5. ความน่าจะเป็น

- ประวัติความเป็นมาของทฤษฎีความน่าจะเป็น
- พื้นฐานเบื้องต้นของการศึกษาความน่าจะเป็น
- การหาความน่าจะเป็น 3 วิธี
- กฎต่าง ๆ ของความน่าจะเป็น
- ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน
- ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของเหตุการณ์ที่ไม่เป็นอิสระกัน
- ทฤษฎีของเบยส์

5.1 ธุรกิจประกันภัยจะคำนวณอัตราเบี้ยประกันโดยใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็นทั้ง ๆ ที่บริษัททราบแน่นอนว่าผู้เอาประกันทุกคนต้องตายในวันหนึ่ง เช่นนี้จะหมายความว่าทฤษฎีความน่าจะเป็นไม่น่าจะใช้ได้สัมฤทธิ์ผลในธุรกิจประกันภัยใช่หรือไม่? จงอธิบาย

ทฤษฎีความน่าจะเป็นจะใช้เป็นหลักในธุรกิจประกันภัย การที่ผู้เอาประกันภัยทุกคนต้องตายในวันหนึ่งนั้นเป็นความจริง แต่ปัญหาคือระยะเวลาก่วาจะถึงวันตายไม่เท่ากัน และการประกันชีวิตไม่ได้ประกันว่าจะ "ไม่ตาย" แต่เป็นการประกันสำหรับเหตุการณ์ผิดปกติวิสัย คือ การเสียชีวิตก่อนเวลาอันควร หรือความพิการ โดยการยอมเสียเบี้ยประกัน บริษัทประกันชีวิตจะคิดอัตราเบี้ยประกันโดยใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็น พิจารณาความเป็นไปได้ของ "ความเสี่ยง" ถ้าเสี่ยงมากก็ต้องเสียเบี้ยประกันสูง ถ้าเสี่ยงน้อยก็เสียเบี้ยประกันต่ำ

5.2 บุหรี่ที่ขายในบางประเทศจะมีข้อความเตือนผู้สูบว่า "คณะแพทย์ได้วิจัยแน่ชัดแล้วว่าการสูบบุหรี่ให้โทษแก่สุขภาพ" อยากทราบว่าทฤษฎีความน่าจะเป็นมีส่วนเกี่ยวข้องกับข้อความนี้เพียงไร?

กระทรวงสุขภาพ (สาธารณสุข) ได้ทำการวิจัยถึงสาเหตุที่เกี่ยวข้องกับการเสียชีวิตของผู้สูบบุหรี่ และผู้ไม่สูบบุหรี่ พบหลักฐานชี้ว่าผู้สูบบุหรี่ส่วนใหญ่มักมีสุขภาพไม่ดี หรือตายเร็วกว่าปกติมากกว่าผู้ไม่สูบบุหรี่ กระทรวงสาธารณสุขจึงสรุปว่าการมีสุขภาพไม่ดีมีโอกาสสูงกับประชากรสูบบุหรี่มากกว่าประชากรไม่สูบบุหรี่

5.3 บริษัทผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปของเด็กที่มีชื่อเสียงมากแห่งหนึ่ง ได้ตัดสินใจขยายการผลิต โดยเพิ่มแผนกเสื้อวัยรุ่น อยากทราบว่าทฤษฎีความน่าจะเป็นเข้ามามีบทบาทในการตัดสินใจของบริษัทอย่างไร?

บริษัทจะต้องประมาณจำนวนอุปสงค์ ต้นทุนการผลิต ค่าใช้จ่ายในการขยายโรงงาน การจ้างพนักงานเพิ่มขึ้น ค่าประมาณเหล่านี้ขึ้นอยู่กับ **ความไม่แน่นอน** ดังนั้น จึงต้องวัดความเป็นไปได้ของค่าประมาณเหล่านี้ด้วยความน่าจะเป็น

6.4 **จงหารายชื่อ** collective exhaustive **ของการโยนลูกเต๋า 2 ลูก**

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2. 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

5.5 เมื่อหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ 52 ใบ เหตุการณ์ต่อไปนี้คู่ใดที่ "ไม่มีผลร่วมกัน"

1. เป็นไพ่โพแดงและควีน

2. เป็นไพ่ข้าวหลามตัดและสีแดง

3. เป็นเลขคี่ และโพดำ

4. เป็น Ace *และเลขคี่*

คำนิยามของเหตุการณ์ที่ไม่มีผลร่วมกัน คือ $A \cap B = \Phi$ หรือ $P(AB) = 0$ นั่นคือ 2 เหตุการณ์นี้จะเกิดพร้อมกันไม่ได้ ดังนั้นในปัญหาข้อ 1-4 เราจึงตั้งปัญหาว่า "เหตุการณ์คู่นี้เกิดพร้อมกันได้ไหม?" ถ้าตอบว่า "ได้" ก็ไม่ใช่ mutually exclusive ถ้าตอบว่า "ไม่ได้" จึงจะเป็นเหตุการณ์แบบ mutually exclusive

1. **ไพ่โพแดงและควีน** เรามีไพ่ควีนโพแดง 1 ใบ, ดังนั้นเหตุการณ์คู่นี้จึงเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ใช่ "mutually exclusive"

2. **ไพ่ข้าวหลามตัดและสีแดง** ไพ่หน้าข้าวหลามตัดเป็นไพ่สีแดงด้วย จึงเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ใช่ "mutually exclusive"

3. **เป็นเลขคี่และโพดำ** ไพ่โพดำมีทั้งเลขคู่และเลขคี่ จึงไม่ใช่เหตุการณ์ "mutually exclusive"

4. **เป็น** Ace **และเลขคี่** Ace คือไพ่หน้าหนึ่งแต่ไม่เขียนเลข 1 เรียกว่า Ace แทนจึงเป็นเลขคี่ จึงไม่เป็น "mutually exclusive"

5.6 เมื่อโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน เหตุการณ์คู่ใดบ้างที่ไม่มีผลร่วมกัน (mutually exclusive")

1. ลูกหนึ่งขึ้นหมายเลข 5 และได้ผลรวมเป็น 5
2. ทั้ง 2 ลูก เป็นเลขคี่ และผลรวมเป็น 7
3. ทั้ง 2 ลูกเป็นเลขคู่ และผลรวมเป็น 8
4. ลูกหนึ่งขึ้นเลข 2 และผลรวมได้ 9
5. ลูกหนึ่งขึ้นเลข 4 และผลรวมได้ 10

ก่อนอื่นควรหา sample space ของผลรวมของหน้าลูกเต๋า 2 ลูกนี้ก่อน

ลูกที่ 1

ลูกที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	Q
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1. ลูกหนึ่งขึ้นเลข 5 และผลรวมได้ 5 เป็นเหตุการณ์ mutually exclusive เพราะเกิดพร้อมกันไม่ได้

2. ทั้ง 2 ลูกเป็นเลขคี่ และผลรวมได้ 7

ผลรวมได้ 7 มี {1,6 2,5 3,4 4,3 5,2 6,1}

ลูกหนึ่งเป็นเลขคี่และอีกลูกหนึ่งเป็นเลขคู่ จะเป็นเลขคู่พร้อมกันทั้ง 2 ลูกไม่ได้ จึงเป็นเหตุการณ์ mutually exclusive

3. ทั้ง 2 ลูก เป็นเลขคู่และผลรวม = 8

ผลรวม = 8 คือ { $\boxed{2,6}$ 3,5 $\boxed{4,4}$ 5,3 $\boxed{6,2}$ }

เหตุการณ์ 2 อันนี้เกิดร่วมกันได้ เพราะได้แก่เหตุการณ์ 2,6 4,4 และ 6,2 จึงไม่ใช่ mutually exclusive

4. **ลูกหนึ่งขึ้นเลข 2 และผลรวมเป็น 9**

   ผลรวมเป็น 9 คือ { 3,6 4,5 5,4 6,3}

   ไม่มีเหตุการณ์ใดขึ้นต้นด้วยเลข 2

   จึงเกิดพร้อมกันไม่ได้ เรียกว่า เป็น mutually exclusive

5. **ลูกหนึ่งขึ้นเลข 4 และผลรวมได้ 10**

   ผลรวมได้ 10 คือ { $\boxed{4,6}$ 5,5 6,4}

   มีขึ้นต้นด้วยเลข 4 คือ 4,6 เหตุการณ์คู่นี้เกิดพร้อมกันได้ จึงไม่ใช่ mutually exclusive

5.7 จงหา sample space ของครอบครัวที่มีลูกแฝด 2 คน และแฝด 3 คน (จำแนกตามเพศ)

ครอบครัวที่มีลูกแฝด 2 คน

ให้ ช = เพศชาย, ญ = เพศหญิง

S = { ญญ, ญช, ชญ, ชช }

ครอบครัวที่มีลูกแฝด 3 คน

S = { ชชช, ชชญ, ชญช, ชญญ, ญชช, ญชญ, ญญช, ญญญ }

5.8 ถ้าโยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมเป็น 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11

จากตารางแสดงกลุ่มผลทดลองในข้อ 5.6

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 1 จำนวน 0 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 2 จำนวน 1 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 5 จำนวน 4 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 6 จำนวน 5 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 7 จำนวน 6 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 10 จำนวน 3 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

จะเห็นว่ามีผลรวมเป็น 11 จำนวน 2 ครั้ง จากทั้งหมด 36 ครั้ง

ดังนั้น $P(1) = 0$

$P(2) = 1/36$

$P(S) = 4/36$

$P(6) = 5/36$

$P(7) = 6/36$

$P(10) = 3/36$

$P(11) = 2/36$

5.9 ก. จงหา "เหตุการณ์" ของผู้สมัครรับเลือกตั้ง

เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ของผู้สมัครรับเลือกตั้งคือ ได้รับเลือกตั้งและไม่ได้รับเลือกตั้ง

ข. เหตุการณ์ในข้อ (ก) เป็นลักษณะ Collective exhaustive ไหม?

เป็นลักษณะ collective exhaustive เพราะรวมเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดแล้ว

ค. เหตุการณ์ใน ข้อ (ก) เป็น mutually exclusive ไหม?

เป็นเหตุการณ์ mutually exclusive ด้วย เพราะเหตุการณ์ทั้ง 2 (ได้รับเลือกกับไม่ได้รับเลือก) จะเกิดพร้อมกันไม่ได้

ง. ถ้าท่านไม่ทราบข่าวสารเกี่ยวกับผู้สมัครเลย ท่านจะให้ความน่าจะเป็นกับเหตุการณ์ในข้อ (ก) อย่างไร?

จะให้น้ำหนักทั้ง 2 เหตุการณ์เท่ากัน

$P(\text{ได้รับเลือก}) = P(\text{ไม่ได้รับเลือก}) = \frac{1}{2} = .5$

5.10 ตัวแทนจำหน่ายรถต้องการเปลี่ยนยางที่ใช้ในปัจจุบันเป็นยางชนิดใหม่ เขาสนใจยาง 2 ชนิด คือ A และ B จึงลองซื้อมาชนิดละ 25 เส้นเพื่อทดลองใช้ พบว่ามีอายุการใช้งานดังนี้

ไมล์ (1000)	A	B
48-51	2	4
52-55	4	5
56-59	3	7
60-63	8	6
64-67	7	3
68-71	1	0
	25	25

(ก) ถ้าสุ่มยาง B มา 1 เส้น จงหาโอกาสที่จะมีอายุการใช้งาน 52,000 – 55,000 ไมล์

ให้ x คืออายุการใช้งานของยาง

$$\Pr(52000 \leqslant x_B \leqslant 55000) = \Pr(52 \leqslant x_B \leqslant 55) = \frac{5}{25} = 0.20$$

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่ยางที่สุ่มมา 1 เส้นจาก (A) จะมีอายุการใช้งาน 60,000 – 63,000 ไมล์

$$\Pr(60000 \leqslant x_A \leqslant 63000) = \Pr(60 \leqslant x_A \leqslant 63) = \frac{8}{25} = 0.32$$

(ค) ถ้ารวมยางทั้ง 2 ชนิด และสร้างการแจกแจงความถี่ใหม่ จงหาโอกาสที่ยางเส้นหนึ่งซึ่งหยิบมาแบบสุ่มจะมีอายุการใช้งาน 52,000 – 55,000 ไมล์

การแจกแจงใหม่

1,000 ไมล์ :	48-51	52-55	56-59	60-63	64-67	68-71	รวม
จำนวน (A+B)	6	9	10	14	10	1	50

$$P(52000 \leqslant x_{A+B} \leqslant 5000) = P(52 \leqslant x_{A+B} \leqslant 55)$$
$$= 9/50$$
$$= 0.18$$

(ง) การหาความน่าจะเป็นในข้อ (ก), (ข), (ค) เป็นการหาโดยวิธีใด?

เป็นการหาความน่าจะเป็นโดยวิธีใช้ความถี่สัมพัทธ์

5.11 ถ้าหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้ :

(ก) ได้ควีน

P (ควีน) = 4/52 = 1/13

(มีไพ่ควีน 4 ใบ จากทั้งหมด 52 ใบ)

(ข) ได้ข้าวหลามตัด

ไพ่ข้าวหลามตัดมี 13 ใบ จาก 52 ใบ

P (ข้าวหลามตัด) = $\frac{13}{52}$ = .25

(ค) ได้ไพ่สีแดงและ Ace

ไพ่ Ace สีแดงมี 2 ใบ จาก 52 ใบ คือ Ace โพแดง และ Ace ข้าวหลามตัด

ดังนั้น P (Ace สีแดง) = 2/52 = 1/26

(ง) ได้ไพ่สีแดง

ไพ่สีแดงมี 2 หน้า คือ โพแดงและข้าวหลามตัด แต่ละหน้ามีชุดละ 13 ใบ จึงมีไพ่สีแดงทั้งหมด 26 ใบ

P (สีแดง) = 26/52 = 1/2 = .50

(จ) ได้รูปหน้าคน (J, Q, K)

ไพ่แต่ละหน้ามีรูปหน้าคน 3 ใบ, มี 4 หน้า รวมกัน = 3×4 = 12 ใบ

P (หน้าคน) = 12/52

(ฉ) ใช้วิธีหาความน่าจะเป็นแบบใด?

ใช้วิธีหาความน่าจะเป็นแบบคลาสสิค โดยใช้สูตร

$$P(E) = \frac{n(E)}{n} = \frac{\text{จำนวนหนทางของ } E}{\text{จำนวนหนทางทั้งหมด}}$$

5.12 สถิติการขายของพนักงาน 225 คน ในบริษัทหนึ่งมีดังนี้

จำนวนขาย	ความถี่
o- 3,999	5
4,000- 7,999	15
8,000-11,999	40
12,000-15,999	90
16,000.19,999	30
20,000-23,999	25
24,000+	20

จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานผู้หนึ่งจะหาเงินได้

(ก) 8,000-12,000 บาท

มีพนักงาน 40 คน จาก 225 คน ที่ขายได้ 8,000-11,999

P (8,000-12,000) = 40/225

(ข) น้อยกว่า 8,000 บาท

มีพนักงาน 5+15 = 20 คน จาก 225 คน ที่ขายได้ไม่เกิน 8,000 บาท

P (น้อยกว่า 8,000 บาท) = 20/225

(ค) มากกว่า 24,000 บาท

มีพนักงานเพียง 20 คน จาก 225 คน ที่ขายได้ 24,000 บาทขึ้นไป

P (มากกว่า 24,000 บาท) = 20/225

(ง) 12,000-16,000 บาท

มีพนักงาน 90 คน จาก 225 คน ที่ขายได้ 12,000-15,999 บาท

P(12,000-16,000 บาท) = 90/225

5.13 **ผู้จัดการฝ่ายขายได้ประมาณอุปสงค์ของเครื่องคิดเลข 5 จำนวนคือ 200, 250, 300, 350 และ 400 เครื่อง ด้วยอัตราส่วน ดังนี้**

"เขาไม่แน่ใจว่าอุปสงค์ 300 และ 350 หน่วยเท่ากันหรือไม่ แต่มีความรู้สึกว่าโอกาสที่จะขายได้ 350 หน่วย เป็น 2 เท่าของ 400 หน่วย โอกาสที่จะขาย 300 หน่วย เป็น 4 เท่าของ 200 หน่วย และโอกาสที่จะขายได้ 250 หน่วย เป็นครึ่งหนึ่งของ 350 หน่วย"

จงกำหนดความน่าจะเป็นของอุปสงค์ ความน่าจะเป็นของอุปสงค์หาได้โดยวิธีใด

วิธีทำ

ให้โอกาสที่จะขายได้ 250 หน่วย = p

ดังนั้น โอกาสที่จะขายได้ 350 หน่วย = 2p

เพราะ P (250 หน่วย) = $\frac{1}{2}$ P (350 หน่วย)

และโอกาสที่จะขายได้ 400 หน่วย = p

เพราะ P(350 หน่วย) = 2P(400 หน่วย)

ดังนั้น P(400 หน่วย) = $\frac{1}{2}$P(350 หน่วย) = $\frac{1}{2}$(2p) = **P**

และ P(300 หน่วย) = 4 P(200 หน่วย)

สมมติให้ P(300 หน่วย) = P(350 หน่วย) = 2 p

ดังนั้น P(200 หน่วย) = $\frac{1}{4}$P(300 หน่วย) = $\frac{1}{4}$P(350 หน่วย) = $\frac{1}{4}$(2p) = $\frac{1}{2}$p

จำนวนขาย :	200	250	300	350	400
โอกาส :	$\frac{1}{2}p$	p	2p	2p	p
หรือ	p	2p	4p	4p	2p

แต่ $\Sigma p_i = 1$

$13p = 1$

$$\boxed{p = 1/13}$$

นั่นคือ P(200 หน่วย) = 1/13

P(250 หน่วย) = 2/13

P(300 หน่วย) = 4/13

P(350 หน่วย) = 4/13

P(400 หน่วย) = 2/13

รวม 1.00

เป็นการหาความน่าจะเป็นโดยวิธีจิตวิสัย คือใช้ความมั่นใจของผู้จัดการฝ่ายขายเป็นตัวกำหนดความน่าจะเป็น

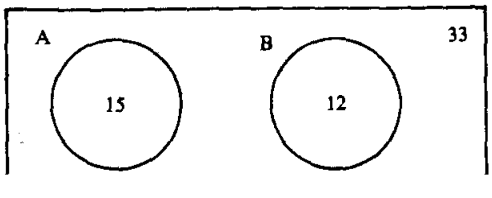
5.14 เครื่องพิมพ์ดีดของสำนักงานแห่งหนึ่งมีสถิติการใช้งานต่อปีดังนี้

เครื่อง :	1	2	3	4	5	รวม
จำนวนวันที่ใช้งานได้	244	252	237	208	254	1,195
จำนวนวันที่ใช้งานไม่ได้	16	8	23	52	6	105
รวม	260	260	260	260	260	1,300

5.14 จงหาโอกาสที่เครื่องพิมพ์ดีดเครื่องหนึ่งจะใช้การไม่ได้ในวันหนึ่ง

$$P(\text{ใช้การไม่ได้}) = \frac{n(\text{ใช้การไม่ได้})}{n} = \frac{105}{1300} = .08$$

5.15 ผลรวมทั้งหมด = 60 จงหา P(A), P(B), P(A หรือ B)



$$P(A) = 15/60$$

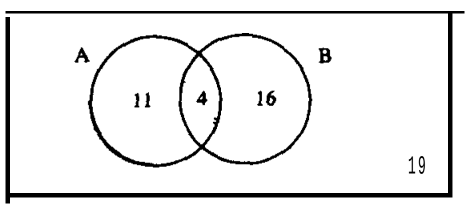
$$P(B) = 12/60$$

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{15}{60} + \frac{12}{16} = \frac{27}{60}$$

6.16 ผลรวมทั้งหมด = 50 จงหา P(A), P(B), P(A หรือ B)



$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$= \frac{4}{50} + \frac{11}{50} = \frac{15}{50}$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$$

$$= \frac{4}{50} + \frac{16}{50} = \frac{20}{50}$$

$P(A$ หรือ $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$= \frac{15}{50} + \frac{20}{50} - \frac{4}{50} = \frac{31}{50}$$

5.17 **กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วไว้ 60 ลูก เป็นสีฟ้า 40 ลูก ที่เหลือเป็นสีแดง ลูกแก้วสีฟ้า 15 ลูกมีไส้กลาง และสีแดง 10 ลูกมีไส้กลาง นอกนั้นสีโปร่งใส ถ้าหยิบมา 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังนี้**

ก) หยิบได้สีแดง

ก่อนอื่นควรสร้างตารางการแจกแจงร่วมกันของสีและไส้ดังนี้

	สีฟ้า	สีแดง	
มีไส้กลาง	15	10	25
โปร่งใส	25	10	35
	40	20	60

ดังนั้น P (หยิบได้สีแดง) = 20/60 = 1/3

ข) หยิบได้ลูกแก้วโปร่งใส

จากตาราง มีลูกแก้วโปร่งใส 35 ลูก จาก 60 ลูก

ดังนั้น P (โปร่งใส) = 35/60 = 7/12

ค) หยิบได้สีแดงและมีไส้กลาง

มีลูกแก้ว 10 ลูก จาก 60 ลูก ที่เป็นสีแดงและมีไส้กลาง

ดังนั้น P (สีแดง ∩ มีไส้กลาง) = 10/60 = 1/6

ง) *หยิบได้สีฟ้าโปร่งใส*

มีลูกแก้วสีฟ้าและโปร่งใส 25 ลูก จาก 60 ลูก

ดังนั้น P (สีฟ้า ∩ โปร่งใส) = 25/60 = 5/12

จ) *หยิบได้ลูกที่มีไส้กลาง*

มีลูกแก้วที่มีไส้กลาง 25 ลูก จาก 60 ลูก

P (มีไส้กลาง) = 25/60 = 5/12

5.18 **โรงงานเคมีภัณฑ์แห่งหนึ่งถูกฟ้องร้องว่าไม่กำจัดของเสียก่อนปล่อยลงแม่น้ำ ซึ่งคดีนี้มีโทษอาจถูกปรับ หรือถูกบังคับให้ติดตั้งระบบกำจัดของเสีย หรืออาจโดนทั้ง 2 อย่าง จากคดีที่ถูกฟ้องร้องในลักษณะเดียวกันนี้ มีอยู่ 10% ที่ถูกตัดสินให้ปรับและติดตั้งเครื่อง แต่ถ้าไม่ถูกตัดสินให้ลงโทษทั้ง 2 อย่างพร้อมกัน โอกาสที่จะถูกปรับเพียงอย่างเดียวจะเป็น 3 เท่าของการติดตั้งระบบกำจัดของเสีย ถ้า 28% ของโรงงานเหล่านี้ถูกตัดสินว่ามีความผิด จงหาความน่าจะเป็นที่โรงงานเหล่านี้จะต้องติดตั้งระบบกำจัดของเสีย**

ให้ A = ถูกปรับ

$\overline{A}$ = ไม่ถูกปรับ

B = ถูกบังคับให้ติดตั้งเครื่องกำจัดของเสีย

$\overline{B}$ = ไม่ถูกบังคับให้ติดตั้งเครื่องกำจัดของเสีย

ควรสร้างตารางสัมพันธ์แสดงเหตุการณ์อันเป็นไปได้ ดังนี้

	ต้องติดตั้ง = B	ไม่ต้องติดตั้ง = $\overline{B}$	
ถูกปรับ = A	.10	(3k) .135	.235
ไม่ถูกปรับ = $\overline{A}$	(k) .045	.72	.765
	.145	.855	1.00

มีโรงงานที่ทำผิด 28% ดังนั้น โรงงานที่ไม่ทำผิด = 72%

นั่นคือ $P(\bar{A}\bar{B}) = .72$

และ $P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = .28$ (1)

มี 10% ที่ถูกตัดสินให้ปรับและติดตั้งเครื่อง

นั่นคือ $P(AB) = .10$

และโอกาสที่จะถูกปรับเพียงอย่างเดียวเป็น 3 เท่าของการติดตั้งเครื่องกำจัดน้ำเสีย

ให้ k = โอกาสที่ต้องติดตั้ง (แต่ไม่ถูกปรับ) = $P(\bar{A}B)$

ดังนั้น P (ถูกปรับแต่ไม่ต้องติดตั้งเครื่อง) = $P(A\bar{B}) = 3k$

แทนค่าในสมการ (1) จะได้

$$(.10) + (3k) + (k) = .28$$

$$4k = .28 - .10 = .18$$

$$k = .18/4 = .045$$

ดังนั้น $P(\bar{A}B) = 0.45$ และ $P(A\bar{B}) = 3\ k = 3(.045) = .135$

5.19 จงหาความน่าจะเป็นที่บุตรคนที่ 2 ของครอบครัว

ก) จะเป็นเพศชาย โดยทราบว่าคนแรกเป็นหญิง

$P(\text{ช}_2/\text{ญ}_1) = P(\text{ช}_2)$ เพราะเป็นเหตุการณ์อิสระกัน

$= \frac{1}{2}$ ถ้าสมมติให้โอกาส ช : ญ = 1 : 1

มาจากกฎความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข และความเป็นอิสระของเหตุการณ์ ดังนี้

$$P(\text{ช}_2/\text{ญ}_1) = \frac{P(\text{ญ}_1 \cap \text{ช}_2)}{P(\text{ญ}_1)} = \frac{P(\text{ญ}_1) \cdot P(\text{ช}_2)}{P(\text{ญ}_1)} = P(\text{ช}_2) = \frac{1}{2}$$

(ถ้า A และ B เป็นอิสระกัน $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$)

ข) เป็นเพศหญิง โดยทราบว่าคนแรกเป็นเพศชาย

$$P(\text{ญ}_2/\text{ช}_1) = \frac{P(\text{ช}_1 \cap \text{ญ}_2)}{P(\text{ช}_1)} = \frac{P(\text{ช}_1) \cdot P(\text{ญ}_2)}{P(\text{ช}_1)} = \frac{1}{2}$$

เราใช้กฎความเป็นอิสระของเหตุการณ์โดยสมมติว่า เพศของบุตรคนแรก ไม่มีอิทธิพลในการกำหนดเพศของบุตรคนถัดไป

5.20 เมื่อโยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

ก) โยน 3 ครั้ง และได้ผลรวมครั้งที่ 1, 2, 3 เป็น 7, 5, 5 ตามลำดับ

ก่อนอื่นควรทำตารางกลุ่มผลทดลองของการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกันก่อนจะได้ผลรวม ดังนี้

ลูกที่ 1

ลูกที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	1	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A_1 = ผลรวมเป็น 7 ในครั้งที่ 1

B_2 = ผลรวมเป็น 5 ในครั้งที่ 2

B_3 = ผลรวมเป็น 5 ในครั้งที่ 3

P (ผลรวมเป็น 7) $= 6/36 = 1/6 = P(A_1)$

P (ผลรวมเป็น 5) $= 4/36 = 1/9 = P(B_2) = P(B_3)$

$P(A_1B_2B_3) = P(A_1)\,.P(B_2)\cdot P(B_3)$ เพราะการโยน 3 ครั้งเป็นอิสระกัน

$$= (\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{9})(\tfrac{1}{9}) = \frac{1}{486}$$

ข) โยน 3 ครั้ง และขึ้นหน้าเดียวกันทั้ง 2 ลูก ทั้ง 3 ครั้ง

A = ลูกเต๋า 2 ลูกขึ้นหน้าเดียวกัน

= 1,1 2,2 3,3 4,4 5,5 และ 6,6

$$P(A) = 6/36 = 1/6$$

$$P(A_1A_2A_3) = (\frac{1}{6})(\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{216}$$

เพราะว่าการโยน 3 ครั้งเป็นอิสระกัน

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

ค) โยน 2 ครั้ง และเป็นหน้าเดียวกันทั้ง 2 ลูกทั้ง 2 ครั้ง

A = ลูกเต๋าขึ้นหน้าเดียวกัน, $P(A) = \frac{1}{6}$ จากข้อ (ข)

$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ เพราะการโยน 2 ครั้งเป็นอิสระกัน

$$= (\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{36}$$

5.21 กำหนดให้ A, B, C เป็นอิสระกัน $P(A) = .2$, $P(B) = .5$ และ $P(C) = .3$ จงเขียนแผนภาพพฤกษ์ (tree diagram) และหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังนี้

(ก) $P(A_1B_2C_3)$ (ข) $P(C_1C_2C_3)$

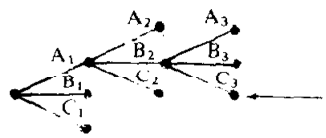
(ค) $P(A_1C_2B_3C_4)$ (ง) $P(A_1B_2)$

(จ) $P(B_1B_2)$

(ก) $P(A_1B_2C_3) = P(A_1) \cdot P(B_2) \cdot P(C_2)$

$= (.2)(.5)(.3)$

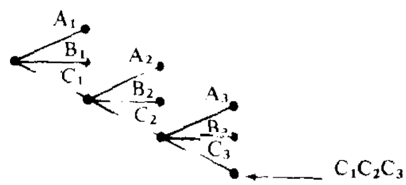
$= .03$



(ข) $P(C_1C_2C_3) = P(C_1)\ P(C_2)\ P(C_3)$

$= (.3)(.3)(.3)$

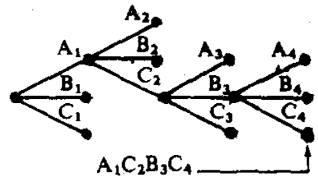
$= .027$



(ค) $P(A_1C_2B_3C_4) = P(A_1) \cdot P(C_2) \cdot P(B_3) \cdot P(C_4)$

$= (.2)(.3)(.5)(.3)$

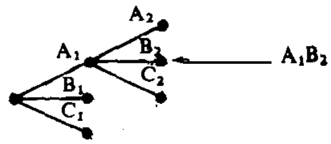
$= .009$



(ง) $P(A_1B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2)$

$= (.2)(.5)$

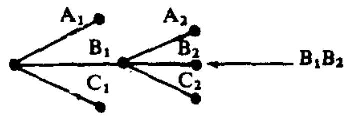
$= .10$



(จ) $P(B_1B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)$

$= (.5)(.5)$

$= .25$



5.22 โรงงานแห่งหนึ่งใช้วิธีตรวจคุณภาพโดยพนักงานและเครื่องคอมพิวเตอร์ นั่นคือ สินค้าทุกชิ้นจะผ่านการตรวจจากพนักงานก่อนแล้วจึงผ่านเครื่องตรวจอีกครั้งหนึ่ง ถ้าโอกาสที่พนักงานจะทำงานผิดพลาด = .05 และโอกาสที่เครื่องจักรจะทำงานผิดพลาด = .02

(ก) ถ้าทราบว่าเครื่องคอมพิวเตอร์ทำงานผิดพลาด จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานจะทำผิดพลาดด้วย

ให้ A = พนักงานทำงานผิดพลาด

$P(A) = .05, \; P(\bar{A}) = .95$

ให้ C = เครื่องคอมพิวเตอร์ทำงานผิดพลาด

$P(C) = .02$

$P(\bar{C}) = .98$

$$P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A).P(C)}{P(C)}$$

$$= P(A) = .05$$

เพราะการทำงานของคนและคอมพิวเตอร์เป็นอิสระกัน

(ข) ถ้าทราบว่าพนักงานทำงานผิดพลาด จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องจะทำงานผิดพลาด

$$P(C/A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(C)}{P(A)}$$ เพราะ A และ C เป็นอิสระกัน

$$= P(C) = .02$$

(ค) จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานทำงานผิดพลาดและเครื่องคอมพิวเตอร์จะทำงานผิดพลาดซ้ำด้วย จึงทำให้สินค้าชำรุดหน่วยนั้นผ่านการตรวจไปรวมกับสินค้าดี

$$P(AC) = P(A) \cdot P(C) = (.05)(.02) = .0010$$

5.23 โรงงานหนึ่งมีพนักงานชาย 65% 40% ของพนักงานทั้งหมดเป็นฝ่ายผลิต และความน่าจะเป็นที่พนักงานผู้หนึ่งจะเป็นชายและอยู่ฝ่ายผลิต = .30 ถ้าสุ่มมา 1 คน จงหาโอกาสที่เขาจะเป็นพนักงานฝ่ายผลิต และหาโอกาสที่จะเป็นพนักงานชาย

ก่อนอื่นควรสร้างตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของเพศและงานดังนี้

		เพศ: หญิง	เพศ: ชาย	
งาน	ฝ่ายผลิต	.10	$\boxed{.30}$	$\boxed{.40}$
	ฝ่ายอื่น ๆ	.25	.35	.60
		.35	$\boxed{.65}$	1.00

ดังนั้น P (เป็นพนักงานฝ่ายผลิต) = .40

P (เป็นพนักงานชาย) = .65

5.24 จากสถิติทะเบียนรถยนต์ พบว่า ถ้าครอบครัวมีรายได้สูง โอกาสที่จะมีรถ 2 คัน = .70 จากผลสำรวจพบว่าครอบครัวที่มีรายได้ระดับสูงมี 50% และครอบครัวที่มีรถ 2 คันมีอยู่ 40% จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งจะมีรถ 2 คัน และมีรายได้สูง

A = ครอบครัวมีรายได้สูง

$P(A) = .5$

B = ครอบครัวมีรถ 2 คัน

$P(B/A) = .70, \quad P(B) = .40$

P (ครอบครัวมีรถ 2 คัน และมีรายได้สูง)

$= P(AB)$

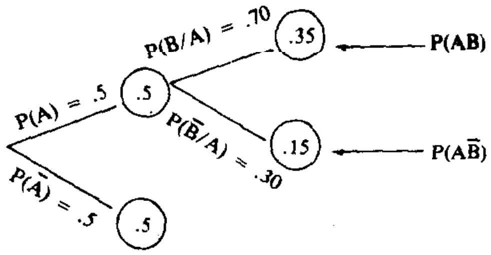
$$= P(A) \cdot P(B/A)$$

$$= .5(.7) = .35$$

ถ้าเขียนตารางความน่าจะเป็นร่วมกันได้ดังนี้

	รายได้สูง (A)	รายได้ต่ำ ($\bar{A}$)	
B = มีรถ 2 คัน	.35	.05	.40
$\bar{B}$ = มีรถน้อยกว่า 2 คัน	.15	.45	.60
	.50	.50	1.00

(70% ของผู้มีรายได้สูงจะมีรถ 2 คัน = .70(.50) = .35)



5.25 กำหนดให้ A และ B ไม่เป็นอิสระกัน P(A) = .25, P(B) = .33 และ P(A หรือ B) = .43 จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) ไม่เกิด A หรือ B (ข) เกิดทั้ง A และ B

(ค) จะเกิด B ถ้า A เกิดขึ้นแล้ว (ง) จะเกิด A ถ้า B เกิดขึ้นแล้ว

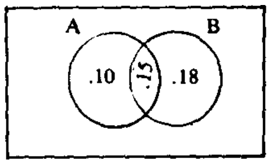
$P(A) = .25, P(B) = .33$

$$P(A \cup B) = .43$$

แต่ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

ดังนั้น $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$= .25 + .33 - .43$$



	A	$\bar{A}$	
B	$\boxed{.15}$	.18	.33
$\bar{B}$	.10	.57	.67
	$\boxed{.25}$	.75	1.00

$= .15$

นั่นคือ $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$

$= .25 - .15$

$= .10$

และ $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$

$= .33 - .15$

$= .18$

(ก) P (ไม่เกิด A หรือ B) $= P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - .43$

$= .57 = P(\bar{A}\bar{B})$

(ข) P (เกิดทั้ง A และ B) $= P(AB) = .15$

(ค) P (จะเกิด B ถ้า A เกิดขึ้นแล้ว)

$= P(B/A)$

$= P(AB)/P(A)$

$= .15/.25$

$= 3/5 = .60$

(ง) P (จะเกิด A ถ้า B เกิดขึ้นแล้ว)

$= P(A/B)$

$= P(AB)/P(B)$

$= .15/.33$

$= .4545$

5.26 ถ้า $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{4}{9}$

$P(A$ และ $C) = \frac{1}{12}$, $P(B/C) = \frac{1}{4}$ จงหา

P(A/C) ; P(C/A) ; P(B และ C) และ P(C/B)

(ก) $P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{9}} = \frac{}{48} = .1875$

(ข) $P(C/A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = .5$

(ค) P(B และ C) = P(BC)

$= P(C).\ P(B/C)$

$= (\frac{4}{9})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{9}$

(ง) $P(C/B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

5.27 ธนาคารแห่งหนึ่งมีลูกหนี้กู้เงินไปซื้อบ้าน 10% อีก 5% กู้เงินเพื่อซื้อที่ดิน และมีอยู่ 3% ที่กู้ไปซื้อทั้งบ้านและที่ดิน

(ก) ถ้าลูกหนี้คนหนึ่งกู้เงินไปซื้อที่ดิน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะกู้เงินเพื่อใช้ปลูกบ้านด้วย

ให้ A = กู้เงินไปซื้อบ้าน

P(A) = .10

B = กู้เงินไปซื้อที่ดิน

P(B) = .05

P(AB) = .03 = P (กู้ไปซื้อทั้งบ้านและที่ดิน)

(ก) $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{.03}{.05} = .6$

(ข) ถ้าลูกหนี้ผู้หนึ่งกู้เงินไปปลูกบ้าน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะกู้เงินเพื่อซื้อที่ดินด้วย

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{.03}{.10} = .3$$

ลักษณะโจทย์แบบนี้ จะเขียนในรูปตารางความน่าจะเป็นร่วมกันได้ ดังนี้

	ซื้อที่ดิน (B)	ไม่ซื้อที่ดิน ($\bar{B}$)	
ซื้อบ้าน = A	.03	.07	.10
ไม่ซื้อบ้าน = $\bar{A}$	.02	.88	.90
	.05	.95	1.00

ถ้าสร้างตารางข้างบนนี้ได้แล้ว จะตอบคำถามต่าง ๆ ได้อีกหลายข้อ เช่น

P (ไม่ซื้อทั้งบ้านและที่ดิน) = $P(\bar{A}\bar{B})$ = .88

P (ไม่ซื้อบ้านแต่ซื้อที่ดิน) = $P(\bar{A}B)$ = .02

P (ซื้อบ้านแต่ไม่ซื้อที่ดิน) = $P(A\bar{B})$ = .07

นอกจากนี้ ยังใช้ตอบปัญหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขต่าง ๆ ได้ เช่น

P (ทราบว่าไม่ซื้อที่ดินแต่จะซื้อบ้าน) = P (จะซื้อบ้าน/ไม่ซื้อที่ดิน)

$= P(A/\bar{B}) = P(A\bar{B})/P(\bar{B})$

$= .07/.95 = .074$

เป็นต้น

นอกจากนี้นักศึกษาควรจะได้สังเกตคุณสมบัติอื่น ๆ ด้วย เช่น คุณสมบัติ ความเป็นอิสระกันและความไม่มีผลร่วมกัน (mutually exclusive)

ถ้าถามว่า A และ B เป็นอิสระกันหรือไม่ หรือถามว่าการซื้อที่ดินและการซื้อบ้านเป็นอิสระกันหรือไม่ จากนิยามความเป็นอิสระว่า

ถ้า A และ B เป็นอิสระ $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) \cdot P(B) = (.10)(.05) = .005$

แต่ $P(AB) = .03$

ดังนั้น $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$

A และ B จึงไม่เป็นอิสระกัน

ส่วนคุณสมบัติ mutually exclusive มีว่า ถ้า A และ B ไม่มีผลร่วมกัน P(AB) = 0 แต่ P(AB) = .03 ≠ 0 A และ B จึงมีผลร่วมกัน (ไม่ใช่ mutually exclusive)

คุณสมบัติข้อนี้ดูง่ายมาก คือ ถ้าเหตุการณ์คู่ใดเราสามารถสร้างตารางความน่าจะเป็นร่วมกันได้แล้ว เหตุการณ์คู่นั้นต้องไม่ใช่ mutually exclusive แน่ แต่จะเป็นอิสระหรือไม่นั้นต้อง check อีกที

ถ้าเป็นอิสระกัน $P(AB) = P(A)\,P(B)$

ถ้าไม่เป็นอิสระกัน $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

5.28 ผู้จัดการธนาคารหนึ่งทราบว่าจะมีลูกค้าที่มีคุณสมบัติดีสมควรได้รับเงินกู้เพียง 1 ใน 10 ราย และจะมีลูกค้าที่ยื่นคำร้องขอกู้เงิน 1 ใน 15 ราย และ 90% ของลูกค้าที่ยื่นคำร้องขอกู้เงินจะมีเครดิตเชื่อถือได้ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าที่ยื่นคำร้องคนหนึ่งจะได้รับอนุมัติให้กู้เงิน

	A = ยื่นขอกู้เงิน	$\bar{A}$ = ไม่ยื่นขอกู้เงิน	
B = มีคุณสมบัติครบ	$P(AB) = .0600$	$P(\bar{A}B) = .0400$	.10
$\bar{B}$ = ไม่มีคุณสมบัติครบ	$P(A\bar{B}) = .0067$	$P(\bar{A}\bar{B}) = .8933$	.90
	$\frac{1}{15} = .0667$	$\frac{14}{15} = .9333$	

A = ลูกค้ายื่นขอกู้เงิน

$P(A) = 1/15 = .0667$

B = ลูกค้ามีคุณสมบัติดีสมควรได้รับเงินกู้

$P(B) = .10$

P (คุณสมบัติครบ/ยื่นคำร้องขอกู้) = $P(B/A) = .90$

ดังนั้น P (ลูกค้ายื่นคำร้องและได้รับเงินกู้) = $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$

$= .0667(.90) = .06$

5.29 ผู้จัดการขายสินค้าแห่งหนึ่งพบว่า ถ้าสินค้าของคู่แข่งราคาไม่ต่ำกว่าและใช้งบโฆษณาไม่เกิน 2 ล้านบาท จะมีผลทำให้สินค้าของเขาขายได้ลดลงด้วยโอกาส 2 ใน 10 แต่ถ้าคู่แข่งลดราคาสินค้า จะทำให้จำนวนขายลดลงด้วยโอกาส 5 ใน 10 และถ้าคู่แข่งใช้งบโฆษณาเกิน 2 ล้านบาท จะทำให้จำนวนขายลดลงด้วยโอกาส 7 ใน 10 และถ้าคู่แข่งทั้งลดราคาและใช้เงินโฆษณาเกิน 2 ล้านบาท โอกาสที่จำนวนขายจะลดลงเป็น 8 ใน 10 ถ้าเขาเชื่อว่าคู่แข่งขันมีโอกาส 60% ที่จะใช้งบโฆษณาเกิน 2 ล้านบาท และมีโอกาส 30% ที่จะขายในราคาต่ำกว่าของเขา และสมมติให้ค่าโฆษณาและราคาเป็นอิสระกัน จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) สินค้าของคู่แข่งขันมีราคาต่ำกว่าและใช้เงินโฆษณาเกิน 2 ล้านบาท

(ข) สินค้าของคู่แข่งขันมีราคาต่ำกว่า หรือใช้เงินโฆษณามากกว่า 2 ล้านบาทแต่ไม่ใช่ 2 อย่างพร้อมกัน นั่นคือ ถ้าราคาต่ำกว่าจะใช้เงินค่าโฆษณาต่ำกว่า 2 ล้าน แต่ถ้าราคาไม่ต่ำกว่าจะใช้เงินโฆษณาสูงกว่า

(ค) ราคาของคู่แข่งขันไม่ต่ำกว่าหรือโฆษณาไม่สูงกว่า

วิธีทำ

ให้ A = คู่แข่งลดราคาสินค้าให้ต่ำกว่าของเรา

$\bar{A}$ = คู่แข่งขายสินค้าในราคาไม่ต่ำกว่า

B = คู่แข่งใช้งบโฆษณาเกิน 2 ล้านบาท

$\bar{B}$ = คู่แข่งใช้งบโฆษณาไม่เกิน 2 ล้านบาท

C = จำนวนขายลดลง

$\bar{C}$ = จำนวนขายไม่ลดลง

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีดังนี้

$P(C/\bar{A}\bar{B}) = 2/10$ นั่นคือ $P(\bar{C}/\bar{A}\bar{B}) = 8/10$

$P(C/A) = 5/10$ นั่นคือ $P(\bar{C}/A) = 5/10$

$P(C/B) = 7/10$ นั่นคือ $P(\bar{C}/B) = 3/10$

$P(C/AB) = 8/10$ นั่นคือ $P(\bar{C}/AB) = 2/10$

$P(B) = 6/10$, $P(\bar{B}) = 4/10$

$P(A) = .3$ $P(\bar{A}) = .7$

และ A, B เป็นอิสระกัน

(ก) P (คู่แข่งลดราคาและใช้ค่าโฆษณาเกิน 2 ล้าน)

$= P(AB) = P(A).\ P(B)$ เพราะ A และ B เป็นอิสระกัน

$= (.3)(.6) = .18$

(ข) P (ลดราคาหรือใช้งบค่าโฆษณาเกิน 2 ล้าน แต่ไม่พร้อมกัน)

= P(ลดราคาและใช้งบไม่เกิน 2 ล้าน) + P(ไม่ลดราคา แต่ใช้งบเกิน 2 ล้าน)

$= P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$

$= P(A)\ P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B)$

$= (.3)(.4) + (.7)(.6)$

$= .12 + .42 = .54$

(ค) P (ไม่ลดราคาหรือไม่โฆษณาเกิน 2 ล้านบาท)

= 1 − P(ลดราคาหรือโฆษณาเกิน 2 ล้านบาท)

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\}$

$= 1 - \{.3 + .6 - .18\}$

$= 1 - .72 = .28$

ทฤษฎีของเบย์ส

6.30 กำหนดให้ $P(A) = .5$, $P(B) = .3$, $P(C) = .2$ และเมื่อ A, B, C ได้เกิดขึ้นแล้ว มีเหตุการณ์อีกอันหนึ่งเกิดตามมาคือ X และ $P(X/A) = .6$, $P(X/B) = .8$, $P(X/C) = .4$ จงหา $P(A/X)$, $P(B/X)$, $P(C/X)$

E_i เหตุการณ์	$P(E_i)$	$P(E/E_i)$	$P(E_i \cap E)$	posterior prob.
A	$P(A) = .5$	$P(X/A) = .6$	$P(AX) = .30$	$P(A/X) = 30/62 = .48$
B	$P(B) = .3$	$P(X/B) = .8$	$P(BX) = .24$	$P(B/X) = 24/62 = .39$
C	$P(C) = .2$	$P(X/C) = .4$	$P(CX) = .08$	$P(C/X) = 8/62 = .13$
	1.00		$P(X) = .62$	1.00

การหา joint probability มีวิธีดังนี้

$P(AX) = P(A) \cdot P(X/A) = .5(.6) = .30$

$P(BX) = P(B). P(X/B) = .3(.8) = .24$

$P(CX) = P(C). P(X/C) = .2(.4) = \underline{.08}$

และ $P(X) = P(AX)+ P(BX)+ P(CX) = \underline{.62}$

การหา posterior prob. มีวิธีดังนี้

$P(A/X) = P(AX)/P(X) = 30/62$

$P(B/X) = P(BX)/P(X) = 24/62$

$P(C/X) = P(CX)/P(X) = 8/62$

5.31 บริษัทหนึ่งใช้วิธีเก็บเงินลูกหนี้ค้างชำระ 3 วิธี คือวิธีพบส่วนตัว 60% ติดต่อทางโทรศัพท์ 25% และส่งจดหมายทวงถาม 15% ความน่าจะเป็นที่จะสัมฤทธิผลแต่ละวิธีเป็น .8, .5, .4 ตามลำดับ ถ้าบริษัทเพิ่งได้รับชำระหนี้จากลูกค้าคนหนึ่ง

ก) จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นการทวงถามแบบพบส่วนตัว

ข) จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นการทวงถามทางโทรศัพท์

ค) จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นการทวงถามทางจดหมาย

วิธีทำ

ให้ E_1 = การทวงถามโดยพบส่วนตัว ; $P(E_1) = .60$

E_2 = การทวงถามทางโทรศัพท์; $P(E_2) = .25$

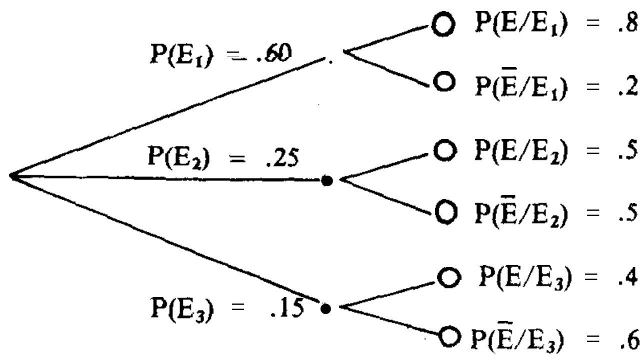
E_3 = การทวงถามทางจดหมาย ; $P(E_3) = .15$

ให้ E คือลูกค้ามาชำระหนี้

$P(E/E_1) = .8$

$P(E/E_2) = .5$

$P(E/E_3) = .4$



(ก) P (ทวงถามแบบพบส่วนตัว/ลูกค้ามาชำระหนี้ 1 ราย)

$= P(E_1/E) = P(EE_1)/P(E)$

ควรสร้างตารางเพื่อหา joint probability และ P(E) และหา posterior prob. สำหรับข้อ (ข) และ (ค) ซึ่งต้องการ $P(E_2/E)$ และ $P(E_3/E)$ ตามลำดับ ดังนี้

E_i	$P(E_i)$	$P(E/E_i)$	$P(E_iE) = P(E_i) \cdot P(E/E_i)$	$P(E_i/E) = P(E_iE)/P(E)$
E_1	.60			
E_2	.25			
E_3	.15			
	.60	.40	$P(E_1E) = .060$	$P(E_1/E) = 460/665 = .72$
	1.00		$P(E) = .665$	1.00

(ก) P(ทวงถามโดยพบส่วนตัว/ลูกค้า 1 รายมาชำระหนี้) = $P(E_1/E) = .72$

(ข) P(ทวงถามทางโทรศัพท์/ลูกค้า 1 รายมาชำระหนี้) = $P(E_2/E) = .19$

(ค) P(ทวงถามโดยส่งจดหมาย/ลูกค้า 1 รายมาชำระหนี้) = $P(E_3/E) = .09$

5.32 ความน่าจะเป็นที่จะสร้างโรงพยาบาลในจังหวัดขอนแก่น, สุราษฎร์ธานี และเชียงราย เป็น .4, .3 และ .3 ตามลำดับ งบประมาณสร้างโรงพยาบาลต้องผ่านการเห็นชอบจากกรรมการ โอกาสที่กรรมการจะเห็นชอบให้สร้าง ณ จังหวัด 3 จังหวัดข้างต้น เป็น .50, .60 และ .75 ตามลำดับ ถ้าผลการพิจารณาของคณะกรรมการเห็นชอบให้สร้างได้ จังหวัดใดจะมีโอกาสสูงสุดที่จะได้โรงพยาบาล

ให้ E_1, E_2, E_3 คือการสร้างโรงพยาบาลในจังหวัดขอนแก่น, สุราษฎร์ธานี และเชียงราย ตามลำดับ

$P(E_1) = .4$, $P(E_2) = .3$, $P(E_3) = .3$

E = คณะกรรมการเห็นชอบให้สร้างได้

$P(E/E_1) = .5$, $P(E/E_2) = .6$, $P(E/E_3) = .75$

(1)	(2)	(3)	(4)	
	(prior prob.)		joint prob. = (2)(3)	
E_i	$P(E_i)$	$P(E/E_i)$	$P(E_i \cap E) = P(E_i) \cdot P(E/E_i)$	Posterior prob. = $P(E_i/E)$
E_1	.4	.50	$P(E_1E) = .200$	$P(E_1/E) = 2001605$
E_2	.3	.60	$P(E_2E) = ,180$	$P(E_2/E) = 180/605$
E_3	.3	.75	$P(E_3E) = .225$	$P(E_3/E) = 2251605$
	1.0		$P(E) = .605$	1.00

E_3 คือจังหวัดเชียงรายมีโอกาสสูงสุดที่จะได้โรงพยาบาล

5.33 ในเมืองหนึ่งมีหนังสือพิมพ์ 2 ฉบับ คือ A และ B 20% ของสำนักงานธุรกิจจะลงโฆษณาในฉบับ A อีก 10% ของสำนักงานนิยมลงในฉบับ B และ 70% ของสำนักงานนิยมลงโฆษณาพร้อมกันทั้ง 2 ฉบับ จากประสบการณ์พบว่า 75% ของโฆษณาซึ่งลงเฉพาะในฉบับ A จะได้คำตอบกลับคืนมามากกว่า 1 คำตอบ 65% ของโฆษณาที่ลงเฉพาะในฉบับ B จะได้คำตอบกลับคืนมามากกว่า 1 คำตอบ และ 90% ของโฆษณาที่ลงพร้อมกันใน 2 ฉบับจะได้คำตอบกลับคืนมามากกว่า 1 คำตอบ ถ้าสำนักงานแห่งหนึ่งได้ลงโฆษณาและได้คำตอบกลับคืนมาเพียง 1 คำตอบ

$P(E_1) = .20,\ P(E_2) = .10,\ P(E_3) = .70$

ให้ E = ได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบ

$\overline{E}$ = ได้คำตอบ 1 คำตอบ หรือน้อยกว่า

$P(E/E_1) = .75,\quad P(\overline{E}/E_1) = .25$

$P(E/E_2) = .65,\quad P(\overline{E}/E_2) = .35$

$P(E/E_3) = .90,\quad P(\overline{E}/E_3) = .10$

โจทย์กำหนดว่าเกิด $\overline{E}$ และให้หา $P(E_3/E)$

P (ลงโฆษณา 2 ฉบับ/มีคำตอบเพียง 1 คำตอบ) $= P(E_3/\bar{E})$

$= P(E_3\bar{E})/P(\bar{E})$

$$P(\bar{E}) = P(E_1\bar{E}) + P(E_2\bar{E}) + P(E_3\bar{E})$$

$$= P(E_1)P(\bar{E}/E_1) + P(E_2)P(\bar{E}/E_2) + P(E_3)P(\bar{E}/E_3)$$

$$= (.2)(.25) + (.1)(.35) + (.7)(.10)$$

$$= .05 + .035 + .07$$

$$= .155$$

$$P(E_3/\bar{E}) = P(E_3\bar{E})/P(\bar{E})$$

$$= .07/.155 = .45$$

5.34 **คณะกรรมการศึกษาการรั่วไหลของรังสีนิวเคลียร์ ได้สรุปว่า อุบัติเหตุมี 3 อย่าง คือ ไฟไหม้ อุปกรณ์บกพร่อง และเนื่องจากมนุษย์ อุบัติเหตุทั้ง 3 อย่างนี้จะไม่เกิดขึ้นพร้อมกัน และมีความน่าจะเป็นของสาเหตุต่าง ๆ เป็น 10%, 40% และ 50% ตามลำดับ และนอกจากนี้ยังพบว่า**

- **ไฟไหม้และรังสีรั่วไหลจะเกิดพร้อมกันด้วยโอกาส .0005**
- **เครื่องขัดข้องและรังสีรั่วไหลจะเกิดพร้อมกันด้วยโอกาส .0010**
- **ความผิดพลาดของมนุษย์และรังสีรั่ว จะเกิดพร้อมกันด้วยโอกาส .0007**

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่รังสีจะรั่วไหลโดยมีสาเหตุจากไฟไหม้, เครื่องมือขัดข้อง และความผิดพลาดของมนุษย์

(ข) จงหาความน่าจะเป็นของการเกิดรังสีรั่วไหล

วิธีทำ ให้ E_1 = อุบัติเหตุไฟไหม้ ; $P(E_1) = .1$

E_2 = อุบัติเหตุอุปกรณ์บกพร่อง ; $P(E_2) = .4$

E_3 = อุบัติเหตุจากมนุษย์ ; $P(E_3) = .5$

E = การเกิดรังสีรั่วไหล

$$P(E_1E) = .0005$$

$$P(E_2E) = .0010$$

$$P \& E) = .0007$$

(ก) P (รังสีรั่วไหล/ไฟไหม้) $= P(E/E_1) = P(E_1E)/P(E_1)$

$= .0005/.1000$

$= .005$

P (รังสีรั่วไหล/เครื่องมือขัดข้อง) $= P(E/E_2)$

$= P(EE_2)/P(E_2)$

$= .0010/.4$

$= .0025$

P (รังสีรั่วไหล/ความผิดพลาดของมนุษย์) $= P(E/E_3)$

$= P(EE_3)/P(E_3)$

$= .0007/.5$

$= .0014$

หาความน่าจะเป็นของการเกิดรังสีรั่วไหล $= P(E)$

$= P(E_1E) + P(E_2E) + P(E_3E)$

$= .0005 + .0010 + .0007$

$= .0022$

5.35 สมาชิกนิตยสารฉบับหนึ่ง มีดังนี้

ผู้อ่านเพศชายอายุ 30 ปีขึ้นไปมี 20%

ผู้อ่านเพศชายอายุต่ำกว่า 30 ปี มี 40%

ผู้อ่านทั้งหมดมีอายุต่ำกว่า 30 ปี มี 70%

(ก) จงหาเปอร์เซ็นต์สมาชิกที่เป็นชาย

(ข) ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มมา 1 ราย และเป็นชายอายุต่ำกว่า 30 ปี

ให้ M = สมาชิกเพศชาย

A = สมาชิกอายุ 30 ปีขึ้นไป

$\bar{A}$ = สมาชิกอายุต่ำกว่า 30 ปี

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้คือ

$P(AM) = .2$

$P(\bar{A}M) = .4$

$P(\bar{A}) = .7$ นั่นคือ $P(A) = .3$

(ก) จงหาเปอร์เซ็นต์สมาชิกที่เป็นเพศชาย = $P(M)$

$$P(M) = P(MA) + P(M\bar{A})$$
$$= .2 + .4 = .6$$

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่สมาชิกที่สุ่มมา 1 คน ซึ่งเป็นเพศชายจะมีอายุต่ำกว่า 30 ปี

$$P(\bar{A}/M) = P(\bar{A}M)/P(M)$$
$$= .4/.6 = 2/3 = .67$$

5.36 ในปีก่อนบริษัทหนึ่งจ้างวิศวกร 12 คน พนักงานขาย 25 คน ผู้ประกาศและโฆษณา 18 คน นักวิเคราะห์ 5 คน ในระหว่างปีมีวิศวกร 3 คน พนักงานขาย 5 คน ผู้ประกาศ 6 คน และนักวิเคราะห์ 2 คน ได้รับการเลื่อนขั้น ถ้าสุ่มพนักงานกลุ่มนี้มา 1 คน ปรากฏว่า ได้รับการเลื่อนขั้นระหว่างปี จงหาโอกาสที่พนักงานนั้นจะเป็น

ก) ผู้ประกาศ ข) นักวิเคราะห์ ค) พนักงานขาย ง) วิศวกร

ให้ E_1 = วิศวกร ; $P(E_1) = 12/60 = 1/5 = .20$

E_2 = พนักงานขาย ; $P(E_2) = 25/60 = 5/12 = .42$

E_3 = ผู้ประกาศ ; $P(E_3) = 18/60 = 3/10 = .30$

E_4 = นักวิเคราะห์ ; $P(E_4) = 5/60 = 1/12 = .08$

E = พนักงานได้รับการเลื่อนขั้นในระหว่างปี

$P(E/E_1)$ = 3112 = .25

$P(E/E_2)$ = 5/25 = .20

$P(E/E_3)$ = 6/18 = .33

$P(E/E_4)$ = 2/5 = .40

ควรสร้างตารางเพื่อหา P(E) และ posterior prob. เพื่อตอบข้อ (ก)-(ง)

E	$P(E_i)$	$P(E/E_i)$	$P(E_i \cap E)$	$P(E_i/E)$
E1	.20	.25	$P(E_1 E)$ = .050	$P(E_1/E)$ = .050/.265 = .19
E_2	.42	.20	$P(E_2 E)$ = .084	$P(E_2/E)$ = .084/.265 = .32
E_3	.30	.33	$P(E_3 E)$ = .099	$P(E_3/E)$ = .099/.265 = .37
E4	.08	.40	$P(E_4 E)$ = .032	$P(E_4/E)$ = .032/.265 = .12
	1.00		P(E) = .265	1.00

ก) P (ผู้ประกาศ/ได้เลื่อนขั้น) = $P(E_3/E)$ = .37

ก) P (นักวิเคราะห์/ได้เลื่อนขั้น) = $P(E_4/E)$ = .12

ค) P (พนักงานขาย/ได้เลื่อนขั้น) = $P(E_2/E)$ = .32

ง) P (วิศวกร/ได้เลื่อนขั้น) = $P(E_1/E)$ = .19

แบบฝึกหัดทบทวน

5.37 คนอายุมากต้องเสียค่าประกันชีวิตสูง แต่คนหนุ่มสาวกลับเสียค่าประกันอุบัติเหตุรถยนต์สูง ดังนั้น ความเสี่ยงภัยและความน่าจะเป็นมีความสัมพันธ์กันอย่างไรในธุรกิจประกันภัย

การประกันชีวิต ใช้หลักว่าถ้าเสียชีวิตก่อนหมดระยะประกัน จะได้จำนวนเงินที่ตกลงไว้ แต่ถ้ายังไม่ตายจนครบอายุประกัน จะได้เบี้ยประกันที่ส่งไปรวมทั้งดอกเบี้ยเล็กน้อย บริษัทประกันชีวิตคิดเบี้ยประกันโดยใช้ตารางสถิติชีพ ซึ่งมีหลักการจากทฤษฎีความน่าจะเป็น คือ จากการเก็บรวบรวมสถิติคนตายจำแนกตามอายุต่าง ๆ ก็พอจะทราบความเสี่ยงหรือโอกาสที่จะมีชีวิตอยู่ จนครบเวลาประกัน คนมีอายุมากย่อมเหลือเวลาน้อยกว่า หรือมีโอกาสตายสูงกว่าคนมีอายุน้อย บริษัทจึงต้องคิดเบี้ยประกันสูงกว่าสำหรับวงเงินประกันที่เท่ากันเพราะมีความเสี่ยงสูงกว่าคนหนุ่มสาวที่บริษัทจะต้องจ่ายสินไหมทดแทนในกรณีที่ตายก่อนครบเวลา ส่วนการประกันอุบัติเหตุ คนหนุ่มสาวจะมีโอกาสประมาทและเกิดอุบัติเหตุสูงกว่าผู้มีอายุกลางคน บริษัทจึงมีความเสี่ยงสูงกว่าที่จะต้องจ่ายสินไหมทดแทน จึงต้องคิดเบี้ยประกันสูง

5.38 ถ้าได้ยินประกาศจากวิทยุว่า "โอกาสที่วันนี้จะมีฝนตกเป็น 80%"
ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้องที่สุด

ก) ฝนจะตก 80% ของเวลาในวันนี้

ข) ฝนตก 80% ของพื้นที่พยากรณ์สำหรับวันนี้

ค) จากอดีต ถ้าลักษณะภูมิอากาศเป็นเช่นนี้จะทำให้ฝนตก 80% ของจำนวนครั้งทั้งหมด

ข้อ (ค) ถูกต้อง

5.39 สมมติว่าเด็กทุกคนมีโอกาสเท่ากันที่จะเกิดในแต่ละวันของสัปดาห์ จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กคนหนึ่งจะเกิด

(ก) วันอังคาร

(ข) วันที่ขึ้นต้นด้วยอักษร S

(ค) ระหว่างวันพุธถึงวันศุกร์

(ง) ความน่าจะเป็นในข้อ (ก)-(ค) เป็นความน่าจะเป็นซึ่งหาโดยวิธีใด?

(ก) P (เด็กเกิดวันอังคาร) = 1/7

(ข) P (เด็กเกิดวันขึ้นต้นด้วยอักษร S) = P (Sunday, Saturday) = 2/7

(ค) P (เด็กเกิดระหว่างวันพุธถึงศุกร์) = P (พุธ, พฤหัส, ศุกร์) = 3/7

(ง) ความน่าจะเป็นในข้อ (ก)-(ค) เป็นความน่าจะเป็นแบบคลาสสิคโดยใช้กฎ $P(A) = n(A)/n$

5.40 สำนักงานซื้อขายที่ดินแห่งหนึ่ง ได้ประมาณราคาขายบ้านของนายดำว่าจะมีราคาสูงขึ้นอีกอย่างน้อย 15% ภายใน 6 เดือนข้างหน้า ด้วยความน่าจะเป็น .60 ส่วนบ้านของนายแดงก็จะมีโอกาส .80 ที่จะขายในราคาสูงกว่าเดิม 15% ใน 6 เดือนข้างหน้า ส่วนนายขาวซึ่งเป็นลูกค้าประจำของสำนักงานนี้และสำนักงานได้ประมาณการว่านายขาวจะมีโอกาส .70 ที่จะซื้อบ้านนายดำและมีโอกาสเท่ากับ .30 ที่จะซื้อบ้านนายแดง ถ้าต่อมาอีก 6 เดือน ราคาบ้านที่นายขาวซื้อได้ขึ้นสูงจากเดิม 15% จงหาความน่าจะเป็นที่นายขาวจะซื้อบ้านของ

(ก) นายดำ (ข) **นายแดง**

E_1 = ซื้อบ้านนายดำ ; $P(E_1) = .7$

E_2 = ซื้อบ้านนายแดง ; $P(E_2) = .3$

E = ราคาบ้านเพิ่มสูงขึ้นภายใน 6 เดือนข้างหน้าอีก 15%

$P(E/E_1) = .60$; $P(E/E_2) = .80$

ต้องการทราบ $P(E_1/E)$ และ $P(E_2/E)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EE_1) + P(EE_2) \\ &= P(E_1) \cdot P(E/E_1) + P(E_2) \cdot P(E/E_2) \\ &= .7(.6) + .3(.8) \\ &= .42 + .24 = .66 \end{aligned}$$

P (ซื้อบ้านจากนายดำ/บ้านราคาสูงขึ้น 15%)

คือ $P(E_1/E) = P(E_1E)/P(E)$

$= .42/.66 = .64$

P (ซื้อบ้านจากนายแดง/บ้านราคาสูงขึ้น 15%)

คือ $P(E_2/E) = P(E_2E)/P(E)$

$= .24/.66$

$= .36$

5.41 พนักงานที่ทำการไปรษณีย์คนหนึ่งพบว่า สาเหตุต่าง ๆ ที่ทำให้จดหมายไม่ถึงผู้รับ คือ

1. ไม่มีรหัสท้องที่

2. ไม่มีที่อยู่ของผู้ส่งจดหมาย

3. ไม่มีชื่อถนน

4. ติดดวงตราไปรษณีย์มากเกินไป

5. ติดดวงตราไปรษณีย์น้อยเกินไป

(ก) สาเหตุ 5 อย่างนี้เป็น "เหตุการณ์" ในความหมายของทฤษฎีความน่าจะเป็นหรือไม่?

(ข) ทุกรายการ "ไม่มีผลร่วมกัน" หรือไม่ หรือมีรายการใดบ้างที่ "มีผลร่วมกัน"

(ก) ทั้ง 5 รายการเป็น "เหตุการณ์" ในความหมายของทฤษฎีความน่าจะเป็น

(ข) มีเฉพาะรายการที่ 4 และ 5 ที่เป็นเหตุการณ์แบบ "ไม่มีผลร่วมกัน" หรือ mutually exclusive เพราะจดหมายแต่ละฉบับจะเป็นได้เพียงอย่างเดียว คือ ติดแสตมป์น้อยเกินไป หรือติดมากเกินไป แต่จดหมายฉบับเดียวกันจะทั้งติดน้อยไปและติดมากไปพร้อมกันไม่ได้ ส่วนรายการอื่น ๆ สามารถเกิดพร้อมกันได้ จึงเป็นเหตุการณ์แบบมีผลร่วมกัน คือ ไม่ใช่ mutually exclusive

5.42 เหตุการณ์ต่อไปนี้คู่ใดบ้างที่ "ไม่มีผลร่วมกัน"

ก) เลือกกลุ่มสตรีเป็นตลาดเป้าหมาย, สตรีกลุ่มนั้นอายุระหว่าง 18-49

ข) ให้รางวัลเพื่อเป็นสิ่งจูงใจแก่คนงานที่ขยัน, มูลค่าของรางวัลมีอิทธิพลต่อความพอใจในการทำงาน

ค) จะเลื่อนขั้นให้พนักงานทุกคน, จะให้โบนัสเฉพาะผู้ทำงานดีเท่านั้น แต่ไม่มีการเลื่อนขั้น

ง) จะเลื่อนขั้นแก่พนักงานทุกคน, จะพิจารณาให้โบนัสพิเศษแก่ผู้มีผลงานดีเด่นด้วย

จ) ต้องการขยายโรงงาน, แต่จะไม่ใช้จ่ายเงินลงทุน

เฉพาะข้อ (ค) และ (จ) เท่านั้นที่ "ไม่มีผลร่วมกัน" เพราะการเลื่อนขั้นทุกคน (นโยบายที่ I) จะไม่ทำพร้อมกับนโยบายที่ II คือจะให้โบนัสเฉพาะผู้ทำงานดีเท่านั้น แต่ไม่มีการเลื่อนขั้น นโยบาย 2 อันนี้ปฏิบัติพร้อมกันไม่ได้

ส่วนข้อ (จ) การขยายโรงงานต้องใช้เงินลงทุน ดังนั้นถ้าขยายโรงงานจะไม่ใช้เงินลงทุนไม่ได้ ต้องเลือกเอา 1 อัน ถ้าเลือกไม่ใช้จ่ายเงินลงทุนก็ต้องไม่เลือกขยายโรงงาน จะทำพร้อมกันไม่ได้

ส่วนข้ออื่น ๆ เหตุการณ์แต่ละคู่ทำพร้อมกันได้ จึงไม่ใช่ mutually exclusive เช่นใน (ก) จะเลือกกลุ่มสตรีเป็นตลาดเป้าหมาย และให้มีอายุระหว่าง 18-49 พร้อมกันได้ ข้อ (ข) การให้รางวัลจูงใจและให้รางวัลมีมูลค่าสูงทำได้พร้อมกัน ข้อ (ง) การเลื่อนขั้นปกติแก่พนักงานทุกคนและให้โบนัสพิเศษแก่ผู้ทำงานดีเด่นทำได้พร้อมกัน

5.43 ถ้าสถิติอุบัติเหตุของรถยนต์และรถบรรทุกในเมืองหนึ่งเป็น .589 และ .342 ตามลำดับ ในขณะที่การเกิดอุบัติเหตุบนทางหลวงของรถยนต์และรถบรรทุกเป็น .507 และ .863 ตามลำดับ

(ก) จงหาความน่าจะเป็นของการเกิดอุบัติเหตุทั้ง 2 ชนิดในเมืองนั้นในแต่ละวัน

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดอุบัติเหตุทั้งบนทางหลวงและในเมืองในแต่ละวัน

(ค) หาความน่าจะเป็นของการเกิดอุบัติเหตุทั้ง 2 ชนิด บนทางหลวง

(ก) ให้ A = อุบัติเหตุรถยนต์ ; $P(A)_{\text{ในเมือง}} = .589$, $P(A)_{\text{ทางหลวง}} = .507$

B = อุบัติเหตุรถบรรทุก ; $P(B)_{\text{ในเมือง}} = .342$, $P(B)_{\text{ทางหลวง}} = .863$

และให้การเกิดอุบัติเหตุทั้ง 2 ประเภทนี้เป็นอิสระกัน

$$
\begin{aligned}
P(\text{เกิดอุบัติเหตุ 2 ชนิดพร้อมกันในเมือง}) &= P(AB)_{\text{ในเมือง}} \\
&= P(A)_{\text{ในเมือง}} \cdot P(B)_{\text{ในเมือง}} \\
&= (.589)(.342) \\
&= .20
\end{aligned}
$$

(ll) P (ไม่เกิดอุบัติเหตุทั้งบนทางหลวงและในเมือง)

$$
\begin{aligned}
&= P(\bar{A}\bar{B})_{\text{ในเมือง}} + P(\bar{A}\bar{B})_{\text{ทางหลวง}} \\
&= (I- .589)(1 - .342) + (1 - .507)(1 - .863) \\
&= (.411)(.658) + (.493)(.137) \\
&= (.27) + (.07) \\
&= .34
\end{aligned}
$$

(f l) P (อุบัติเหตุ 2 ชนิดบนทางหลวง) = $P(AB)_{\text{ทางหลวง}}$

$$
\begin{aligned}
&= (.507)(.863) \\
&= .44
\end{aligned}
$$

5.44 ปริมาณสารพิษในน้ำทิ้งของโรงงาน 6 แห่ง คือ 15, 12, 18, 16, 11, 19 **หน่วยต่อล้าน** (ppm) **ถ้ากฎหมายกำหนดว่าปริมาณน้ำทิ้งจากโรงงานต้องมีสารพิษต่ำกว่า 18 หน่วย**

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่โรงงานเปิดใหม่แห่งหนึ่งจะมีปริมาณสารพิษเกินกำหนด

(ข) ความน่าจะเป็นในข้อ (ก) **หามาโดยวิธีใด (คลาสสิค, ความถี่สัมพัทธ์หรือจิตวิสัย)**

(ค) จะใช้อะไรเป็นเครื่องพิจารณาความเชื่อถือได้ของความน่าจะเป็นในข้อ (ก)

(ก) P (ปริมาณสารพิษเกินกำหนด) = P (18 หน่วยขึ้นไป) = 2/6 = .33

(ข) เป็นความน่าจะเป็นซึ่งหามาโดยความถี่สัมพัทธ์ (relative frequency)

(ค) เนื่องจากความน่าจะเป็นนี้มาจากขนาดตัวอย่างที่เล็กมาก (n = 6) และเป็นข้อมูลจากโรงงานทั่ว ๆ ไป ไม่ใช่มีลักษณะที่เหมือนกับโรงงานใหม่ที่จะขออนุญาตโดยสมบูรณ์ ดังนั้นค่าประมาณที่ได้นี้จึงมีลักษณะคล้ายคลึงกับความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัย

5.45 ในการส่งแบบสอบถามทางไปรษณีย์ของสำนักงานแห่งหนึ่งเป็นเวลาหลายครั้ง รวบรวมสถิติข้อมูลได้ดังนี้

12% ของผู้ได้รับแบบสอบถามจะตอบและส่งคืนให้สำนักงาน

1% ของแบบสอบถามมีข้อผิดพลาดของที่อยู่อาศัย จึงไม่ถึงมือผู้รับ

3% ของแบบสอบถามจะสูญหาย ณ ที่ทำการไปรษณีย์

22% ของแบบสอบถามจะส่งถึงผู้รับซึ่งย้ายที่อยู่

52% ของผู้ย้ายที่อยู่ได้ให้ที่อยู่ใหม่ไว้

(ก) ค่าเปอร์เซ็นต์ของเหตุการณ์ต่าง ๆ เป็นความน่าจะเป็นแบบคลาสสิค, ความถี่สัมพัทธ์หรือจิตวิสัย

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่สำนักงานจะได้รับคืนแบบสอบถาม

(ก) ค่าเปอร์เซ็นต์ของเหตุการณ์ต่าง ๆ รวบรวมจากการสอบถามครั้งก่อน ๆ จึงเป็นความน่าจะเป็นแบบความถี่สัมพัทธ์

(ข) P (ได้รับคืนแบบสอบถาม) = $\frac{12}{100}$ ของแบบสอบถามที่ถึงมือผู้รับ

จำนวนแบบสอบถามที่ไม่ถึงมือผู้รับ คือ

แบบสอบถามที่เขียนที่อยู่ผิดพลาด = .01

แบบสอบถามที่สูญหาย ณ ที่ทำการไปรษณีย์ = .03

48% ของผู้ย้ายที่อยู่ไม่ให้ที่อยู่ใหม่

และมี 22% ที่ย้ายที่อยู่

ดังนั้น แบบสอบถามที่ไม่ถึงผู้ย้ายที่อยู่ใหม่ = .22(.48) = .1056 = .1056

รวม แบบสอบถามที่ไม่ถึงมือผู้รับ = .1456

ดังนั้น แบบสอบถามที่ถึงมือผู้รับ = 1−.1456 = .8544

จะมี 12% ที่ผู้รับตอบคำถามและส่งคืนสำนักงาน

P (ส่งคืนสำนักงาน) = .12(.8544) = .1025

5.46 บริษัทรับเหมาก่อสร้างทราบว่า ในปีที่ผ่านมารายรับของบริษัทได้ลดลง 10% รายรับของบริษัทจากภาครัฐบาลลดลง 12% รายรับจากภาคเอกชนกลับเพิ่มขึ้น 2% ดังนั้นความน่าจะเป็นที่รายได้ของบริษัทจะเพิ่มขึ้นในปีหน้าจะเป็นของภาคเอกชนหรือภาครัฐบาล

รายได้ที่เพิ่มขึ้นเป็นค่าประมาณเชิงจิตวิสัย และจากข้อมูลที่มียังไม่สามารถประมาณความน่าจะเป็นได้

5.47 ถ้า 12% ของคนไข้ในโรงพยาบาลแห่งหนึ่งต้องรับการฉายรังสี X มี 58% ของคนไข้ทั้งหมดเป็นข้าราชการซึ่งจะได้รับการรักษาฟรี จงหาความน่าจะเป็นที่คนไข้ฉายรังสี X ผู้หนึ่งจะไม่ต้องจ่ายค่าฉายรังสี

A = คนไข้เป็นข้าราชการ ; P(A) = .58

B = คนไข้ต้องฉายรังสี X ; P(B) = .12

P (คนไข้เป็นข้าราชการและต้องฉายรังสี) = P(AB)

แต่การเป็นข้าราชการและการฉายรังสีเป็นอิสระกัน ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)\cdot P(B) \\
&= .58(.12) \\
&= .0696
\end{aligned}
$$

5.48 โรงงานผลิตท่อนเหล็กขนาด 3 ม.ม. เมื่อสุ่มสินค้าที่ผลิตมา 1,000 ชิ้น วัดเส้นผ่าศูนย์กลางได้รายละเอียดดังนี้

มี 4 อันที่เส้นผ่าศูนย์กลางต่ำกว่า 2.9 มม.

มี 10 อันที่เส้นผ่าศูนย์กลางสูงกว่า 3.1 มม.

มี 986 อันที่เส้นผ่าศูนย์กลางอยู่ระหว่าง 2.9-3.1 มม.

ถ้าขนาดมาตรฐานคือ 2.9-3.1 มม. จงหาความน่าจะเป็นของการหยิบแบบสุ่มมา 1 ชิ้น และได้ขนาดโตเกินไปหรือเล็กเกินไป

P (มาตรฐาน) = 986/1000

P (ไม่ได้มาตรฐาน) = 1 − 986/1000 = 14/1000 = .014

5.49 เหตุการณ์ต่อไปนี้มีคู่ใดบ้างที่เป็นอิสระกันในเชิงสถิติ

(ก) จำนวนสมาชิกของสหภาพโรงงานผลิตอาหารสำเร็จรูปกับจำนวนพนักงานหญิงในโรงงานนั้น

(ข) จำนวนสตรีที่มีรายได้เกินเดือนละ 5,000 บาท กับจำนวนสตรีสำเร็จปริญญา

(ค) เวลาเป็นวินาทีที่คนงาน (ก) ใช้ประกอบสวิช 1 ตัว กับเวลาเป็นวินาทีที่คนงาน (ข) ใช้ประกอบสวิช 1 ตัว

(ง) จำนวนผู้ฝากเงินแบบใช้เช็ค กับจำนวนผู้ฝากเงินแบบอื่น ๆ ของธนาคารแห่งหนึ่ง

(จ) จำนวนผู้ยื่นสมัครในตำแหน่งผู้จัดการของบริษัทขายเครื่องสำอาง 2 บริษัท ซึ่งอยู่ในเมืองเดียวกัน

ข้อ (จ) เป็นอิสระกันเชิงสถิติ

5.50 ฝ่ายวิจัยของโรงงานหนึ่งได้คิดสูตรอาหารสำเร็จรูป 3 อย่างคือ แป้งทำขนม , ครีมหยอดหน้าขนม และผงสังขยา และประมาณการว่าโอกาสที่ผู้บริหารระดับสูงจะเห็นชอบสำหรับสินค้าตัวที่ 1 คือแป้งทำขนม = .80 และถ้าผู้บริหารเห็นชอบแล้ว สินค้านั้นจะมีโอกาส .50 ที่จะเป็นที่ยอมรับในตลาดทดลอง ส่วนสินค้าตัวที่สองจะได้รับความเห็นชอบจากผู้บริหาร

ด้วยโอกาส 60% และจะมีโอกาส 70% ที่ตลาดทดลองจะยอมรับ และสินค้าตัวที่ 3 จะมีโอกาส 40% ที่จะได้รับความเห็นชอบจากผู้บริหาร และเมื่อได้รับความเห็นชอบแล้ว จะมีโอกาส 90% ที่จะได้รับผลสำเร็จในตลาดทดลอง

ก) จงหาความน่าจะเป็นที่ฝ่ายบริหารจะไม่ยอมรับสินค้าแต่ละชนิด

ข) จงหาความน่าจะเป็นของสินค้าแต่ละชนิดที่ฝ่ายบริหารเห็นชอบให้ผลิตได้ แต่สินค้านั้นไม่เป็นที่ยอมรับในตลาดทดลอง

ก) ให้ A_1, A_2, A_3 คือเหตุการณ์ที่ผู้บริหารยอมรับสินค้าชนิดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

ดังนั้น $P(A_1) = .8,\ P(A_2) = .6,\ P(A_3) = .4$

ดังนั้น $P(\bar{A}_1)$ = P (ผู้บริหารไม่ยอมรับสินค้าชนิดที่ 1) = .2

$P(\bar{A}_2)$ = P (ผู้บริหารไม่ยอมรับสินค้าชนิดที่ 2) = .4

และ $P(\bar{A}_3)$ = P (ผู้บริหารไม่ยอมรับสินค้าชนิดที่ 3) = .6

ข) ให้ B_1, B_2, B_3 คือสินค้าชนิดที่ 1, 2, 3 เป็นที่ยอมรับในตลาดทดลอง

ดังนั้น $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$ คือสินค้าชนิดที่ 1, 2, 3 ไม่เป็นที่ยอมรับในตลาดทดลอง

สินค้าชนิดที่ 1

$$P(B_1/A_1) = .5,\quad P(\bar{B}_1/A_1) = .5,\quad P(A_1) = .8$$

$$P(A_1\bar{B}_1) = P(A_1)\cdot P(\bar{B}_1/A_1) = .8(.5) = .40$$

สินค้าชนิดที่ 2

$$P(B_2/A_2) = .7,\quad P(\bar{B}_2/A_2) = .3,\quad P(A_2) = .6$$

$$P(A_2\bar{B}_2) = P(A_2)\cdot P(\bar{B}_2/A_2) = (.60)(.3) = .18$$

สินค้าชนิดที่ 3

$$P(B_3/A_3) = .9, \quad P(\bar{B}_3/A_3) = .1, \quad P(A_3) = .40$$

$$P(A_3\bar{B}_3) = P(A_3)\ P(\bar{B}_3/A_3) = (.40)(.10) = .04$$

5.51 โรงงานผลิตเครื่องอีเล็กโทรนิกจะขยายโรงงานถ้าเกิดเหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 อย่างคือ

(1) ถ้าจำนวนขายเพิ่ม 50% จากระดับปัจจุบัน หรือ

(2) ถ้าได้รับการสั่งซื้อเป็นจำนวนมากจากภาครัฐบาลฝ่ายบริหารได้ประมาณความเป็นไปได้ดังนี้

(1) ความน่าจะเป็นที่จำนวนขายจะเพิ่มจากระดับเดิม 50% ภายใน 1 ปี = .10 และความน่าจะเป็นที่จะได้รับการสั่งซื้อเป็นจำนวนมากจากภาครัฐบาลภายใน 1 ปี = .05

(2) ความน่าจะเป็นที่จำนวนขายจะเพิ่มจากเดิม 50% ภายใน 2 ปี = .25 และความน่าจะเป็นที่จะได้รับการสั่งซื้อจำนวนมากจากภาครัฐบาลภายใน 2 ปี = .20

(3) ความน่าจะเป็นที่จำนวนขายจะเพิ่มจากเดิม 50% ภายใน 3 ปี = .40 และความน่าจะเป็นที่จะได้รับการสั่งซื้อจำนวนมากจากภาครัฐบาลภายใน 3 ปี = .45

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่จะขยายโรงงานในปีที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่จะขยายโรงงาน ภายใน 3 ปี

ให้ A_1, A_2, A_3 คือจำนวนขายเพิ่มสูงขึ้นจากเดิม 50% ภายใน 1 ปี, 2 ปี และ 3 ปี ตามลำดับ

และ B_1, B_2, B_3 คือได้รับการสั่งซื้อจำนวนมากจากภาครัฐบาลภายใน 1 ปี, 2 ปี และ 3 ปี ตามลำดับ

$$P(A_1) = .10, \quad P(A_2) = .25, \quad P(A_3) = .40$$

$$P(B_1) = .05, \quad P(B_2) = .20, \quad P(B_3) = .45$$

เนื่องจาก A และ B ไม่เกิดพร้อมกันในปีเดียวกัน

ดังนั้น A และ B ไม่มีผลร่วมกัน และ $A \cap B = \Phi$

$P(AB) = 0$