บทที่ 6
ทฤษฎีแถวคอย
(Waiting Lines – Queues)

เนื่องจากเวลาเป็นสิ่งมีค่าสำหรับทุกคน นักธุรกิจจึงให้ความสนใจกับเวลาที่เสียไปเพื่อรอรับบริการที่ประสงค์ การบริหารงานที่มีประสิทธิภาพจะต้องให้เกิดความสมดุลระหว่างการดำเนินการและความไม่สะดวกของลูกค้า ร้านซุปเปอร์จึงต้องมีระบบ check out หลายช่อง แม้ว่าในบางครั้งจะไม่ได้เปิดบริการครบทุกช่อง แต่ก็พร้อมที่จะเปิดบริการทันทีที่แถวคอยของลูกค้ายาวขึ้น เพื่อลูกค้าจะได้ไม่เสียเวลาอันมีค่าของเขามากเกินไปจนอาจเป็นเหตุให้เลิกใช้บริการและหันไปใช้บริการของธุรกิจที่เป็นคู่แข่งแทน ดังนั้น การจัดการที่ดีจะต้องให้ความสนใจกับระบบแถวคอย หรือ คิว (queue) โดยใช้ทฤษฎีแถวคอย ซึ่งมีบทบาทสำคัญในระบบวิจัยดำเนินงาน

ทฤษฎีแถวคอยมีจุดเริ่มต้นจากข้อเขียนของวิศวกรชาวเดนมาร์ค ชื่อ เออร์แลงก์ (A.K. Erlang) ในปี ค.ศ.1909 จุดประสงค์หลักของทฤษฎีนี้คือการจัดบริการให้ลูกค้าอย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด แต่มีข้อแตกต่างจากทฤษฎีการสำรองสินค้าคงคลัง (Inventory) และตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming Models) ซึ่งมุ่งสนใจต้นทุนต่ำสุดและกำไรสูงสุด แต่ทฤษฎีแถวคอยจะศึกษาคุณลักษณะต่าง ๆ ของแถวคอย เช่น เวลาเฉลี่ยของการรอคอย จำนวนเฉลี่ยของลูกค้าในแถวคอย ฯลฯ แล้วจึงนำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์ค่าใช้จ่ายเพื่อปรับปรุงให้ระบบงานมีประสิทธิภาพสูงขึ้น

บางคนอาจคิดว่าแถวคอยแสดงถึงความไม่มีประสิทธิภาพในการบริหารงานและการจัดการที่ดีควรสามารถขจัดแถวคอยออกไปโดยสิ้นเชิง ซึ่งในทางปฏิบัติจะต้องเสียค่าใช้จ่ายสูงมากและสูงเกินกว่าธุรกิจจะรับภาระได้ สาเหตุสำคัญของการเกิดแถวคอยเนื่องจากการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าเป็นแบบ "เชิงสุ่ม" ลูกค้าของธนาคารจะมาถึงธนาคารไม่พร้อมกัน ถ้าคาบเวลาใดมีลูกค้าน้อย พนักงานจะมีเวลาว่างมาก แต่ถ้ามีลูกค้ามาพร้อมกันหลายคนพนักงานจะให้บริการไม่ทัน จึงทำให้เกิดแถวคอย โดยหลักการทฤษฎีแถวคอยจะสนใจการมาถึงของลูกค้า ณ จุดบริการ และลูกค้าจะต้องใช้เวลาช่วงหนึ่งรอจนได้รับบริการตามประสงค์ ลูกค้าอาจไม่ใช่บุคคลเสมอไป อาจเป็นสิ่งของ เช่น รถยนต์รอการซ่อมแซมในอู่บริการ สินค้า

ที่รอการประกอบในขั้นการผลิตถัดไป เรือบินที่รอเพื่อลงจอด ณ ท่าอากาศยาน งานประมวลผลที่รอเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ เป็นต้น ส่วน**จุดบริการ** อาจประกอบด้วยบุคคลเพียงคนเดียว เช่น ช่างตัดเสื้อ ช่างตัดผม หรือประกอบด้วยบุคคลหลายคน เช่น ทีมแพทย์ผ่าตัด หรืออาจเป็นเครื่องจักรที่จำหน่ายสินค้าสำเร็จรูป เช่น ลูกกวาด นม น้ำดื่ม แสตมป์ หรืออาจประกอบด้วยจุดบริการหลายจุด เช่น สนามบินจะมีรันเวย์หลายช่อง สถานีบริการรถจะมีช่องเติมน้ำมันหลายช่อง เป็นต้น

โครงสร้างของระบบแถวคอย

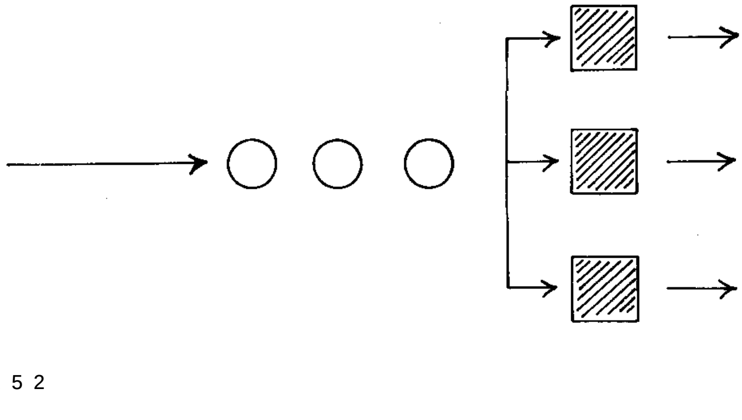
ระบบแถวคอยแบ่งเป็น 4 ประเภท คือ

1. **ช่องบริการเดี่ยว ขั้นตอนเดี่ยว** (single-server single-stage queue)

วิธีนี้สามารถบริการลูกค้าได้ที่ละ 1 คน ลูกค้าที่มาหลังจะต้องเข้าแถวรอคอย ผู้ที่มาถึงก่อนจะได้รับการบริการก่อน ลูกค้าจะได้รับบริการแบบ "เบ็ดเสร็จ" ณ ช่องบริการ บางครั้งอาจไม่เห็นแถวคอยเพราะใช้ระบบแจกบัตรเลขที่ หรือเรือบินที่รอลง ณ ท่าอากาศยาน จะถือลำดับตามเวลาที่มาถึงบริเวณที่กำหนดซึ่งอาจเป็นบริเวณพื้นที่กว้างเป็นหมื่นตารางไมล์

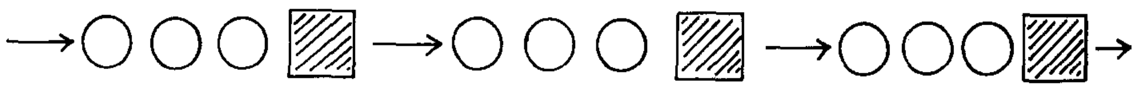
2. **ช่องบริการหลายช่อง ขั้นตอนเดี่ยว** (multiple-server single-stage queue)

วิธีนี้จะมีช่องบริการหลายช่อง ทุกช่องให้ลักษณะการบริการเหมือนกัน จะมีแถวคอยเพียงแถวเดียว ลูกค้าที่อยู่หน้าจะใช้ช่องบริการอันแรกที่ว่างทันที เช่นในธนาคาร หรือลูกค้าอาจเลือกช่องบริการแล้วตั้งแถวคอย หรืออาจมีแถวคอยหลายแถว ก็ได้ เช่น ในร้านซุปเปอร์



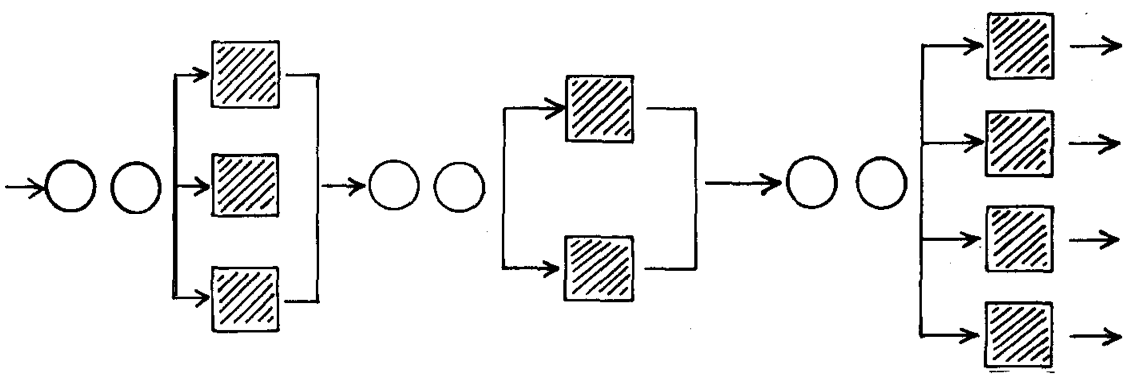
3. **ช่องบริการเดี่ยว หลายขั้นตอน** (single-server multiple-stage queue)

ลูกค้าต้องผ่านช่องบริการหลายขั้นตอนซึ่งให้บริการไม่ซ้ำกัน แต่ละขั้นตอนมีช่องบริการเพียงช่องเดียว เช่นถ้าลูกค้าต้องการซื้อสินค้าที่มีขนาดใหญ่ เช่น เต็นท์ ขั้นแรกจะต้องรอให้พนักงานจัดการเกี่ยวกับใบสั่งของ ขั้นต่อไปต้องรอให้พนักงานติดต่อคลังเก็บสินค้า ขั้นที่ 3 ต้องรอให้พนักงานนำสินค้ามาให้ ขั้นที่ 4 ต้องรอการชำระเงิน ซึ่งในแต่ละขั้นตอนจะมีลูกค้าอื่นรอรับบริการด้วย



4. **ช่องบริการหลายช่อง หลายขั้นตอน** (multiple-server multiple-stage queue)

วิธีนี้ลูกค้าต้องผ่านจุดบริการหลายขั้นตอนซึ่งไม่ซ้ำกัน ในแต่ละขั้นตอนมีช่องบริการหลายช่อง เช่นการขอใบอนุญาตขับขี่รถยนต์ จะต้องเข้าแถวเพื่อจ่ายเงินและรอรับแบบทดสอบ สอบข้อเขียนและรอฟังผลสอบ ทดสอบสายตา ทดสอบการขับ ถ่ายรูปทำบัตร รับใบขับขี่ชั่วคราว



หลักการของทฤษฎีแถวคอย

หลักการของทฤษฎีแถวคอยคือ "ลำดับที่" ของการให้บริการ ซึ่งแบ่งเป็น 4 แบบ คือ

1. **หลักการมาก่อนได้รับบริการก่อน หรือ FIFO** (first in, first out)

วิธีนี้ลำดับการให้บริการยึดถือ "ลำดับ" การมาถึงของลูกค้า นั่นคือการใช้หลักสิทธิมนุษยชน ซึ่งเป็นหลักการที่นิยมใช้มากที่สุด

2. **หลักการมาทีหลังได้รับบริการก่อน หรือ LIFO** (last in, first out)

วิธีนี้ไม่นิยมใช้แพร่หลาย แต่ถูกใช้ในบางโอกาส เช่นการใช้ลิฟท์ ผู้เข้าหลังสุด

เป็นคนแรกที่ออกจากลิฟท์ ในการขนส่งสินค้า สินค้าหน่วยสุดท้ายจะถูกยกออกเป็นลำดับแรก ระบบนี้ไม่ค่อยได้รับความสนใจมากนัก แต่หลักการนี้มีการนำไปใช้ในโรงงานอุตสาหกรรมเหล็ก ซึ่งมีรายงานที่น่าสนใจ ดังนี้

ในการผลิตแผ่นเหล็ก หรือ เหล็กเส้น เหล็กหลอมจะถูกนำมาจากโรงถลุงเหล็กโดยอยู่ในเบ้าเพื่อรอการรีดเป็นแผ่นเหล็กหรือ เป็นเหล็กเส้น ในระหว่างที่รอนี้เหล็กหลอมจะเย็นลง จึงต้องนำเข้าเตาเพิ่มความร้อนเพื่อให้ความร้อนกระจายโดยทั่วและได้ระดับอุณหภูมิที่ต้องการ ในเตาเพิ่มความร้อนจึงเต็มไปด้วยเบ้าเหล็กหลอม บางครั้งเตาไม่ว่าง เบ้าเหล็กหลอมบางส่วนจะต้องรอจึงคลายความร้อน ยิ่งเสียเวลารอนานเท่าใดก็จะต้องเพิ่มเวลาที่อยู่ในเตา ดังนั้น เพื่อเป็นการประหยัดค่าใช้จ่ายด้านพลังงาน จึงใช้วิธีให้นำเบ้าเหล็กหลอมอันสุดท้ายในแถวคอย (ซึ่งร้อนที่สุด) เป็นหน่วยแรกที่เข้าเตาเพิ่มความร้อน (จึงใช้เวลาในเตาน้อยที่สุด) นั่นคือการนำหลักการของ LIFO ไปใช้นั่นเอง

3. หลักการให้บริการในลำดับแบบสุ่ม หรือ **SIRO** (service in random order)

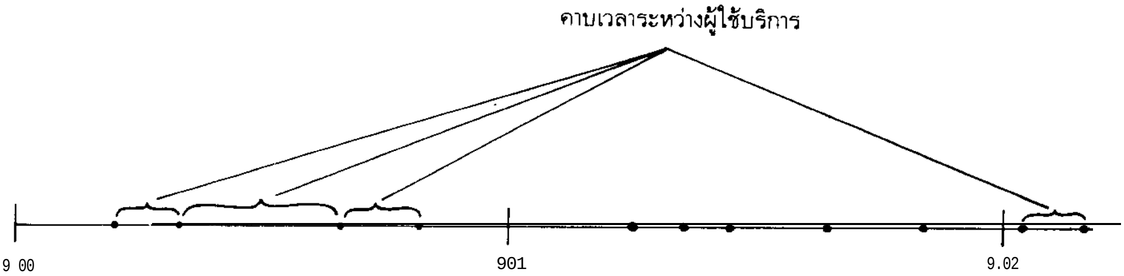
คือหลักการที่ใช้ในระบบโทรศัพท์ โทรศัพท์ที่ต่อเข้าในจังหวะที่สายว่างจะได้ใช้บริการทันทีแม้ว่าจะมีผู้รอใช้บริการก่อนหน้านั้น แต่เนื่องจากไม่มีระบบการบันทึกข้อมูลไว้ ดังนั้น โทรศัพท์ที่เรียกเข้ามาในจังหวะที่สายว่างจะได้รับบริการทันที ซึ่งลำดับที่ของการได้รับบริการจะเป็นแบบสุ่ม ปัจจุบันในบางแห่งได้มีการพัฒนาระบบโดยมีการบันทึกการเรียกใช้และจะให้บริการเมื่อสายว่างแก่ผู้เรียกใช้ลำดับต้น ๆ นั่นคือการใช้ระบบ SIRO นั่นเอง

4. หลักการจัดลำดับความสำคัญเร่งด่วน (priority order)

คือหลักการให้บริการในห้องฉุกเฉินของโรงพยาบาล ซึ่งใช้การจัดลำดับตามความเร่งด่วนหรือความวิกฤตของผู้ป่วย นอกจากนี้ ก็มีระบบการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ซึ่งจะทำงานที่เร่งด่วนก่อน และทุกครั้งที่ให้บริการกับลูกค้าเร่งด่วน ลูกค้าที่มีความสำคัญรองลงมาจะต้องรอจึงทำให้เกิดแถวคอย

การมาถึงของลูกค้าและลักษณะการให้บริการ

ลูกค้าจะเข้ารับบริการในลำดับที่แบบสุ่ม ช่วงเวลาระหว่างลูกค้าแต่ละรายจะมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ซึ่งเป็นการแจกแจงที่ใช้กับภาวะที่เหตุการณ์ทั้งหลายเกิดขึ้นแบบสุ่มในช่วงเวลาที่กำหนด เช่นการมาถึงของพาหนะ ณ ด่านเก็บค่าธรรมเนียมจะมีลักษณะแบบสุ่ม เช่นในช่วงเวลา ๙.๐๐ น. จะมีพาหนะมาจากหลายทิศทางแบบสุ่มเพื่อเข้าสู่ด่านเก็บค่าธรรมเนียม



การที่พาหนะทั้งหลายมาถึงด่านเก็บค่าธรรมเนียม**แบบสุ่ม** เรียกว่าเป็น **กระบวนการแบบปัวซอง** ซึ่งถูกขนานนามตามชื่อนักคณิต-ฟิสิกส์ในศตวรรษที่ 18 ชื่อ Siméon Poisson กระบวนการแบบปัวซอง 2 กระบวนการจะแตกต่างกันเมื่ออัตราเฉลี่ยของการมาถึงแตกต่างกัน (mean arrival rate) และนิยมใช้ λ (lambda) แทนพารามิเตอร์ตัวนี้ ดังนั้น λ คือค่าเฉลี่ยของการมาถึงต่อหน่วยเวลา เช่น วินาที, นาที, ชั่วโมง หรือ วัน เป็นต้น ด่านเก็บค่าธรรมเนียมที่ทำงานหนักอาจมี λ = 100 คัน ต่อนาที ในขณะที่บางด่านบนถนนที่มีการจราจรไม่หนาแน่นอาจมี λ = 1/2 คัน ต่อนาที

หลักการของกระบวนการแบบปัวซอง

1. ไม่มีบันทึกความจำ (no memory) นั่นคือจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดในแต่ละช่วงเวลาจะ**เป็นอิสระ**กับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก่อนหน้านั้น

2. อัตราของระบบ คือ λ ต้องเป็นค่า**คงที่**ตลอดช่วงเวลาที่พิจารณา

3. การเกิดมากกว่าหนึ่งเหตุการณ์ในช่วงเวลาที่สั้นมาก ๆ ถือเป็นเรื่องผิดปกติ และให้โอกาสที่จะเกิดเพียง 1 เหตุการณ์ในช่วงนั้นมีค่าโดยประมาณ = λ × (ระยะเวลา) หรือ λt

กระบวนการแบบปัวซองทำให้เกิดการแจกแจง 2 อัน คือการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ซึ่งแสดงความน่าจะเป็นของคาบเวลาในกระบวนการแบบปัวซอง และเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง และการแจกแจงแบบปัวซองซึ่งเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องซึ่งแสดงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกค้าในกระบวนการแบบปัวซอง

การแจกแจงแบบเอ็กซโพเนนเชียล

มีฟังก์ชั่นน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

t = inter-arival time

λ = mean rate of arrival

e = 2.7183

Mean $= 1/\lambda$
Standard deviation $= 1/\lambda$

สมมุติด่านเก็บค่าธรรมเนียมมีรถมาถึงโดยเฉลี่ย $\lambda = 4$ คัน ต่อนาที ดังนั้น ระยะเวลาระหว่างรถแต่ละคัน คือ $1/\lambda = 1/4 = .25$ นาที ต่อ 1 คัน

การแจกแจงแบบปัวซอง

ใช้สำหรับแสดงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกค้าในคาบเวลาที่กำหนด เช่นกำหนดเป็น 1 นาที ระหว่าง 9.08–9.09, กำหนดเป็น 5 นาที เช่น ระหว่าง 9.09–9.14 หรือกำหนดเป็นชั่วโมง เช่น ระหว่าง 10.00–11.00 น. เป็นต้น

ให้ X คือจำนวนลูกค้าที่เข้ารับบริการในคาบเวลา t

ดังนั้น $P[X=x] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

เช่น ในคาบเวลา 1 นาที คือ $t = 1$, ถ้า $\lambda = 4$ คัน ต่อ นาที นั่นคือ $\lambda t = 4$ คัน

$$P(X=2) = \frac{e^{-4}(4)^2}{2!} = \frac{.018316(4)^2}{2} = .1465$$

การแจกแจงแบบปัวซองมี

Mean $= \lambda t$
Variance $= \lambda t$

การหาค่าต่าง ๆ ในระบบแถวคอย

ให้ λ คืออัตราเฉลี่ยของลูกค้าที่เข้ารับบริการ

μ คืออัตราเฉลี่ยของการให้บริการ

ทั้งนี้ อัตราเฉลี่ยของให้บริการต้องสูงกว่าอัตราเฉลี่ยของลูกค้า หรือ $\mu > \lambda$

ระบบแถวคอยจะสนใจผล 6 ประการ ดังนี้

1. การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนลูกค้าที่อยู่ในระบบแถวคอย
2. ค่าเฉลี่ยจำนวนลูกค้าในระบบแถวคอย (L), $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
3. ค่าเฉลี่ยระยะเวลาที่อยู่ในระบบแถวคอย (W), $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
4. ค่าเฉลี่ยของจำนวนลูกค้าในแถวคอย (Lq), $Lq = \frac{\lambda^2}{\lambda\ (\mu - \lambda)}$

5. ค่าเฉลี่ยของระยะเวลาที่รอคอย (Wq), $Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

6. server utilization factor (ρ = rho), $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

ตัวอย่าง

ให้พนักงานเลือกหยิบวัสดุที่ต้องการเองในห้องเก็บสินค้า โดยเฉลี่ยจะมีพนักงานมาหยิบสินค้าชั่วโมงละ 25 คน จัดให้มีพนักงาน 1 คน คอยตรวจสอบที่ช่องทางออก ซึ่งใช้เวลาเฉลี่ยคนละ 2 นาที หรือตรวจสอบได้ชั่วโมง 30 คน สมมุติการเข้ามาสู่ช่องทางออกเป็นแบบสุ่มหรือเป็นกระบวนการแบบปัวซอง จะได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

λ = 25 คน/ชั่วโมง, μ = 30 คน/ชั่วโมง

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{25}{30-25} = 5 \text{ คน}$$

$$W = \frac{1}{P-1} = \frac{1}{30-25} = \frac{1}{5} \text{ ชั่วโมง} = 12 \text{ นาที}$$

หรือ $w = L/\lambda = 5/25 = 1/5$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(25)^2}{30(30-25)} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6} \text{ คน}$$

$$wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{25}{30(30-25)} = \frac{1}{6} \text{ ชั่วโมง} = 10 \text{ นาที}$$

หรือ $Wq = Lq/\lambda = (25/6) \div 25 = \frac{1}{6}$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

นั่นคือ ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง จะมีจำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยทั้งที่อยู่ในแถวคอยและที่กำลังได้รับบริการ จำนวน 5 คน ลูกค้าเสียเวลาโดยเฉลี่ยอยู่ในระบบแถวคอยจนเสร็จสิ้นการรับบริการคนละ 12 นาที จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในแถวคอย (ไม่นับคนที่กำลังได้รับบริการ) จำนวน $4\frac{1}{6}$ คน แต่ละคนเสียเวลาอยู่ในแถวคอยโดยเฉลี่ย 10 นาที และพนักงานที่ให้บริการจะต้องทำงาน 5/6 ของเวลาทั้งหมด

อนึ่ง เราสามารถใช้ค่าต่าง ๆ ที่คำนวณได้นี้ปรับปรุงระบบแถวคอย สมมุติค่าจ้างพนักงานตรวจสอบที่ช่องทางออก 15 บาท/ชั่วโมง ค่าเสียเวลาของพนักงานแผนกอื่น ๆ ในการอยู่ในแถวคอยเฉลี่ย 20 บาท/คน/ชั่วโมง พนักงานทำงานวันละ 8 ชั่วโมง

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายพนักงานตรวจสอบ = 15×8 = 120 บาท/วัน

พนักงานที่หยิบสินค้าเสียเวลาโดยเฉลี่ย w = 1/5 = 12 นาที/คน

ค่าใช้จ่ายต่อคน = 1/5(20) = 4 บาท

มีพนักงานเข้าโดยเฉลี่ย 25 คน/ชั่วโมง หรือ 8(25) = 200 คน/วัน

เป็นเงินวันละ 200(4) = 800 บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด = 120+800 = 920 บาท/วัน

ถ้ามีการปรับปรุงโดยจ้างพนักงานที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้นหรือนำระบบอัตโนมัติเข้ามาช่วยบางส่วน หรือใช้พนักงานตรวจสอบหลายคน คือเปิดหลายช่องบริการ ซึ่งการวิเคราะห์จะยุ่งยากขึ้น สมมุติมีการปรับปรุงโดยการใช้เครื่องอัตโนมัติช่วยบางส่วนแต่ยังคงใช้พนักงานตรวจ 1 คน ซึ่งจะสามารถให้บริการได้เร็วขึ้นเป็น μ = 60 คน/ชั่วโมง ดังนั้น ลูกค้าจะเสียเวลาอยู่ในระบบ

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{60-25} = \frac{1}{35}$$ ชั่วโมง หรือ 1.7 นาที

คิดเป็นต้นทุน 200(20) (1/35) = 114 บาท/วัน

ถ้าค่าใช้จ่ายสำหรับเครื่องอัตโนมัติวันละ 100 บาท

ต้นทุนรวม = 100+120+114 = 334 บาท/วัน

นั่นคือ การใช้เครื่องอัตโนมัติควบคู่กับพนักงานจะสามารถประหยัดได้จากเดิมวันละ

800 - 334 = 586 บาท

ระบบแถวคอยเมื่อมีช่องทางออกหลายช่องทาง (Multiple-Server Queuing Model)

มีข้อสมมุติว่าแต่ละช่องทางสามารถให้บริการในอัตราเฉลี่ย μ และระยะเวลาของการให้บริการมีการแจกแจงแบบเอ็กซโพเนนเชียล ระบบบริการเป็นแบบ FIFO นั่นคือลูกค้าที่อยู่หัวแถวจะเลือกใช้ช่องทางแรกที่ว่างหรือพร้อมที่จะให้บริการ จะมีพารามิเตอร์เพิ่มขึ้นอีก 1 ตัว คือ S

S = จำนวนช่องทางบริการ

ค่าต่าง ๆ จะขึ้นอยู่กับค่า Po และ Pn โดยที่

Po = Prob. (ไม่มีลูกค้าอยู่ในระบบแถวคอย)

Pn = Prob. (มีลูกค้า n คน อยู่ในระบบแถวคอย)

$$P_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!} \left(\frac{1}{1 - \lambda/S\mu} \right) \right]$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & \text{if } 0 \le n \le S \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{S!\, S^{n-S}} P_0 & \text{if } n \ge S \end{cases}$$

Mean length of the waiting line:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^S \quad (\lambda/S\mu)}{S!\,(1 - \lambda/S\mu)^2} P_0$$

Mean customer waiting time:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Mean customer time in the system:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Mean number of customers in the system:

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Server utilization factor:

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

ข้อสังเกต

$$W_q \neq \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) W, \text{ และ } \quad L_q \neq \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) L$$

แต่เมื่อมีช่องทางเดียว

$$Wq = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) w \;, \qquad Lq = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) L$$

ตัวอย่าง

บริษัทกำลังพิจารณาเช่าเครื่องถ่ายเอกสารจำนวน 2 เครื่อง ซึ่งสามารถถ่ายภาพได้นาทีละ 100 แผ่น แต่จำนวนที่ผลิตได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนต้นฉบับและจำนวนแผ่นที่ถ่ายเอกสาร ถ้าระยะเวลาของการใช้แต่ละครั้งมีการแจกแจงแบบเอ็กซโพเนนเชียล ด้วยค่าเฉลี่ย 2 นาทีต่องาน 1 ชิ้น หรือ 0.5 ชิ้นต่อ 1 นาที ความต้องการใช้เครื่องของพนักงานอยู่ในอัตรา 3 ชิ้น ต่อ 5 นาที หรือค่าเฉลี่ย 0.6 ชิ้น ต่อ 1 นาที และความต้องการใช้เป็นแบบเชิงสุ่ม นั่นคือเป็นกระบวนการแบบปัวซอง

วิธีทำ

$S = 2$, $\mu = 0.5$ ชิ้น/นาที, $\lambda = 0.6$ ชิ้น/นาที

Prob. (ไม่มีความต้องการใช้เครื่อง)

$$P_0 = 1/\left[\frac{(\lambda/\mu)^0}{0!} + \frac{(\lambda/\mu)^1}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \left(\frac{1}{1-\lambda/2\mu}\right)\right]$$

$$= 1/\left[\frac{(.6/.5)^0}{0!} + \frac{(.6/.5)^1}{1!} + \frac{(.6/.5)^2}{2!}\left(\frac{1}{1-.6/2(.5)}\right)\right]$$

$$= 1/\left[1+1.2+\frac{(1.2)^2}{2}\left(\frac{1}{1-.6}\right)\right]$$

$$= 1/\ [1+1.2+1.8] = 1/4 = .25$$

$$Lq = \frac{(.6/.5)^2\,[.6/2(.5)]}{2!\,[1-.6/2(.5)]^2}\ (.25) = .68 \text{ ชิ้น}$$

$$wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{.68}{.6} = 1.13 \text{ นาที}$$

$$w = wq + \frac{1}{\mu} = 1.13+\frac{1}{.5} = 3.13 \text{ นาที}$$

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu} = .68+\frac{.6}{.5} = 1.88 \text{ ชิ้น}$$

นั่นคือ โอกาสที่เครื่องถ่ายเอกสารไม่ต้องทำงานเป็น 0.25 มีจำนวนงานเฉลี่ย 0.68 ชิ้น ที่รอคอยการใช้เครื่อง และเสียเวลารอคอยโดยเฉลี่ยชิ้นละ 1.13 นาที งานแต่ละชิ้นต้องเสียเวลาโดยเฉลี่ยที่ศูนย์ถ่ายเอกสาร 3.13 นาที และจำนวนงานโดยเฉลี่ยของเครื่องในเวลาใดเวลาหนึ่งจำนวน 1.88 ชิ้น

ถ้าพนักงานได้ค่าจ้างชั่วโมงละ 15 บาท ค่ากระดาษแผ่นละ .10 บาท และงานแต่ละชิ้นใช้โดยเฉลี่ย 12 แผ่น

จำนวนงานโดยเฉลี่ย 0.6×60 = 36 ชิ้น/ชั่วโมง

หรือ 36×12 = 432 แผ่น/ชั่วโมง

แต่ละชิ้นใช้เวลา 3.13 นาที หรือ 3.13/60 = .0522 ชั่วโมง

ค่าเสียเวลาของพนักงานที่ต้องรอคอยในศูนย์ถ่ายเอกสารคิดเป็นค่าใช้จ่าย

36 ชิ้น × .0522 ชั่วโมง × 15 บาท = 28.19 บาท

ค่าต้นทุนกระดาษถ่ายเอกสารสำหรับทั้ง 2 เครื่องต่อ ชั่วโมง

432 แผ่น × .10 = 43.2 บาท

ค่าใช้จ่ายต่อชั่วโมง

28.19(ค่าแรงงาน) + 43.2 (ค่ากระดาษ) = 71.39 บาท

อนึ่ง ระบบตัวแบบแถวคอยนอกจากจำแนกตามจำนวนช่องทางให้บริการและจำแนกตามขั้นตอนการให้บริการแล้ว ยังจำแนกตามลักษณะของแถวคอยอีกว่าเป็นแถวคอยแบบจำกัดหรือไม่จำกัดจำนวน เป็นต้น ซึ่งการวิเคราะห์นอกจากจะใช้การแจกแจงแบบปัวซองและการแจกแจงแบบเอ็กซโพเนนเชียลแล้ว ในปัญหาที่ยุ่งยาก มีการใช้วิธีการวิเคราะห์ที่เรียกว่า Monte Carlo ด้วย

ข้อควรระวัง

มีข้อจำกัดที่ทำให้เกิดความผิดพลาดมหันต์สำหรับการแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการแบบปัวซอง นั่นคือการสมมุติให้อัตราเฉลี่ยของอุบัติการณ์ (λ) เป็นค่าคงที่ตลอดระยะเวลาที่ยาวนาน ซึ่งแท้จริง λ มีค่าเปลี่ยนแปลง (ไม่คงที่) เพราะอัตราการมาถึงแบบสุ่มมักเปลี่ยนแปลง ณ เวลาต่าง ๆ ของวันเดียวกัน เปลี่ยนแปลง ณ วันต่าง ๆ ของสัปดาห์ และเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาลของปี เช่นอัตราเฉลี่ยพาหนะที่เข้าสู่ด่านเก็บค่าธรรมเนียมแห่งหนึ่งเมื่อเวลา 09.00 น. ย่อมแตกต่างกับเวลา 03.00 น. (ตีสาม) จะมีความแตกต่างระหว่างวันจันทร์และวันศุกร์ จะมีความแตกต่างระหว่างฤดูร้อนและฤดูฝน เป็นต้น แม้ว่าภาวการณ์เหล่านั้นยังคงเป็นกระบวนการแบบปัวซอง แต่ผู้วิเคราะห์ควรเพิ่มความระมัดระวังโดยการจำกัดเวลาที่ศึกษาให้สั้นที่สุด เพื่อจะได้ใช้ค่า λ ที่ถูกต้อง

แบบฝึกหัด

1. สำหรับระบบช่องบริการเดี่ยวต่อไปนี้ จงหาค่า L, W, Lq, Wq และ P

   ก. λ = 20, μ = 25

   ข. λ = 8, μ = 12

   ค. λ = 2, μ = 5

   ง. λ = .4, μ = .7

2. คลีนิคแห่งหนึ่งมีคนไข้โดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 4 คน แพทย์ให้คำปรึกษา (รักษา) ในอัตราชั่วโมงละ 5 คน (ปรึกษาทีละคน) คลีนิคเปิดทำการ 24 ชั่วโมง จงหา L, W, Lq, Wq และ P

เฉลยแบบฝึกหัด

1. (ก) $\boxed{\lambda = 20 , \quad \mu = 25}$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{20}{25-20} = 4$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{25-20} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(20)2}{25(25-20)} = 3.2$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{3.2}{20} = 0.16$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} \quad \frac{4}{5} = 0.8$$

(ข) $\boxed{\lambda = 8 , \quad \mu = 12}$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{8}{12-8} = \frac{8}{4} = 2$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{12-8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(8)^2}{12(12-8)} = 1.33$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{1.33}{8} = 0.17$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = 0.67$$

(ค) $\boxed{\lambda = 2 , \quad \mu = 5}$

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{2}{5-2} = \frac{2}{3} = 0.67$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(2)^2}{5(5-2)} = \frac{(2)^2}{5(3)} = 0.27$$

$$Wq = Lq/\lambda = 0.27/2 = 0.133$$

$\rho = \frac{\lambda}{u} = \frac{2}{5} = 0.40$

(ง) $\boxed{\lambda = .4 , \quad \mu = .7}$

$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \quad \frac{.4}{.7-.4} = \frac{.4}{.3} = 1.33$

$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{.3} = 3.33$

$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(.4)^2}{.7(.7-.4)} = 0.76$

$Wq = Lq/\lambda = .76/.4 = 1.9$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = .\frac{4}{7} = 0.57$

2 $\lambda = 4 , \quad \mu = 5$

$L = \frac{A}{\mu-\lambda} = \frac{4}{5-4} = 4$ คน

$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{5-4} = 1$ ชัวโมง

$Lq = \frac{\lambda^2}{u(\mu-\lambda)} = \frac{(4)^2}{5(5-4)} = 3.2$ คน

$Wq = Lq/\lambda = 3.2/4 = 0.8$ ชัวโมง $= 48$ นาที

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5} = 0.8$ ชัวโมง $= 48$ นาที

นั่นคือ จะมีคนไข้รอคำปรึกษาโดยเฉลี่ย 3.2 คน ถ้ารวมคนไข้ที่กำลังได้รับคำปรึกษาด้วย ณ เวลาใดจะมีคนไข้ที่ต้องรอคอย 4 คน คนไข้แต่ละคนใช้เวลาอยู่ในคลีนิคโดยเฉลี่ย 1 ชั่วโมง โดยใช้เวลารอคอยโดยเฉลี่ย 48 นาที และได้รับบริการคำปรึกษา 12 นาที โอกาสที่แพทย์จะไม่ว่าง = 0.8 นั่นคือ แพทย์จะต้องให้คำปรึกษาโดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 48 นาที และมีเวลาว่าง 12 นาที

ถ้าค่าเสียเวลาของคนไข้โดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 10 บาท/คน ใน 24 ชั่วโมงจะมีคนไข้เสียเวลารอคอย

24 ชั่วโมง × 4 คน × 0.8 ชั่วโมง = 76.8 ชั่วโมง คิดเป็นเงิน

76.8×10 = 768 บาท/วัน