8. การประมาณค่า

- การประมาณค่าแบบจุด
- การประมาณค่าแบบช่วง และการสร้างช่วงเชื่อมั่น
- การสร้างช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย
- การสร้างช่วงเชื่อมั่นของสัดส่วนจากตัวอย่างกลุ่มโต
- การกำหนดขนาดตัวอย่าง เพื่อใช้ในการประมาณค่า
- การประมาณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ย 2 กลุ่ม
- การประมาณค่าผลต่างของสัดส่วน 2 กลุ่ม

8.1 จงบอกเครื่องมือสำคัญที่ใช้วิเคราะห์สถิติภาคอนุมาน

เครื่องมือสำคัญที่ใช้วิเคราะห์ภาคอนุมาน คือ ค่าสถิติที่ได้จากตัวอย่างสุ่ม เช่น $\bar{x}$, p, s^2 ทั้งนี้ต้องทราบความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าสถิติเหล่านั้นด้วย

8.2 ค่าประมาณแบบจุดมีข้อเสียอย่างไร?

ค่าประมาณแบบจุดเป็นเพียงค่าเดียวจากตัวอย่าง มีจุดอ่อน คือเราไม่ทราบความสัมพันธ์กับข้อมูลอื่น ๆ ภายในกลุ่ม หรือภายในประชากรนั้น วิธีแก้ไข คือ ต้องแสดงค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณนั้นด้วย

8.3 จงอธิบายความแตกต่างระหว่าง "ตัวประมาณค่า" และ "ค่าประมาณ"

ตัวประมาณค่า คือ estimator เช่น ตัวประมาณค่าของ μ คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{x}$

ค่าประมาณ (estimate) คือ ค่าที่คำนวณได้ของตัวประมาณค่า

8.4 คุณสมบัติที่ดีของตัวประมาณค่าที่ดี มีอะไรบ้าง?

มี 4 ข้อ คือ

1. **ความคงเส้นคงวา** (consistency) เกิดขึ้นเมื่อเพิ่มขนาดตัวอย่างให้โตขึ้นแล้วมีผลทำให้ค่าสถิติที่ใช้เป็นตัวประมาณค่ามีค่าใกล้เคียงกับค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณยิ่งขึ้น

2. **ความมีประสิทธิภาพ** หรือ efficiency

เกิดขึ้นกับตัวประมาณค่าที่ให้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำที่สุด

3. **ความไม่เอียงเฉ** หรือ unbiasness

เกิดขึ้นเมื่อค่าเฉลี่ย (ค่าคาดหมาย) ของตัวประมาณค่านั้น มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ย (ค่าคาดหมาย) ของพารามิเตอร์ นั่นคือ

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

4. **ความพอเพียง** หรือ sufficiency

เกิดขึ้นกับตัวประมาณค่าที่สามารถให้ข่าวสารจากตัวอย่างได้มากที่สุด

8.5 ความคงเส้นคงวา (consistency) มีส่วนในการกำหนดขนาดตัวอย่างอย่างไร?

ค่าสถิติที่มีคุณสมบัติ "ความคงเส้นคงวา" จะมีค่าเข้าใกล้ค่าพารามิเตอร์ เมื่อเพิ่มขนาดตัวอย่างให้โตขึ้น ดังนั้น ถ้าเราต้องการเพิ่มขนาดตัวอย่าง เพื่อให้ค่าสถิติมีค่าใกล้เคียงค่าพารามิเตอร์ยิ่งขึ้น จะต้องตรวจสอบก่อนว่า ค่าสถิตินั้น มีคุณสมบัติ "ความคงเส้นคงวา" หรือไม่ เพราะถ้าไม่มีคุณสมบัตินี้ ก็เป็นการสูญเปล่าที่จะเพิ่มขนาดตัวอย่าง

8.6 อัตราผลตอบแทนการลงทุน (เป็นเปอร์เซ็นต์) ของโรงงานผลิตยาที่สุ่มมา 10 โรงงาน มีดังนี้

17.0 25.0 13.0 8.0 27.5 20.0 18.5 17.0 16.0 12.0

จงหาค่าประมาณแบบจุดของ μ และ σ^2

ให้ X คืออัตราผลตอบแทนของโรงงานที่สุ่มมา

$$\Sigma X = (17.0 + 25.0 + \dots + 12.0) = 174$$

$$\Sigma X^2 = (17.0^2 + 25.0^2 + \dots + 12.0^2) = 3334.5$$

$$n = 10$$

$$\overline{X} = (\Sigma X) | n = 174 | 10 = 17.4$$

$$S^2 \cong \frac{\Sigma(X-\overline{X})^2}{n-1} = \frac{\Sigma X^2 - \Sigma X)^2 | n}{n-1}$$

$$= \frac{3334.5 - (174)^2/10}{9}$$

$$= \frac{306.9}{9} = 34.1$$

นั่นคือ ค่าประมาณของ μ หรือ $\mu = \overline{X} = 17.4$

และ ค่าประมาณของ σ^2 หรือ $\hat{\sigma}^2 = S^2 = 34.1$

8.11 **ผู้ผลิตยาชนิดหนึ่ง อ้างว่า ยาที่ผลิตใหม่ จะมีผลในการรักษาโรคชนิดหนึ่งถึง 90% เมื่อสุ่มผู้ป่วยมารักษาด้วยยาดังกล่าว จำนวน 100 คน พบว่า มี 80 คนที่หายจากโรค จงประมาณสัดส่วนที่แท้จริงของการรักษา และความคลาดเคลื่อนของค่าประมาณ**

ให้ π คือสัดส่วนที่แท้จริงของการรักษา (หายจากโรค)

8.7 **ในการสอบถามพนักงานโรงงานทอผ้าที่สุ่มมา 500 คน พบว่ามีคนงาน 284 คน ที่ไม่พอใจในการปรับปรุงระบบการทำงาน ผู้บริหารจึงอยากทราบสัดส่วนของพนักงานทั้งหมดที่เห็นชอบกับการปรับปรุง จงหาค่าประมาณแบบจุดของสัดส่วนที่แท้จริงดังกล่าว และหาความเคลื่อนเคลื่อนสูงสุด**

ให้ π คือสัดส่วนของพนักงานทั้งหมดที่เห็นด้วยกับการปรับปรุง

จากตัวอย่าง $n = 500$ มีผู้เห็นด้วย $= 500 - 284 = 216$ คน

ดังนั้น $p = 216/500 = .432$

นั่นคือ $\hat{\pi}$ = .432

(1) $$\hat{\pi} = p = \frac{80}{100} = .80$$

(2) $$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{(.9)(.1)}{100}} = .03$$

ความคลาดเคลื่อนสูงสุด $= 3\sigma_p = 3(.03) = .09$

8.12 **มหาวิทยาลัยรามคำแหงแจ้งว่า มีนักศึกษาสนใจการบรรยายทางโทรทัศน์ 20% ถ้าฝ่ายสถิติสุ่มนักศึกษามา 625 คน พบว่ามี 180 คน ที่ชมการบรรยายทางโทรทัศน์ด้วย จงประมาณค่าสัดส่วนที่แท้จริงของผู้รับชมทางโทรทัศน์ และความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่าง**

ให้ π คือสัดส่วนของนักศึกษาทั้งหมดที่รับชมทางโทรทัศน์ด้วย

(1) $$\hat{\pi} = p = 180/625 = .288 = 28.8\%$$

(2) $$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{.2(.8)}{625}} = .016$$

ความคลาดเคลื่อนสูงสุด $= 3\sigma_p = 3(.016) = .048$

8.13 **ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (ทุก ๆ ค่าของ X เกิดขึ้นด้วยโอกาสเท่ากัน $= \frac{1}{k}$) จากประชากร $\{2, 4, 6\}$ และถ้าสุ่มมา 2 ตัว แบบมีการแทนที่ เพื่อหาค่า $\bar{X}$ จงแสดงว่า**

(ก) $E(\bar{X}) = \mu$ และ $\sigma^2_{\bar{X}} = \sigma^2/n$

(ข) $E(S^2) = \sigma^2$

$$\mu = \Sigma X/N = (2 + 4 + 6)/3 = 12/3 = 4$$

$$\sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \Sigma(X - \mu)^2 f(x)$$

$$= \Sigma(X - \mu)^2 \left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}\Sigma(X - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2\right]$$

$= \quad 8/3$

สรุป : $\mu = 4, \ \sigma^2 = 8/3$

(ก) สุ่มตัวอย่าง ขนาด $n = 2$ แบบ**แทนที่** จะมีตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังนี้

	ตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมด	$\overline{X}$	S^2
1	2, 2	2	0
2	2, 4	3	2
3	2, 6	4	4
4	4, 2	3	2
5	4, 4	4	0
6	4, 6	5	2
7	6, 2	4	4
8	6, 4	5	2
9	6, 6	6	0

โดยที่ $S^2 \quad = \quad \Sigma(X - \overline{X})^2/(n - 1)$

แต่ $n = 2$

ดังนั้น $S^2 \quad = \quad \Sigma(X - \overline{X})^2/(2 - 1)$

$\quad = \quad \Sigma(X - \overline{X})^2$

เช่น S^2 ของกลุ่มที่ 1 ซึ่งมี $\overline{X} = 2$

$\quad = \quad (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 =$

ดังนั้น S^2 จะมีฟังก์ชันน่าจะเป็น ดังนี้

S^2	0	2	4	รวม
$f(s^2)$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	1.0

และ $\overline{X}$ จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	รวม
$f(\overline{X})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1.0

ดังนั้น $\mu_{\overline{x}} = E(\overline{X}) \quad = \quad \Sigma\overline{X} f(\overline{X})$

$$= 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{2}{9}\right) + \ldots + 6\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= 4.0$$

$$E(\overline{X}^2) = \Sigma\overline{X}^2 f(X)$$

$$= 4\left(\frac{1}{9}\right) + 9\left(\frac{2}{9}\right) + 16\left(\frac{3}{9}\right) + 25\left(\frac{2}{9}\right) + 36\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= \quad 156/9 = 52/3$$

ดังนั้น $\sigma^2_{\bar{x}} = E(\bar{X}^2) - \mu^2_{\bar{x}}$

$$= \frac{52}{3} - (4)^2$$

$$= \frac{52}{3} - 16$$

$$= \frac{4}{3}$$

จะเห็นว่า $E(\bar{X}) = 4 = \mu$

และ $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{4}{3} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \frac{8}{3(2)} = \frac{4}{3}$

(ค) $E(s^2) = \Sigma s^2 \quad f(s^2)$

$$= 0\left(\frac{3}{9}\right) + 2\left(\frac{4}{9}\right) + 4\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$= \frac{16}{9} \quad \frac{8}{3}$$

และ $\sigma^2 = \frac{8}{3}$

ดังนั้น $E(s^2) = \sigma^2$

8.14 ถ้าปกติเปอร์เซ็นต์ชำรุดของผ้าขนหนูจากโรงงานหนึ่ง = 20% จะต้องสุ่มสินค้ามาตรวจสอบกี่หน่วย ถ้าต้องการให้มั่นใจว่า

ก) สัดส่วนชำรุดอยู่ระหว่าง 0.08 ถึง 0.32

ข) สัดส่วนชำรุดอยู่ระหว่าง 0.14 ถึง 0.26

ค) สัดส่วนชำรุดอยู่ระหว่าง 0.17 ถึง 0.23

ให้ π คือ เปอร์เซ็นต์สินค้าชำรุดที่แท้จริง โดยมี $\pi = .2$

ให้ p คือ สัดส่วนของชำรุดที่พบจากตัวอย่างสุ่ม n หน่วย

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{(.2)(.8)}{n}} = \sqrt{\frac{.16}{n}}$$

ก) $P(.08 < p < .32) = P\left(\frac{.08 - .20}{\sigma_p} < Z < \frac{.32 - .20}{\sigma_p}\right)$

$\boxed{z = (p - \pi)/\sigma_p}$ $= P\left(\frac{-.12}{\sigma_p} < Z < \frac{.12}{\sigma_p}\right)$

แต่ $P(-3.0 < Z < 3.0) = .998$

ดังนั้น $\frac{.12}{\sigma_p} = \frac{.12}{\sqrt{.16/n}} = \frac{.12\sqrt{n}}{\sqrt{.16}} = 3.0$

และ $\sqrt{n} = \frac{3\sqrt{.16}}{.12}$

$n = 9(.16)/(.12)^2$

$= 100$

ข) $P(.14 < p < .26) = P\left(\frac{.14 - .20}{\sigma_p} < Z < \frac{.26 - .20}{\sigma_p}\right)$

$= P\left(-\frac{.06}{\sigma_p} < Z < \frac{.06}{\sigma_p}\right)$

แต่ $P(-3 < Z < 3) = .998$

ดังนั้น $\frac{.06}{\sigma_p} = \frac{.06\sqrt{n}}{\sqrt{.16}} = 3$

$n = (3)^2(.16)/(.06)^2 = 400$

ค) ให้ $P(.17 < p < .23) = .998$

$P\left(\frac{.17 - .20}{\sigma_p} < Z < \frac{.23 - .20}{\sigma_p}\right) = .998$

$P\left(-\frac{.03}{\sigma_p} < Z < \frac{.03}{\sigma_p}\right) = .998$

และ $P(-3 < Z < +3) = .998$

ดังนั้น $\frac{.03}{\sigma_p} = \frac{.03\sqrt{n}}{\sqrt{.16}} = 3$

$n = 3^2(.16)/(.03)^2 = 1600$

8.15 กำหนดให้ $\sigma = 0.9$, $n = 36$, $\bar{X} = 9.6$

ก) จงหาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย

ข) จงสร้างค่าประมาณแบบช่วง 1 หน่วยของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานโดยรอบค่าเฉลี่ย

ก) $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.9/\sqrt{36} = 0.9/6 = 0.15$

ข) $\bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}} = 9.6 \pm 0.15 = 9.45; 9.75$

8.16 สุ่มคนงานมา 81 คน มีอายุเฉลี่ย 24.5 ปี และทราบว่า $\sigma = 3.6$

ก) จงหาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของอายุเฉลี่ย

ข) จงหาช่วงโดยรวมค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่จะครอบคลุมค่าเฉลี่ยของประชากร 95.5% ของจำนวนครั้งทั้งหมด

ก) $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 3.6/\sqrt{81} = 3.6/9 = 0.4$

ข) $P(-2.0 < z < 2.0) = .955$

แต่ $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

นั่นคือ $P(-2.0 < \dfrac{x - p}{a_{\bar{X}}} < 2.0) = .955$

$P(\bar{X} - 2\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 2\sigma_{\bar{X}}) = .955$

นั่นคือ $p(24.5 - 2(0.4) < \mu < 24.5 + 2(0.4)) = .955$

$p(23.7 < \mu < 25.3) = .955$

8.17 ถ้า $\sigma^2 = 196$, $n = 49$, $\bar{x} = 210$ จงสร้างค่าประมาณแบบช่วงที่จะครอบคลุมค่าเฉลี่ยที่แท้จริง 68.3% ของจำนวนครั้งทั้งหมด

$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{196/49} = \sqrt{4} = 2$

$P(-1 < z < 1) = .683$

นั่นคือ $P(-1 < \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < 1) = .683$

$= \quad P(\bar{X} - \sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + \sigma_{\bar{X}}) \quad = \quad .683$

$= \quad P(210 - 2 < \mu < 210 + 2) \quad = \quad .683$

$= \quad P(208 < \mu < 212) \quad = \quad .683$

8.18 เจ้าของภัตตาคารแห่งหนึ่งได้เก็บสถิติจำนวนลูกค้าแต่ละคืนรวม 25 คืน พบว่ามีลูกค้าโดยเฉลี่ย คืนละ 68 คน และทราบว่า $\sigma = 4.25$

ก) จงหาค่าประมาณแบบช่วงที่มีความน่าจะเป็น 68.3% ที่จะครอบคลุมค่าเฉลี่ยที่แท้จริง

ข) จงหาค่าประมาณแบบช่วงที่มีความน่าจะเป็น 95.5% ที่จะครอบคลุมค่าเฉลี่ยที่แท้จริง

$n = 25,\ \bar{X} = 68,\ \sigma_{\bar{X}} = 4.25/\sqrt{25} = 0.85$

ก) $P(-1 < Z < +1) \quad = \quad .683$

$P\left(-1 < \frac{x - p}{\sigma_{\bar{X}}} < +1\right) \quad = \quad .683$

$P(\bar{X} - \sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + \sigma_{\bar{X}}) \quad = \quad .683$

แทนค่า $\bar{X}, \sigma_{\bar{X}}$

$= \quad P(68 - 0.85 < \mu < 68 + 0.85) \quad = \quad .683$

$P(67.15 < \mu < 68.85) \quad = \quad .683$

ข) $p(-2.0 < Z < 2.0) \quad = \quad .955$

$P\left(-2.0 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < 2.0\right) \quad = \quad .955$

$P(\bar{X} - 2\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 2\sigma_{\bar{X}} \quad = \quad .955$

$P(68 - 2(\ 85) < \mu < 68 + 2(.85)) \quad = \quad .955$

$P(66.3 < \mu < 69.7) \quad = \quad .955$

8.19 ถ้าท่านต้องการระดับความเชื่อมั่น 80% จงหาขีดจำกัดบน และขีดจำกัดล่างในรูปค่าเฉลี่ย และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$$P(-1.282 < Z < 1.282) = .80$$

$$P\left(-1.282 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} < 1.282\right) = .80$$

นั่นคือ $P(\overline{X} - 1.282(\sigma_{\overline{X}}) < \mu < \overline{X} + 1.282(\sigma_{\overline{X}})) = .80$

8.20 เหตุใดค่าประมาณจะมีความหมายน้อยลงเมื่อ

ก) มีระดับความเชื่อมั่นสูง ข) มีช่วงเชื่อมั่นแคบ

ก) เมื่อใช้ระดับความเชื่อมั่นสูง จะทำให้ช่วงเชื่อมั่นกว้าง เพราะค่าที่เปิดจากตารางโค้งปกติจะมีค่าสูง เมื่อใช้ความเชื่อมั่นสูง จึงทำให้ $Z.\sigma_{\overline{X}}$ มีค่าสูง มีผลทำให้ช่วงเชื่อมั่นกว้าง จึงมีความหมายน้อยลง เพราะ μ มีค่าประมาณหลายค่าเกินไป

ข) เมื่อช่วงเชื่อมั่นแคบ แสดงว่า ค่าเปิดตาราง z มีค่าน้อย นั่นคือ ระดับความเชื่อมั่นต่ำ ก็ทำให้ค่าประมาณที่ได้มีความหมายน้อยลงเช่นกัน เพราะมีความมั่นใจว่า ค่าประมาณจะอยู่ในช่วงเชื่อมั่นน้อยลง

8.2.1 จงสร้างช่วงเชื่อมั่นโดยใช้ระดับความเชื่อมั่นต่าง ๆ ดังนี้

ก) 50% ข) 75% ค) 85% ง) 98%

ก) $P(-.675 < z < .675) = .50$

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 50% ของ μ

$$= \overline{X} \pm .675 \cdot \sigma_{\overline{X}}$$

ข) $P(-1.15 < z < 1.15) = .75$

นั่นคือ ช่วงเชื่อมั่น 75% ของ μ คือ

$$\overline{X} \pm 1.15 \cdot \sigma_{\overline{X}}$$

ค) $P(-1.44 < Z < 1.44) = .85$

นั่นคือ ช่วงเชื่อมั่น 85% ของ μ คือ

$\bar{X} \pm 1.44 \cdot \sigma_{\bar{X}}$

3) $P(-2.326 < z < 2.326) = .98$

นั่นคือ ช่วงเชื่อมั่น 98% ของ μ คือ

$\bar{X} \pm 2.326 \cdot \sigma_{\bar{X}}$

8.22 ฝ่ายการเงินต้องการสำรองเงินค่าใช้จ่ายในการเดินทางสำหรับพนักงานขาย เขาต้องการทราบระยะเดินทางเป็นไมล์ต่อวันจากพนักงานตัวอย่าง 64 คน ได้ระยะทางเฉลี่ยวันละ 120 ไมล์ และ $\sigma = 12$ จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 90% ของค่าเฉลี่ยที่แท้จริง

$n = 64, \bar{X} = 120, \sigma = 12, \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{64}} = 1.5, Z_{\alpha/2} = Z_{.10/2} = Z_{.05} = 1.645$

เนื่องจาก ทราบค่า $\sigma_{\bar{X}}$ จึงเปิดตาราง z

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ μ คือ

$\bar{X} \pm 1.645 . \sigma_{\bar{X}}$

$120 \pm 1.645\ (1.5)$

120 ± 2.4675

117.5325; 122.4675

หรือ $117.5325 < \mu < 122.4675$

8.23 นักประดิษฐ์ ไม้ตีกอล์ฟ ได้ทดลองไม้ชนิดใหม่ที่พึ่งประดิษฐ์เสร็จ พบว่า ในจำนวนไม้ 145 อันที่นำไปทดลอง สามารถตีลูกให้ไปไกลจากเดิม โดยเฉลี่ยถึง 25% และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 7.2% จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 90% ของค่าเฉลี่ยที่แท้จริง

$n = 145, \bar{X} = 25, \sigma = 7.2, \sigma_{\bar{X}} = \frac{7.2}{\sqrt{145}} = .5979, \alpha = .10, Z_{\alpha/2} = Z_{.05} = 1.645$

ดังนั้น 90% ช่วงเชื่อมั่นของ μ คือ

$\bar{X} \pm 1.645\ (\sigma_{\bar{X}}) = 25 \pm 1.645\ (.5979)$

$= 25 \pm .9835$

$= 24.02, \quad 25.98$

8.24 สุ่มตัวอย่าง 49 จำนวน จากประชากร 240 จำนวน ได้ $\bar{X} = 15.8, s = 4.2$ **จงสร้าง 98% ช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย**

$n = 49, N = 240, \bar{X} = 15.8, s = 4.2, \alpha = .02$

การสุ่มจากประชากรแบบจำกัด จะมี $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

แต่ไม่ทราบค่า σ จึงประมาณด้วย s

$$\text{ดังนั้น } \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{4.2}{\sqrt{49}}\sqrt{\frac{240-49}{240-1}}$$

$$= \frac{4.2}{7}\sqrt{\frac{191}{239}}$$

$$= 0.6\sqrt{.799}$$

$$= 0.6(.8944)$$

$$= .5366$$

$Z_{.01} = Z_{\alpha/2} = 2.326$ ใช้ค่า Z เพราะ แม้จะประมาณ σ ด้วย S แต่ $n > 30$

ดังนั้น 98% ช่วงเชื่อมั่นของ μ คือ

$15.8 \pm (2.326)(.5366)$

15.8 ± 1.25

$14.55; \ 17.05$

8.25 ในการทดลองแรงอัดต่อยาง 81 เส้น พบว่า สามารถรับน้ำหนักได้โดยเฉลี่ย 26 ปอนด์ต่อ 1 ตารางนิ้ว และ $s = 1.8$ ปอนด์ต่อ 1 ตารางนิ้ว จงสร้าง ช่วงเชื่อมั่น 90% ของค่าเฉลี่ยประชากร

$n = 81, \bar{X} = 26, \hat{\sigma} = s = 1.8, \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{1.8}{9} = .2$

α = .10 ใช้ค่าจากตาราง Z เพราะ $n > 30, Z_{.05} = 1.645$

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ μ คือ

$$26 \pm (1.645)(.2)$$

$$= 26 \pm .329$$

$$= 25.671 : 26.329$$

8.26 จงหาค่า t จากตาราง สำหรับสร้างช่วงเชื่อมั่นของ μ โดยกำหนดให้ค่า n และระดับความเชื่อมั่น ดังนี้

ก) n = 5, 99%

ค่าจากตาราง t สำหรับสร้างช่วงเชื่อมั่นของ μ

คือ ค่า $t\alpha/2, \upsilon, \upsilon = df = n-1$

ดังนั้น $t_{4,.005} = 4.604$

ข) n = 18, 99%

เปิดค่า $t_{17,.005} = \pm 2.898$

ค) n = 27, 95%

เปิดค่า $t_{26,.025} = \pm 2.056$

ง) n = 16, 95%

เปิดค่า $t_{15,.025} = \pm 2.131$

จ) n = 18, 95%

เปิดค่า $t_{17,.025} = \pm 2.110$

ฉ) n = 14, 90%

เปิดค่า $t_{13,.05} = \pm 1.771$

8.27 กำหนดขนาดตัวอย่าง และค่าจากตาราง t ให้ จงหาระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$

ก) n = 20, t = ± 1.729

$t_{19,.05} = \pm 1.729$; นั่นคือ $1 - a = .90$

ข) $n = 12,\ t = \pm 2.201$

$t_{11,.025} = \pm 2.201$; นั่นคือ $1 - a = .95$

ค) $n = 7,\ t = \pm 3.707$

$t_{6,.005} = \pm 3.707$; นั่นคือ $1 - a = .99$

8.28 พนักงานการเงินบริษัทหนึ่งต้องการประมาณเวลาที่ใช้สำหรับเรียกเก็บเงิน เขาสุ่มมา 24 บัญชี พบว่ามีระยะเวลาที่ใช้เรียกเก็บเงินโดยถัวเฉลี่ย 27.3 วัน และ S = 1.9 จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 98% ของระยะเวลาเรียกเก็บที่แท้จริง

$$n = 24, \bar{X} = 27.3, S = 1.9, \frac{\alpha}{2} = .01, S_{\bar{X}} = \frac{1.9}{\sqrt{24}} = .388$$

เพราะต้องประมาณ σ ด้วย S และ $n < 30$ จึงต้องใช้ค่าจากตาราง t, $t_{\alpha/2,(n-1)} = t_{.01,23} = \pm 2.5$

ดังนั้น 98% ช่วงเชื่อมั่นของ μ

$= 27.3 \pm (2.5)(.388)$

$26.33;\ 28.27$

8.29 **ให้** $n = 8$ **มีข้อมูลดังนี้**

12.1, 11.9, 12.4, 12.3, 11.9, 12.1, 12.4, 12.1

จงสร้าง 90% **ช่วงเชื่อมั่นของ** μ

$\Sigma X = (12.1 + 11.9 + \ldots + 12.1) = 97.2$

$\bar{X} = 97.2/8 = 12.15$

$$\Sigma X^2 = 1181.26,\quad S^2 = \frac{\Sigma X^2) \quad (\Sigma X)^2/n}{“ - 1}$$

$$= \frac{1181.26, - (97.2)^2/8}{7}$$

$$= .27/7 = 0.04$$

ดังนั้น $S_{\overline{X}} = \sqrt{.04/8} = \sqrt{.005} = .07$

$t_{7,.05} = \pm 1.895$

90% ช่วงเชื่อมั่นของ μ

$= \overline{X} \pm t_{7,.05} S_{\overline{X}}$

$= 12.15 \pm (1.895)(.07)$

$= 12.15 \pm .13$

$= 12.02;\ 12.28$

8.30 ในการสอบพนักงาน 400 คน พบว่า 64 คน มีลักษณะ "หลงตัวเอง" จงสร้าง 99% ช่วงเชื่อมั่นของสัดส่วนที่แท้จริง

ให้ π คือ เปอร์เซ็นต์ผู้หลงตนเองในประชากร

$\hat{\pi} = p = 64/400 = .16$

$\hat{\sigma}_p = \sqrt{pq/n} = \sqrt{.16(.84/400} = \sqrt{.000336} = .018$

$Z_{.005} = \pm 2.576$

ดังนั้น 99% ช่วงเชื่อมั่นของ π $= p \pm Z_{\alpha/2} . \hat{\sigma}_p$

$= .16 \pm (2.576)(.018)$

$= .16 \pm .046$

$= .114;\ .206$

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมั่น 99% ว่ามีผู้หลงตนเอง 11.4% – 20.6%

8.31 ผลการสำรวจบัญชีลูกค้าที่กู้เงินไปปลูกบ้าน 120 ราย จากทั้งหมด 1,200 ราย พบว่า มี 72% ที่อยู่ในภาวะ "ไว้วางใจได้"

ก) จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของสัดส่วน "ผู้ไว้วางใจได้" ของประชากร

ข) จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของจำนวนลูกค้า "ที่ไว้วางใจได้"

$n = 120,\ N = 1200,\ p = .72$

$\hat{\sigma}_p = \sqrt{pq/n} = \sqrt{(.72)(.28)/120} = \sqrt{.00168} = .041$

$Z_{.025} = \pm 1.96$

ก) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ π คือ

$p \pm Z_{.025} \hat{\sigma}_p$

$= .72 \pm (1.96)(.041)$

$= .72 \pm .08$

$= .64 ; .80$

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมัน **95%** ว่า สัดส่วนผู้ไว้วางใจได้อยู่ระหว่าง **64%** ถึง **80%**

ข) **64%** ของ **1200** ราย = .64 (1200) = **768**

80% ของ **1200** ราย = .80 (1200) = **960**

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมั่น 95% ว่า มีจำนวนลูกค้าที่ไว้วางใจระหว่าง 768 - 960 คน

8.32 ในการสำรวจร้านอาหาร 64 แห่ง จากทั้งหมด 1200 แห่ง ในเมืองหนึ่ง พบว่า 45% ของร้านอาหารตัวอย่าง ประสบภาวะขาดทุน เพราะสาเหตุการจัดการผิดพลาด จงหา 95% ของสัดส่วนที่แท้จริง

$n = 64,\ N = 1200,\ p = .45\ \hat{\sigma}_p = \sqrt{(.45)(.55)/64} = .062$

95% ช่วงเชื่อมั่นของ π $= p \pm Z_{.025} \hat{\sigma}_p$

$= .45 \pm (1.96)(.062) = .45 \pm .12$

$= .33; .57$

8.33 จากข้อ 8.32 จงหา 95% ของจำนวนร้านที่จัดการผิดพลาด

จากข้อ 8.32 เราทราบว่า 95% ช่วงเชื่อมั่นของ π คือ $.33 < \pi < .57$

ดังนั้น 95% ของจำนวนร้าน $= N\pi = 1200\,(\pi)$

$1200\,(.33) = 396$

$1200\,(.57) = 684$

นั่นคือ จะมีร้าน 396 - 684 ร้าน ที่ขาดทุนเพราะจัดการผิดพลาด ด้วยความเชื่อมั่น 95%

8.34 ถ้า $\sigma = 200$ จงหาขนาดตัวอย่าง เพื่อใช้ประมาณค่าเฉลี่ยประชากร โดยให้มีความคลาดเคลื่อนภายใน 100 คะแนน ด้วยความเชื่อมั่น 90%

สูตร $n = (Z_{\alpha/2}\,\sigma)^2/e^2$

ในเมื่อ $e = 100,\ \alpha = .10,\ Z_{.05} = 1.645,\ \sigma = 200$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
n &= [(1.645)(200)]^2/(100)^2 \\
&= 10.82 \\
&= 11 \text{ หน่วย}
\end{aligned}
$$

8.35 จงหาขนาดตัวอย่างสำหรับวางขายสินค้าในตลาดทดลอง เพื่อจะประมาณสัดส่วนความนิยมสินค้าในประชากร ให้มีความคลาดเคลื่อนภายใน ± .03 ด้วยความเชื่อมั่น 95%

สูตร ขนาดตัวอย่างสำหรับประมาณค่า π (เมื่อไม่ทราบค่า π) คือ

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4e^2} \; ; \; e = .03,\ Z_{.025} = 1.96 \\
&= \frac{(1.96)^2}{4(.03)^2} \\
&= 1067.11 \\
&= 1068 \text{ ร้าน (หน่วย)}
\end{aligned}
$$

8.36 ถ้า $\sigma = .8$ **จะต้องใช้**ขนาดตัวอย่างเท่าใด เพื่อประมาณค่าเฉลี่ย ให้อยู่ภายใน ± .25 **ด้วยความเชื่อมั่น 98%**

$\sigma = .8,\ e = .25,\ Z_{\alpha/2} = Z_{.01} = 2.326$

$$
\begin{aligned}
n = \frac{(Z_{\alpha/2}\,\sigma)^2}{e^2} &= \frac{[(2.326)(.8)]^2}{(.25)^2} \\
&= 55.4 \\
&= 56 \text{ หน่วย}
\end{aligned}
$$

8.37 ถ้าอัตราการไหวตัวของหุ้นที่สุ่มมา 49 หุ้น คือ 2.45 บาทต่อวัน และจากการศึกษาเดิม พบว่า σ = .70 บาท จงสร้างช่วงเชื่อมั่นโดยให้ครอบคลุมค่าเฉลี่ยที่แท้จริง 99.7% ของจำนวนครั้งทั้งหมด

$n = 49, \sigma = .70, \overline{X} = 2.45, P(-3 < z < 3) = .997$

$\sigma_{\overline{X}} = .70/\sqrt{49} = .70/7 = .10$

$$P(-3 < z < 3) = P\left(-3 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} < 3\right) = .997$$

$$P(\overline{X} - 3\sigma_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + 3\sigma_{\overline{X}}) = .997$$

$$P(2.45 - 3(.10) < \mu < \overline{X} + 3(.10)) = .997$$

$$= PC2.45 - .3 < \mu < 2.45 + .3) = .997$$

$$P(2.15 < \mu < 2.75) = ,997$$

8.38 ผู้จัดการธนาคารแห่งหนึ่ง พบว่า ผู้ฝากออมทรัพย์ควรมีเงินอยู่ในบัญชีโดยเฉลี่ยไม่ต่ำกว่า 1,000 บาท ธนาคารจึงจะไม่ขาดทุน เขาจึงต้องการทราบสัดส่วนที่แท้จริงของบัญชีเงินฝาก 1,000 บาทขึ้นไป เขาต้องสุ่มมากี่บัญชีจึงจะให้ค่าที่แท้จริงอยู่ภายใน ± .04 ด้วยความเชื่อมั่น 95%

$e = .04 , Z_{.025} = 1.96$

สูตร เมื่อใช้ประมาณค่า π แต่ไม่ทราบค่า π

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4e^2} = \frac{(1.96)^2}{4(.04)^2} = 600.25$$

$$= 601 \text{ บัญชี}$$

8.39 ถ้า 95% ของ μ คือ 84 ถึง 116

75% ของ μ คือ 90.96 ถึง 109.04

จงวิจารณ์ข้อดี-เสีย ของช่วงเชื่อมั่น 2 อันนี้

ช่วงเชื่อมั่นอันแรกมีระดับความเชื่อมั่นสูง จะกว้างกว่าช่วงเชื่อมั่นอันที่ 2 ซึ่งมีระดับความ

เชื่อมั่นต่ำ ดังนั้น ข้อดีของช่วงเชื่อมั่นอันแรก คือ มีความมั่นใจสูงกว่า μ จะอยู่ในช่วงดังกล่าวแต่มีข้อเสียที่กว้างไป สำหรับข้อดีของช่วงเชื่อมั่นอันหลังคือ แคบดี แต่มีข้อเสียที่ความมั่นใจว่า μ จะอยู่ในช่วงดังกล่าวต่ำ

8.40 จากการสุ่มคนงานมา 81 คน จาก 2,200 คน ในโรงงานทอผ้า พบว่า มีวันหยุดโดยเฉลี่ยเดือนละ 3.2 วัน และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.9 วัน จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของจำนวนวันหยุด โดยเฉลี่ยต่อพนักงาน 1 คน ใน 1 เดือน

$n = 81$, $N = 2{,}200$ $\bar{X} = 3.2$, $\sigma = 0.9$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{n-1}\right)} = \frac{.9}{\sqrt{81}}\sqrt{\frac{(2200-81)}{(2200-1)}}$$

$$= \frac{.9}{9}\sqrt{\frac{2119}{2199}}$$

$$= .10\ (.98) = .10$$

ช่วงเชื่อมั่น 95% ของ μ $= \bar{X} \pm Z_{.025} \cdot \sigma_{\bar{X}}$

$= 3.2 \pm (1.96)\ (.10)$

$= 3.2 \pm 0.196$

$= 3.004\ ;\ 3.396$

8.41 **กำหนดให้** $\bar{X} = 96$, $\sigma = 4.8$, $n = 36$ **จงหาระดับความเชื่อมั่นของช่วงเชื่อมั่นต่อไปนี้**

ก) (94.4 - 97.6), ข) (94 - 98) ค) (95.328 - 96.672)

$\bar{X} = 96$, $\sigma_{\bar{X}} = 4.8/6 = .80$

จากสูตร $n = (Z_{\alpha/2}\sigma)^2/e^2$

$$\sqrt{n} = Z_{\alpha/2}\sigma/e$$

$$\boxed{Z_{\alpha/2} = \frac{e.\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{e}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{e}{\sigma_{\bar{X}}}.}$$

ก) $e = (94.4 - 96) = -1.6$ และ $(97.6 - 96) = 1.6$

$e = \pm 1.6$, $\sigma_{\bar{X}} = .8$

ดังนั้น $Z_{\alpha/2} = \frac{e}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{1.6}{.8} = 2.0$

$P(-2.0 < z < 2.0) = .955$

นั่นคือ ระดับความเชื่อมั่น = 95.5%

ข) $e = (94 - 96) = -2.0$, และ $(98 - 96) = 2.0$

$e = \pm 2.0$, $\sigma_{\bar{X}} = 0.8$

ดังนั้น $Z_{\alpha/2} = 2.0/0.8 = 2.5$

$P(Z < -2.5) = .0062 = P(Z > 2.5)$

ดังนั้น $a = .0062 + .0062 = .0124$

และ $(1 - \alpha)$ = ระดับความเชื่อมั่น $= 1 - 0.0124 = .9876$

$= 98.76\%$

fl) $e = (95.328 \quad 96) = -.672$ และ $e = 96.672 - 96.00 = .672$

$e_{\alpha/2} = l/\sigma_{\bar{X}} = .672/.8 = 0.84$

$P(Z < -0.84) = 2.005 = P(Z > .84)$

$a/2 = .2005$, $a = .2005 + .2005 = .4010$

ดังนั้น ระดับความเชื่อมั่น $1 - \alpha = 1 - .401 = .599 = 59.9\%$

8.42 จงหาระดับความเชื่อมั่นของช่วงเชื่อมั่นต่อไปนี้

ก) $\bar{X} \pm 1.5\sigma_{\bar{X}}$;

ข) $\bar{X} \pm 1.7\sigma_{\bar{X}}$;

ค) $\bar{X} \pm 2.3\sigma_{\bar{X}}$

ก) $\bar{X} \pm 1.5\sigma_{\bar{X}}$; $Z_{\alpha/2} = \pm 1.5$

$P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5) = \alpha/2 = .0668$

ดังนั้น $\alpha = 2(.0668) = .1336$

$1 - \alpha = .8664 = 86.64\%$ = ระดับความเชื่อมั่น

ข) $\bar{X} \pm 1.7\sigma_{\bar{X}}$; $Z_{\alpha/2} = \pm 1.7$

$P(Z < -1.7) = P(Z > 1.7) = .0446 = \alpha/2$

ดังนั้น $\alpha = 2(.0446) = .0892$

และ $1 - \alpha = .9108$; ระดับความเชื่อมั่น $= 91.08\%$

ค) $\overline{X} \pm 2.3\sigma_{\bar{x}}$; $Z_{\alpha/2} = \pm 2.3$

$P(z < -2.3) = P(z > 2.3) = \alpha/2 = .0107$

ดังนั้น $\alpha = .0214$ และ $1 - \alpha = .9786$

นั่นคือ ระดับความเชื่อมั่น $= 97.86\%$

8.43 ให้ X คือยอดขายผลิตภัณฑ์นมบริษัทหนึ่ง ซึ่งทราบว่า $\sigma = 12.4$ ถ้าฝ่ายขายต้องการสุ่มตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบความนิยม โดยต้องการให้มีความมั่นใจ 98% ว่า ค่าประมาณจะต่างจากค่าเฉลี่ยประชากรไม่เกิน $\pm$ 3 คะแนน จะต้องใช้ขนาดตัวอย่างเท่าใด?

$Z_{\alpha/2} = Z_{.01} = \pm 2.326$, $\sigma = 12.4$, $e = 3$

$n = (z_{\alpha}\ \sigma)^2/e^2 = [(2.326)\ (12.4)]^2/(3)^2$

$= 92.43 \simeq 93$ หน่วย

นั่นคือ จะต้องสุ่มมา 93 หน่วย จึงจะได้ค่าประมาณไม่ต่างจากค่าจริงเกิน 3 คะแนน

8.44 โรงงานผลิตแก้วประสบปัญหาผลผลิตมีเปอร์เซ็นต์ชำรุดสูงฝ่ายเทคนิคได้เสนอวิธีปรับปรุงโดยมั่นใจว่าจะปรับปรุงได้ 75% โรงงานควรทำการทดลองผลิตกี่หน่วย จึงจะมั่นใจได้ 98% ว่า สัดส่วนชำรุดจากตัวอย่างจะไม่ต่างจากสัดส่วนชำรุดของประชากรเกิน $\pm$ 0.4?

$Z_{.01} = \pm 2.326$, $e = \pm 0.4$, $\pi = .75$

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\ \pi(1 - \pi)}{e^2} = \frac{(2.326)^2\ (.75)\ (.25)}{(.4)^2}$$

$$= 6.34$$

$$\simeq 7 \text{ หน่วย}$$

จะต้องทดลองผลิตตามวิธีการปรับปรุง 7 หน่วย จึงจะมั่นใจได้ว่า p จะไม่ต่างจาก π เกิน 0.4 หน่วย

8.45 กรมขนส่งได้สุ่มตัวอย่างรถบัสโดยสารมา 64 คัน พบว่ามีจำนวนผู้โดยสารโดยเฉลี่ย 3.5 คนต่อ 1 กิโลเมตร และจากการศึกษาก่อนหน้านี้ พบว่า $\sigma = 1.6$ คน ต่อ 1 กิโลเมตร จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของจำนวนผู้โดยสารโดยเฉลี่ยต่อ 1 กิโลเมตร

$n = 64, z_{\alpha/2} = z_{.025} = \pm 1.96, \sigma = 1.6, \overline{X} = 3.5$

$\sigma_{\bar{x}} = 1.6/8 = .20$

ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ

$$\begin{aligned} &= \overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}} \\ &= 3.5 \pm (1.96)(.20) \\ &= 3.5 \pm .392 \\ &= 3.108;\ 3.892 \end{aligned}$$

8.46 พนักงานตรวจสอบมาตรฐานสินค้าได้สุ่มสินค้าตัวอย่างมา 100 กระสอบ พบว่า มี 35 กระสอบ ที่มีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐาน

ก) จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ของ π

ข) ในการสุ่มครั้งต่อไป เขาควรใช้ขนาดตัวอย่างเท่าใด ถ้าต้องการให้ค่าประมาณ p ไม่ต่างจาก π เกิน 0.05 ด้วยความมั่นใจ 95%

$n = 100, p = 35/100 = .35, \hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.35)(.65)}{100}} = .0478$

ก) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ π

$$\begin{aligned} &= p \pm z_{.025}\hat{\sigma}_p \\ &= .35 \pm (1.96)(.0478) \\ &= .35 \pm .094 \\ &= .258,\ .444 \end{aligned}$$

ข) $e = .05, z_{.025} = 1.96, \hat{\pi} = .35$

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{e^2} = \frac{(1.96)^2(.35)(.65)}{(.05)^2}$$

$= 349.58$

$= 350$ หน่วย

ในการสุ่มครั้งต่อไป ควรสุ่มมา 350 หน่วย จึงจะได้ค่า p ไม่ต่างจาก π เกิน .05 หรือ 5% ด้วยความมั่นใจ 95%

8.47 ผู้จัดการโรงงานผลิตเสื้อสำเร็จรูป ได้สุ่มบัญชีลูกค้าค้างชำระเงินมา 300 บัญชี พบว่ามีอยู่ 120 บัญชี ที่ค้างชำระ 30 วันขึ้นไป จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 98% ของสัดส่วนบัญชีค้างชำระเกิน 30 วัน

ให้ π คือสัดส่วนบัญชีค้างชำระเกิน 30 วัน

$$p = 120/300 = .40, Z_{.01} = \pm 2.326$$

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(.4)(.6)}{300}} = \sqrt{.0008} = .0283$$

ดังนั้น 98% ช่วงเชื่อมั่นของ π คือ

$$\begin{aligned} p \pm Z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_p &= .40 \pm 2.326\,(.0283) \\ &= .40 \pm .0658 \\ &= .3342,\ .4658 \end{aligned}$$

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมั่น 98% ว่า สัดส่วนบัญชีค้างชำระ 30 วันขึ้นไป มี 33.42% ถึง 46.58% ของบัญชีทั้งหมด

8.48 บริษัทส่งออกสินค้าได้รับข้อเสนอจากเจ้าของเรือบรรทุกสินค้าว่า จะคิดราคาขนส่งอัตราเดียวกันทุก ๆ หีบห่อ โดยมีเงื่อนไขว่า ต้องบรรจุให้หีบห่อต่าง ๆ มีน้ำหนักใกล้เคียงกัน เจ้าของเรือได้สุ่มสินค้ามา 144 หีบ เพื่อหาน้ำหนักที่จะใช้เป็นมาตรฐาน เขาได้น้ำหนักเฉลี่ย 128.4 ออนซ์ และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.6 ออนซ์ จงหาช่วงโดยรอบค่าเฉลี่ยตัวอย่างซึ่งจะครอบคลุมค่าเฉลี่ยของประชากร 95.5% ของจำนวนครั้งทั้งหมด

$n = 144,\ \bar{X} = 128.4,\ S = 0.6,\ S_{\bar{X}} = \frac{0.6}{\sqrt{144}} = .05$

$1 \quad a = .955,\ \alpha = .045,\ \alpha/2 = .0225$

$P(Z < -2.0) = P(Z > 2.0) = .0225$

นั่นคือ $Z_{.0225} = \pm 2.0$

ดังนั้น 95.5% ช่วงเชื่อมั่นของ μ คือ

$$\bar{X} \pm z_{.0225}.\hat{\sigma}_{\bar{X}} = 128.4 \pm (2.0)\,(.05)$$
$$= 128.4 \pm 0.1$$
$$= 128.3,\ 128.5$$

8.49 **เจ้าของภัตตาคารต้องการเปลี่ยนเฟอร์นิเจอร์ใหม่ เขาต้องการประมาณรายรับก่อนว่าจะคุ้มกับการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ เขาอยากทราบรายรับโดยเฉลี่ยต่อลูกค้า 1 คน จากใบเสร็จรับเงินที่สุ่มมาของลูกค้า 8 ราย ได้ค่าเฉลี่ย 105 บาท และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 25 บาท จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของรายรับถัวเฉลี่ยต่อลูกค้า 1 ราย**

ให้ μ คือ รายรับถัวเฉลี่ยต่อลูกค้า 1 ราย

$n = 8, \bar{X} = 105, S = 25, S_{\bar{X}} = \frac{25}{\sqrt{8}} = 8.84$

$\hat{\sigma} = S$, แต่ $n < 30$ ต้องใช้ค่าจากตาราง $t_{\alpha/2,(n-1)}$

$t_{.025,7} = \pm 2.365$

ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ คือ

$$105 \pm (2.365)\,(8.84)$$
$$= 105 \pm 20.9$$
$$= 84.1\ ,\ 125.9$$

8.50 **เครื่องจำหน่ายน้ำอัดลมแบบอัตโนมัติ 2 เครื่อง ได้รับการติดตั้งให้จำหน่ายน้ำในปริมาณเท่ากัน แต่ลูกค้าหลายรายสังเกตว่า ให้ปริมาณต่างกัน ฝ่ายจัดจำหน่ายจึงทำการสุ่มจากทั้ง 2 เครื่อง ได้ข้อมูลดังนี้**

	เครื่องที่ 1	**เครื่องที่ 2**
ขนาดตัวอย่าง	$n_1 = 40$	$n_2 = 60$
ค่าเฉลี่ย	$\bar{X}_1 = 22$	$\bar{X}_2 = 24$
ความแปรปรวน	$\sigma_1^2 = 50$	$\sigma_2^2 = 45$

ก) **จงหาค่าประมาณแบบจุดของความแตกต่างที่แท้จริง และความคลาดเคลื่อนสูงสุดจากการประมาณค่า**

ข) **จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างของปริมาณเฉลี่ยจาก 2 เครื่อง**

ก) ให้ μ_1 และ μ_2 คือปริมาณน้ำอัดลมโดยเฉลี่ยต่อ 1 แก้ว ของเครื่องที่ I และ II ตามลำดับ

$\hat{\mu}_1 = \overline{X}_1 = 22, \hat{\mu}_2 = \overline{X}_2 = 24$

ดังนั้น ค่าประมาณแบบจุดของผลต่างที่แท้จริง คือ

$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 22 - 24 = -2$ หน่วย

นั่นคือ เครื่องที่ 1 ให้ปริมาณโดยเฉลี่ยต่ำกว่าเครื่องที่ 2 จำนวน 2 หน่วย ต่อ 1 แก้ว

$$\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{50}{40} + \frac{45}{60}} = \sqrt{2} = 1.414$$

ความคลาดเคลื่อนสูงสุดจากการประมาณค่า คือ $3\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = 3(1.414) = 4.24$

ข) 95% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างของปริมาณเฉลี่ยจาก 2 เครื่อง คือ

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$

$$= (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm Z_{.025}\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$$

$$= (-2) \pm (1.96)(1.414)$$

$$= -2 \pm 2.77$$

$$= -4.77, 0.77$$

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมั่น 95% ได้ว่า เครื่องที่ 1 ให้ปริมาณต่อแก้วโดยเฉลี่ยต่ำกว่าเครื่องที่ 2 4.77 หน่วย หรือสูงกว่า 0.77 หน่วย

ข้อสังเกตุ

ถ้าเราจะสร้างช่วงเชื่อมั่นของผลต่าง แต่ผลต่างคือ $(\mu_2 - \mu_1)$

ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_2 - \mu_1) = (\overline{X}_2 - \overline{X}_1) \pm Z_{.025}\sigma_{(\overline{X}_2 - \overline{X}_1)}$

$= \quad (24 - 22) \pm 1.96\,(1.414) = 2 \pm 2.77 = -0.77$ และ 4.77

จะได้ผลเหมือนตอนต้น เพียงแต่ เครื่องหมายของผลต่างไม่เหมือนกันเท่านั้น

8.51 ให้ X_1 และ X_2 เป็นผลผลิตรายชั่วโมงของคนงานชาย, หญิง ตามลำดับ และสมมุติให้มีความแปรปรวนเท่ากัน คือ $\sigma^2 = \sigma_2^2 = 64$ จากการสุ่มผลผลิตของคนงานชาย และหญิง มาเพศละ 36 ชั่วโมงทำงาน พบว่า $\bar{X}_1 = 85$ หน่วย, $\bar{X}_2 = 78$ หน่วย

ก) จงหาค่าประมาณแบบจุดของความแตกต่างที่แท้จริง และความคลาดเคลื่อนที่เป็นไปได้ในการประมาณค่า

ข) จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$

ก) ให้ μ_1 และ μ_2 คือผลผลิตเฉลี่ยต่อชั่วโมงของคนงานชายทั้งหมด และคนงานหญิงทั้งหมดตามลำดับ

$$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = (85 - 78) = 7 \text{ หน่วย}$$

นั่นคือ ประมาณค่าได้โดยเฉลี่ยว่า คนงานชายมีผลผลิตต่อชั่วโมงสูงกว่าคนงานหญิง 7 หน่วย

$$\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{64}{36} + \frac{64}{36}} = \sqrt{3.55} = 1.88$$

ความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการประมาณค่า $(\mu_1 - \mu_2)$ ด้วย $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

$$= 3\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = 3(1.88) = 5.64$$

ข) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$

$$= (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{.025}\,\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

$$= 7 \pm (1.96)\,(1.88)$$

$$= 7 \pm 3.68$$

$$= 3.32,\ 10.68$$

8.52 ให้ X_1, X_2 แทนน้ำหนักของคนงานชายและหญิงตามลำดับ และสมมุติให้ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 200$,- $n_1 = n_2 = 100$ และ $\bar{X}_1 = 70$ กิโลกรัม, $\bar{X}_2 = 50$ กิโลกรัม จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$

$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = 70 - 50 = 20$

$$\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{200}{100} + \frac{200}{100}} = \sqrt{\frac{400}{100}} = 2$$

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2) = (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm 1.96\,\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$

$= 20 \pm (1.96)(2)$

$= 20 \pm 3.92$

$= 16.08,\ 23.92$

8.53 **เชื่อว่าพนักงานที่ใช้พิมพ์ดีดไฟฟ้า จะพิมพ์งานได้รวดเร็วกว่าพิมพ์ดีดธรรมดา ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง มีดังนี้**

	เครื่องไฟฟ้า	แบบธรรมดา
ขนาดตัวอย่าง	$n_1 = 25$	$n_2 = 25$
ค่าเฉลี่ย (จำนวนคำต่อ 1 นาที)	$\overline{X}_1 = 58$	$\overline{X}_2 = 55$
ความแปรปรวน	$\sigma_1^2 = 78$	$\sigma_2^2 = 66$

สมมุติว่า อัตราการพิมพ์มีการแจกแจงแบบปกติจงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างที่แท้จริงระหว่างอัตราพิมพ์ด้วยเครื่องไฟฟ้าและเครื่องปกติ

$$\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{78}{25} + \frac{66}{25}} = \sqrt{5.76} = 2.4$$

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2) = (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm Z_{.025}\,\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$

$= (58\ 5\ 5\ ) \pm (1.96)(2.4)$

$= 3 \pm 4.704$

$= -1.704,\ 7.704$ คำต่อนาที

ข้อสังเกตุ

(1) ขนาดตัวอย่างทั้ง 2 กลุ่ม ต่ำกว่า 30 ก็จริง แต่ทราบค่า σ_1, σ_2 จึงใช้ค่า Z

(2) จากข้อมูล จะสรุปด้วยความเชื่อมั่น 95% ว่า พิมพ์ดีดไฟฟ้าให้อัตราพิมพ์สูงกว่าแบบปกติหรือไม่ โดยการตรวจดูช่วงเชื่อมั่น

$-1.704 \quad 0 \quad 7.704$

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_1 - \mu_2$

จะเห็นว่าช่วงเชื่อมั่นรวมผลต่าง $\mu_1 - \mu_2 = 0$ แสดงว่า ไม่มีความแตกต่างกัน

8.54 ซื้อเครื่องจักรชนิดเดียวกันมา 2 เครื่อง เมื่อสำรวจความขัดข้องของเครื่องทั้ง 2 ได้ข้อมูลดังนี้

	เครื่องที่ 1	**เครื่องที่ 2**
ขนาดตัวอย่าง	$n_1 = 16$	$n_2 = 16$
ค่าเฉลี่ย (นาที)	$\overline{X}_1 = 55$	$\overline{X}_2 = 85$
ความแปรปรวน	$\sigma_1^2 = 1600$	$\sigma_2^2 = 2000$

สมมุติว่าระยะเวลาของความขัดข้องมีการแจกแจงแบบปกติ จงสร้าง 98% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างที่แท้จริงของเครื่องทั้ง 2

$$\sigma_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1600}{16} + \frac{200}{16}} = \sqrt{255} = 15$$

ดังนั้น 98% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_2 - \mu_1)$ คือ

$$(\overline{X}_2 - \overline{X}_1) \pm Z_{.01} \cdot \sigma_{(\overline{X}_2 - \overline{X}_1)} = (85 - 55) \pm 2.326\ (15)$$

$$= 30 \pm 34.89$$

$$= -4.89,\ 64.89$$

$-4.89 \quad 0 \quad 64.89$

จะเห็นว่า ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$ รวมค่า 0 นั่นคือ $\mu_1 = \mu_2$ นั่นคือ ไม่มีความแตกต่างระหว่างระยะเวลาความขัดข้องโดยเฉลี่ยระหว่างเครื่องทั้ง 2

8.55 **สุ่มตัวอย่างครัวเรือนมา 300 ครัวเรือน เพื่อประมาณปริมาณไฟฟ้าที่ใช้ต่อครัวเรือนในเดือนเมษายน และได้สุ่มมาอีก 400 ครัวเรือน ในปีถัดมาเพื่อดูปริมาณการใช้ไฟฟ้าในเดือนเมษายน ได้ข้อมูลดังนี้**

ปีก่อน	ปีนี้
$n_1 = 300$	$n_2 = 400$
$\overline{X}_1 = 1{,}252$ kwh	$\overline{X}_2 = 1325$ kwh
$S_1 = 257$ kwh	$S_2 = 263$ kwh

ก) **จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของอัตราการเปลี่ยนแปลงการใช้ไฟฟ้าต่อครอบครัวระหว่าง 2 ปี**

ข) **ถ้าในปีนี้ ได้สำรวจการใช้ไฟจากครัวเรือนเดิม 300 ครัวเรือนนั้น จะใช้วิธีประมาณค่าแบบเดิมในข้อ (ก) ได้หรือไม่?**

$$\hat{\sigma}_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(257)^2}{300} + \frac{(263)^2}{400}} = 19.83$$

ก) 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_2 - \mu_1)$ $= (\overline{X}_2 - \overline{X}_1) \pm Z_{.025} \cdot \sigma_{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}$

$= (1325 \quad 1252) \pm (1.96) \; (19.83)$

$= 73 \pm 38.87$

$= 34.13, \; 111.87$

ช่วงเชื่อมั่นเป็นค่าบวก แสดงว่า ปริมาณการใช้ไฟในปีนี้สูงกว่าปีก่อน อย่างต่ำที่สุด 34.13 หน่วย อย่างสูงที่สุด 111.87 หน่วย ด้วยความเชื่อมั่น 95%

ข) ถ้าใช้ตัวอย่างเดิม คือ ครัวเรือนเดิม 300 ครัวเรือนของปีก่อน สำหรับข้อมูลใหม่ในปีนี้ จะวิเคราะห์แบบข้อ (ก) ไม่ได้ เพราะตัวอย่าง 2 กลุ่มนี้ ไม่เป็นอิสระกัน มีความเกี่ยวข้องกันเป็นคู่ ๆ คือ ปริมาณการใช้ไฟของครัวเรือนเดียวกันใน 2 ปี รวม 300 คู่ จึงต้องหาผลต่างของแต่ละคู่ และหาผลต่างเฉลี่ยของ 300 คู่ คือ $\bar{d}$

$\bar{d}$ จะเป็นค่าประมาณของ $\mu_1 - \mu_2$ และต้องหา $S_{\bar{d}}$ เพื่อสร้างช่วงเชื่อมั่น 95% ช่วงเชื่อมั่น

ของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ

$\bar{d} \pm Z_{\alpha/2} S_{\bar{d}}$

8.56 ถ้า 41% ของคู่สมรสที่หย่ากัน จะไม่มีบุตรด้วยกัน และถ้าในเมืองหนึ่ง พบว่า มีคู่สมรสที่หย่ากันโดยไม่มีบุตรอยู่ 437 คู่ จากที่สุ่มมา 1,000 คู่ จงสร้าง 98% ช่วงเชื่อมั่นของเปอร์เซนต์คู่สมรสที่หย่ากันโดยไม่มีบุตร

ให้ π คือสัดส่วนคู่สมรสที่หย่ากันโดยไม่มีบุตรในเมืองนั้น

$$\hat{\pi} = p = \frac{437}{1000} = .437$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{(.41)(.59)}{1000}} = \sqrt{.00024} = .0155$$

ดังนั้น 98% ช่วงเชื่อมั่นของ π คือ

$$\begin{aligned} p \pm Z_{.01}\,\sigma_p &= .437 \pm (2.326)(.0155) \\ &= .437 \pm .036 \\ &= .401,\ .473 \end{aligned}$$

นั่นคือ กล่าวด้วยความเชื่อมั่น 98% ว่า ในเมืองนั้นมีคู่สมรสที่หย่ากันโดยไม่มีบุตรประมาณ 40.1% ถึง 47.3%

8.57 จากข้อ 8.56 ได้ทำการสุ่มตัวอย่างคู่สมรสที่หย่ากันในอีกเมืองหนึ่งมา 800 คู่ พบว่า มี 346 คู่ ที่หย่ากันโดยไม่มีบุตร

ก) จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\pi_1 - \pi_2$

ข) จากช่วงเชื่อมั่นในข้อ (ก) แสดงว่า อัตราการหย่าร้างโดยไม่มีบุตรของเมืองทั้ง 2 มีอัตราใกล้เคียงกันหรือไม่?

$n_1 = 1000,\ n_2 = 800$

$p_1 = .437,\ p_2 = 346/800 = .4325$

$$\sigma_{(p_1 - p_2)} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{(.41)(.59)}{1000} + \frac{(.41)(.59)}{800}}$$

$= \sqrt{.00024 + .00030} \qquad = \sqrt{.00054} = .0233$

ก) ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\pi_1 - \pi_2) = (p_1 - p_2) \pm Z_{\alpha/2}\, \sigma_{(p_1 - p_2)}$

$= (.437 - .4325) \pm 1.96\ (.0233)$

$= .0045 \pm .0457$

$-.0412 \qquad 0 \qquad .0502 \qquad = -.0412,\ .0502$

ช่วงเชื่อมั่นรวมค่า 0 ด้วย แสดงว่า $\pi_1 = \pi_2$ หรือผลต่างไม่มีนัยสำคัญ

8.58 จำนวนนักศึกษาที่จบจากคณะบริหารธุรกิจ ซึ่งเข้าทำงานในหน่วยงานหนึ่งได้ 2 ปี และยังปฏิบัติงานอยู่ โดยจำแนกตามระดับปริญญา มีดังนี้

ปริญญา	จำนวนจ้าง	จำนวนคงเหลือในปัจจุบัน
ปริญญาตรี	205	123
ปริญญาโท	50	18

ก) จงสร้าง 99% ช่วงเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนผู้จบ 2 ระดับปริญญา ซึ่งยังคงปฏิบัติงานอยู่ภายหลังเข้า 2 ปี

ข) ข้อมูลนี้ได้มาจากประชากรแบบใด

ให้ π_1 คือสัดส่วนผู้จบปริญญาตรี ซึ่งยังคงทำงานอยู่

π_2 คือสัดส่วนผู้จบปริญญาโท ซึ่งยังคงทำงานอยู่

$(\pi_1 - \pi_2) = (p_1 - p_2) = \left(\frac{123}{205} - \frac{18}{50}\right) = (0.6 - .36) = .24$

$\hat{\sigma}_{(p_1 - p_2)} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(.6)(.4)}{205} + \frac{(.36)(.64)}{50}} = .0760$

ก) 99% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\pi_1 - \pi_2) = (p_1 - p_2) \pm Z_{.005}\ (\sigma_{(p_1 - p_2)})$

$= .24 \pm (2.576)\ .0760$

$= .24 \pm .196$

$= .044,\ .436$

นั่นคือ สัดส่วนผู้จบปริญญาตรี และยังคงทำงานอยู่สูงกว่าระดับปริญญาโท 4.4% ถึง 43.6% ด้วยความเชื่อมั่น 99%

ข) ข้อมูลนี้มาจากประชากรแบบทวินาม 2 ประชากร ซึ่งมีพารามิเตอร์ π_1 และ π_2 ตามลำดับ

8.59 ในการเปรียบเทียบรถยนต์ 2 ชนิด ว่ามีระบบควบคุมของเสียต่างกันหรือไม่ ได้ข้อมูลดังนี้

	รถยนต์ I	รถยนต์ II
จำนวนวัน	$n_1 = 16$	$n_2 = 16$
ดัชนีของเสีย	$\bar{X}_1 = 60$	$\bar{X}_1 = 55$
	$S_1 = 9$	$S_2 = 9$

จงสร้าง 95% ของความแตกต่างของดัชนีของเสีย

ให้ μ_1 และ μ_2 คือค่าเฉลี่ยดัชนีของเสียที่แท้จริงของรถคันที่ I และ II ตามลำดับ

เนื่องจากไม่ทราบ σ_1, σ_2 และ $n_1, n_2 < 30$ จึงต้องมีข้อสมมุติว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ และ

$$\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$ สำหรับกรณีนี้ $n_1 = n_2 = 16$

ดังนั้น $S_p^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2} = \frac{81 + 81}{2} = 81$

และ $S_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right.}$

$$= \sqrt{81 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)} = 3.18$$

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ

$= (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{.025,30} \quad (S_{(\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2)})$

$= (60 - 55) \pm 1.96\ (3.18)$

$= 5 \pm 6.23$

$= -1.23,\ 11.23$

8.60 ต้องการทราบความแตกต่างของการเรียนระหว่างนักเรียนชายและหญิง โดยสมมุติว่าคะแนนสอบมีการแจกแจงแบบปกติ ได้ข้อมูลตารางข้างล่าง จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างของคะแนนสอบ

คะแนน น.ร.ชาย	2.9	3.1	2.7	3.3	3.0	15.0
คะแนน น.ร.หญิง	3.6	2.8	3.6	3.2	2.8	16.0

$n_1 = 5,\ \Sigma X_1 = 15,\ \bar{X}_1 = 3.0,\ \Sigma X_1^2 = 45.20,\ \Sigma(X - \bar{X}_1)^2 = .20$

$n_2 = 5,\ \Sigma X_2 = 16,\ \bar{X}_2 = 3.2,\ \Sigma X_2^2 = 51.84,\ \Sigma(X - \bar{X}_2)^2 = .64$

เพราะว่า ไม่ทราบ σ_1^2, σ_2^2 จะต้อง assume ได้ว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

และ $\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \dfrac{\Sigma(X - \bar{X}_1)^2 + \Sigma(X - \bar{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} = \dfrac{.20 + .64}{8} = .105$

และ $S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}$

$= \sqrt{.105\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\right)} = .205$

ให้ μ_1, μ_2 คือคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชายและหญิงตามลำดับ 95% ของความแตกต่างของ $(\mu_2 - \mu_1)$ คือ

$(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) \pm t_{.025,8}\ S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$

$= (3.2 - 3.0) \pm (2.306)(.205)$

$= 0.20 \pm .47$

$= -0.27,\ 0.67$

ช่วงเชื่อมั่นรวมค่า 0 ด้วย แสดงว่า μ_1 และ μ_2 ไม่ต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญ

8.61 ในการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบการเรียนคำศัพท์และการพูดของเด็ก ซึ่งได้รับวิธีการอบรมต่างกัน 2 กลุ่ม โดยสมมุติว่า คะแนนมีการแจกแจงแบบปกติ และมีความแปรปรวนเท่ากัน ได้ข้อมูลดังนี้

	กลุ่ม I	กลุ่ม II
ขนาดตัวอย่าง	$n_1 = 10$	$n_2 = 8$
ค่าเฉลี่ย	$\bar{X}_1 = 95$	$\bar{X}_2 = 97$
ความแปรปรวน	$S_1^2 = 40$	$S_2^2 = 36$

ก) จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างของการเรียนรู้ระหว่าง 2 กลุ่ม

ข) จากช่วงเชื่อมั่นในข้อ (ก) มีหลักฐานแสดงว่าการเรียนรู้ของเด็ก 2 กลุ่ม มีความแตกต่างกันอย่างเห็นชัดหรือไม่?

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2,\ \hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{9(40) + (7)\ (36)}{16}$$

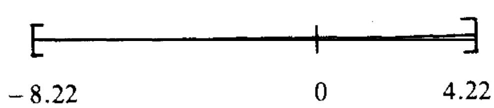
$$= 38.25$$

ดังนั้น $S_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$

$$= \sqrt{38.25 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8}\right)} = \sqrt{8.606} = 2.933$$

$t_{\alpha/2}, n_1 + n_2 - 2 = t_{.025,16} = \pm 2.120$

ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{.025,16} \cdot S_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}$



$$= (95 - 97) \pm 2.120\ (2.933)$$

$$= -2 \pm 6.22$$

$$= -8.22,\ 4.22$$

ข) ช่วงเชื่อมั่นรวมค่า 0 ด้วย นั่นคือ $\mu_1 - \mu_2 = 0$ หรือ $\mu_1 = \mu_2$ นั่นคือ ยังมีหลักฐานไม่เด่นชัดว่า การเรียนรู้ของเด็ก 2 กลุ่มนี้ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

8.62 ต้องการทราบว่าเด็ก 16 คน สามารถเรียนภาษาอังกฤษ และคณิตศาสตร์ ด้วยความสำเร็จเท่าเทียมกันหรือไม่ คะแนนสอบของ 2 วิชาของเด็ก 16 คน มีในตารางข้างล่าง จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของความแตกต่างของประชากร

(อังกฤษ-คณิต)

นักเรียน	ภาษาอังกฤษ	คณิตศาสตร์	d_i	$(d_i - \bar{d})^2$
1	84	84	0	1
2	55	57	-2	1
3	85	90	-5	16
4	98	97	1	0
5	80	74	6	25
6	55	53	2	1
7	80	75	5	16
8	64	63	1	0
9	91	90	1	0
10	85	82	3	4
11	90	88	2	1
12	94	98	-4	9
13	75	77	-2	1
14	86	90	-4	9
15	91	85	6	25
16	92	86	6	25

$\bar{d} = \frac{16}{16} = 1 \qquad \Sigma d_i = 16, \qquad 134 = \Sigma(d_i - \bar{d})^2$

$$S_d^2 = \frac{\Sigma(d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{134}{15} = 8.933$$

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{S_d^2}{n}} = \sqrt{\frac{8.933}{16}} = \sqrt{.558} = .747$$

เนื่องจากข้อมูล 2 กลุ่มนี้ไม่เป็นอิสระกัน มีความเกี่ยวข้องเป็นคู่ ๆ เพราะเป็นคะแนนสอบของนักเรียนคนเดียวกัน จึงต้องวิเคราะห์แบบข้อมูลจับคู่ และเพราะเป็นตัวอย่างขนาดเล็กจึงต้องใช้ตาราง $t_{(n-1),\alpha/2} = t_{15,.025} = 2.131$

และช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $(\mu_1 - \mu_2)$ คือ

$$\bar{d} \pm t_{.025,15} \cdot S_{\bar{d}}$$

$$= 1 \pm (2.131)\ (.747)$$

$$= 1 \pm 1.59$$

$$= 0.59,\ 2.59$$

เนื่องจาก d_i ได้จากคะแนนอังกฤษ - คณิตศาสตร์ และ ช่วงเชื่อมั่นเป็นเครื่องหมายบวก แสดงว่าคะแนนอังกฤษสูงกว่าคณิตศาสตร์ โดยเฉลี่ยระหว่าง .59 ถึง 2.59 คะแนน ด้วยความเชื่อมั่น 95%