^2 < \infty$ เมื่อ x^2 ใกล้ 0 จึงถือว่าตัวแปรเป็นอิสระกัน เนื่องจากขีดจำกัดของ x^2 ไม่จำกัดจึงทำให้ยากที่จะหาดีกรีของความสัมพันธ์ ดังนั้นจึงมีวิธีการที่จะจำกัดให้ค่าของ x^2 อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 วิธีการเหล่านั้นจะให้มาตราวัดความสัมพันธ์ดังนี้

(1) ฟายสแควร์ (Phi – Square; ϕ^2) สัมประสิทธิ์ ϕ^2 กำหนดไว้เป็น

$$\phi^2 = \sum_{ij} \frac{P(xi \cap yj)}{P(xi)\,P(yj)} - 1$$

ซึ่งประมาณด้วยตัวอย่างขนาด n ได้เป็น $\hat{\phi}^2$

$$\phi^2 = \sum_{ij} f_{ij}^2 / f_{i.}\,f_{.j} - 1 = x^2/n$$

เมื่อ $r = c = 2$ หรือในรูปของตารางจรณ์ 2×2 เราได้

$$\hat{\phi}^2 = \frac{(f_{11}\,f_{22} - f_{12}\,f_{21})^2}{f_{1,}\,f_{2.}\,f_{.1}\,f_{.2}}$$

ค่าสูงสุดของ $\hat{\phi}$ จะเท่ากับ $q-1$ ในเมื่อ $q = \min.(r, c)$ ดังนั้นค่าของ $\hat{\phi}^2$ จึงเป็นดังนี้ $0 \leq \hat{\phi}^2 \leq q-1$

(2) สัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของเพียร์สัน (Pearson's Contingency Coefficient, C) ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$C = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+n}} = \sqrt{\frac{\hat{\phi}^2}{\hat{\phi}^2+1}}$$

ค่าของ C จะเป็นดังนี้ $0 \leq C \leq \sqrt{\frac{q-1}{q}} < 1.0$ ในเมื่อ $q = \min(r,c)$

เมื่อ $r=c$ เราได้ $\max C = \sqrt{(r-1)/r}$ เราจึงปรับปรุงสัมประสิทธิ์ C ได้เป็น

$$C_c = C/\max C$$

(3) สัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของชูโพร (Tschuprow's Contingency Coefficient, T) ชูโพรได้เสนอมาตราวัดความสัมพันธ์โดยอาศัยตัวสถิติไคสแควร์อีกแบบหนึ่งซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แต่ค่าสูงสุดจะเป็น 1 ก็ต่อเมื่อ $r=c$ ถ้า $r \neq c$ แล้ว $T<1$ สัมประสิทธิ์ T กำหนดไว้เป็น

$$T = \sqrt{\frac{x^2/n}{\sqrt{(r-1)(c-1)}}} = \sqrt{\frac{\hat{\phi}^2}{(r-1)(c-1)}}$$

(4) สัมประสิทธิ์เชิงเงื่อนไขของเครเมอร์ (Cramer's Contingency Coefficient, V) เครเมอร์ (Cramér, 1946) ได้แก้ไขข้อบกพร่องบางประการในสัมประสิทธิ์ C และ T เพื่อให้ได้ค่าสูงสุดในตารางจรณ์ $r \times c$ ใด ๆ แต่การแบ่งความหมายก็ยังค่อนข้างยาก สัมประสิทธิ์ V กำหนดไว้ดังนี้

$$V = \sqrt{\frac{X^2/n}{q-1}} = \sqrt{\hat{\phi}^2/(q-1)}$$

ในเมื่อ $q = \min(r, c)$ และการแปลความหมายของค่า V จะกำหนดไว้เป็น

ค่า V	**การแปลความหมาย**
0 – .25	น้อย (Weak)
.26 – .50	ปานกลาง (Moderate)
.51 – .75	ค่อนข้างมาก (Moderate Strong)
.76 – 1.00	มาก (Strong)

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ได้ข้อมูลสรุปดังนี้

	Y	y_1	y_2	y_3	รวม
X	x_1	7	14	39	60
	x_2	8	5	8	21
	x_3	9	7	29	45
	x_4	5	12	15	32
	รวม	29	38	91	158

Ho: ตัวแปร X และ Y เป็นอิสระกัน

Ha: ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กัน

$$X^2 = 158 \left\{ 7^2/60\ (29) + 14^2/60\ (38) + 39^2/60\ (91) + 8^2/21\ (29) + \cdots + 12^2/32\ (38) + 15^2/32\ (91) - 1^2 \right\}$$

$$= 12.82$$

สำหรับ $\alpha = .05$ เราได้ $\alpha^{2\,(4-1)\,(3-1)}_{.05} = 12.59$ จึงปฏิเสธ Ho

แบบทดสอบความเป็นอิสระ หรือความเป็น เอกภาพ จึงไม่หยุดที่การคำนวณค่าของตัวสถิติ X^2 เพราะค่าของมันสัมพันธ์โดยตรงกับขนาดตัวอย่าง นั่นคือเมื่อเพิ่มขนาดตัวอย่าง มันจะเพิ่ม X^2 แต่ไม่เพิ่ม ϕ^2 หรือ V ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

สำหรับขนาดตัวอย่าง n เราได้ $X^2_{(n)}$ = สมมติว่าขนาดตัวอย่างเพิ่มเป็น K เท่า ซึ่งหมายความว่าภายใต้สมมติฐานหลัก Ho นั้นแต่ละ fij จะเพิ่มโดยเฉลี่ยเป็น K fij และแต่ละ e_{ij} จะเพิ่มเป็น Ke_{ij} ดังนั้น $X^2_{(Kn)}$ จะเป็น

$$X^2_{(Kn)} = \sum_{i,j}^{r,c} (Kf_{ij} - Ke_{ij})^2 / Ke_{ij}$$

$$= K \sum_{i,j} (f_{ij} - e_{ij})^2 / e_{ij} = K X^2_{(n)}$$

และ $\phi^2_{(Kn)} = X^2_{(Kn)}/Kn = K X^2_{(n)}/Kn = X^2_{(n)}/n = \phi^2_{(n)}$

ในการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรจากตารางจรณ์ขนาด $r \times c$ โดยใช้แบบทดสอบไคสแควร์นั้น ถ้ามีหลาย ๆ ตาราง เราก็สามารถรวมข้อมูลจากหลาย ๆ ตารางที่เป็นอิสระกันได้ สำหรับวิธีการรวมแบบทดสอบเครื่องหมายและวิธีการรวมตารางเออร์-วิน–พีเชอร์นั้นก็สามารถใช้รวมหลายตารางขนาด $r \times c$ ได้ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. สมมติฐานที่เกี่ยวพันกับตารางต่าง ๆ เหมือนกัน

ข. สมมติฐานรองเหมือนกันและมีทิศทาง (directional)

ค. ตารางมีมิติหรือขนาดเดียวกัน

แต่อย่างไรก็ตามถ้าตารางเหล่านั้นไม่เป็นตารางจรณ์ 2 × 2 แล้วเกณฑ์ (1), (2), และ (3) ของวิธีการรวมตารางเออร์วิน – พีชเชอร์จะใช้ไม่ได้ แต่เกณฑ์ (4) อัน เป็นเกณฑ์แลมน์-ดาของเพียร์สันยังใช้ได้อยู่

จากคุณสมบัติเชิงบวกของตัวสถิติไคสแควร์ จึงสามารถใช้รวมข้อมูลจากตารางวงจรณ์ที่เป็นอิสระได้ นั่นคือภายใต้สมมติฐานหลัก ของแต่ละตารางหรือ $\phi^2_k = 0; k = 1, 2, .. k$ เราทราบว่าตัวสถิติทดสอบ X^2_k จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ ν_k ดังนั้นผลรวม T

$$T = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2$$

จึงมีการแจกแจงไคสแควร์ (โดยประมาณ) ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k$

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติ X และ Y ของนักศึกษาที่บิดามีรายได้ระดับต่าง ๆ กัน ได้ข้อมูลสรุปดังความต่อไปนี้

ระดับรายได้ของบิดา	ต่ำ			ปานกลาง			สูง		
Y	Y_1	Y_2		Y_1	Y_2		Y_1	Y_2	
X X_1	8	10	18	10	10	20	10	12	22
X_2	4	23	27	5	23	28	5	22	27
X_3	3	7	10	5	8	13	6	2	8
รวม	15	40	55	20	41	61	21	36	57
X^2	4.92			5.71			9.59		
ϕ^2	0.090			0.094			0.168		

สำหรับ $\alpha = .05$ เราจะเห็นได้ว่ากลุ่มสูงเท่านั้นที่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y

เมื่อใช้เกณฑ์แลมบ์ดา λ เราจะได้

$P_1 = P(X^2 > 4.92) = 0.0895$ $P_2 = P(X^2 > 5.71) = 0.0598$

$P_3 = P(X^2 > 9.59) = 0.0086$

ดังนั้น $\lambda = -\ 4.605 \sum_{k}^{k} \log (P_k)$

$= -\ 4.605 \left\{ \log (0.0895) + \log (0.0598) + \log (0.0098) \right\}$

$= 19.97$

เนื่องจาก $k = 3$ และ $\nu = 2\ k = 6$ เราจึงปฏิเสธ Ho เพราะค่าวิกฤต สำหรับ $\alpha =$ 0.05 คือ $X^{2(6)}_{.05} = 12.59$

ถ้าใช้คุณสมบัติเชิงบวกของไคสแควร์ เราจะได้

$T = 4.92 + 5.71 + 9.59 = 20.22$

เนื่องจาก $\nu = 2 + 2 + 2 = k$ และ $\alpha = .05$ เราได้ค่าวิกฤตเป็น $X^{2(6)}_{.05} = 12.59$ จึงปฏิเสธ Ho: $\phi^2 = O$

10.1.4 มาตราวัดแพรคสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (Proportional—Reduction—in—Error Measures, PRE)

เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงจุดอ่อนของ ดัชนีหรือ มาตราวัดที่ขึ้น อยู่กับตัวสถิติไคสแควร์ นักสถิติจึงได้พัฒนาวิธีการต่าง ๆ ขึ้นมา วิธีการหนึ่งซึ่งเป็นที่รู้จักกันมากก็คือ เหตุผลเชิงลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (Proportional—reduction—in—error (PRE) Logic)

มาตราวัดแพลดสัดส่วนความ คลาดเคลื่อนนี้ อาศัยแนวคิดง่าย ๆ ของ ความสัมพันธ์ดังนี้ สมมติว่าเล่นเกมโดยการสุ่มคนมาจากประชากรหนึ่ง และเดาคะแนนใน X ซึ่งเป็นตัวแปรตาม การทำนายทำได้ตามกฎ 2 กฎ ภายใต้กฎข้อแรกนั้นจะไม่มีข้อมูลข่าวสารเพื่อใช้ทำนายคะแนนใน X ส่วนภายใต้กฎข้อที่สองผู้สำรวจจะพิจารณาแต่ละประเภทใน Y และอาศัยข้อมูลข่าวสารนั้นไปช่วยทำนายค่าใน X เมื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของการที่ความคลาดเคลื่อนแบบแยกประเภทผิดภายใต้สองกฎนั้น แล้วเราจะได้ว่ามาตราวัดความเกี่ยวพันแบบลดความคลาดเคลื่อนเนื่อง จากใช้กฎ ที่สองที่ตรงข้าม กฎแรกจึงเป็นดังนี้

$$\text{PRE} = \frac{P(1) - P(2)}{P(1)}$$

ในเมื่อ P(1) และ P(2) เป็นความน่าจะเป็นของการแยกประเภทหน่วยทดลองผิดตามกฎข้อแรกและกฎข้อสองตามลำดับ

จะเห็นได้ว่ามาตราวัด PRE จะให้ค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ถ้าตัวแปรเป็นอิสระกันเชิงสถิติแล้ว PRE = 0 ซึ่งหมายความว่าความน่าจะเป็นของการแยกประเภทหน่วยทดลองผิดภายใต้กฎข้อแรกนั้น เท่ากับความน่าจะเป็นของการทำความคลาดเคลื่อนภายใต้กฎข้อที่สอง และ PRE = 10 ถ้า P(2) = 0 ซึ่งเป็นกรณีมีความรู้ใน Y จะให้การทำนายที่ถูกต้องต่อ X ถ้า P(1) = 0 แล้ว PRE จะกำหนดไม่ได้ (undefined) แต่กรณีเช่นนี้จะไม่เกิดขึ้นเพราะถ้าไม่มีความเป็นไปได้ ในการแยก ประเภทผิด ตามกฎข้อแรกแล้วหน่วยทดลองทั้งหมดจะต้องอยู่ในประเภทเดียวกันและไม่มีความผันแปรใน X

เนื่องจากเหตุผลเชิงลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (PRE Logic) เป็นที่ใช้กันอย่างกว้างขวาง มาตราวัดแบบนามบัญญัติต่าง ๆ เกี่ยวกับความเกี่ยวพันธ์จึงขึ้นอยู่กับเหตุผลนั้นความหมายและการคำนวณของมาตราต่าง ๆ เหล่านั้น ก็อาศัยนิยามของความคลาดเคลื่อนนั่นเอง

(1) สัมประสิทธิ์การทำนายของกัทแมน (Guttman's Coefficient of Optimal Predictability) กัทแมน (Guttman, 1941) ได้พัฒนามาตราวัดความสัมพันธ์ซึ่งกูดแมนและครัสคัลเรียกว่าสัมประสิทธิ์การทำนายที่เหมาะสม มาตราวัดนี้ใช้นิยามของความคลาดเคลื่อนการทำนายโดยตรง

ตามกฎข้อแรก ถ้าทำนายประเภทหนึ่งใน X โดยไม่อาศัยความรู้ในการแยกประเภทใน Y แล้วการทำนายจะเป็นอย่างไร วิธีหนึ่งในการทำนายก็คือเดาประเภท X ที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุด (X S model category) ซึ่งจะให้สัดส่วนสูงสุด เพราะค่าสังเกตส่วนมากจะอยู่ในประเภทนี้ และในระยะยาวความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นน้อย

สำหรับตาราง r × c ให้ $P_{m.}$ แทนความน่าจะเป็นหรือสัดส่วนตามแนวนอนริมสุดที่มากสุด (maximum marginal row probability) เมื่อไม่ทราบ Y เราควรจะเอาประเภทที่สอดคล้องกับความน่าจะเป็น $P_{m.}$ ความน่าจะเป็นที่จะทำการทำนายถูกต้องคือ P_m ในเมื่อความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนคือ

$$P(1) = 1 - P_{m\cdot}$$

ตามกฎข้อที่สอง ผู้สำรวจจะเลือกหน่วยแบบสุ่มและพิจารณาประเภทของหน่วยใน Y แล้วจึงทำนายประเภท X ในการทำนายนั้นก็ต้องพิจารณาแต่งแถวตั้ง (หรือแต่ละประเภทของ Y) แล้วผู้สำรวจก็จะเลือกประเภท X มีเกิดขึ้นบ่อยที่สุด หรืออาจจะกล่าวได้ว่าเมื่อกำหนดประเภทใน Y ให้ ก็จะเรียกประเภท X ที่มีสัดส่วนสูงสุด ความคลาดเคลื่อนจะเกิดขึ้นได้แต่ก็จะน้อยกว่าเลือกประเภทอื่นจาก X

ในตาราง r × c จะให้ P_{mj} แทนความน่าจะเป็นหรือสัดส่วนมีมากสุดของเซลในแถวตั้งมี j ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนภายใต้กฎพีสอง, P(2), จะเป็น

$$P(2) = 1 - \sum_j Pm_j \; ; \; j = 1, 2, \ldots, c$$

ดังนั้นเราจะได้มาตราวัดแบบลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อนมีชื่อว่าแลมบ์ดา, λ_x หรือ λ_a ดังนี้

$$\lambda_x = \frac{(1 - P_{m\cdot}) - (1 - \sum P_{mj})}{1 - P_{m\cdot x_2}}$$

$$= \frac{\sum_j P_{mi} - P_{m\cdot}}{1 - P_{m\cdot}} \; ; \; j = 1, 2, \ldots c$$

ในเมื่อ λ_x จะแสดงว่าประเภทของ X จะได้รับการทำนายจากข้อมูลข่าวสารของ Y

ด้วยเหตุผลเดียวกันเมื่อเราให้ Y เป็นตัวแปรตาม แล้วเราจะได้มาตราวัด λ_y หรือ λ_b ดังนี้

$$\lambda_y = \frac{(1-P_{\cdot m}) - (1-\sum_i P_{im})}{1-P_{\cdot m}} = \frac{\sum_i P_{im} - P_{\cdot m}}{1-P_{\cdot m}}$$

ในเมื่อ $P_{\cdot m}$ เป็นสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นที่สูงสุดของด้านข้างของแถวตั้ง และ P_{im} เป็นความน่าจะเป็นที่สูงสุดในเซลของแถวนอนที่ i

มาตราวัด λ_x และ λ_y นี้ถือว่าเป็นมาตราวัดแบบไม่สมมาตร (Asymmetric Measure) ดังนั้น λ_x จะไม่เท่ากับ λ_y

ในบางครั้งผู้สำรวจไม่ทราบหรือไม่ตั้งใจ จะรวม ค่าตัวแปรโดยเป็น ตัวแปรควบ (ตัวแปรที่จะทำนาย) ในกรณีนี้ก็จำเป็นต้องใช้มาตราวัดแบบมาตรา λ ซึ่งได้จากการปรับปรุงเหตุผลเชิงลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อนนั่นเอง

สัมประสิทธิ์แบบสมมาตร λ จะรวมเหตุผลของการคำนวณทั้ง λ_x และ λ_y ดังนั้น เราจะได้ P (1) และ P (2) ดังนี้

$$P(1) = 1-(P_{m\cdot} + P_{\cdot m})/2$$

$$P(2) = 1-(\sum_j P_{mi} + \sum_i P_{im})/2$$

นั่นคือจะได้ λ เป็น

$$\lambda = \frac{P(1)-P(2)}{P(1)} = \frac{1-(P_{m\cdot}+P_{\cdot m})/2 - \left\{1-(\sum_j P_{mj} + \sum P_{im})/2\right\}}{1-(P_{m\cdot}+P_{\cdot m})/2}$$

$$= \frac{(\sum_j P_{mj} - P_{m\cdot}) + (\sum_i P_{im} - P_{\cdot m})}{(1-P_{m\cdot}) + (1-P_{\cdot m})}$$

ตัวประมาณค่าของ λ_x, λ_y และ λ กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\lambda}_x = \frac{\sum_j f_{mi} - f_{m\cdot}}{n - f_{m\cdot}}, \quad \hat{\lambda}_y = \frac{\sum_i f_{im} - f_{\cdot m}}{n - f_{\cdot m}}$$

และ $$\hat{\lambda} = \frac{(\sum_j f_{mj} - f_{m\cdot}) + (\sum_i f_{im} + f_{\cdot m})}{(n - f_{m\cdot}) + (n - f_{\cdot m})}$$

ในเมื่อ $f_{mj,}$, $f_{m.,}$ f_{im} และ $f_{\cdot m}$ เป็นความถี่ที่มากสุด ซึ่งสอดคล้องกับสัดส่วน $P_{mj,}$ $P_{m.,}$ $P_{im,}$ และ $P_{\cdot m}$ ที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างแผนการศึกษา (X) และการนับถือศาสนา (Y) ของนักเรียนมัธยมต้น ได้ข้อมูลซึ่งเป็นจำนวนนักเรียนมาดังนี้

การนับถือศาสนา (Y)		คริสต์ (Y_1)	พุทธ (Y_2)	อิสลาม (Y_3)	รวม
แผนการศึกษา	X_1 : ไม่มีแผน	0	40	20	60
(X)	X_2 : จบอาชีวศึกษา	5	10	1	16
	X_3 : จบมหาวิทยาลัย	20	0	4	24
	รวม	25	50	25	100

$$\lambda_x = \frac{(20 + 40 + 20) - 60}{100 - 60} = 0.50$$

$$\lambda_y = \frac{(40 + 10 + 20) - 50}{100 - 50} = 0.40$$

และ $$\lambda = \frac{(80 - 60) + (70 - 50)}{(100 - 60) + (100 - 50)} = 0.44$$

กูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal, 1963) ได้ประมาณความแปรปรวนของ $\hat{\lambda}_x$ ไว้ดังนี้

$$S^2_{\hat{\lambda}_x} = \frac{(n - \sum_j fmj)(\sum_j fmj + fm. - 2\sum_j^* fmj)}{(n - fm.)^3}$$

ในเมื่อ $\sum_j^* smj$ แทนผลรวมของ fmj ต่าง ๆ มีเกิดขึ้นในแถวนอนเดียวกันกับ fm.

ดังนั้นในการทดสอบหรือประมาณค่าแบบช่วงของ λ_x เราต้องอาศัยตัวสถิติ

$$Z = \frac{\hat{\lambda}_x - \lambda_x}{S\hat{\lambda}_x}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N (0, 1) ถ้าตัวอย่างขนาดโต

บางครั้งเราสนใจที่จะเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ λ_x จากสองประชากรที่ให้ตัวอย่างเป็นอิสระกัน เราก็อาศัยตัวสถิติ

$$Z = \frac{(\hat{\lambda}x_1 - \hat{\lambda}x_2) - (\lambda x_1 - \lambda x_2)}{S\,(\hat{\lambda}x_1 - \hat{\lambda}x_2)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N (0,1) ถ้าขนาดตัวอย่าง n_1 และ n_2 โตพอ สำหรับ $S^2\,(\hat{\lambda}x_1 - \hat{\lambda}x_2)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$S^2\,(\hat{\lambda}x_1 - \hat{\lambda}x_2) = S^2_{\lambda x_1} + S^2_{\lambda x_2}$$

กูดแมนและครัสคัลยังได้พัฒนาการแจกแจงของ $\hat{\lambda}$ ไว้ด้วย แต่ยุ่งยากในสูตรจึงไม่ขอกล่าวไว้

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรแบบนามบัญญัติสองตัว (X, Y) จากกลุ่มสองกลุ่มได้ข้อมูลมาดังนี้

		กลุ่ม 1				กลุ่ม 2			
Y		y_1	y_2	y_3		y_1	y_2	y_3	
X	x_1	1	1	13	15	30	0	0	30
	x_2	0	9	6	15	10	15	0	25
	x_3	15	12	3	30	0	0	25	25
		16	22	22	60	40	15	25	80

$$\hat{\lambda}x_1 = \frac{(15 + 12 + 13) - 30}{60 - 30} = 0.333$$

$$\hat{\lambda}x_2 = \frac{(30 + 15 + 25) - 30}{80 - 30} = 0.80$$

$$S^2\,\hat{\lambda}x_1 = \frac{(n_1 - \sum_j f_{mj})(\sum_j f_{mj} + f_{m.} - 2\sum_j^{*} f_{mj})}{(n. - f_{m.})^3}$$

$$= \frac{[60-(15+12+13)][(15+12+13)+30-2(12+15)]}{(60-30)^3}$$

$$= 0.0119$$

$$S^2\hat{\lambda}_{x_2} = \frac{[80-(30+15+25)][(30+15+25)+30-2(30)]}{(80-30)^3} = 0.0032$$

เมื่อต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$$Ho: \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} \text{ หรือ } \lambda_{x_1} - \lambda_{x_2} = 0$$

เราได้ค่าตัวสถิติทดสอบ Z ดังนี้

$$Z = \frac{(0.333 - 0.80) - 0}{\sqrt{0.0119 + 0.0032}} = -3.80$$

และสรุปได้ว่า $\lambda_{x_1} \neq \lambda_{x_2}$ เพราะ $/Z/ > /Z_{.05/2}) \doteq 1.96$

สำหรับช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับผลต่าง $\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2}$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2} = (\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2}) \pm Z_{\alpha/2}\, S\,(\hat{\lambda}_{x_1} - \hat{\lambda}_{x_2})$$
$$= (0.333 - 0.80) \pm 1.96\sqrt{0.0119 + 0.0032}$$
$$= -0.467 \pm 1.96\,(0.123) = -0.467 \pm 0.241$$
$$= -0.708,\ -0.226$$

ซึ่งแสดงว่า $\lambda_{x_1} < \lambda_{x_2}$

(2) สัมประสิทธิ์แบบของกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal's Tau,τ) มาตราวัดเป็นการแก้ไขของการเดาเกมที่สมมติไว้ในตอนที่แล้วเดาสุ่มหน่วยทดลองกำหนดให้แก่ x ตัวแปรตามด้วยการทราบหรือไม่ทราบตัวแปรอิสระ แต่ตอนนี้การกำหนดจะคงรักษาการแจกแจงเดิมอยู่

การรักษาการแจกแจงพบมากว่าการแจกแจงของการกำหนดจะเป็นเช่นเดียวกับการแจกแจงเดิม ตัวอย่างเช่นถ้าหน่วยทดลองจำนวน $f_{1.}$ และ $f_{2.}$ อยู่ในสองประเภทแรกของ x แล้วกระบวนการกำหนดก็ยังคงไว้ซึ่งจำนวน $f_{1.}$ และ $f_{2.}$ ในประเภทนั้นอยู่ เมื่อ

คำนวณ λ ภายใต้กฎข้อแรกทุกหน่วยจะกำหนดให้ประเภทนี้มากสุดของ X (X's wrdal Categary) และดังนั้นแบบแผนของการเดาจะไม่เป็นเช่นเดียวกับการแจกแจงที่สังเกตได้ ด้วยเหตุนี้เองกูดแมนและคริสคัล (Goodman and Kruskal, 1954) ได้เสนอมาตราวัดความสัมพันธ์ ซึ่งขึ้นอยู่กับการรักษาการแจกแจงเดิมไว้ และแทนด้วย τ

มาตราวัด τ ต้องการการกำหนดซึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนหน่วยทดลองในประเภทต่างๆ ให้ประเภทของ X และ Y เป็น $X_1, X_2, .., X_r$ และ $Y_1, Y_2, .., Y_c$ ภายใต้กฎข้อแรก จะเดาเป็นประเภทแรกของ X หรือ X_1 ด้วยความน่าจะเป็น $P_{1.}$, ประเภทที่สองด้วยความน่าจะเป็น $P_{2.}$, และเรื่อยๆ ไปสำหรับ r ประเภทของ X อัตราความคลาดเคลื่อนคาดหวังระยะยาว (long-run expected error rate) จะเป็น $P_{(1)}$

$$P(1) = 1 - \sum_i P_i^2$$

ภายใต้กฎที่สอง จะเดา X_1 ด้วยความน่าจะเป็น $P_{\cdot j} / P_{\cdot j}$ (ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X_1 เมื่อกำหนด Y_1 ให้), X_2 ด้วยความน่าจะเป็น $P_{2i} / P_{\cdot i}$, และต่อๆ ไปสำหรับทุกค่าของ r และ c อัตราความคลาดเคลื่อนคาดหวังสำหรับวิธีการณ์ก็คือ P(2)

$$P(2) = 1 - \sum_{i,j} P_{ij}^2 / P_{\cdot j}$$

ดังนั้นการลดแบบสัดส่วนในความคลาดเคลื่อนที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของการรักษาผลรวมด้านข้างเดิม (Original marginal totals) ก็จะเป็น $\tau_x = \tau_a$

$$\tau_x = \frac{\sum_{i,j} P_{ij}^2 / P_{\cdot j} - \sum_i P_{i\cdot}^2}{1 - \sum_i P_{i\cdot}^2}$$

เช่นเดียวกับ λ ค่า τ_n จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 และ τ_n จะไม่สมมาตร

ตัวประมาณค่าของ τ_x จะได้เป็น $\hat{\tau}_x$ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับตัวประมาณค่าใน P(1) และ P(2) ดังนี้

$$\hat{P}(1) = 1 - \sum_i (f_{i\cdot}/n)^2 = 1 - \sum f_{i\cdot}^2 / n^2$$

$$= \frac{n - \sum f_{i\cdot}^2 / n}{n}$$

$$\hat{P}(2) = 1 - \sum_{i,j} (f_{ij}/n)^2 / (f_{.j}/n) = 1 - \sum_{i,j} f_{ij}^2 / n\, f_{.j}$$

$$= \frac{n - \sum f_{ij}^2 / f_{.j}}{n}$$

ดังนั้น $$\hat{\tau}_n = \frac{\hat{P}(1) - \hat{P}(2)}{\hat{P}(1)} = \frac{\sum_{i,j} f_{ij}^2 / f_{.j} - \sum_i f_{i.}^2 / n}{n - \sum f_{i.}^2 / n}$$

ในทำนองเดียวกัน $\hat{\tau}_y$ ก็จะหาได้เป็น

$$\hat{\tau}_y = \frac{\sum_{i,j} f_{ij}^2 / f_{i.} - \sum_j f_{.j}^2 / n}{n - \sum_j f_{.j}^2 / n}$$

ดังนั้นเราจะได้ $$\hat{\tau} = \frac{\left\{\sum_{i,j} f_{ij}^2 / f_{.j} - \sum_i f_{i.}^2 / n\right\} + \left\{\sum_{i,j} f_{ij}^2 / f_{i.} - \sum f_{.j}^2 / n\right\}}{\left\{n - \sum f_i^2 / n\right\} + \left\{n - \sum_i f_j^2 / n\right\}}$$

ในเมื่อ $f_{i.}$, $f_{.j}$ และ f_{ij} เป็นความถี่ซึ่งสอดคล้องกับ $P_{i.}$, $P_{.j}$ และ P_{ij} ตามลำดับ

สำหรับ τ นั้นเป็นมาตราวัดแบบสมมาตร ค่าของ τ อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เช่นเดียวกับ τ_x และ τ_y แต่ τ_x และ τ_y นั้นเป็นมาตราวัดแบบไม่สมมาตร

ไลท์ และ มาร์โกลิน (Light and Mangolin, 1971) ได้เสนอมาตราวัดมาตรเกี่ยวพันโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน สมมติว่าตัวแปรแถวตั้ง Y เป็นแฟคเตอร์ที่จะศึกษา และตัวแปรตาม X เป็นการตอบสนอง แล้วเราจะได้ผลรวมที่ว่าของทั้งหมด (SST) ใน X เป็นดังนี้

$$SST = \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} \sum_i f_{i.}^2$$

ตามวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว เราจะได้ว่า

$$SST = SSB + SSW$$

ในเมื่อ SSB เป็นผลรวมกำลังสองระหว่างกลุ่ม และ SSW เป็นผลรวมกำลังสองภายในกลุ่ม

$$SSW = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{ij}^2 / f_{\cdot j}$$

$$SSB = SST - SSW$$

มาตราวัดความเกี่ยวพันซึ่งคล้ายคลึงกับกำลังของสหสัมพันธ์แบบผลคูณโมเมนต์ (r^2) และเหมือนกับ τ ซึ่งไลท์ และ มาร์โกลิน เสนอไว้ คือ

$$R_A^2 = SSB/SST$$

เช่นเดียวกับ Y^2 ที่ R_A^2 จะแสดงว่าสัดส่วนของความผันแปรใน X อธิบายได้ด้วย Y แต่ไม่เหมือนกับ R^2 โดยมี R_A^2 เป็นมาตราวัดแบบไม่สมมาตร และ R_A^2 มีค่าเท่ากับ $\hat{\tau}_x$ และยังให้การแปรความหมายเช่นเดียวกันอีก แต่ R_A^2 มีข้อได้เปรียบที่ง่ายต่อการทดสอบอันสำคัญ เพราะเมื่อตัวอย่างขนาดโตและภายใต้สมมติฐานที่ว่ามีความเป็นอิสระกันระหว่าง X กับ Y แล้วตัวสถิติ

$$M = (n-1)(r-1)R_A^2$$

จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ $(r-1)(c-1)$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของความสัมพันธ์ระหว่างแผนการศึกษา (X) กับการนับถือศาสนา (Y) จะได้ τ_x, τ_y และ τ ดังนี้

$$\sum f_{i\cdot}^2/n = (60^2 + 16^2 + 24^2)/100 = 44.32$$

$$\sum f_{ij}^2/f_{\cdot j} = (0^2 + 5^2 + 20^2)/25 + (40^2 + 10^2 + 0^2)/50 + (20^2 + 1^2 + 4^2)/25$$

$$= 67.68$$

$$\tau_x = \frac{67.68 - 44.32}{100 - 44.32} = 0.42$$

$$\sum f_{\cdot j}^2/n = (25^2 + 50^2 + 25^2)/100 = 37.50$$

$$\sum f_{ij}^2/f_{i\cdot} = (0^2 + 40^2 + 20^2)/60 + (5^2 + 10^2 + 1^2)/16 + (20^2 + 0^2 + 4^2)/24$$

$$= 58.55$$

$$\tau_y = \frac{58.55 - 37.50}{100 - 37.50} = 0.34$$

$$\tau = \frac{(67.68 - 44.32) + (58.55 - 37.50)}{(100 - 44.32) + (100 - 37.50)} = 0.38$$

$$SST = (100/2) - (1/2)(44.32) = 27.84$$

$$SSW = (100/2) - (1/2)(67.68) = 16.16$$

$$SSB = SST - SSW = 27.84 - 16.16 = 11.68$$

$$R_A^2 = SSB/SST = 11.68/27.84 = 0.42$$

$$M = (n-1)(r-1)R_A^2 = (100-1)(3-1)(0.42) = 83.16$$

ดังนั้น M จะมีนัยสำคัญ นั่นคือ X และ Y มีความสัมพันธ์กัน

(3) สหสัมพันธ์บางส่วนแบบกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal's Partial Lambda) กูดแมน และ ครัสคัล (1954) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันบางส่วนระหว่างตัวแปรแบบนามบัญญัติหรือแบบอันดับไว้ จากการใช้เหตุผลแพลดสัดส่วนความคลาดเคลื่อน (PrE) เขาแนะนำในการอธิบาย Y ไว้ 2 วิธี คือ (1) โดยการทราบแต่เพียงคะแนนของ Z (ตัวแปรควบคุม) และ (2) โดยการทราบคะแนนทั้ง Z และ Y (ตัวแปรอิสระ) มาตราวัดความเกี่ยวพันบางส่วนนี้เป็นรูปทั่วไปของ λ (ในเมื่อใช้แต่ Y เท่านั้น) ซึ่งกำหนดไว้

$$\lambda_{xy} = \frac{\sum_{k,j} P_{mjk} - \sum_{k} P_{m.k}}{1 - \sum_{k} P_{m\,k}}$$

โดยที่ $P_{m.k}$ เป็นความน่าจะเป็นแถวนอนด้านข้างที่มากสุดในค่าที่ k ของ Z และ $P_{m.k}$ เป็นความน่าจะเป็นสูงสุดในแถวตั้งๆ มี j ของค่ามี k ในตัวแปร Z ($i = 1, 2, ..., r, j = 1, 2, .., c, k = 1, 2, s$)

ตัวประมาณค่าของ $\lambda_{xy.Z}$ กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\lambda}_{xy..Z} = \frac{\sum_{k,j} f_{mjk} - \sum_{k} f_{m.k}}{n - \sum_{k} f_{m.k}}$$

ในเมื่อ f_{mjk} และ $f_{m.k}$ เป็นความถี่ที่สอดคล้องกับ P_{mjk} และ $P_{m.k}$

เมื่อตัวอย่างขนาดโต เราได้ค่าประมาณของความแปรปรวนของ $\hat{\lambda}_{yn.z}$ ได้เป็น

$$S_{\hat{\lambda}_{xy.z}} = \frac{(n - \Sigma f_{mjk})(\Sigma f_{mjk} + \Sigma f_{m.k} - 2\Sigma f_{mjk})}{(n - \Sigma f_{m.k})^3}$$

ในเมื่อ $\underset{k,j}{\tau^*} f_{mjk}$ เป็นผลรวมของ f_{mjk} ต่าง ๆ มีอยู่ในแถวนอนเดียวกับ $f_{m.k}$ สำหรับทุกค่า k

เนื่องจาก $\hat{\lambda}_{xy.z}$ มีการแจกแจงแบบปกติ (โดยประมาณ) ที่มีค่าเฉลี่ย $\lambda_{xy.z}$ และความแปรปรวน $S^2_{\hat{\lambda}_{xy.z}}$ (ค่าประมาณ) เราจึงได้คุณสมบัตินี้พอสมสมมติฐานและสร้างช่วงเชื่อมั่นของ $\lambda_{xy.z}$ ได้

สำหรับความเกี่ยวพันบางส่วนของ λ และ τ นั้น สามารถจะหาได้โดยการเฉลี่ยสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันของตัวแปรสองตัว (X, Y) ในค่าของตัวแปรที่สาม (Z) ที่ควบคุมไว้ การเฉลี่ยอาจจะเป็นการเฉลี่ยธรรมดา หรือโดยการถ่วงน้ำหนักก็ได้ดังนี้

(ก) ไม่ถ่วงน้ำหนัก

$$\text{Statistic}_{xy.z} = (1/k)\,\Sigma\, \text{Statistic}_i$$

ในเมื่อ k เป็นจำนวนค่าของตัวแปรที่สาม (Z)

(ข) ถ่วงน้ำหนักด้วยจำนวนตัวอย่างในค่าต่าง ๆ ของตัวแปรควบคุม

$$\text{Statistics}_{xy.z} = (\Sigma\, \text{Statistic}_i(n_i))/(\Sigma\, n_i)$$

ในเมื่อ n_i เป็นจำนวนตัวอย่างในค่าที่ i ของ Z

(ค) ถ่วงน้ำหนักด้วยส่วน (Conditional Denominators)

$$\text{Statistic}_{xy.z} = \frac{\Sigma\, \text{Statistic}_i(\text{Denominator}_i)}{\Sigma\, \text{Denominator}_i}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับการวางแผนการศึกษา (X), **การนับถือศาสนา, และ**

ชนชั้นทางสังคม (Z) ของนักเรียนมัธยมโดยอาศัยตัวอย่างได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่มาดังนี้

		Z_1: ชนชั้นต่ำ				Z_2: ชนชั้นสูง			
	Y	Y_1	Y_2	Y_3		Y_1	Y_2	Y_3	
X	X_1	0	11	9	20	0	29	11	40
	X_2	0	5	1	6	5	5	0	10
	X_3	8	0	0	8	12	0	4	16
		8	16	10	34	17	34	15	66

ในเมื่อ X_1: ไม่มีแผนการเรียนต่อ X_2: เรียนอาชีพ X_3: เรียนมหาวิทยาลัย

และ Y_1: คริสต์, Y_2: พุทธ, Y_3: อิสลาม

$$\hat{\lambda}_{xy.Z} = \frac{\left\{(8+11+9)+(12+29+11)\right\}-(20+40)}{100-(20+40)}$$

$$= 20/40 = 0.50$$

$$\tau_{x_1} = \frac{(8^2/8+11^2/16+5^2/16+9^2/10+1^2/10)-(20^2+6^2+8^2)/34}{34-(20^2+6^2+8^2)/34}$$

$$= 0.55$$

$$\tau_{x2} = \frac{(5^2/17+12^2/17+29^2/34+5^2/34+11^2/15+4^2/15)-(40^2+10^2+16^2)/66}{66-(40^2+10^2+16^2)/66}$$

$$= 0.41$$

ดังนั้น (ก) $\tau_{x(yx.Z)} = (0.55+0.41)/2 = 0.48$

(ข) $\tau_{x(yx.Z)} = \dfrac{0.55(34)+0.41(66)}{34+66} \cong 0.46$

(ค) $\tau_{x(yx.Z)} = \dfrac{0.55(19.30)+0.41(36.36)}{19.30+36.36}$

$$= 0.46$$

ในเมื่อส่วนคือ $34-(20^2+6^2+8^2)/34 = 19.30$ และ $66-(40^2+10^2+16^2)/66$ $= 36.36$

10.1.5 มาตราวัดการสอดคล้อง (Measures of Agreement)

ในบางครั้งเรามีความสนใจการสอดคล้องกันระหว่างสองกลุ่ม (เช่น สามีและภรรยา พ่อแม่และบุตร) หรือสองผู้ตัดสินซึ่งจะประเมินผลของแต่ละคน เช่น สนใจว่าสามีและภรรยา มีทัศนคติต่อพฤติกรรมบางอย่างของเด็กนั้นสอดคล้องกันหรือไม่ การสอดคล้องจะสูงสุดถ้าสมาชิกทั้งสองของแต่ละคู่ (สามีและภรรยา) ได้คำตอบเดียวกัน วิธีที่จะกำหนดการสอดคล้องก็คือคำนวณสัดส่วนของหน่วยทดลองที่อยู่ในแถวทะแยงหลัก (main diagonal) ของตารางจัตุรัส r × r

ให้ $Po = \sum_i P_{ii}$ $(i = 1, 2, .., r)$ เป็นสัดส่วนของหน่วยทดลองมีอยู่ในแถวแรกของตารางจัตุรัสที่มี r แถวนอนและแถวตั้ง Po ไม่เป็นดัชนีของความสอดคล้องที่สมบูรณ์ เพราะว่าบางหน่วยอาจจะอยู่ในแถวกลางเพราะโศลก (by chance) จึงจำเป็นต้องแก้ไขการเกิดขึ้นแบบโศลก โดยใช้ $Po - Pc$ ในเมื่อ $Pc = \sum_i P_{i.}P_{.i}$ และ $Pi.$ กับ $P.j$ เป็นสัดส่วนด้านข้างในแถวนอนและแถวตั้งมี i ตามลำดับ หรืออาจจะกล่าวได้ว่า Pc นั้นเป็นผลรวมของสัดส่วนที่หวังไว้ภายใต้ตัวแบบของการเป็นอิสระ อย่างไรก็ตามมาตรานี้ยังขึ้นอยู่กับผลรวมด้านข้าง จึงต้องหารด้วย $1 - P_c$ ซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปได้ที่สูงสุดสำหรับผลรวมด้านข้างมีกำหนดให้ $P_{.i}$ และ $P_{.i}$ ดังนั้นมาตราวัดการสอดคล้อง K จึงกำหนดไว้ดังนี้

$$K = (P_o - P_c)/(1 - P_c)$$

โคเชน (Cohen, 1960) เป็นผู้เสนอมาตราวัด K นี้ และ K เป็นมาตราวัดสัดส่วนของการสอดคล้องระหว่างสองกลุ่มหรือสองผู้ตัดสินซึ่งจะประเมินผลแต่ละคน และได้แก้ไขการสอดคล้องเนื่องจากโศลกแล้ว ค่าของ K เป็น 0 เมื่อจำนวนของการสอดคล้องเท่ากับจำนวนคาดหวังตามโศลก และ K จะเป็น 1 เมื่อกลุ่มหรือผู้ตัดสินเห็นด้วยอย่างสมบูรณ์ และมันจะเป็นลบ (–) ถ้าการสอดคล้องที่สังเกตได้น้อยกว่าการสอดคล้องที่คาดหวังโดยโศลก

ตัวประมาณค่าของ K กำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{K} = (\sum f_{ij} - \sum f_{i.}f_{.i}/n)/(n - \sum f_{i.}f_{.i}/n)$$

ในบางครั้งการไม่สอดคล้องกันสำหรับสองกลุ่มอาจจะมีความสำคัญ (Seriousness) ต่างกัน จึงจำเป็นต้องถ่วงน้ำหนักแต่ละเซลของตารางตามความสำคัญของการไม่สอดคล้องกัน ดังนั้นมาตราวัด K จึงเป็น Kw

$$K_w = (P'_o - P'_c)/(1 - P'_c)$$

ในเมื่อ $P_o = \sum_{ij} W_{ij}\ P_{ij}$, $P_c = \sum_{ij} W_{ij}\ P_{i\cdot}\ P_{\cdot j}$ และ Wij เป็นน้ำหนักถ่วงในเซลล์ที่ ij ของตารางที่มี $r = c$ สำหรับ P_o และ P_c นั้นเป็นสัดส่วนของการสอดคล้องสังเกตได้และที่คาดหวัง (ภายใต้ความเป็นอิสระ) โดยการถ่วงน้ำหนัก ตัวประมาณค่าของ Kw จะเป็น

$$\hat{K}_w = \frac{\sum W_{ij}f_{ij} - (\sum W_{ij}f_{i.}f_{.j})/n}{n - (\sum W_{ij}f_{i.}f_{.j})/n}$$

เมื่อตัวอย่างขนาดโตที่สุ่มจากประชากรแบบพหุนาม (Multinomial distribution) แล้วค่าประมาณของความแปรปรวนของ $\hat{K}w$ จะเป็น

$$S^2_{\hat{K}_w} = (1/n(1-\hat{P}_c)^4)\left(\left\{(1/n)\sum f_{ij}(W_{ij}(1-\hat{P}_c)-(W_{i.}+W_{.j})(1-\hat{P}_o))^2\right\} - (\hat{P}_o\hat{P}_c-2\hat{P}_c+\hat{P}_o)\right)$$

ในเมื่อ W_{ij} เป็นน้ำหนักถ่วงที่ปรับปรุงให้มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1.0

$$\hat{P}_o = (\sum W_{ij}\ f_{ij})/n \qquad \overline{W}_{i.} = (\sum_j W_{ij}\ f_{.j})/n$$

$$\hat{P}_c = (\sum_{ij} W_{ij}\ f_{i\cdot}\ f_{\cdot j})/n^2 \qquad \overline{W}_{.j} = (\sum_i W_{ij}\ f_{i.})/n$$

การแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{K}w$ จะเห็นแบบปกติเมื่อตัวอย่างขนาดโต ดังนั้น $S^2_{\hat{K}w}$ จึงใช้สร้างช่วงเชื่อมั่นได้ ภายใต้ข้อสมมติของความเป็นอิสระ $S^2_{\hat{K}w}$ จะลดลงเป็น

$$S^2_{\hat{K}_w} = (1/n(1-\hat{P}_c)^2)\left\{(1/n)\sum f_{i.}f_{.j}(W_{ij} - (\overline{W}_{i.} - \overline{W}_{.j}))^2 - \hat{P}^2_c\right\}$$

ซึ่งจะใช้ทดสอบสมมติฐานที่ว่า $Kw = 0$ ได้ เพราะเราถือว่า $Z = \hat{K}w/S_{\hat{K}w}$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N (0, 1)

สำหรับ $\hat{K}$ นั้น เป็นตัวอย่างขนาดโตก็จะได้ S^2_K เช่นเดียวกับ $S^2_{\hat{K}_w}$ แต่ $W_{ij} = 1$ สำหรับ $i = j$ และ W_{ij} สำหรับ $i \neq j$

ตัวอย่าง ในการศึกษาพฤติกรรมการออกเสียงเลือกตั้งของสามีภรรยาที่อยู่ในเขตบางกะปิ ได้ข้อมูลมาดังนี้

การออกเสียงเลือกตั้งของภรรยา		ประชาธิปัตย์	พลังใหม่	ชาติไทย	
การออกเสียงของสามี	ประชาธิปัตย์	1586 (1)	117 (.5)	49 (.5)	1752
	พลังใหม่	103 (0)	1540 (1)	40 (0)	1683
	ชาติไทย	34 (.5)	17 (.5)	359 (1)	410
	รวม	1723	1674	448	3845

ตัวเลขในวงเล็บ ( ) เป็นน้ำหนักถ่วง

$$\sum_i f_{i\cdot} f_{\cdot i} = 1752\,(1723) + 1683\,(1674) + 410\,(448) = 6019718$$

$$\hat{x} = \frac{(1586 + 1540 + 359) - 6019718 / 3845}{3845 - 6019718 / 3845} = 0.842$$

$$\sum_{i,j} w_{ij} f_{ij} = (1)\,1586 + (.5)\,117 + \ldots\ldots + (1)\,359 = 3593.5$$

$$\sum_{i,j} w_{ij} f_{i\cdot} f_{\cdot j} = (1)(1752)(1723) + (.5)(1752)(1674) + \ldots\ldots$$

$$+ (1)(410)(448) = 8574975$$

$$\hat{K}_w = \frac{3593.5 - 8574975 / 3845}{3845 - 8574975 / 3845} = 0.844$$

สำหรับความแปรปรวนของ $\hat{K}$ และ $\hat{K}_w$ เราจะได้

$$S^2_{\hat{K}} = 0.001, \quad S^2_{\hat{K}w} = 0.0006$$

10.2 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแบบอันดับ (Association between Ordinal Variables)

ในกรณีตัวแปรที่สนใจตั้งแต่สองตัวขึ้นไป เมื่อต้องการศึกษาดีกรีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้น โดยที่ตัวแปรแต่ละตัวให้ข้อมูลแบบอันดับเป็นอย่างน้อย **แล้ว**

เรามีมาตราวัดความสัมพันธ์ที่น่าสนใจหลายมาตรา ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปร่วมกับมาตราวัดและแบบทดสอบอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องด้วย

10.2.1 สัมประสิทธิ์สัมพันธ์แบบอันดับของสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation Coefficient ρ_s)

มาตราวัดแบบนี้เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย ซึ่งสเปียร์แมน (Spearman, 1904) ได้เสนอไว้ และมักเรียกกันว่า Spearman's rho, ρ_s สัมประสิทธิ์ ρ_s นี้กำหนดไว้ว่า

$$\rho_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{N(N^2-1)}$$

ในเมื่อ $d_i = R(X_i) - R(Y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ ซึ่งเป็นผลต่างของอันดับที่ในค่าสังเกตที่ i ของตัวแปร X และ Y

ค่าของ ρ_s จะอยู่ระหว่าง -1 และ 1 นั่นคือ $-1 \leq \rho_s \leq 1$

ค่าประมาณของ ρ_s ประมาณได้โดยอาศัยตัวอย่างสุ่มขนาด n คู่ จากประชากรที่ประกอบด้วยค่าสังเกต $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots\ldots, (X_n, Y_n)$ โดยที่ค่าเหล่านี้จะเป็นตัวเลขหรือไม่เป็นตัวเลขก็ได้ เมื่อได้ $R(X_i)$ และ $R(Y_i)$ เป็นอันดับที่ของ X และ Y ซึ่งเรียงตามลำดับจากน้อยไปมาก แล้วตัวสถิติ r_s ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าของ ρ_s จะกำหนดไว้ดังนี้

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

กรณีที่ค่าสังเกตของ X หรือของ Y เท่ากันแล้ว อันดับที่ซึ่งกำหนดให้นั้นจะเป็นอันดับที่เฉลี่ย แต่ถ้ามีการเท่ากันมากจำต้องปรับปรุงตัวสถิติ r_s เป็น

$$r_s^c = \frac{\sum X^2 + \sum Y^2 - \sum d_i^2}{2\sqrt{(\sum X^2)(\sum Y^2)}}$$

ในเมื่อ $\sum X^2 = \frac{n^3-n}{12} - \sum T_x$, $T_x = (t_x^3 - t_x)/12$

$$\sum Y^2 = \frac{n^3-x}{12} - \sum T_y; \quad T_y = (t_y^3 - t_y)/12$$

โดยที่ t_x เป็นจำนวนของค่าสังเกต X ที่เท่ากัน สำหรับอันดับที่หนึ่ง ๆ และ t_y ก็เป็นเช่นเดียวกัน

ในการทดสอบอันสำคัญของ r_s หรือทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$Ho: \rho_s = 0$ หรือ Ho: X กับ Y เป็นอิสระกัน

$Ha: \rho_s \neq 0$, $Ha: \rho_s > 0$, หรือ $Ha: \rho_s < 0$

เราก็อาศัยค่าวิกฤตจากตาราง แต่ถ้าตัวอย่างขนาดโตเท่ากับหรือมากกว่า 10 เราใช้ตัวสถิติทดสอบ T

$$T = r_s/\sqrt{(1 - r_s^2)/(n-2)}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบที (Student t) ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu = n - 2$

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนเหตุผล (X) กับผลทดสอบวิชาสถิติ (Y) ได้คะแนนมาดังนี้

X	Y	$R_{(x)}$	$R_{(y)}$	d	d^2
30	42	1.5	3	−1.5	2.25
30	46	1.5	4	−2.5	6.25
35	39	3.5	2	1.5	2.25
35	37	3.5	1	2.5	6.25
40	65	5	8	−3.0	9.00
45	88	6	11	−5.0	25.00
50	86	7	10	−3.0	9.00
60	56	8	6	2.0	4.00
70	62	9	7	2.0	4.00
80	92	10.5	12	1.5	2.25
80	54	10.5	5	−5.5	30.25
90	81	12	9	3.0	9.00
					109.50

$$r_s = 1 - \frac{6\,(109.5)}{12\,(12^2 - 1)} = 0.617$$

สำหรับค่า X เราได้ $t_1 = 2,\ t_2 = 2,\ t_3 = 2$

$$\Sigma T_x = \frac{1}{12}[(2^3-2)+(2^3-2)+(2^3-2)] = 1.5$$

$$\Sigma X^2 = (12^3-12)/12 - 1.5 = 141.5$$

สำหรับค่า Y ไม่มีค่าเท่ากัน ดังนั้น $\Sigma T_y = 0$

$$\Sigma Y^2 = (12^3-12)/12 - 0 = 143$$

ดังนั้น $$r_s^c = \frac{141.5 + 143 - 109.5}{2\sqrt{(141.5)(143)}} = 0.616$$

เราจะเห็นได้ว่าเมื่อมีค่า (หรืออันดับที่) เท่ากันน้อย จะทำให้ r_s กับ r_s^c แตกต่างกันเล็กน้อยเท่านั้น ฉะนั้นจะใช้ r_s^c ก็ต่อเมื่อมีค่าหรืออันดับที่เท่ากันมาก ๆ

เมื่อทดสอบนัยสำคัญของ r_s เราสรุปโดยอาศัยตารางได้ว่า r_s มีนัยสำคัญที่ $\alpha = .05$ หรือ $Ha : \rho_s \neq 0$ น่าจะเป็นจริงนั่นเอง

สำหรับค่าประมาณแบบช่วงของ ρ_s จะหาได้โดยอาศัยตัวแปลงฟิชเชอร์ (Fisher Z) ที่กำหนดไว้ว่า

$$Z(r_s) = \tan h^{-1} r_s = \frac{1}{2}\ln(1+r_s)(1-r_s)$$

และสมมติว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรแบบปกติชนิดสองตัวแปร นั่นคือช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับ $Z(\rho_s) = \tan h^{-1}\rho_s$ กำหนดไว้ว่า

$$Z(\rho_s) = Z(r_s) \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{Z(r_s)}$$

ในเมื่อ $\delta_{Z(rs)} = 1.03/\sqrt{n-3}$ จากช่วงเชื่อมั่นของ $Z(\rho_s)$ เราสามารถแปลงกลับไปสู่ช่วงเชื่อมั่นของ ρ_s ได้

ดังนั้นเมื่อต้องการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉพาะของ ρ_s คือ ρ_{so} เราก็ใช้ตัวสถิติทดสอบ Z

$$Z = \frac{Z(r_s) - Z(\rho_{so})}{1.03/\sqrt{n-3}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1)

บางครั้งเราต้องการเปรียบเทียบสองสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับจากสองประชากรซึ่งมีข้อจำกัดว่าเป็นประชากรแบบปกติ นั่นคือสมมติฐานหลักจะเป็น

$$Ho : \rho_{s_1} - \rho_{s_2} = \rho_o$$

เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1) และ Z กำหนดไว้ว่า

$$Z = (d - Z(\rho_o))/\sigma_d$$

ในเมื่อ $d = Z(r_{s_1}) - Z(r_{s_2})$; $Z(\rho_o) = Z(\rho_{s_1}) - Z(\rho_{s_2})$; σ_d

$$= \sqrt{1.06/(n_1-3)} + \sqrt{1.06/(n_2-3)} \quad ; n_1, n_2 \geq 10$$

10.2.2 สัมประสิทธิ์สัมพันธ์แบบอันดับของเคนดาลล์ (Kendall Rank Correlation Coefficient, ρ)

เคนดาลล์บี (1938) ได้เสนอมาตราวัดสหสัมพันธ์ที่เรียกว่า Kendall's τ ไว้ ซึ่งเป็นมาตราวัดแบบอาศัยอันดับที่ มาตราวัด τ นี้เป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันพอสมควร

ค่าของ τ จะอยู่ระหว่าง -1 และ 1 เช่นเดียวกับ ρ_s ตัวประมาณค่าของ τ จะได้เป็น $\hat{\tau}$ สำหรับ τ นั้นกำหนดในเทอมของการสอดคล้องและการไม่สอดคล้อง (Concordance and Disconcordance) นั่นคือ

$$\tau = P_c - P_d$$

ในเมื่อ P_c เป็นความน่าจะเป็นของการสอดคล้อง และ P_d เป็นความน่าจะเป็นของการไม่สอดคล้อง

ค่าสังเกต (X_i, Y_i) กับ (X_j, Y_j) จะเรียกว่าสอดคล้องกัน ถ้าผลต่างระหว่าง X_i กับ X_j มีทิศทางเช่นเดียวกับผลต่างระหว่าง Y_i กับ Y_j หรือกล่าวได้อีกอย่างว่า ถ้า $X_i > X_j$: $Y_i > Y_j$ หรือ $X_i < X_j$ และ $Y_i < Y_i$ แล้วจะเรียกว่าสอดคล้องกัน ส่วนค่าสังเกต (X_i, Y_i) กับ (X_j, Y_j) จะเรียกว่าไม่สอดคล้องกันถ้าทิศทางของผลต่างไม่เป็นแบบเดียวกัน

ถ้า (X_1, Y_1) (X_2, Y_2),......, (X_n, Y_n) เป็นค่าสังเกตของตัวอย่างกับขนาด n จากประชากรชนิดสองตัวแปร (X, Y) ที่มีสเกลการวัดในค่าสังเกตเป็นแบบอันดับอย่างน้อย แล้วเราสามารถหาตัวสถิติ $\hat{\tau}$ ซึ่งเป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ได้ดังนี้

(1) เรียกค่าสังเกต (X_i, Y_i) ตามขนาดของ X โดยให้ค่าน้อยของ X เป็นอันดับ 1 ค่าน้อยรองไปเป็นอันดับ 2 และต่อ ๆ ไป สำหรับค่าของ Y จะตามค่าของ X ดังนั้น X จะอยู่ในลำดับธรรมชาติ (Natural Order)

(2) เปรียบเทียบค่า Y เป็นคู่ด้วยกันจำนวน $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ ครั้ง โดยเริ่มต้นจากค่า Y ที่คู่กับ X ที่มีอันดับเป็น 1 ถ้าค่า Y ที่นำไปเปรียบเทียบนั้นน้อยกว่าค่า Y ที่คู่กับค่า X อันดับสูง เราจะเรียกว่าคู่ของค่า Y นั้นอยู่ในลำดับธรรมชาติ แต่ถ้ามากกว่าก็แสดงว่าคู่ของค่า Y นั้นไม่อยู่ในลำดับธรรมชาติ (Reverse natural order)

(3) ให้ f_c เป็นจำนวนคู่ของลำดับธรรมชาติ และ f_d เป็นจำนวนค่าของลำดับไม่เป็นธรรมชาติ และให้ $S = f_c - f_d$

เกนดาวล์แสดงให้เห็นว่าค่าที่มากที่สุดของ S จะเท่ากับ $n(n-1)/2$ และได้กำหนดสถิติ $\hat{\tau}$ ไว้ดังนี้

$$\hat{\tau} = \frac{\text{ค่าของ S ที่สังเกตได้}}{\text{ค่าที่มากสุดของ S}} = \frac{S}{n(n-1)/2}$$

ถ้าค่าของ Y เรียงลำดับตาม X เราจะได้ค่า S สูงสุดคือ $S = n(n-1)/2$ ดังนั้น $\hat{\tau} = 1/r$ ซึ่งแสดงว่ามีสหสัมพันธ์ทางตรงอย่างสมบูรณ์ แต่ถ้าค่าของ Y เรียงลำดับกลับกับของ X เราจะได้ค่า S สูงสุด แต่เป็นลบนั้นคือ $S = -n(n-1)/2$ ซึ่งจะได้ค่า $\hat{\tau} = -1$ ซึ่งแสดงว่ามีสหสัมพันธ์ทางกลับกันอย่างสมบูรณ์ ดังนั้นค่าของ $\hat{\tau}$ จึงอยู่ระหว่าง -1 กับ 1

ในการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\tau}$ หรือทดสอบความเป็นอิสระของ X และ Y นั้น คือสมมติฐานหลักที่จะทดสอบจะเป็น

$Ho: \tau = O$ หรือ Ho: X กับ Y เป็นอิสระกัน เกณฑ์ตัดสินใจกำหนดค่าวิกฤต ไว้ในตาราง

เคนดาวล์ (1948) แสดงไว้ว่าเมื่อ $n \geq 8$ การแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{\tau}$ จะไม่แตกต่างจากการแจกแจง แบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนดังนี้

$$E(\hat{\tau}) = O$$

$$V(\hat{\tau}) = 2(2n+5)/9n(n-1)$$

ดังนั้นในการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{\tau}$ จึงใช้ตัวรวมทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{\tau} - E(\hat{\tau})}{\sqrt{V(\hat{\tau})}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน $n(O, 1)$ หรือใช้ตัวรหัส S โดยตรงก็ได้โดยแก้ไขความต่อเนื่องดังนี้

$$Z_o = \frac{|S| - 1}{\sqrt{n(n-1)(2n+5)/18}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน $N(O, 1)$

กรณีที่ค่าสังเกตเท่ากัน เราปรับปรุงค่าของ $\hat{\tau}$ ได้เป็น

$$\hat{\tau} = \frac{S}{\sqrt{n(n-1)/2 - T_x}\ \sqrt{n(n-1)/2 - T_y}}$$

ในเมื่อ $T_x = \frac{1}{2}\Sigma t_x(t_x - 1)$ และ $T_y = \frac{1}{2}\Sigma t_y(t_y - 1)$ โดยที่ t_x และ t_y เป็นจำนวนของค่าสังเกต X และ Y มีเท่ากันสำหรับอันดับที่กำหนดไว้

เมื่อการเท่ากันเกิดขึ้นเฉพาะค่า X (ไม่เกิดในค่า Y) หรือเฉพาะค่า Y (ไม่เกิดในค่า X) แล้วความแปรปรวนของ S จะเป็น

$V(S) = \frac{1}{18}[n(n-1)(2n+5) - \Sigma t(t-1)(2t+5)]$ แต่ถ้าการเท่ากันเกิดขึ้นทั้งค่า X และค่า Y แล้วความแปรปรวนของ S จะเป็น

$$V(S) = (1/18)\{n(n-1)(2n+5) - \sum t_x(t_x-1)(2t_x+5) - \sum t_y(t_y-1)(2t_y+5)\}$$
$$+(1/9n(n-1)(n-2))\{\sum t_x(t_x-1)(t_x-2)\}\{\sum t_y(t_y-1)(t_y-2)\}$$
$$+(1/2n(n-1)\{\sum t_x(t_x-1)\}\{\sum t_y(t_y-1)\}$$

ตัวอย่าง นักภาษาศาสตร์ได้เสนอวิธีปรับปรุงการอ่านภาษาไทย จากการทดลองกับเด็กนักเรียน 10 คน ได้คะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้น (X) และเชาว์ปัญญา (Y) ดังนี้

X	0.6	0.2	1.6	0.5	0.9	0.5	0.8	0.8	0.8	0.4
Y	87	107	102	104	104	89	109	109	101	96

คะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้นมีความสัมพันธ์กับเชาวน์ปัญญาหรือไม่

สมมติฐาน Ho: คะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้นกับเชาวน์ปัญญาเป็นอิสระกัน

ในการคำนวนตัวสถิติทดสอบ $\hat{\tau}$ เราเรียงค่า X จากน้อยไปมากได้ดังนี้

X	0.2	0.4	0.5	0.5	0.6	0.8	0.8	0.9	1.6
Y	107	96	104	89	86	109	101	104	102

f_c = จำนวนคู่ Y ที่เรียงลำดับตามธรรมชาติ

$= 2 + 6 + 2 + 5 + 5 + 0 + 0 + 2 + 0 = 22$

f_d = จำนวนคู่ Y ที่ไม่เรียงลำดับตามธรรมชาติ

$= 7 + 2 + 4 + 1 + 0 + 3 + 3 + 0 + 1 = 21$

$$S = f_c - f_d = 22 - 21 = 1$$

$$\hat{\tau} = \frac{S}{n(n-1)/2} = \frac{1}{10(9)/2} = 1/45 = 0.022$$

โดยมี $T_x = \frac{1}{2}\{2(2-1) + 3(3-1)\} = 4$

และ $t_y = \frac{1}{2}\{2(2-1) + 2(2-1)\} = 2$

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{10(9)/2-4}\;\sqrt{10(9)/2-2}}$$

$$= 1/\sqrt{41(43)} = 0.0238162$$

จากตารางเมื่อ $\alpha = .05$ และ $n = 10$ เราได้ค่าวิกฤตเป็น 0.511 ซึ่งมากกว่า $\hat{\tau}$ ดังนั้น จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ แสดงว่าคะแนนการอ่านที่เพิ่มขึ้นไม่มีความสัมพันธ์กับเชาว์ปัญญา

ถ้าเกิดการเท่ากันในค่าของ X และในค่าของ Y มาก ๆ หรือถ้าค่าของ X และ Y เป็นประเภทเชิงอันดับ (Ranked Categories) แล้ว เราสามารถสร้างตารางความถี่แบบ 2 ทางของค่า X และ Y ได้ดังนี้

Y_j		Y_1	Y_2		Y_c	รวม (R_i)
X_i	X_1	f_{11}	f_{12}		f_{1c}	R_1
	X_2	f_{21}	f_{22}		f_{2c}	R_2
				f_{ij}		
	X_r	f_{r1}	f_{r2}		f_{rc}	R_r
รวม (C_j)		C_1	C_2		C_c	$n = \Sigma f_{ij}$

ในเมื่อ $X_1 < X_2 < \ldots < X_r$ และ $Y_1 < Y_2 < \ldots Y_c$; f_{ij} เป็นความถี่ในค่าที่ i ของ X และมีค่า j ของ Y ; R_i และ C_j เป็นผลรวมของความถี่ ในค่า X ที่ i และค่า Y ที่ j, $(i = 1, 2, \ldots, r$ และ $j = 1, 2, \ldots, C)$

สำหรับค่าของ f_c, f_d และ S หาได้ดังนี้

$$(1)\ f_c = \sum_{i,j} a_{ij}$$

$$= \text{ความถี่ } (i, j) \left\{\text{ผลรวมของความถี่ที่อยู่ใต้และขวามือของความถี่ } (i, j)\right\}$$

ในเมื่อ $a_{ij} = f_{ij} \left\{\sum_{i,j} f_{i+1, j+1}\right\}$ (2) $f_d = \Sigma b_{ij}$

$$= \text{ความถี่ } (i, j) \left[\text{ผลรวมของความถี่ที่อยู่เหนือและขวามือของความถี่ } (i, j)\right]$$

ในเมื่อ $b_{ij} = f_{ij} (\sum_{i,j} f_{i-1, j+1})$ (3) $S = f_c - f_d$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบอันดับของเคนดาลล์ที่ยังไม่ปรับปรุงกรณีเท่ากัน ซึ่งจะได้เป็น $\hat{\tau}_a$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\tau}_a = \frac{S}{n(n-1)/2}$$

เมื่อปรับปรุงกรณีการเท่ากันจะได้ $\hat{\tau}_b$ ดังนี้

$$\hat{\tau}_b = \frac{S}{\sqrt{\frac{1}{2}(n^2 - \Sigma R_i^2)}\ \sqrt{\frac{1}{2}(n^2 - \Sigma C_j^2)}}$$

$$= \frac{2S}{\sqrt{(n^2 - \Sigma R_i^2)(n^2 - \Sigma C_j^2)}}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า $\hat{\tau}_b$ นี้จะเท่ากับ Pearson's r ถ้าประยุกต์กับตารางความถี่สองทางชนิด 2×2

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงชนชั้นทางสังคม (X) และการหนีงาน (Y) ของข้าราชการกรมหนึ่ง ได้ข้อมูลซึ่งเป็นจำนวนคนมาดังนี้

การหนีงาน (Y)	Y_1 : น้อย	Y_2 : ปานกลาง	Y_3 : มาก	รวม
ชนชั้นทางสังคม (X) X_1 : ต่ำ	2	2	6	10
X_2 : กลาง	2	6	2	10
X_3 : สูง	5	3	2	10
รวม	9	11	10	30

เราคำนวณค่า f_c, f_d และ S ได้ดังนี้

a_{ij} : แถวนอนแรก $2(6+2+3+2)$, $2(2+2)$, $6(0)$

: แถวนอนที่สอง $2(3+2)$, $6(2)$, $2(0)$

: แถวนอนที่สาม $5(0)$, $3(0)$, $2(0)$ (แถวนอนสุดท้ายไม่จำเป็นต้องคำนวณค่า a_{ij} เพราะจะเป็นศูนย์หมด)

ดังนั้น $f_c = \Sigma a_{ij} = 2(13) + 2(4) + 6(0) + 2(5) + 6(2) + 2(0)$

$= 26 + 8 + 0 + 10 + 12 + 0 = 56$

b_{ij} : แถวนอนแรก $2(0)$, $2(0)$, $6(0)$ (ไม่จำเป็นต้องคำนวณ)

: แถวนอนที่สอง $2(2+6)$, $6(6)$, $2(0)$

: แถวนอนที่สาม $5(6+2+2+6)$, $3(2+6)+2(0)$

ดังนั้น $f_d = \Sigma L_{ij} = 2(8) + 6(6) + 2(0) + 5(16) + 3(8) + 2(0)$

$$= 16 + 36 + 0 + 80 + 24 + 0 = 156$$

สำหรับ $\hat{\tau}_a$ และ $\hat{\tau}_b$ คำนวณได้ดังนี้

$$\hat{\tau}_a = \frac{-100}{30(29)/2} = -.23$$

$$\hat{\tau}_b = 2(-100) / \sqrt{\{30^2 - (10^2 + 10^2 + 10^2)\}\{30^2 - (9^2 + 11^2 + 10^2)\}}$$

$$= -.33$$

โนเธอร์ (Noether, 1976) ได้เสนอวิธีสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับ τ ไว้ แต่จะกล่าวเฉพาะกรณีที่ตัวแปร X และ Y ไม่มีค่าที่เท่ากัน เพราะกรณีที่ค่าเท่ากันสูตรจะยุ่งยาก ช่วงเชื่อมั่นสำหรับ τ ที่โนเธอร์เสนอไว้ก็คือ

$$\tau = \hat{\tau} \pm Z_{\alpha/2} \left(\frac{2}{n(n-1)}\right) \hat{\sigma}$$

ในเมื่อ $\hat{\sigma}^2 = 4\Sigma C_i^2 - 2\Sigma C_i - 2(2n-3)(\Sigma C_i)^2 / n(n-1)$ โดยที่ C_i เป็นจำนวนค่าสังเกต (X_j, Y_j) ที่สอดคล้องกับค่าสังเกต (X_i, Y_i) เนื่องจากค่าสังเกต (X_i, Y_i) ต้องเปรียบเทียบเพื่อหาความสอดคล้องกับค่าสังเกตอื่น ๆ (X_j, Y_j) จำนวน $(n-1)$ ครั้ง เราจึงมีจำนวนการเปรียบเทียบทั้งหมดเป็น $n(n-1)$

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลิกภาพของบุคคล 2 ประเภท คือการยอมจำนนต่ออิทธิพลของกลุ่ม (X) และการแสวงหาสถานภาพทางสังคม (Y) โดยอาศัยตัวอย่างของนักศึกษา 11 ราย จากการวัดบุคคลิกภาพทั้งสอง (X, Y) ได้ข้อมูลมาดังนี้

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	42	46	39	37	65	88	86	56	62	92	54

เราหาค่า f_c, f_d และ S ได้ดังนี้

$$f_c = 8 + 7 + 7 + 7 + 3 + 1 + 1 + 3 + 1 + 0 = 38$$

$$f_d = 2 + 2 + 0 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 = 17$$

$$S = f_c - f_d = 38 - 17 = 21$$

$$\hat{\tau} = \frac{21}{11(10)/2} = 0.38$$

เมื่อหาค่า C_i ($i = 1, 2, ..., n$) จะได้เป็นดังนี้

$$C_1 = 1+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

$$C_2 = 1+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

$$C_3 = 0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+1 = 7$$

$$C_4 = 7,\ C_5 = 7,\ C_6 = 6,\ C_7 = 6$$

$$C_8 = 6,\ C_9 = 6,\ C_{10} = 9,\ C_{11} = 4$$

$$\hat{\sigma}^2 = 4\sum C_i^2 - 2\sum C_i - 2(2n-3)(\sum C_i^2) / n(n-1)$$

$$= 4(516) - 2(74) - 2(22-3)(516) / 11(10)$$

$$= 1699.7455$$

$$\hat{\sigma} = 41.228$$

ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95 % สำหรับ τ จะเป็น

$$\tau = \hat{\tau} \pm Z_{.025}\left(\frac{2}{11(10)}\right)(41.228)$$

$$= 0.38 \pm 1.96\,(0.7496)$$

$$= 0.38 \pm 1.469$$

ซึ่งแสดงว่าตัวแปรทั้งสองไม่สัมพันธ์กัน (เพราะ τ คาบเกี่ยว 0 ไว้ด้วย)

ข้อสังเกต (1) การเลือกใช้ระหว่าง r_s และ $\hat{\tau}$ ซึ่งทั้งสองต่างก็เป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอันดับด้วยกันนั้น เรามีเกณฑ์ในการเลือกใช้ดังนี้

ก. เมื่อคำนวณด้วยมือ แล้ว $\hat{\tau}$ จะลำบากกว่า r_s

ข. การแจกแจงของ $\hat{\tau}$ จะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติได้เร็วกว่าการแจกแจงของ r_s ดังนั้นเมื่อใช้การประมาณค่าแบบปกติด้วยตัวอย่างขนาดปานกลาง แล้วก็ควรใช้ $\hat{\tau}$ เพราะน่าจะเชื่อมั่นได้มากกว่า

ค. ในการทดสอบสมมติฐานด้วยตัวสถิติทั้งสอง จะให้ ค่าประสิทธิภาพสัมพัทธ์แบบตัวอย่างขนาดโต (Asymptotic Relative Efficiency, ARE) เหมือนกัน เมื่อเทียบกับแบบทดสอบเพียร์สัน (Pearson Test) ที่ไว้ใจได้ (Valid)

ง. โดยทั่วไปเมื่อคำนวณ r_s และ $\hat{\tau}$ จากข้อมูลเดียวกันจะให้ค่าเท่ากัน แต่ในการทดสอบสมมติฐานจะได้ผลการตัดสินใจเหมือนกัน

จ. $\hat{\tau}$ ถือได้ว่าเป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ประชากร แต่ r_s ไม่เป็นเช่นนั้น ดังนั้นการใช้ $\hat{\tau}$ จึงน่าจะเป็นที่สนใจมากกว่า

(2) ตัวสถิติ $\hat{\tau}$ และ r_s ต่างก็สามารถใช้ทดสอบแนวโน้ม (Tests for Trend) ได้ ซึ่งเป็นอีกแบบหนึ่งของแบบทดสอบคอกซ์–สจวร์ท (Cox–Stuart Test for Trend) ที่จะกล่าวต่อไปในข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series data) ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเวลา และ Y เป็นข้อมูลที่สอดคล้องกับ X โดยมีสเกลการวัดอย่างน้อยแบบอันดับ ถ้า X กับ Y มีความสัมพันธ์กันทางตรงจริง โดยการทดสอบความสัมพันธ์ด้วยตัวสถิติ $\hat{\tau}$ หรือ r_s แล้วก็จะถือว่าข้อมูลมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น (Upward Trend) แต่ถ้ามีความสัมพันธ์ผูกผันก็ถือว่าข้อมูลมีแนวโน้มลดลง (Downward Trend)

(3) สำหรับตาราง 2×2 เราจะได้ว่า $|\hat{\tau}_b| = \phi$ แต่ $\hat{\tau}_b$ จะให้ค่าที่มีเครื่องหมายกำกับด้วย

10.2.3 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันเชิงอันดับของกูดแมนและครัสคัล (Goodman and Kruskal's Coefficient of Order Association, Gamma γ)

กูดแมนและครัสคัล (1954, 1963) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันสำหรับตารางจรณ์แบบอันดับ (Ordered Contingency Tables) ซึ่งเรียกว่า แกมมะ γ มาตราวัดนี้คล้ายกับของเคนดาลล์ τ แต่การหาการสอดคล้องนั้นต้องพิจารณาถึง n^2 คู่ หรือเป็นการเปรียบเทียบเป็นคู่ชนิดแทนที่ ในเมื่อการสอดคล้องของเคนดาลล์พิจารณาเพียง $\binom{n}{2}$ คู่ หรือเป็นการเปรียบเทียบเป็นคู่ชนิดไม่แทนที่ กูดแมนและครัสคัลได้กำหนด γ ไว้ดังนี้

$$\gamma = \frac{P_c - P_d}{_c + PP_d}$$

ในเมื่อ P_c และ P_d เป็นโอกาสที่คู่เปรียบเทียบจะสอดคล้องและไม่สอดคล้องกัน

สำหรับตัวอย่างเราได้ตัวประมาณค่าของ γ เป็น G และกำหนดไว้ดังนี้

$$G = \frac{f_c - f_d}{f_c + f_d}$$

ในเมื่อ f_c และ f_d เป็นจำนวนคู่ที่สอดคล้องและไม่สอดคล้องกัน

ในกรณีที่ไม่มีอันดับที่เท่ากัน แล้ว $f_c + f_d = n(n-1)/2$ แล้วเราจะได้ว่า $|\gamma| = |\tau|$ และถ้าจำนวนคู่ที่เท่ากันมีมาก แล้ว $|\gamma|$ จะมากกว่า $|\tau|$ มาก ๆ

ในการคำนวณค่า G นั้น เราอาศัยวิธีการคำนวณ f_c และ f_d แบบเคนดาลล์ ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบเป็นชนิดไม่แทนที่ ค่า G ที่คำนวณแบบนี้จะเป็นเช่นเดียวกับคำนวณ f_c และ f_d แบบแทนที่หรือแบบกูดแมนและคริสคัล ทั้งนี้ก็เพราะ f_c และ f_d แบบกูดแมนและคริสคัลจะเป็น 2 เท่าของแบบเคนดาลล์

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างทัศนคติ 2 ประเภทของนักศึกษากลุ่มหนึ่ง โดยรวมตัวอย่างของนักศึกษา 100 ราย ได้ข้อมูลมาดังนี้

ทัศนคติ		ก	ข	ค	ง	รวม
ทัศนคติ	ก	7	1	8	6	22
	ข	2	8	10	5	25
	ค	14	8	2	4	28
	ง	10	12	2	1	25
	รวม	33	29	22	16	100

ในเมื่อ ก : ไม่เห็นด้วยอย่างมาก ข : ไม่เห็นด้วย

ค : เห็นด้วย ง : เห็นด้วยอย่างมาก

เราหา f_c และ f_d ได้ดังนี้

$$f_c = 7\,(52) + 1\,(24) + 8\,(10) + 6\,(0)$$
$$+ 2\,(29) + 8\,(9) + 10\,(5) + 5\,(0)$$
$$+ 14\,(15) + 8\,(3) + 2\,(1) + 4\,(0)$$
$$= 884$$
$$f_d = 2\,(15) + 8\,(14) + 10\,(6) + 5\,(0)$$
$$+ 14\,(38) + 8\,(29) + 2\,(11) + 4\,(0)$$
$$+ 10\,(52) + 12\,(35) + 2\,(15) + 1\,(0)$$
$$= 1958$$

ดังนั้น $G = \dfrac{f_c - f_d}{f_c + f_d} = \dfrac{884 - 1589}{884 + 1958}$

$$= -1074 / 2842 = -0.378$$

$$\hat{\tau}_a = -0.217, \quad \hat{\tau}_b = -0.291$$

เราจะเห็นได้ว่าเมื่อค่าสังเกตเท่ากันแล้ว $|G| > |\hat{\tau}|$ นั่นคือ $|-0.378| > |-0.217|$ หรือ $|-0.291|$

ในปี ค.ศ. 1963 กูดแมนและคริสคัลได้เสนอความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ G เมื่อตัวอย่างขนาดโตไว้ แต่เนื่องจากการคำนวณยุ่งยาก เขาจึงใช้ค่าที่สูงสุดหรือ max S_G^2 ซึ่งง่ายกว่าการคำนวณ สำหรับ max S_G^2 นี้ขึ้นอยู่กับการสุ่มตัวอย่างแบบแทนที่และกำหนดไว้ดังนี้

$$\max S_G^2 = Z\, n\, (1-d^2) / (n^2 - f_t)$$

$$\text{ในเมื่อ} \quad f_t = n^2 - z\,(f_c + f_d)$$

ดังนั้นในการทดสอบมาตรฐานเกี่ยวกับค่าของ γ หรือ γ_o หรือในการประมาณค่าของ γ เราอาศัยตัวสถิติ

$$Z = \frac{q - \gamma}{\sqrt{\max S_G^2}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติสมมติฐาน N (O,1) นั่นคือในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าของ γ หรือ γ_o เราใช้ตัวอาศัยทดสอบ

$$Z = \frac{G - \gamma_o}{\sqrt{\max S_G^2}}$$

และช่วงเชื่อมั่นประมาณ 100 $(1-\alpha)$% สำหรับ γ จะเป็น

$$\gamma = G \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\max S_G^2}$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่ผ่านมา ถ้าเราต้องการทดสอบนัยสำคัญของ G หรือทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$$H_o : \gamma = O ; \quad H_a : \gamma \pm O$$

เราทำได้ดังนี้

$$\max\ S_G^2 = 2n(1-G^2)/(n^2-f_t)$$
$$= 2(100)\,[1-(-0.378)^2]/(100^2-4316).$$
$$= 0.0302$$
$$\sqrt{\max\ S_G^2} = 0.173$$

$$f_t = n^2-2(f_c+f_d) = 100^2-2(884+1958) = 10000-5684 = 4316$$

$$Z = \frac{-0.378-0}{0.173} = -2.18$$

เมื่อใช้ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ ค่าวิกฤตเป็น $Z_{.025} = -1.96$ จึงปฏิเสธ H_o แสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความเกี่ยวพันกัน

ถ้าต้องการประมาณช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ γ จะได้เป็น

$$\gamma = G \pm Z_{.025}\sqrt{\max\ S_G^2}$$
$$= -0.378 \pm (1.96)\ (0.173) = -0.378 \pm 0.339$$
$$= -.717, -.039$$

ถ้ามีประชากรที่สนใจสองประชากร เราก็สามารถทดสอบสมมติฐานหรือประมาณค่าของผลต่าง $\gamma_1-\gamma_2$ ได้โดยอาศัยตัวสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{(G_1-G_2)-(\gamma_1-\gamma_2)}{\sqrt{\max\ S_{G_1}^2+\max\ S_{G_2}^2}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน N(0, 1) สำหรับตัวอย่างทั้งสองที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสองนั้นจะต้องเป็นอิสระกัน ดังนั้นสมมติฐานหลักเกี่ยวกับผลต่างของความเกี่ยวพันของสองประชากรจะเป็น

$$H_o:\ \gamma_1-\gamma_2 = \gamma_0$$

ในการทดสอบสมมติฐานนี้จะอาศัยตัวสถิติทดสอบ Z

$$Z = \frac{(G_1 - G_2) - \gamma_o}{\sqrt{\max S^2_{G_1} + \max S^2_{G_2}}}$$

ในเมื่อ $\max S^2_{G_1} = 2\, n_1\, (1 - G_1^2) / (n_1^2 - f^2_{t_1})$

$$\max S^2_{G_2} = 2\, n_2 (1 - G_2^2) / (n_2^2 - f^2_{t2})$$

และช่วงเชื่อมั่น 100 $(1 - \alpha)$% (โดยประมาณ) ของ $\gamma_1 - \gamma_2$ จะเป็น

$$\gamma_1 - \gamma_2 = (G_1 - G_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\max S^2_{G_1} + \max S^2_{G_2}}$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาพนักงาน 2 ประเภท คือประเภทใช้มือ และประเภทใช้เครื่องจักร เมื่อเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างการขาดงาน และอายุการทำงาน ได้ข้อมูลมาดังนี้

	คนงานใช้มือ			คนงานใช้เครื่องจักร		
การขาดงาน	น้อย	ปานกลาง	มาก	น้อย	ปานกลาง	มาก
อายุทำงาน (ปี) 0 — 4.9	10	0	5	6	4	5
5 — 9.9	1	12	2	5	8	2
10 — 14.9	1	8	1	3	2	15
15 —	3	0	17	1	6	3

จากการคำนวณตัวสถิติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องโดยเป็นดังนี้

ประเภทคนงานใช้มือ : $f_c = 795 \quad f_d = 224 \quad f_t = 1562$

$$G_1 = \frac{795 - 224}{795 + 224} = 571 / 1019 = 0.56$$

$$\max S^2_{G_1} = 2\,(60)\,[1 - .56^2] / (60^2 - 1562) = .04$$

ประเภทคนงานใช้เครื่องจักร : $f_c = 603, \quad f_d = 324, \quad f_t = 1746$

$$G_2 = \frac{603 - 324}{603 - 324} = 0.30$$

$$\max S^2_{G_2} = 2\,(60)\,[1 - .30^2] / (\;^2 - 1746) = .06$$

ถ้าเราต้องการทดสอบสมมติฐานที่ว่า

$$H_o : \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \ ; \ Ha ; \ \gamma_1 - \gamma_2 \neq 0$$

เราคำนวณค่าตัวสมมติทดสอบได้เป็น

$$Z = \frac{(.56 - .30) - 0}{\sqrt{.04 + .06}} = 0.26 / \sqrt{.10} = 0.81$$

ซึ่งแสดงว่าความสัมพันธ์ของทั้งสองกลุ่มเกี่ยวกับการขาดงานและอายุการทำงานเท่ากัน (ค่าวิกฤตสำหรับ $\alpha = .05$ จะเป็น $Z_{.025} = 1.96$)

ข้อสังเกต สำหรับตารางจรณ์ $2 + 2$ นั้นค่าของ G และ Q จะมีค่าเท่ากัน ความจริง G เป็นรูปทั่วไปของ Q สำหรับตารางจรณ์แบบอันดับ (Ordinal — Ordinal Contingency Table) ที่มีจำนวนแถวนอนและแถวตั้งต่าง ๆ

$$Q = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}}{f_{11} f_{22} + f_{12} f_{21}} = \frac{f_c - f_d}{f_c + f_d}$$

ในเมื่อ f_{ij} $(i = 1,2)$ เป็นความถี่จากตาราง 2×2 ดังนี้

	Y	Y_1	Y_2	รวม
X	X_1	f_{11}	f_{12}	$f_{1\cdot}$
	X_2	f_{21}	f_{22}	$f_{2\cdot}$
รวม		$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	n.

โดยมี $X_1 < X_2$ และ $Y_1 < Y_2$

10.2.4 สัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันธ์อื่น ๆ ที่ปรับปรุงจากตัวสถิติเคนดาลล์ (Another Modifications of Kendall's Tau)

นอกจาก ลูดแมนและคริสคัล ได้ปรับปรุงตัวสถิติเคนดาลล์แล้ว ยังมีสจวร์ท (Stuart, 1953), ซอมเมอร์ส (Somers, 1962) และคนอื่น ๆ อีก ที่ได้ปรับปรุงตัวสถิติเคนดาลล์

สจวร์ทได้ปรับปรุงส่วนของ $\hat{\tau}$ เพื่อทำให้ $\hat{\tau}_b$ มีค่าสูงสุดเป็น 1 หรือ -1 (เพราะถ้าจำนวนแถวนอนไม่เท่ากับจำนวนแถวตั้ง หรือ $r \neq c$ แล้ว $\hat{\tau}_b$ จะไม่เป็น 1 หรือ -1) โดยเสนอมาตราวัด $\hat{\tau}_c$ ไว้ดังนี้

$$\hat{\tau}_c = \frac{2S}{n^2(m-1)/m}$$

ในเมื่อ $m = \min(r, c)$

จากตัวอย่างของการหนีงานและชนชั้นทางสังคม เราหา $\hat{\tau}_c$ ได้เป็น

$$\tau_c = \frac{2(56-156)}{30^2(3-1)/3} = -.33$$

ซอมเมอร์ได้เสนอมาตราวัดแบบไม่สมมาตรไว้โดยเน้นคุณลักษณะที่สำคัญของตัวสถิติ S ที่ว่าจำนวนในความรู้ของ X จะแสดงถึงความรู้เกี่ยวกับ Y เช่นเดียวกับจำนวนความรู้เกี่ยวกับ Y จะแสดงถึงความรู้เกี่ยวกับ X ตัวอย่าง เช่น S ที่เป็นบวกจะชี้ว่าจำนวนที่มากกว่าของการเปรียบเทียบ มีคุณลักษณะที่ว่า ถ้า $X_1 < X_2$ แล้ว $Y_1 < Y_2$ หรือถ้า $X_1 > X_2$ แล้ว $Y_1 > Y_2$ และยังชี้ว่าจำนวนมีมากกว่าของการเปรียบเทียบมีลักษณะที่ว่า ถ้า $Y_1 < Y_2$ แล้ว $X_1 < X_2$ หรือถ้า $Y_1 > Y_2$ แล้ว $X_1 > X_2$ ด้วยคุณสมบัติที่สำคัญของ S เช่นนี้ ซอมเมอร์สจึงได้เสนอมาตราวัดไว้ 2 แบบดังนี้

$$(1)\quad d_{yx} = \frac{S}{(n^2 - \sum n_i^2)/2}$$

ในเมื่อ d_{yx} เป็นสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันที่แสดงว่าจำนวนในความรู้เกี่ยวกับตัวแปรอิสระ x จะหมายถึงความรู้ในตัวแปรตาม y และ $(n^2 - \sum n_i^2)/2$ จะเป็นจำนวนการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่ไม่เท่ากันใน x แต่อาจจะเท่ากันใน y

$$(2)\quad d_{xy} = \frac{S}{(n^2 - \sum n_j^2)/2}$$

ในเมื่อ d_{xy} เป็นสัมประสิทธิ์ความเกี่ยวพันที่แสดงว่า จำนวนในความรู้เกี่ยวกับตัวแปรอิสระ y จะแสดงถึงความรู้เกี่ยวกับตัวแปรตาม x และ $(n^2 - \sum n_j^2)/2$ เป็นจำนวนการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่ไม่เท่ากันใน y แต่อาจจะเท่ากันใน x

สำหรับมาตราวัดแบบสมมาตรซึ่งไม่มีการพิจารณาว่าตัวแปรไหนเป็นอิสระ และตัวแปรไหนไม่เป็นอิสระนั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$d = \frac{2S}{\frac{1}{2}\left\{(n^2 - \Sigma n_i^2) + (n^2 - \Sigma n_j^2)\right\}}$$

จากตัวอย่างของการหนีงานและชนชั้นทางสังคม เราได้

$$d_{yx} = \frac{56 - 156}{[30^2 - (10^2 + 10^2 + 10^2)]/2} = -100/300 = -.33$$

$$d_{xy} = \frac{56 - 156}{[30^2 - (9^2 + 11^2 - 10^2)]/2} = 100/299 = -.34$$

$$d = \frac{2(56 - 156)}{\frac{1}{2}(600 + 598)} = -200/599 = -.33$$

เมื่อไม่มีการเท่ากันทั้งใน x และ y แล้ว $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_b$, $\hat{\tau}_c$, G, d_{yx} และ d_{xy} จะเป็นมาตราวัดเดียวกัน แต่เมื่อมีการเท่ากันจะทำให้ส่วนของ $\hat{\tau}$ เพิ่มขึ้น ซึ่งจะปรับปรุง $\hat{\tau}$ ด้วยมาตราวัดแบบสมมาตร τ_b, τ_c, และ G กับมาตราวัดไม่สมมาตร d_{yx} และ d_{xy}

เนื่องจาก $\hat{\tau}_b$ และ $\hat{\tau}_c$ มีการเท่ากันเข้าไปเกี่ยวข้อง จึงทำให้ทั้งสองมาตราวัดมีค่าน้อยกว่า G เพราะมาตราวัด G ไม่มีการปรับปรุงกรณีเท่ากัน

ในด้านการนำไปใช้นั้น $\hat{\tau}_b$ จะเหมาะสมกับมาตราจัตุรัส (จำนวนแถวนอนเท่ากับจำนวนแถวตั้งหรือ $r = c$) ส่วน $\hat{\tau}_c$ จะใช้กับมาตราสี่เหลี่ยมผืนผ้า ($r \neq c$)

10.2.5 สหสัมพันธ์บางส่วน (Partial Correlations) สหสัมพันธ์บางส่วนเป็นมาตราวัดขนาดหรือดีกรีของความเกี่ยวพันระหว่างสองตัวแปร x และ y, โดยที่ความเกี่ยวพันที่ตัวแปร x และ y มีต่อตัวแปรที่สาม, Z, ได้ถูกขจัดออกไปแล้ว นั่นคือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อาจจะเนื่องมาจาก Z มีความสัมพันธ์กับทั้ง x และ y ดังนั้นความสัมพันธ์ดั้งเดิมระหว่าง x และ y จะต้องขจัดหรือจะต้องทำให้ลดลง เมื่อควบคุมตัวแปรที่สาม เช่นให้ความสัมพันธ์ดั้งเดิมระหว่างอายุ (x) และจำนวนลูกกวาดที่บริโภคต่อเดือน (y) แต่ทั้ง x และ y นี้เกี่ยวข้องกับน้ำหนักของหน่วยทดลอง (ผู้ถูกสอบถาม) ซึ่งจะให้เป็น Z

สหสัมพันธ์บางส่วนระหว่าง x และ y เมื่อควบคุม Z ซึ่งให้เป็น $r_{yx.Z}$ นั้นได้จากสหสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อน $y - \hat{y}$ กับ $x - \hat{x}$ เมื่อใช้ตัวแปรที่สาม Z ทำนายทั้ง y และ x ดังนั้นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สันระหว่างความคลาดเคลื่อนทั้งสองก็คือ

$$r_{yx.z} = \Sigma((Y-\hat{Y})(X-\hat{X}))/\sqrt{\Sigma (Y-\hat{Y})^2 (\Sigma (X-\hat{X})^2)}$$

ในเมื่อ $\hat{Y} = a + b_{yz}Z$, $\hat{X} = a + b_{xz}(Z)$, และค่าเฉลี่ยของ $(Y - \hat{Y})$ กับค่าเฉลี่ยของ $(X - \hat{X})$ ต่างก็เท่ากับ 0

สูตรทั่วไปของ $r_{yx.z}$ ข้างบนนี้จะอยู่ในรูป

$$r_{yn.z} = (r_{yn} - r_{yz} r_{xz}) / \sqrt{(1-r^2_{yz})(1-r^2_{xz})}$$

สำหรับสหสัมพันธ์บางส่วนที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นสหสัมพันธ์บางส่วนแบบไร้พารามิเตอร์ โดยที่สหสัมพันธ์บางส่วนของเพียร์สันเป็นแบบพารามิเตอร์

(1) สหสัมพันธ์บางส่วนของสเปียร์แมน (Spearman Partial Correlation ,$\rho_{(s)}$) ถ้าให้ X, Y, และ z เป็นตัวแปรที่สนใจ และให้ $r_{(s)yx.z}$ แทนสหสัมพันธ์ระหว่างอันดับที่ของ Y และ X ซึ่งเป็นอิสระกับผลกระทบของอันดับในตัวแปร Z แล้ว $Z_{(s)yx.z}$ จะกำหนดไว้ดังนี้

$$r_{(s)yx.z} = (r(s) - (r_{(s)YZ})(r_{(s)XZ}))/\sqrt{(1-r^2_{(s)YZ})(1-r^2_{(s)XZ})}$$

เมื่อ $r_{(s)yx.z}$ นี้ยกกำลังสอง หรือ $r^2_{(s)yx.z}$ จะหมายถึงสัดส่วนของความผันแปรในอันดับ Y ที่เนื่องจากอันดับที่ X หลังจากที่ทั้งอันดับที่ X และอันดับที่ Y ได้รับการปรับปรุงสำหรับความพึ่งทั้งในอันดับที่ของตัวแปร Z แล้ว

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคลูกกวาดต่อเดือน (Y) อายุ (X) และน้ำหนัก (Z) โดยอาศัยตัวอย่างของเด็ก 10 รายได้ข้อมูลซึ่งเป็นอันดับที่ดังนี้

R (Y)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
R (X)	4	5	6	1	2	3	7	8	9	10
R (Z)	1	4	5	6	2	3	10	7	8	9

จากตารางเราได้ $\Sigma [R(Y) - R(X)]^2 = 276$

$\Sigma [R(Y) - R(Z)]^2 = 288$

$\Sigma [R(X) - R(Z)]^2 = 48$

ดังนั้น $r_{(s)yx} = 1 - \frac{6(276)}{10^3 - 10} = -.673$

$$r_{(s)yz} = 1 - \frac{6(288)}{10^3 - 10} = -.745$$

$$r_{(s)xz} = 1 - \frac{6(48)}{10^3 - 10} = .709$$

$$r_{(s)yx.z} = \{-.673-(.745)(.709)\}/\sqrt{(1-(-.745)^2)(1-(.709)^2)}$$
$$= -.31$$

(2) สหสัมพันธ์บางส่วนแบบเคนดาลล์ (Kendall's Partial Tau, τ)
เคนดาลล์ได้เสนอสัมประสิทธิ์บางส่วนสำหรับมาตราวัดของเขาไว้เป็น $\tau_{yx.z}$ ซึ่งกำหนดไว้ดังนี้

$$\tau_{yx.z} = (\tau_{yx} - (\tau_{yz})(\tau_{xz}))/\sqrt{(1-\tau_{yz}^2)(1-\tau_{xz}^2)}$$

สัมประสิทธิ์บางส่วนนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อไม่มีการเท่ากันในอันดับที่ของ X, อันดับที่ของ Y, และอันดับที่ของ Z

ตัวอย่าง จากตัวอย่างของการบริโภคลูกกวาดต่อเดือน (Y), อายุ (X) และน้ำหนัก (Z) เราหาสัมประสิทธิ์บางส่วนแบบเคนดาลล์ได้ดังนี้

Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
X	4	5	6	1	2	3	7	8	9	10
Z	1	4	5	6	2	3	10	7	8	9

$$\hat{\tau}_{yx} = (f_c - f_d)/(n(n-1)/2)$$
$$\hat{\tau}_{yx} = (f_c - f_d)/(n(n-1)/2)$$

X	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Z	9	8	7	10	5	4	1	3	2	6

$$\hat{\tau}_{xz} = (f_c - f_d)/(n(n-1)/2) = (35-10)/(10(9)/2) = .56$$

$$\tau_{yx.z} = (\tau_{yx} - (\tau_{yz})(\tau_{xz}))/\sqrt{(1-\tau_{yz}^2)(1-\tau_{xz}^2)}$$
$$= (-.60-(-.60)(.56))/\sqrt{(1-(-.60)^2)(1-(.56)^2)}$$
$$= -.39$$

อย่าลืมว่า $\tau_{yx.z}$ จะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อข้อมูลไม่มีการเท่ากันในอันดับที่ของ X, Y และ Z

(3) **สหสัมพันธ์บางส่วนแบบเดวิส** (Davis Partial Coefficient for Goodman and Kruskal's Gamma) เดวิส (1967) ได้เสนอแกมมะบางส่วน (Partial Gamma) $G_{yx.z}$ ไว้ดังนี้

$$G_{yx.z} = \Sigma G_i(f_{c_i} + f_{d_i}) / \Sigma (f_{c_i} + f_{d_i})$$

ในเมื่อ G_i เป็นสัมประสิทธิ์แกมมะสำหรับสองตัวแปร X และ Y เมื่อกำหนดค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม Z_i $(i = 1, 2, ..., k)$; k เป็นจำนวนประเภทหรือค่าในตัวแปรควบคุม Z; fc_i เป็นจำนวนการเปรียบเทียบทางบวก (หรือสอดคล้องกัน) ในค่ามี i ของตัวแปรควบคุม Z; และ fd_i เป็นจำนวนการเปรียบเทียบทางลบ (หรือไม่สอดคล้องกัน) ในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม Z

เราจะเห็นได้ว่า $G_{yx.z}$ เป็นค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ในค่าต่าง ๆ ของตัวแปรควบคุมนั่นเอง โดยมีจำนวนการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่เกี่ยวข้องในแต่ละค่าตัวแปรควบคุมเป็นตัวถ่วงน้ำหนัก (เพราะว่า $f_c + f_d$ ในสัมประสิทธิ์แบบแกมมะนั้นเป็นจำนวนทั้งหมดของการเปรียบเทียบที่เกี่ยวข้อง)

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงชนชั้นทางสังคม (X), การขาดงาน (Y) และเพศ (Z) ได้ข้อมูลมาดังนี้

ชาย (Z_1)

การขาดงาน (Y)		น้อย	ปานกลาง	มาก		น้อย	ปานกลาง	มาก	
X	ต่ำ	1	1	4	6	1	1	2	4
	กลาง	1	3	2	6	1	3	0	4
	สูง	4	3	1	8	1	0	1	2
	รวม	6	7	7	20	3	4	3	10

$fc_1 = 1(9) + 1(3) + 1(4) + 3(1) = 19$

$fd_1 = 1(5) + 3(4) + 4(10) + 3(6) = 75$

$$G_1 = \frac{19 - 75}{19 + 75} = -.60$$

$$fc_2 = 1(4) + 1(1) + 1(1) + 3(1) = 9$$

$$fd_2 = 1(3) + 3(2) + 1(6) + 0(2) = 15$$

$$G_2 = \frac{9 - 15}{9 + 15} = -.25$$

ดังนั้น $$G_{yx.z} = \frac{-.60(19 + 75) + (-.25)(9 + 15)}{(19 + 75) + (9 + 15)} = -.53$$

การแปลความหมายของ $G_{yx.z}$ ก็จะเหมือนกับการแปลความของ G ค่าของ $G_{yx.Z}$ จะชี้ว่าสัดส่วนของการเปรียบเทียบทางหนึ่ง (directional comparisons) เมื่อจำนวนหน่วยตัวอย่างที่เท่ากันในตัวแปร Z นั้นถูกควบคุมในทางหนึ่ง

วิธีการหาสหสัมพันธ์บางส่วนแบบนี้ยังประยุกต์ไปใช้ได้สัมประสิทธิ์อื่นๆ ที่อาศัยหลักของการเปรียบเทียบเป็นคู่ เช่น ค่าของ $\hat{\tau}_a$ สำหรับค่า Z_1 และ Z_2 จะเป็นดังนี้

$$\hat{\tau}_{a(z_1)} = (19-75)/(20(19)/2) = -.29$$

$$\hat{\tau}_{a(z_2)} = (9-15)/(10(9)/2) = -.13$$

ดังนั้นสูตรสัมประสิทธิ์บางส่วนสำหรับ $\hat{\tau}_a$ จะเป็น $\tau_{a(yx.z)}$

$$\hat{\tau}_{a(yx.z)} = (\sum \tau_{a_i}(n_i)(n_i-1)/2)/\sum n_i(n_i-1)/2$$

ในเมื่อ τ_{ai} เป็นค่าของ τ_a ในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม Z, ($i = 1, 2, ..., k$); k เป็นจำนวนค่าของตัวแปรควบคุม ; และ n_i เป็นจำนวนหน่วยตัวอย่างในค่าที่ i ของตัวแปรควบคุม

เพราะฉะนั้นเราจะได้ $\hat{\tau}_{a(yx.z)}$ ดังนี้

$$\hat{\tau}_{a(yx.z)} = \frac{(-.29)(20(19)/2) + (-.13)(10(9)/2)}{20(19)/2 + 10(9)/2}$$

$$= -.26$$

10.2.6 สัมประสิทธิ์สอดคล้องของเคนดาลล์ (Kendall's Coefficient of Concordance, W)

สัมประสิทธิ์ W นี้จะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ k ตัว (หรือการจัดอันดับ k ครั้ง) โดยการเฉลี่ยสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร k ตัว ซึ่งวัดจาก n หน่วยทดลองในเทอมของการเรียงอันดับที่