สัมประสิทธิ์ W นี้จะสอดคล้องกับตัวสถิติฟรีดแมนที่กล่าวมาแล้ว เพราะตัวสถิติฟรีดแมนจะสนใจว่ามีความแตกต่างในการเรียงอันดับที่ระหว่างเงื่อนไข (กรรมวิธีทดลอง) หรือไม่ แต่สัมประสิทธิ์การสอดคล้องจะสนใจว่าผู้ทดสอบหรือหน่วยทดลองต่าง ๆ จะเห็นสอดคล้องหรือไม่สอดคล้องกันในการประเมินผลเงื่อนไข (กรรมวิธี) หรือไม่ มาตราวัด W นี้ เคนดาลล์ (1939) เป็นผู้พัฒนาขึ้นมาจากการสอดคล้องหรือไม่สอดคล้องดังกล่าวนั้น

เมื่อมีการสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ในอันดับที่ซึ่ง n หน่วยทดลอง หรือผู้ทดสอบกำหนดให้แก่ k เงื่อนไข แล้วผลรวมอันดับที่จะเป็น n, 2n, 3n, ..., kn ผลรวมอันดับที่ทั้งหมดจะเป็น $nk(k+1)/2$ และค่าเฉลี่ยผลรวมอันดับที่จะเป็น $\bar{R} = \sum_j R_j / k = n(k+1)/2$ ดีกรีของการสอดคล้องระหว่างหน่วยทดลองจะแสดงได้ด้วยความผันแปรในผลรวมอันดับที่ นั่นคือ

$$S = \sum_j (R_j - \bar{R})^2$$

เมื่อมีการสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ ความผันแปร S นี้จะสูงสุดซึ่งจะให้เป็น max S

$$\begin{aligned} \max S &= \sum (R^n - \bar{R})^2 \\ &= n^2(k^3-k)/12 \end{aligned}$$

ในเมื่อ R_j^m เป็นผลรวมอันดับที่ซึ่งมากสุดสำหรับเงื่อนไขที่ j และมีค่าดังนี้

$$R_1^m = n, \quad R_2^m = 2n, \ldots, \quad R_k^m = kn$$

เคนดาลล์ได้เสนอสัมประสิทธิ์การสอดคล้อง W ไว้ดังนี้

$$W = S/\max S$$

$$= 12 \sum_j^k (R-\bar{R})^2/n^2(k^3-k) = 12 \sum R_j^2/n^2k(k^2-1) - 3(k+1)/(k-1)$$

ค่าของ W จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

ตัวสถิติฟรีดแมน S_0 มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ N ดังนี้

$$W = S_o/n(k-1); \quad S_o = 12 \sum R_1^2/nk(k+1) - 3n(k+1)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการคำนวณค่า W ที่ง่ายก็คือคำนวนค่าของตัวสถิติ S_0 ก่อนนั้นเอง และในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราจึงใช้ตัวสถิติฟรีดแมน

$$S_0 = n(k-1)W$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k-1$

ในกรณีอันดับที่เท่ากันต้องใช้แฟคเตอร์ f ปรับปรุงตัวสถิติ W เป็น

$$W = \frac{S}{\max S - f}$$

สัมประสิทธิ์ W นี้มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์แบบสเปียร์แมน $r_{(s)}$ อีกนั้นคือค่าเฉลี่ยของ $r_{(s)}$ ที่เป็นไปได้ระหว่างสองอันดับที่ $\bar{r}_{(s)}$ สัมพันธ์กับ W ดังนี้

$$\bar{r}_{(s)} = (nW-1)/(n-1)$$

เนื่องจาก $0 \le W \le 1$ เราจึงได้ $-1/(n-1) \le \bar{r}_{(s)} \le 1$

ตัวอย่าง ในการศึกษาโครงการ 4 แบบ โดยให้ผู้ตัดสินใจกว่า 10 คน กำหนดอันดับความสำคัญของโครงการ 4 แบบ โดยให้อันดับจากน้อยไปมากเป็นดังนี้

	โครงการ	1	2	3	4
นักธุรกิจ	1	1	2	3	4
	2	1	2	3	4
	3	1	2	3	4
	4	2	1	3	4
	5	2	1	3	4
	6	1	2	3	4
	7	1	3	2	4
	8	1	2	3	4
	9	2	1	4	3
	10	1	2	4	3
รวม	R_i	13	18	31	38

$$\bar{R} = (13+18+31+38)/4 \quad 100/4 = 25$$

$$S = \Sigma(R_j-\bar{R})^2 = (13-25)^2+(18-25)^2+(31-25)^2+(38-25)^2$$

$$= 398$$

$$\max S = \Sigma(R_j^m-\bar{R})^2 = (10-25)^2+(20-25)^2+(30-25)^2+(38-25)^2$$

$$= 500$$

$$W = \frac{398}{500} = 0.796$$

หรือ $W = 12\sum R_j^2/(n^2k(k^2-1)-3(k+1)/(k-1)$

$$= 12(13^2+18^2+31^2+38^2)/10^2(4)(4^2-1)-3(4+1)/(4-1) = 0.796$$

เนื่องจาก $S_o = \dfrac{12\sum R_j^2}{nk(k+1)} - 3n(k+1)$

$$= 12(13^2+18^2+31^2+38^2)/10(4)(4+1)-3(10)(4+1) = 23.88$$

ดังนั้น $W = \dfrac{1}{io(4-1)}(23.88) = 0.796$

เมื่อต้องการหา $\bar{r}_{(s)}$ เราจะได้

$$r_{(s)} = \frac{10(0.796)-1}{10-1} = 0.773$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ w เราคำนวนตัวสถิติทดสอบ S_o ได้เป็น

$$S_o = n(k-1)W = 10(4-1)(0.796) = 23.880$$

ซึ่งแสดงว่ามีนัยสำคัญใน $\alpha = .05$ $(X^{2(3)}_{.50} = 7.81)$

นอกจากสัมประสิทธิ์ W จะมีความสัมพันธ์กับตัวสถิติฟรีดแมน S และสหสัมพันธ์เชิงอันดับของสเปียร์แมน $r_{(s)}$ แล้วมันยังมีความสัมพันธ์กับตัวสถิติเดอร์บิ้น D อีก สำหรับตัวแบบเดอร์บิ้น (Model) นั้นเราได้สัมประสิทธิ์ W เป็น

$$W = \frac{S}{\max S}$$

$$S = \sum(R_j - \bar{R})^2 = \sum(R_j - r(t+1)/2)^2$$

$$\max S = \sum(R_j^m - \bar{R})^2 = r^2k(k+1)(t-1)/12(k-1)$$

และสัมประสิทธิ์ W นี้พัฒนาต่อไปจะได้ความสัมพันธ์กับตัวสถิติเดอร์บิ้น D ดังนี้

$$W = \frac{(t+1)D}{r(k+1)(t-1)}$$

$$D = \frac{12(k-1)}{rk(t-1)(t-1)}\sum R^2 - 3r(k+1)(t+1)/(t-1)$$

ในการคำนวนสัมประสิทธิ์ W เราจึงคำนวนค่าของตัวสถิติ D ก่อน และในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราจึงใช้ตัวสถิติทดสอบ D ช่วย

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ W และตัวสถิติเดอร์บิ้น D นี้ เรายังใช้ประยุกต์เกี่ยวกับการเปรียบเทียบเป็นคู่ (Paired Comparisons) ได้ นั่นคือถ้าเรามีเงื่อนไขหรือกรรมวิธี k แบบ แล้วให้หน่วยทดลองหรือผู้ทดสอบคนหนึ่งทำการเปรียบเทียบเป็น

คู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ k เลื่อนไป จำนวนคู่ที่ต้องเปรียบเทียบจะเป็น $\binom{k}{2}$ สำหรับแต่ละคู่ที่เปรียบเทียบนั้นผู้ทดสอบสามารถได้อันดับที่ หรือสามารถบอกได้ว่าเงื่อนไขได้ดีกว่า จุดประสงค์ของการเปรียบเทียบก็เพื่อให้ได้การเรียงอันดับที่ของเงื่อนไข และต้องการที่จะทราบว่าผู้ทดสอบมีความคงเส้นคงวา (Consistency) ในการเลือกหรือไม่ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ความสอดคล้องสำหรับผู้ทดสอบนี้จะเป็น

$$W = \frac{12S}{k(k^2-1)}$$

$$S = \sum(\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{R}})^2;\ \sum \mathfrak{R}_j = \binom{k}{2}(1+2) = 3\binom{k}{2};$$

$$\overline{\mathfrak{R}} = 3\binom{k}{2}/k = 3(k-1)/2$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ W สำหรับผู้ทดสอบคนหนึ่งนั้นนั้น เราอาศัยตัวสถิติทดสอบ D

$$D = \left\{12(k-1)/(k-1)(2^2-1)^n\right\} \sum(R_j-\overline{R})^2 = 4/k \sum(\mathfrak{R}_j-\overline{\mathfrak{R}})^2$$

$$= (4/k)\sum_j^k \mathfrak{R}_j^2 - 9(k-1)^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k-1$

ถ้าผู้ทดสอบมี n ราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ต่อเงื่อนไขต่าง ๆ k ชนิด แล้วสัมประสิทธิ์ W' จะเป็น

$$W = 12S/n^2k(k^2-1) = 12(\sum\mathfrak{R}-\overline{\mathfrak{R}})^2/n^2k(k^2-1)$$

และในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ D ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k-1$ ดังนี้

$$D = (4/kn)\sum_j(\mathfrak{R}_j^2-\overline{R})^2$$

ในเมื่อ $R_j = \sum_{i=1}^{W} R_{ij}$

ตัวอย่าง ในการเปรียบเทียบเป็นคู่สำหรับเงื่อนไขต่าง ๆ กัน 5 ประเภท โดยผู้ทดสอบคนหนึ่ง ถ้าเงื่อนไขได้ดีกว่าจะให้เป็น 1 ด้อยกว่าให้เป็น 2 จากการเปรียบเทียบเป็นคู่ที่เป็นไปได้ $\binom{5}{2} = 10$ ครั้ง ได้ผลการเปรียบเทียบดังนี้

คู่เปรียบเทียบ	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE	รวม
เงื่อนไข A	1	2	1	1							5

B	2				2	2	1				7
C		1			1			1	1		4
D			2			1		2		2	7
E				2			2		2	1	7'

$$\bar{R} = (5+7+4+7+7)/5 = 6$$

หรือ $\bar{R} = 4(2+1)/2 = 6$

$$S = (5-6)^2+(7-6)^2+(4-6)^2+(7-6)^2+(7-6)^2 = 8$$

$$\max S = (4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2 = 10$$

หรือ tnax $S = 5(5^2-1)/12 = 10$

$$W = 8/10 = 0.80$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ W เราคำนวณตัวสถิติ D ได้เป็น

$$D = \frac{4}{5}(8) = 6.4$$

หรือ $D = \frac{4}{5}(5^2+7^2+4^2+7^2+7^2) - 9(5-1)^2 = 6.4$

จึงสรุปได้ว่าไม่มีนัยสำคัญ ($D < X^{2(4)}_{.05} = 9.49$)

10.2.7 สัมประสิทธิ์ของการคงเส้นคงวาและการสอดคล้องในการเปรียบเทียบเป็นคู่

(Coefficient of Consistence and Agreement in Paired Comparisons)

สัมประสิทธิ์ของการคงเส้นคงวาหรือสัมประสิทธิ์ K นี้ เป็นมาตราวัดระดับของการคงเส้นคงวาของผู้ทดลอง (observer) หรือผู้ทดสอบในการเปรียบเทียบสิ่งที่สนใจ (เงื่อนไขหรือกรรมวิธี) เป็นคู่จำนวน k สิ่ง เคนดาลล์, (Kendall, 1939) ได้เสนอสัมประสิทธิ์ K ไว้ดังนี้

$$K = \frac{S-\min S}{\max S-\min S} \;;\; S = \sum(R_i-\bar{R})^2$$

$$K = \frac{12\sum(R_i-\bar{R})^2}{k(k^2-1)} \;;\; k$$

$$= \frac{12\sum(R_i-\bar{R})^2-3k}{k(k^2-4)}$$

ในเมื่อ $\max S = k(k^2-1)/12$, $\min S = o$ ถ้า k เป็นเลขคี่ และ $= k/4$ ถ้า k เป็นเลขคู่ R_i เป็นจำนวนหน่วยที่ i ซึ่งดีกว่าหน่วยอื่น ๆ ในการเปรียบเทียบเป็นคู่นี้, $\bar{R}$ เป็นค่าเฉลี่ยของ R_i หรือ $\bar{R} = \Sigma R_i / k = (k-1)/2$ และ $\Sigma (R_i - \bar{R})^2 = \Sigma R_i^2 - k(k-1)^2/4$

ในการเปรียบเทียบเป็นคู่นี้ผู้ทดลองจะทำการเปรียบเทียบสิ่งที่สนใจแต่ละ สิ่งกับสิ่งอื่น ๆ ที่เหลือทั้งหมด และระบุว่าสิ่งไหนในคู่ที่เปรียบเทียบกันนั้นดีกว่า เช่นมีอาหาร 3 ชนิด ก, ข, และ ค เมื่อต้องการเปรียบเทียบเป็นคู่ก็จะเป็น – เปรียบเทียบ ก กับ ข, ก กับ ค, และ ข กับ ค ถ้า ก ดีกว่า ข จะแทนด้วย ก ⟶ ข หรือ 1 แต่ถ้าด้อยกว่าจะแทนด้วย ก ⟵ ข หรือ 0 เป็นต้น – สำหรับการเปรียบเทียบ ก, ข, และ ค เป็นคู่นั้น ถ้า ก ⟶ ข, ข ⟶ ค, และ ก ⟶ ค เราจะถือว่า "คงเส้นคงวา" แต่ถ้า ก ⟶ ข, ข ⟶ ค, และ ก ⟵ ค แล้วเราจะถือว่า "ไม่คงเส้นคงวา" ความสัมพันธ์ที่ไม่คงเส้นคงวาชนิดสาม (Inconsistent Triads) นี้ใช้เป็นมาตราวัดการคงเส้นคงวาได้

สัมประสิทธิ์ K นี้จะมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 เมื่อการเปรียบเทียบ (การตอบสนอง) เป็นแบบสุ่ม หรือกรณีที่ไม่คงเส้นคงวาสูงสุด และจะมีค่าเป็น 1 เมื่อไม่มีความคงเส้นคงวา

ในการทดสอบนัยสำคัญของ K หรือทดสอบสมมติฐานหลัก ที่ว่า "ไม่มีความคงเส้นคงวา" นั้นจะอาศัยตัวสถิติทดสอบ T ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ ν ดังนี้

$$T = \frac{8}{k-4}\left(\binom{k}{3}/4 - d + 1/2\right) + \nu$$

ในเมื่อ d เป็นจำนวนกลุ่มของสาม (Triad) ที่ไม่คงเส้นคงวาในการเปรียบเทียบเป็นคู่ระหว่าง k สิ่ง และกำหนดไว้ว่า

และ $\nu = \quad d = k(k-1)(2k-1)/12 - \Sigma R_i^2/2$

$$\nu = k(k-1)(k-2)/(k-4)^2$$

กรณีที่ ν โตมาก เราใช้ตัวสถิติ Z ซึ่งมีการแจกแจงปกติมาตราฐาน N (0 ดังนี้

$$Z = \sqrt{2D} - \sqrt{2\nu - 1}$$

ปัญหา หัวหน้าคนงานคนหนึ่งได้ทำการเปรียบผลงานของคนงานที่ดีเด่น โดยวิธีเปรียบเทียบเป็นคู่ ได้ผลเปรียบเทียบดังนี้

	คนงาน	1	2	3	4	5	R	$(R-\bar{R})^2$
คนงาน	1		1	0	0	1	2	0
	2	0		1	1	1	3	1
	3	1	0		0	0	1	1
	4	1	0	1		1	3	1
	5	0	0	1	0		1	1

จงหาค่า K และทดสอบนัยสำคัญของ K

$$\bar{r} = 10/5 = 2 \quad \sum(R-\bar{R})^2 = 4 \quad \sum R^2 = 24$$

$$K = \frac{12\sum(R-\bar{R})^2}{k(k^2-1)} = \frac{12(4)}{5(5^2-1)} = 0.4$$

$$d = k(k-1)(2k-1)/12 - \sum R_i^2/2$$

$$= 5(4)(10-1)/12 - 24/2 = 3$$

$$\nu = k(k-1)\ (k-2)/(k-4)^2 = 5(4)(3)/(1)^2 = 60$$

$$T = \frac{8}{k-4}\left(\left(\binom{k}{3}\right)/4-d+1/2\right)+\nu$$

$$= \frac{8}{5-4}(10/4-3+1/2) + 60 = 60$$

ค่าวิกฤตสำหรับ $\alpha = .05$ จะเป็น $X^{2\ 60}_{.05} = 79.08$ จึงสรุปได้ว่า "สัมประสิทธิ์ K ไม่มีนัยสำคัญ"

ในกรณีที่มีผู้ทดลอง N ราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ในสิ่งที่สนใจจำนวน k สิ่ง ถ้าเราต้องการพิจารณาการสอดคล้องกันของผู้ทดลอง เราก็ใช้สัมประสิทธิ์ของการสอดคล้อง (Agreement Coefficient, M) สัมประสิทธิ์นี้จะเป็นมาตราวัดระดับของการสอดคล้องที่ผู้ทดลอง n รายทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ในสิ่งที่สนใจ k สิ่ง เคนดาลล์ (Kendall

(1939) ได้เสนอมาตราวัดนี้ไว้และกำหนดไว้ดังนี้

$$M = 2S/\binom{n}{2}\binom{k}{2} - 1$$

ในเมื่อ $S \Sigma f^2 - n\Sigma f + \binom{n}{2}\binom{k}{2}$ โดยที่ f เป็นจำนวนความถี่ (ผู้เปรียบเทียบ) ในแต่ละเซลล์ที่อยู่ครึ่งตารางทางล่าง (below diagonal) ซึ่งเป็นจำนวนผู้เปรียบเทียบที่เห็นว่าหน่วยที่ i ดีกว่าหน่วยที่ j ($i > j$)

ค่าของ M นี้จะเป็น 1 ถ้าการเปรียบเทียบของผู้เปรียบเทียบ n ราย เป็นแบบเดียวกันหรือสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์

ในการทดสอบนัยสำคัญของ M เราให้ตัวสถิติทดสอบ T ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ $= \nu$ ดังนี้

$$T = \frac{4}{n-2}\left(S - (1/2)\binom{n}{2}\binom{k}{2}(n-3)/(n-2)\right)$$

ในเมื่อ $\nu = n(n-1)\binom{k}{2}/(n-2)^2$

ในกรณีที่ ν โตมาก เราใช้ตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

$$Z = \sqrt{2T} - \sqrt{2\nu - 1}$$

ปัญหา ในการเปรียบเทียบคนงานที่ดีเด่น 5 รายนั้น ถ้ามีหัวหน้าคนงาน 4 ราย ทำการเปรียบเทียบเป็นคู่ แล้วได้ผลดังนี้

	คนงาน	1	2	3	4	5
คนงาน	1		3	4	3	3
	2	1		3	2	2
	3	0	1		2	3
	4	1	2	2		2
	5	1	2	1	2	

จงหาค่า M และทดสอบนัยสำคัญ

$$\Sigma f = 1+0+1+1+2+2+1+2+1+1 = 13$$

$$\Sigma f^2 = 1^2+0^2+1^2+\ldots+1^2+2^2 = 20$$

$$S = \Sigma f^2 - n\,\Sigma f + \binom{n}{2}\binom{k}{2}$$

$$= 20 - 4\ (13) + \binom{4}{2}\binom{5}{2} = 20 - 52 + 60$$

$$= 28$$

$$M = 2(28) \Big| \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 1 = 0.933 - 1$$

$$= 0.067$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ M เราคำนวนตัวสถิติทดสอบ T ได้เป็น

$$T = \frac{4}{n-2}\left\{ S - \left(\tfrac{1}{2}\right)\binom{n}{2}\binom{k}{2}\frac{n-}{n-2}\right\}3$$

$$= \frac{4}{4-2}\left\{ 28 - \left(\tfrac{1}{2}\right)\binom{4}{2}\binom{5}{2}\frac{4-3}{4-2}\right\} = 36$$

$$\nu = n(n-1)\binom{k}{2} \Big| (n\ 2)^2$$

$$= 4(4-1)\binom{5}{2} \Big| (4-2)^2 = 30$$

ค่าวิกฤตขนาด $\alpha = .05$ จะเป็น $X^{2(30)}_{50.} = 43.77$ จึงสรุปได้ว่า "สัมประสิทธิ์ M ไม่มีนัยสำคัญ"

10.8 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติและตัวแปรแบบอันดับ (Association Between Nominal Variable and Ordinal Variable)

ในเมื่อตัวแปรทั้งสองมีสเกลการวัดต่างกันโดยมีตัวหนึ่งเป็นแบบอันดับ อีกตัวหนึ่งเป็นแบบนามบัญญัติ ถ้าเราต้องการหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรก็สามารถทำได้โดยลดสเกลการวัดของตัวแปรแบบอันดับให้เป็นตัวแปรแบบนามบัญญัติที่กล่าวมาแล้ว แต่การลดสเกลการวัดของตัวแปรจะทำให้ใช้รายละเอียดของข้อมูลไม่เต็มที่ จึงไม่เป็นที่นิยมกันอย่างไรก็ตาม ฟรีแมน (Freeman, 1965) ได้เสนอมาตราวัดความเกี่ยวพันระหว่างตัวแปรที่มีสเกลการวัดแบบอันดับและแบบนามบัญญัติ ซึ่งเรียกกันว่าสัมประสิทธิ์ความแตกต่าง (Coefficient of Differentiation, θ) สัมประสิทธิ์นี้ได้ปรับปรุงมาจากแบบทดสอบอันดับนี้ชนิดเครื่องหมายของวิลคอกซัน (Wilcoxon Signed — Ranks Test)

สัมประสิทธิ์ Q นี้นอกจากจะปรับปรุงมาจากแบบทดสอบอันดับที่ชนิดเครื่องหมายของวิลคอกซัน แล้วยังเป็นการปรับปรุงจากสัมประสิทธิ์ d_{yn} ด้วย แต่ค่าของ Q อยู่ระหว่าง O กับ S สัมประสิทธิ์ Q จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรซึ่งจะเกี่ยวข้อง

กับการทำนายอันดับของตัวแปรหนึ่งจากกลุ่มหรือประเภทของอีกตัวแปรหนึ่ง สัมประสิทธิ์ Q กำหนดไว้ดังนี้

$$\theta = \frac{\sum_{j}^{K} \left| fs_j - fd_j \right|}{fs + fd + Yo}$$

ในเมื่อ fs_j และ fd_j เป็นจำนวนของการเปรียบเทียบที่ต่ำกว่าและสูงกว่าใน y สำหรับคู่ที่กำหนดให้ของประเภทแบบนามบัญญัติ $K = \binom{r}{2}$ โดยมี r เป็นจำนวนประเภทแบบนามบัญญัติ; และ y_o เป็นจำนวณคู่ที่เท่ากันในตัวแปร y เท่านั้น

สัมประสิทธิ์ Q นี้สามารถเขียนได้ในรูปอื่นที่ง่ายต่อการคำนวณได้ดังนี้

$$\theta = \left\{ \sum_{i<i'}^{r} \left| S_{ii'} \right| \right\} / (n^2 - \sum_i n_i^2)/2$$

ในเมื่อ n_i เป็นจำนวนหน่วยในประเภทที่ i ของตัวแปรแบบนามบัญญัติ, $S_{ii'} = \sum_{j}^{c} f_{ij} d'_{ij}$ โดยมี f_{ij} เป็นความถี่ (i,j) และ d'_{ij} เป็นผลต่างของผลรวมความถี่ในแถวนอน i' ที่อยู่ทางซ้ายมือกับทางขวามือของแถวตั้ง j

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับสภาพสมรส (x) และการปรับตัวทางสังคม (y) ของพนักงาน มร. ได้ข้อมูลมาดังนี้

อันดับการปรับตัว (y)	1	2	3	4	5	รวม
สภาพสมรส (x)						
x_1 : โสด	0	2	5	2	1	10
x_2 : แต่งงาน	0	0	5	5	10	20
x_3 : หม้าย	1	2	2	0	0	5
y_4 ; หย่าร้าง	3	2	0	0	0	5
	4	6	12	7	11	40

$$S_{12} = 0\,(0-20) + 2\,(0-20) + 5\,(0-15) + 2\,(5-10) + 1\,(10-0)$$

$$= 0 - 40 - 75 - 10 + 10 = -115$$

$$S_{13} = 0\,(0-4) + 2\,(1-2) + 5\,(3-0) + 2\,(5-0) + 1\,(5-0)$$

$$= -2 + 15 + 10 + 5 = 28$$

$$S_{14} = 2\,(3-0) + 5\,(5-0) + 2\,(5-0) + 1\,(5-0) = 46$$

$$S_{23} = 5\,(3-0) + 5\,(5-0) + 10\,(5-0) = 90$$

$$S_{24} = 5\,(5-0) + 5\,(5-0) + 10\,(5-0) = 100$$

$$S_{34} = 1\,(o\text{-}22) + 2\,(3-0) + 2\,(5-0) = 14$$

$$\sum_{iii}^{4} \left| S_{ii} \right| = 115 + 28 + 46 + 90 + 100 + 14 = 393$$

$$n^2 - \sum n_i^2 = 40^2 - (10^2 + 20^2 + 5^2 + 5^2) = 1050$$

$$\theta = \frac{393}{1050/2} = 0.75$$

ดังนั้นสำหรับพนักงาน 40 คนนี้ เราสามารถทำนายการปรับตัวทางสังคมโดยอาศัยสภาพสมรสได้ค่อนข้างดี สัมประสิทธิ์ θ แสดงว่า 75% ของการเปรียบเทียบที่ทำให้พนักงานในประเภทต่าง ๆ ของสภาพสมรสแสดงความแตกต่างอย่างมีระบบในการปรับตัวทางสังคม

10.4 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติและตัวแปรอันตรภาคหรืออัตราส่วน (Association Between Nominal Variable and Interval or Ratio Variable)

มาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรนามบัญญัติ และตัวแปรอันตรภาคที่เหมาะสมก็คืออัตราส่วนสหสัมพันธ์ (Correlation Ratio, η) มาตราวัดนี้ใช้เป็นดัชนีของการปรับปรุงในความถูกต้องของการเดา ถ้าการปรับปรุงมาก สัมประสิทธิ์ η ก็มาก การคำนวณสัมประสิทธิ์ η ก็โดยการหาอัตราส่วนของการลดลงในความคลาดเคลื่อน หรือดีกรีของการปรับปรุงในการเดา อัตราส่วนนั้นกำหนดไว้ดังนี้

$$\eta^2 = \frac{\text{การลดลงในความคลาดเคลื่อน}}{\text{ความคลาดเคลื่อนเดิม}}$$

ในเมื่อความคลาดเคลื่อนเดิมเป็นดัชนี หรือดีกรีของความคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการเดาตัวแปรหนึ่ง โดยไม่อาศัยความรู้จากตัวแปรอื่น ส่วนการลดลงในความคลาดเคลื่อนเป็นผลต่างระหว่างความคลาดเคลื่อนเดิม กับดัชนีของความคลาดเคลื่อนจากการเดาตัวแปรหนึ่งโดยอาศัยความรู้จากตัวแปรอื่น

ในเทอมของความผันแปร สัมประสิทธิ์ η^2 จะเป็นสัดส่วนของความผันแปรในตัวแปรอันตรภาค ซึ่งเกี่ยวพันกับชั้นย่อยของตัวแปรนามบัญญัติ หรือ η^2 เป็นสัดส่วนของความผันแปร y ซึ่งขจัดออกไปโดยการนำ x เข้ามาเกี่ยวข้อง และ η^2 กำหนดไว้ดังนี้

$$\eta^2 = \frac{SST-SSW}{SST} = 1-SSW/SST$$

ในเมื่อ SST เป็นความผันแปรของตัวแปร y ที่กำหนดไว้ว่า

$$SST = \sum(Y_{ij}-\mu_y)^2$$

และ SSW เป็นความผันแปรของตัวแปร y ที่ตัวแปร x เข้ามาเกี่ยวข้อง หรือเป็นความผันแปรภายในชั้นย่อยของ x และกำหนดไว้ว่า

$$SSW = \sum(Y_{ij} - \mu_j)^2$$

โดยที่ μ_j เป็นค่าเฉลี่ยของ y ในชั้นย่อยที่ j ของ x

สำหรับอัตราส่วนสหสัมพันธ์ η กำหนดไว้ว่าเป็นรากที่สองของ η^2 ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ตัวประมาณค่าของ η^2 หรือ $\hat{\eta}^2$ โดยอาศัยตัวอย่าง จะกำหนดไว้ดังนี้

$$\hat{\eta}^2 = 1- \sum(Y_{ij}-\bar{Y}_j)^2/\sum(Y_{ij} - \bar{Y})^2$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\hat{\eta}^2}$$

ในการทดสอบนัยสำคัญของ η หรือทดสอบสมมติฐานหลัก $H_o: \eta = 0$ เราก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ

$$F = \hat{\eta}^2/(k-1)\big/(1-\hat{\eta}^2)/(n-k)$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบเอฟ (Snedecor F) ด้วยองศาความเป็นอิสระ $k-1$ และ $n-k$

ถ้าตัวแปรทั้งสองเป็นแบบอันตรภาค หรืออัตราส่วน แล้ว η^2 จะเป็นสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ ρ^2 เมื่อความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้น แต่ถ้าความสัมพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้น η^2 จะใช้เป็นมาตราวัดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองเช่นเดียวกับที่กล่าวมา

ตัวอย่าง ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างเพศ (x) กับการออกเที่ยวนอกบ้านต่อสัปดาห์ (y) ได้ข้อมูล ดังนี้

เพศ (X)	ชาย	หญิง
Y	4 4 5 6 6	12 3 3 4
	7 7 8 910	5 5 5 6 9
	66	43

ถ้าไม่คำนึงถึงเพศ เมื่อนำเอาค่าเฉลี่ย $(\overline{Y})$ มาใช้ในการคาดคะเนการออกเที่ยวนอกบ้าน (Y) จะมีการผิดพลาด ซึ่งวัดได้จากความผันแปร นั่นคือ

$$\bar{Y} = (66-43)/20 = 5.45$$

$$SST = \sum(Y_{ij}-\bar{Y})^2 = \sum Y_{ij}^2 - (\sum Y_{ij})^2/n = 703-(109)^2/20$$

$$= 108.95$$

เมื่อคำนึงถึงเพศ จะได้ค่าเฉลี่ย และความผันแปรของแต่ละเพศ ดังนี้

$$\bar{Y}_1 = 66/10 = 6.60, \quad \bar{Y}_2 = 43/10 = 4.30$$

$$SSW_1 = \sum_i^{n_1} (Y_{i1}-\bar{Y}_1)^2 = \sum Y_{i1}^2 - (\sum Y_{ij})^2/n_1 = 472-(66)^2/10 = 36.4,$$

$$SSW_2 = \sum_i^{n_2} (Y_{i2}-\bar{Y}_2)^2 = \sum Y_{i2}^2 - (\sum Y_{i2})^2/n_2 = 231-(43)^2/10 = 46.20$$

$$SSW = SSW_1+SSW_2 = 46.40+46.10 = 82.50$$

ดังนั้น

$$\hat{\eta}^2 = 1-SSW/SST = 1-82.50/108.95 = 0.243$$

$$\hat{\eta} = 0.493$$

สำหรับการทดสอบนัยสำคัญของ $\hat{n}$ เราคำนวณค่าของสถิติ F ได้เป็น

$$F = \frac{0.243/(2-1)}{(1-0.243)/(20-2)} = 5.771$$

ซึ่งแสดงว่า ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองน่าจะมีจริง $F_{.05}^{(1,18)} = 4.41$