11.27 สถิติค่าบำรุงรักษาเครื่องบันทึกและเก็บเงินแบบอัตโนมัติของร้านสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง จำนวน 6 เครื่อง มีดังนี้

อายุ (5) = x	2	1	3	2	1	3
ค่าบำรุงรักษา = Y	70	40	100	80	30	100

ก) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

ข) จงทดสอบว่าอายุและค่าบำรุงรักษาไม่มีความสัมพันธ์กัน, $\alpha = .05$

$n = 6,\ \Sigma X = 12,\ \bar{X} = 2,\ \Sigma X^2 = 28,\ \Sigma(X - \bar{X})^2 = 4$

$\Sigma Y = 420,\ \bar{Y} = 70,\ \Sigma Y^2 = 33800,\ \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 4400$

$\Sigma XY = 970,\ \Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 130$

$SSR = \{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\}^2/\Sigma(X - \bar{X})^2 = (130)^2/4 = 4225$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 4400$

$r^2 = SSR/SST = 4225/4400 = .96023$

ก) $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{.96} = .9799$

ข) การทดสอบว่า อายุของความสัมพันธ์ไม่มีความสัมพันธ์กัน ทำได้ 2 วิธีคือ การทดสอบ $Ho : \beta = 0,\ Ha : \beta \neq 0$ ในข้อ 11.14 ได้

$T = b/S_b = 9.8276,\ t_{.025,4} = \pm 2.776$

$T = 9.8276 > 2.776$ จึงปฏิเสธ Ho ยอมรับ $Ha : \beta \neq 0$ และสรุปว่า X และ Y มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น หรือสมการเชิงเส้น $\hat{Y} = 5 + 32.5X$ ใช้พยากรณ์ค่า Y (ค่าซ่อมแซม) ได้ดี อีกวิธีหนึ่งคือ การทดสอบสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ดังนี้

$Ho : \rho = 0,\ Ha : \rho \neq 0,\ \alpha = .05,\ t_{.025,4} = \pm 2.776$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ $T = \sqrt{\dfrac{r^2(n-2)}{(1-r^2)}} = \sqrt{\dfrac{.96023\,(4)}{.03977}}$

$= \sqrt{96.578} = 9.8274$

T = 9.8274 > 2.776 จึงปฏิเสธ Ho, ยอมรับ Ha : $\rho \neq 0$ และสรุปว่า อายุการใช้งานและค่าบำรุงรักษามีสหพันธ์แบบเชิงเส้น

พึงสังเกตว่า ค่าสถิติ T จาก 2 วิธีจะเท่ากัน และมีค่าวิกฤตเท่ากัน

11.28 **X คือ GPA ระดับมัธยมปลาย Y คือ GPA ระดับมหาวิทยาลัย และกำหนดให้**

$\Sigma X = 32.2$, $\Sigma Y = 30$, $\Sigma XY = 98.32$

$\Sigma X^2 = 105.74$, $\Sigma Y^2 = 91.90$, $n = 10$

fl) **จงหาค่า** r

ข) จงทดสอบว่า x **และ** Y **มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ โดยใช้** $\alpha = .05$

$\Sigma(X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n = 2.056$

$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n = 1.90$

$\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = \Sigma XY - (XX)(\Sigma Y)/n = 1.72$

$SSR = \Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})^2/\Sigma(X - \bar{X})^2 = 1.4389$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 1.90$

$r^2 = SSR/SST = 0.75732$

ก) $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0.75732} = .8702$

ข) Ho : $\rho = 0$, Ha : $\rho \neq 0$, a = .05

$t_{.025,8} = \pm 2.306$

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{.75732\ (8)}{1 - .75732}} = \sqrt{\frac{6.05856}{.24268}}$$

$$= \sqrt{24.9652} = 4.996$$

T = 4.996 > 2.306 จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า $\rho \neq 0$

11.29 ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความถนัดและจำนวนผลผลิตต่อชั่วโมงของคนงานในโรงงานหนึ่ง ได้ข้อมูลโดยสรุป ดังนี้

$\Sigma X = 550, \Sigma Y = 680, n = 10$

$\Sigma XY = 45{,}900, \Sigma X^2 = 38{,}500, \Sigma Y^2 = 56{,}000$

โดยมี X = **คะแนนความถนัด,** Y = **ผลผลิตต่อชั่วโมง**

ก) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

ข) จงทดสอบว่า คะแนนความถนัด และผลผลิตต่อชั่วโมง มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ โดยใช้ $\alpha = .02$

ข้อมูลนี้ คือโจทย์เดิม ข้อ 11.16 ซึ่งมี

$\Sigma(X - \overline{X})^2 = 8250, \Sigma(Y - \overline{Y})^2 = 9760, \Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = 8500$

ดังนั้น $SSR = (8500)^2/8250 = 8757.5757$

และ $SST = 9760$

ดังนั้น $r^2 = SSR/SST = .89729, 1 - r^2 = .10271$

ก) $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{.89729} = .94725$

ข) $Ho : \rho = 0, Ha : \rho \neq 0, \alpha = .02, t_{.01,8} = \pm 2.896$

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{.89729\ (8)}{.10271}} = \sqrt{69.8892}$$

$$= 8.3599$$

$T = 8.359 > 2.896$ จึงปฏิเสธ Ho และยอมรับ $Ha : \rho \neq 0$

นั่นคือ คะแนนความถนัด และผลผลิตต่อชั่วโมงมีสหสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้น

11.30 จำนวนวันหยุดงานในปีที่ผ่านมา (Y) และจำนวนปีที่เข้าทำงาน (X) ของพนักงานที่สุ่มมา 10 คน จากบริษัทขนาดใหญ่แห่งหนึ่ง มีดังนี้

Y	2	0	5	6	4	9	2	15	0	7
X	7	8	2	3	5	4	6	10	4	11

ก) **จงสร้าง** scatter diagram

ข) **จงสร้างสมการกำลังสองน้อยที่สุด โดยให้** Y **เป็นตัวแปรพึ่งพา**

ค) **จงประมาณจำนวนวันหยุดงานของพนักงานผู้หนึ่งซึ่งทำงานมา 4 ปี**

ง) **จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์**

จ) **จงทดสอบว่า** X **และ** Y **ไม่มีสหสัมพันธ์กัน โดยใช้** $\alpha = .01$

$n = 10,\ \Sigma X = 60,\ \bar{X} = 6,\ \Sigma X^2 = 440,\ \Sigma(X - \bar{X})^2 = 80$

$\Sigma Y = 50,\ \bar{Y} = 5,\ \Sigma Y^2 = 440,\ \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 190$

$\Sigma XY = 337,\ \Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 37$

$b = 37/80 = 0.4625$

$a = 5 - 0.4625\,(6) = 2.225$

ข) สมการถดถอยคือ $Y = 2.225 + 0.4625\,X$

ค) เมื่อ $X = 4,\ \hat{Y} = 2.225 + .4625\,(4)$

$= 4.075$ วัน

ง) $SSR = (37)^2/80 = 17.1125$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 190$

$r^2 = SSR/SST = 0.09,\ (1 - r^2) = .91$

$r = \sqrt{.09} = .30 =$ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

จ) $Ho: \rho = 0,\ Ha: \rho \neq 0,\ \alpha = .01,\ t_{.005,8} = 3.355$

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n - 2)}{1 - r^2}} = \sqrt{\frac{(.09)\,(8)}{91}} = \sqrt{.79} = 0.89$$

$T = 0.89 < 3.355$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ นั่นคือ $\rho = 0$ หรือ X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์กัน (สหสัมพันธ์ไม่มีนัยสำคัญ)

11.31 จำนวนสัปดาห์ที่เข้าทำงาน และจำนวนลูกค้าที่พนักงานสามารถให้บริการใน 1 ชั่วโมง ของพนักงานเสริฟอาหาร 5 คน จากภัตตาคารหนึ่ง มีดังนี้

X = จำนวนสัปดาห์ที่เข้าทำงาน	4	7	2	12	5
Y = จำนวนลูกค้าที่สามารถให้บริการต่อชั่วโมง	10	18	10	28	14

ก) จงสร้างสมการถดถอย

ข) จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, a = .05

ค) เมื่อ $x = 10$, **จงหาช่วงเชื่อมั่น** 95% **ของ** $\mu_{Y/X}$

ง) ค่า ρ **ต่างจาก** 0 **อย่างมีนัยสำคัญที่** a = .05 **ไหม?**

$n = 5,\ \Sigma X = 30,\ \bar{X} = 6,\ \Sigma X^2 = 238,\ \Sigma(X - \bar{X})^2 = 58$

$\Sigma Y = 80,\ \bar{Y} = 16,\ \Sigma Y^2 = 1504,\ \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 224$

$\Sigma XY = 592,\ \Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 112$

$b = 112/58 = 1.931$

$a = 16 - (1.931)(6) = 4.4138$

ก) สมการถดถอยคือ $\hat{Y} = 4.4138 + 1.931X$

$SSR = (112)^2/58 = 216.27586$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 224$

$r^2 = SSR/SST = .9655172, \; 1 - r^2 = .03448$

$r = \sqrt{r^2} = .9826$

$MSE = (SST - SSR)/(n - 2)$

$= 7.72414/3 = 2.5747$

$S_{Y/X} = \sqrt{MSE} = \sqrt{2.5747} = 1.60459$

$S_b = S_{Y/X}/\sqrt{\Sigma(X - \bar{X})^2} = 0.21069$

ข) Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$, a = .05

$t_{.025,3} = \pm 3.182$

$T = b/S_b = 1.931/.21069 = 9.165$

T = 9.165 > 3.182 จึงปฏิเสธ Ho, ยอมรับ $\beta \neq 0$

นั่นคือ x และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้น

fl) เมื่อ X = 10, $\hat{Y} = 4.4138 + 1.931\ (10)$

$= 23.7238$

$$S_{\hat{Y}} = S_{Y/X}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}}$$

$$= 1.60459\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(10 - 6)^2}{58}}$$

$$= 1.10689$$

95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{Y/X}$ คือ

$\hat{Y} \pm t_{.025,(n-2)}(S_{\hat{Y}})$

$= 23.7238 \pm (3.182)\ (1.10689)$

$= 23.7238 \pm 3.522$

$= 20.2018,\ 27.2458$

ง) Ho : $\rho = 0$, Ha : $\rho \neq 0$, $t_{3,.025} = \pm 3.182$

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n-2)}{1 - r^2}} = \sqrt{\frac{.9655172\ (3)}{.03448}} = \sqrt{84.0067}$$

$= 9.1655$

$T = 9.1655 > 3.182$ จึงปฏิเสธ Ho ยอมรับว่า $\rho \neq 0$

11.30 ให้ X คือจำนวนปีที่ทำงาน, Y = คะแนนผลงาน

X	5	6	5	6	7	8	7	8	9	9
Y	8	9	6	7	4	7	5	6	3	5

ก) จงสร้างสมการกำลังสองน้อยที่สุด

ข) จงหาค่า r

ค) จงทดสอบว่า ρ เป็น 0 หรือไม่? $\alpha = .01$

$n = 10,\ \Sigma X = 70,\ \bar{X} = 7,\ \Sigma X^2 = 510,\ \Sigma(X - \bar{X})^2 = 20$

$\Sigma Y = 60,\ \bar{Y} = 6,\ \Sigma Y^2 = 390,\ \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 30$

$\Sigma XY = 405,\ \Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = -15$

$b = -15/20 = -0.75$

$a = 6 + .75(7) = 0.75$

ก) สมการกำลังสองน้อยที่สุด คือ

$\hat{Y} = 0.75 - 0.75\, X$

ข) $SSR = (-15)^2/20 = 11.25$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 30$

$r^2 = SSR/SST = 0.375,\ 1 - r^2 = ,625$

$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{.375} = -.61237$

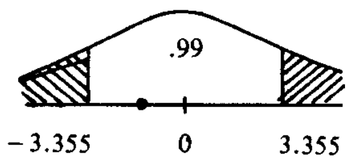
ค) Ho : $\rho = 0$, Ha : $\rho \neq 0$, $\alpha = .01$

$t_{.005,8} = \pm 3.355$

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n-2)}{1-r^2}} = \sqrt{\frac{3.75(8)}{.625}} = \sqrt{4.8} = -2.19$$

(T มีค่าติดลบ เพราะ b หรือ $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ มีค่าติดลบ)

T = −2.19 ไม่อยู่ในเขตวิกฤต ซึ่งยอมรับ Ho ว่า $\rho = 0$



11.31 X คือจำนวนชั่วโมงที่ศึกษาวิชาสถิติ Y คือคะแนนสอบวิชาสถิติ

X	9	11	14	4	6	6
Y	38	67	49	12	10	24

ก) จงสร้างสมการถดถอย

ข) จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$, $\alpha = .01$

A) จงหาค่า r

ง) จงทดสอบ Ho : $\rho = 0$, Ha $\rho > 0$, $\alpha = .05$

จ) x อธิบายความผันแปรของ Y ได้เพียงไร?

$n = 6$, $\Sigma X = 50$, $\bar{X} = 8.3333$, $\Sigma X^2 = 486$, $\Sigma(X - \bar{X})^2 = 69.3333$

$\Sigma Y = 200$, $\bar{Y} = 33.3333$, $\Sigma Y^2 = 9154$, $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 2487.3334$

$\Sigma XY = 2017$, $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 350.3334$

$b = 350.3334/69.3333 = 5.05289$

$a = 33.3333 - 5.05289\ (8.3333) = -8.7739$

n) สมการถดถอยคือ

$\hat{Y} = -8.7739 + 5.05289\ X$

$SSR = (350.3334)^2/69.3333 = 1770.1954$

$SST = 2487.3334 = \Sigma(Y - \bar{Y})^2$

$r^2 = SSR/SST = .711684$, $1 - r^2 = .288316$

ค) ดังนั้น $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{.711684} = .8436$

จ) $r^2 = 711684$ หมายความว่า X คือ จำนวนชั่วโมงที่ศึกษา อธิบายความผันแปรของ-Y คือคะแนนสอบได้ 71 .1 7%

$SSE = SST - SSR = 717.138$

$MSE = SSE/(n - 2) = 717.138/4 = 179.2845$

ข) $Ho : \beta = 0$, $Ha : \beta \neq 0$, $a = .01$

$f_{.01,1,4} = 21.20$

$F = MSR/MSE = SSR/MSE = 1770.1954/179.2845$

$= 9.87$

$F = 9.87 < 21.20$ จึงปฏิเสธ Ho ไม่ได้ การยอมรับ $\beta = 0$
หมายความว่า ยังมีหลักฐานไม่พอเพียงที่จะแสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

ง) $Ho : \rho = 0$, $Ha : \rho > 0$, $a = .05$, $t_{4,.05} = 2.132$

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n - 2)}{1 - r^2}} = \sqrt{\frac{.711684\ (4)}{.288316}} = \sqrt{9.87} = 3.142$$

$T = 3.142 < 2.132$ จึงยอมรับ Ho ว่า $\rho = 0$ นั่นคือ X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

11.32 Y = ผลผลิตถั่วเหลือง, X = ปริมาณน้ำในระบบชลประทาน

X	0	2	4	1	3	5
Y	20	28	32	25	30	31

$n = 6$, $\Sigma X = 15$, $\bar{X} = 2.5$, $\Sigma X^2 = 55$, $\Sigma(X - \bar{X})^2 = 17.5$

$\Sigma Y = 166$, $\bar{Y} = 27.6667$, $\Sigma Y^2 = 4694$, $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 101.3334$

$\Sigma XY = 454$, $\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 39$

$b = 39/17.5 = 2.22857$

$a = 27.6661 - (2.22857)(2.5) = 22.09527$

f l) สมการถดถอยคือ

$\hat{Y} = 22.095272 + 2.22857 X$

ข) ถ้าเพิ่มน้ำในระบบชลประทาน 1 หน่วย จะมีผลให้ผลผลิตเปลี่ยนแปลงหรือไม่?

$b = 2.22857$ หมายความว่า ถ้า X คือปริมาณน้ำในระบบชลประทานเพิ่ม 1 หน่วย จะมีผลทำให้ Y คือ ผลผลิตถั่วเหลืองเพิ่มขึ้น 2.22857 หน่วย

ค) จงหาค่า r^2 และอธิบายความหมาย

$SSR = (39)^2/17.5 = 86.914285$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 101.3334$

ดังนั้น $r^2 = SSR/SST = .8577$, $1 - r^2 = .14229$

หมายความว่า ปริมาณน้ำในระดับชลประทาน (X) อธิบายความผันแปรของผลผลิต (Y) ได้ 85.77%

ง) จงทดสอบว่าตัวแปรคู่นี้ไม่มีความสัมพันธ์กัน $\alpha = .01$

$Ho : \beta = 0$, $Ha : \beta \neq 0$, $\alpha = .01$, $f_{.01,1,4} = 21.20$

$SSE = SST - SSR = 14.41912$

$MSE = SSE/(n-2) = 14.41912/4 = 3.60478$

$F = SSR/MSE = MSR/MSE$

$= 86.914285/3.60478$

$= 24.11$

$F = 24.11 > 21.20$ จึงปฏิเสธ Ho, ยอมรับ Ha : $\beta \neq 0$

และสรุปว่า ผลผลิต และปริมาณน้ำมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

จ) **เมื่อ** $X = 5$ **จงหาช่วงเชื่อมั่นของ** $\mu_{Y/X}$ **และ** Y_a, $\alpha = .05$

เมื่อ $X = 5$, $\hat{Y}_a$ หรือ $\hat{Y} = 22.095272 + 2.22857(5)$

$= 33.238$

$$S_{\hat{Y}} = S_{Y/X}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}}$$

$$= \sqrt{3.60478\left(\frac{1}{6} + \frac{(5 - 2.5)^2}{17.5}\right)}$$

$$= 1.374$$

$$S_{\hat{Y}_a} = \sqrt{MSE\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}\right)}$$

$$= \sqrt{3.60478\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{(5 - 2.5)^2}{17.5}\right)} = 2.3437$$

$t_{.025,4} = 2.776$

ดังนั้น 95 % ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{Y/X}$ เมื่อ $x = 5$ คือ

$33.238 \pm (2.776)\ (1.374)$

$= 33.238 \pm 3.814$

$= 29.424,\ 37.052$

และ 95 % ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a เมื่อ $x = 5$ คือ

$33.238 \pm (2.776)\ (2.3437)$

$= 33.238 \pm 6.506$

$= 26.732,\ 39.744$

11.33 X = ปริมาณปุ๋ยไนโตรเจน, Y = ผลผลิตข้าว

$n = 20$, $\Sigma X = 230$, $\Sigma X^2 = 3144$

$\Sigma Y = 260$, $\Sigma Y^2 = 3904$, $\Sigma XY = 3490$

ดังนั้น $\Sigma(X - \bar{X})^2 = 499$, $\bar{X} = 11.5$

$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 524$, $\bar{Y} = 13$

$\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 500$

$b = 500/499 = 1.002004$

$$a = 13 - \left(\frac{500}{499}\right)(11.5) = 1.4769$$

ก) สมการถดถอยที่ต้องการคือ

$Y = 1.4769 + 1.002004\,X$

ข) จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta > 0$, a = .01

$SSR = (500)^2/499 = 501.002$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 524$

$SSE = SST -- SSE = 22.998$

$MSE = SSE/(n - 2) = 22.998/18 = 1.2776$

$S_{Y/X} = \sqrt{MSE} = 1.130339$

$$S_b = \sqrt{\frac{MSE}{\Sigma(X - \bar{X})^2}} = 0.0506$$

Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta > 0$, a = .01, $t_{.01,18} = 2.552$

$T = b/S_b = 1.00204/.0506$

$= 19.8$

T = 19.8 > 2.552 จึงปฏิเสธ Ho, ยอมรับว่า $\beta > 0$ นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่างปุ๋ยและไนโตรเจนเป็นแบบเชิงเส้น และมีความลาดชันเป็นบวก คือ เพิ่มปุ๋ยจะเพิ่มผลผลิต

ค) จงทดสอบ Ho : $\rho = 0$, Ha : $\rho \neq 0$, a = .10

$$T = \sqrt{\frac{r^2(n \quad 2)}{1 - r^2}}$$

r^2 = SSR/SST = .9561, $(1 - r^2)$ = .0439

$$T = \sqrt{\frac{.9561\ (18)}{.0439}} = \sqrt{392.027} = 19.8$$

$t_{.05,18} = \pm 1.734$

T = 19.8 > 1.734 จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า $\rho \neq 0$

ง) จงหาช่วงเชื่อมั่น 98% ของ β

ช่วงเชื่อมั่นของ $\beta = b \pm t_{\alpha/2,(n-2)} \cdot S_b$

b = 1.002, $t_{.01,18} = \pm 2.552$, S_b = .0506

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 98% ของ β คือ

1.002 ± (2.552) (.0506)

= 1.002 ± .129

= ,873, 1.131

11.34 ในทางธุรกิจ เราทราบว่า ถ้าซื้อสินค้าจำนวนมาก ราคาต่อหน่วยจะลดลงดังข้อมูลข้างล่าง โดยมี X = **ปริมาณสินค้าที่ซื้อ,** Y = **ราคาต่อหน่วย**

X	1	2	3	4	5
Y	10	8	7	6	4

$n = 5,\ \Sigma X = 15,\ \overline{X} = 3,\ \Sigma X^2 = 55,\ \Sigma(X - \overline{X})^2 = 10$

$\Sigma Y = 35,\ \overline{Y} = 7,\ \Sigma Y^2 = 265,\ \Sigma(Y - \overline{Y})^2 = 20$

$\Sigma XY = 91,\ \Sigma(X - \overline{X})(Y \quad \overline{Y}) = -14$

$b = -14/10 = -1.4$

$a = 7 + 1.4\ (3) = 11.2$

ก) จงหาจุดตัดที่แกน Y **และความลาดชันของเส้นถดถอย**

เส้นถดถอยจะตัดแกน Y ที่ $a = 11.2$ และมีความลาดชัน $= b = -1.4$

ข) จงทดสอบ $Ho : \beta = 0,\ Ha : \beta \neq 0,\ a = .05$

$SSR = (-14)^2/10 = 19.6,\ SST = \Sigma(Y - \overline{Y})^2 = 20,\ SSE = 0.4$

$SSE = SSE/(n \quad 2) = 0.4/3 = 0./3333$

$Ho : \beta = 0,\ Ha : \beta \neq 0,\ a = .05,\ f_{1,3,.05} = 10.13$

$F = SSR/MSE = MSR/MSE$

$= 19.6/.13333 = 147$

$F = 147 > 10.13$ จึงปฏิเสธ Ho, ยอมรับว่า $\beta \neq 0$

ค) จงหาค่า r

$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{SSR/SST} = \sqrt{.98} = -0.9899$

ง) มีหลักฐานเพียงพอจะปฏิเสธว่า ไม่มีความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y หรือไม่?

จากข้อ (ข) ปฏิเสธ Ho และยอมรับว่า $\beta \neq 0$ แสดงว่า X และ Y มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

11.35 ให้ X คือคะแนน GPA ปีสุดท้ายของผู้จบมหาวิทยาลัย

Y คือเงินเดือนเริ่มต้นของบัณฑิต 30 คน และมี computor print out **ดังนี้**

MEANS AND STANDARD DEVIATIONS

X : 2.83833 + -0.44841 Y : 10740.66667 ± 1967.65248

CORRELATIONS

PEARSON : 0.827368 SPEARMAN : 0.933515 KENDALL : 0.799219

LINEAR REGRESSION OFY ON X

SLOPE : 3630.56128 + -- 465.76874

INTERCEPT : 435.92357 + -1337.85967

S(Y/X) : 1124.71499

ANALYSIS OF VARIANCE : F(1,28) = 60.75847

il. **จงหาสมการถดถอย**

สมการถดถอย คือ Y = 435.92357 + 3630.56128 X

ข. จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของ β

95% ช่วงเชื่อมั่นของ β คือ $b \pm t_{\alpha/2,(n-2)} (S_b)$

$b = 3630.56128$, $t_{.025,28} = \pm 2.048$, $S_b = 465.76874$

ดังนั้น ช่วงเชือมัน 95% ของ β คือ

$$3630.56128 \pm (2.048)\ (465.76874)$$

$$= 3630.56128 \pm 953.89437$$

$$= 2676.6669,\quad 4584.4555$$

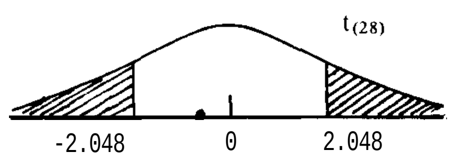
ค. จะปฏิเสธ Ho : β = 4000 **ที่** a = .05 **ได้ไหม?**

Ho : $\beta = 4000$, Ha : $\beta \neq 4000$, $\alpha = .05$, $t_{025,28} = \pm 2.048$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$T = \frac{b - \beta'}{S_b} = \frac{3630.56128 - 4000}{465.16874}$$

$$= -0.7932$$



T = -0.7932 ไม่อยู่ในเขตวิกฤต จึงยอมรับว่า $\beta = 4000$

ง. จะปฏิเสธ Ho : $\mu_{Y/X_0} = 11{,}500$ เมื่อ $X_0 = 2.75$ ไหม? $\alpha = .05$

$$\hat{Y}_{X_0=2.75} = 435.92357 + 3630.56128\,(2.75)$$

$$= 10419.966$$

$$S_{\hat{Y}} = S_{Y/X}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}}$$

$S_{Y/X} = 1124.71499$, $n = 30$, $X_0 = 2.75$, $\bar{X} = 2.83833$

$S_X = .44841$ ดังนั้น $S_X^2 = (.44841)^2$

แต่ $S_X^2 = \dfrac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n-1}$, ดังนั้น $\Sigma(X - \bar{X})^2 = (n - 1)\,(S_X^2)$

$$= (29)\,(.44841)^2 = 5.8310735$$

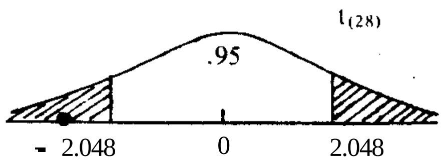
$$S_{\hat{Y}} = 1124.71499\sqrt{\frac{1}{30} + \frac{(2.75 - 2.83833)^2}{5.8310735}} = 209.4245$$

Ho : $\mu_{Y/X_0} = 11{,}500$, Ha : $\mu_{Y/X_0} \neq 11{,}500$

$a = .05$, จะปฏิเสธ H o เมื่อ $|T| > t_{28,\,.025} = \pm 2.048$

$$T = \frac{\hat{Y} - \mu_{Y/X_0}}{S_{\hat{Y}}} = \frac{10{,}419.966 \quad 11{,}500}{209.4245} = -5.157$$

T = -5.157 อยู่ในเขตวิกฤต จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า $\mu_{Y/X_0} = 2.75$ ไม่ใช่ 11,500



ฉ. GPA อธิบายความผันแปรของเงินเดือนเริ่มต้นได้กี่เปอร์เซนต์

r = Pearson Correlation Coeff. = .827368

$r^2 = (.827368)^2 = .6845373$

นั่นคือ GPA (X) อธิบายความผันแปรของเงินเดือนเริ่มต้น (Y) ได้ 68.45%

a. **จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ_{Y/X_0} เมื่อ $X_0 = 2.75$**

95% ช่วงเชื่อมั่นของ μ_{Y/X_0} , $X_0 = 2.75$

$= \hat{Y} \pm t_{.025,28} (S_{\hat{Y}})$

$= 10{,}419.966 \pm (2.048)(209.4245)$

$= 10{,}419.966 \pm 418.901 = 9991.065$ และ $10{,}848.867$

11.36 **กำหนดให้** $a = 7.73750$, $b = 24.77500$, $MSE = 27.99583$

$n = 8$, $\overline{X} = 5.5$, $\Sigma(X - \overline{X})^2 = 40.0$, $S^2_{\hat{Y}}$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ X_0 ดังนี้

X_0	5	6	7
$S^2_{\hat{Y}}$	3.674	3.674	5.074

ก) **เหตุใด $S^2_{\hat{Y}}$ เมื่อ $X_0 = 7$ จึงต่างจาก $X_0 = 5$, $X_0 = 6$**

เพราะว่า $S^2_{\hat{Y}} = S^2_{Y/X}\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}\right)$

ถ้า X_0 ต่างจาก $\overline{X}$ มาก จะทำให้ $(X_0 - \overline{X})^2$ มีค่าสูง

เมื่อ $X_0 = 5$, $(X_0 - \overline{X})^2 = (5 - 5.5)^2 = (-.5)^2 = .25$

เมื่อ $X_0 = 6$, $(X_0 - \overline{X})^2 = (6 - 5.5)^2 = (.5)^2 = .25$

ado $X_0 = 7$, $(X_0 - \overline{X})^2 = (7 - 5.5)^2 = (1.5)' = 2.25$

เมื่อ $X_0 = 7$ จะให้ $(X_0 - \overline{X})^2$ สูงสุด จึงทำให้ $S^2_{\hat{Y}}$ สูงสุด

และเมื่อ $X_0 = 5$ และ $X_0 = 6$ มีค่า $(X_0 - \overline{X})^2$ เท่ากัน

จึงมีค่า $S^2_{\hat{Y}}$ เท่ากัน

ข) จงแสดงว่า เมื่อ $X_0 = 6$, $S^2_{\hat{Y}} = 3.674$

เมื่อ $X_0 = 6$, $S^2_{\hat{Y}} = 27.99583 \left(\frac{1}{8} + \frac{(6 - 5.5)^2}{40}\right)$

$= (27.99583)\ (.13125)$

$= 3.674$

11.37 เหตุใดเมื่อทดสอบ $Ho : \beta = 0, Ha : \beta \neq 0$ **โดยใช้** F-test **จึงเป็นการทดสอบแบบด้านเดียว ทั้ง ๆ ที่สมมติฐานรองหมายถึง** $\beta < 0$ **หรือ** $\beta > 0$

$Ho : \beta = 0, Ha : \beta \neq 0$

$$F = \frac{SSR}{MSE} = \frac{MSR}{MSE}$$

ตัวสถิติ F จะสนับสนุน Ho เมื่อ SSR เป็นค่าที่เล็กเกินไป จนทำให้ $F < f_{1,(n-2);\alpha}$ แสดงว่า X อธิบาย ความผันแปรของ Y ได้น้อยมาก แต่เมื่อใดที่ X อธิบายความผันแปรของ Y ได้มาก ไม่ว่าจะเป็นความสัมพันธ์เชิงนิเสธ หรือเชิงบวก (b มีค่าเป็น + หรือ −) ก็ตาม จะทำให้ SSR เป็นค่าที่โต ดังนั้น ตัวสถิติ F จะสนับสนุน Ha เมื่อ SSR เป็นค่าโตมาก จนทำให้

$F > f_{1,(n-2);\alpha}$

สรุปได้ว่า ตัวสถิติ F ไม่สนใจทิศทางของความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y แต่สนใจว่า X มีความสามารถอธิบายความผันแปรของ Y ได้มากเพียงใดเท่านั้น ถ้า X มีความสามารถอธิบายได้มาก จนทำให้ปฏิเสธ Ho ก็จะได้ข้อสรุปเหมือน t-test ว่า X และ Y มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นตรง

11.38 **โรงงานผลิตภัณฑ์อาหารนมและเนยแข็ง ต้องการทราบความสัมพันธ์ของต้นทุนการผลิตและผลผลิตเนยแข็ง โดยมีข้อมูลดังนี้**

ผลผลิต	y = ต้นทุนรวม ($)	X = ผลผลิต (ปอนด์)
1	300	200
2	500	1,000
3	450	600
4	280	350
5	470	800
6	400	700
7	390	500
8	200	150
9	450	900
10	360	400

$\Sigma X = 5,600,\ \Sigma Y = 3,800,\ \Sigma X^2 = 3,905,000$

$\Sigma XY = 2,358,000,\ \Sigma Y^2 = 1,526,000$

จงหาสมการกำลังสองน้อยที่สุด เพื่อช่วยโรงงานประมาณต้นทุนการผลิต โดยกำหนดน้ำหนักของผลผลิต

$\Sigma(X \quad \overline{X})^2 = 7159,000$

$\Sigma(Y - \overline{Y})^2 = 82,000$

$\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = 230,000$

$n = 10,\ \overline{X} = 560,\ \overline{Y} = 380$

$b = 0.2990897 = 230,000/769,000$

$a = 380 - (.2990897)(560) = 212.50977$

สมการถดถอยสำหรับประมาณต้นทุนการผลิตโดยกำหนดน้ำหนักของผลผลิต (X) คือ

$$Y = 212.50977 + 0.2990897\ X$$

11.39 จากข้อ 11.38จงหา $S_{Y/X}$ และสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ และอธิบายความหมาย

$$SSR = b\ \Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = 68790.631$$

$$SST = \Sigma(Y - \overline{Y})^2 = 82{,}000$$

$$SSE = SST - SSR = 13{,}209.369$$

$$MSE = S^2_{Y/X} = SSE/(n-2) = 13{,}209.369/8$$

$$= 1{,}651.1711$$

$$S_{Y/X} = \sqrt{MSE} = \sqrt{1{,}651.1711} = 40.634604$$

$$r^2 = SSR/SST = .8389$$

$r^2 = .8389$ หมายความว่า X (จำนวนผลผลิต) สามารถอธิบายความผันแปรของ- Y (ต้นทุนการผลิตรวม) ได้ 83.89%

$S^2_{Y/X} = 1{,}651.1711$ และ $S_{Y/X} = 40.634604$ เป็นค่าประมาณของ $\sigma^2_{Y/X}$ และ $\sigma_{Y/X}$. ตามลำดับ ซึ่งแสดงการกระจายของ Y (ต้นทุนการผลิต) ว่าเป็นโค้งปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $= \mu_{Y/X}$ (คือ เส้นถดถอยประชากร) และมีความคลาดเคลื่อน $= \sigma_{Y/X}$ เมื่อได้ $\hat{\sigma}_{Y/X} = 40.634604$ ทำให้เราทราบได้ว่า ความคลาดเคลื่อนสูงสุด ตามคุณสมบัติของการแจกแจงแบบโค้งปกติ คือ $3\hat{\sigma}_{Y/X} = 3(40.634604) = 121.9$ \$

11.40 จากข้อ 11.38 ภายหลังโรงงานได้สมการประมาณค่าแล้ว โรงงานได้ผลงานวิจัยชิ้นหนึ่ง ซึ่งอ้างว่า เมื่อเพิ่มผลผลิต 1 ปอนด์ จะทำให้ต้นทุนเพิ่มขึ้น \$ 0.24 (incremental cost) เมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลในข้อ 11.38 จะมีความขัดแย้งกันว่า incremental cost ต่างจาก \$ 0.24 ต่อปอนด์ ที่ระดับนัยสำคัญเท่าใด (P-value)

จากข้อ 11.38 คำนวณค่า $b = .2990897$, $\Sigma(X - \bar{X})^2 = 769{,}000$

จากข้อ 11.39 คำนวณค่า $MSE = S^2_{Y \cdot X} = 1{,}651.1711$

จากนั้น $S_b = \sqrt{\dfrac{MSE}{\Sigma(X - \bar{X})^2}} = \sqrt{\dfrac{1{,}651.1711}{769{,}000}} = \sqrt{.0021471}$

$= .0463368$

$H_0 : \beta = .24$, $H_a : \beta \neq .24$,

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ $T = \dfrac{b - \beta'}{S_b}$

$= \dfrac{.2990897 - .24}{.0463368}$

$= 1.274$

ตัวสถิติ T ที่คำนวณได้จะมีการแจกแจงแบบ $t_{8,\alpha/2}$

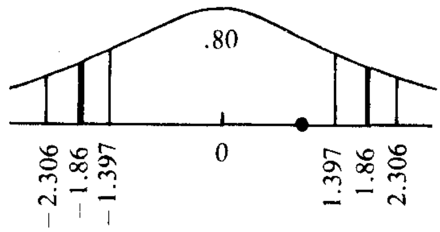
จากตาราง t ที่ df = 8

$t_{8,.10} = 1.397$

$t_{8,.05} = 1.860$

$t_{8,.025} = 2.306$

จะเห็นว่า ค่า T ที่คำนวณได้ น้อยกว่า $t_{8,.10} = 1.397$ จึงไม่มีนัยสำคัญ นั่นคือ ต้องยอมรับ H_0 ที่ว่า incremental cost = \$ 0.24 ต่อปอนด์ ถ้านำความน่าจะเป็นมาเปรียบเทียบกัน ค่า T = 1.274 จะให้ความน่าจะเป็น (P-value) สูงกว่า 20%



11.41. **จงสร้าง 80% ของต้นทุนการผลิต เมื่อกำหนดน้ำหนักผลผลิต**

ช่วงเชื่อมั่น 80% ของ $\mu_{Y/X_0} = \hat{Y} \pm t_{.10,8} S_{\hat{Y}}$

$$\hat{Y}/X_{/0} = 212.50977 + 0.2990897\, X_0$$

$$t_{.10,8} = \pm 1.397$$

$$S_{\hat{Y}} = \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 \quad \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}\right.}$$

$$= \sqrt{1651.1711\left(\frac{1}{10} + \frac{(X_0 - 560)^2}{769,000}\right.}$$

11.42 **จากข้อ** 11.38 **จงทดสอบ** Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$

$$T = b/S_b = \frac{.2990897}{.0463368} = 6.45$$

$t_{8,.005} = \pm 3.355$

$T = 6.45 > 3.355$ จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า $\beta \neq 0$ คือ X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นด้วยความเชื่อมั่น 99%

11.43 จากข้อ 11.38 จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 90% ของต้นทุนเฉลี่ยสำหรับการผลิต 500 ปอนด์

$\hat{Y}/X_0 = 500 = 212.50977 + .2990897\ (500)$

$= 362.05462$

$t_{.05,8} = \pm 1.86$

$$S_{\hat{Y}} = \sqrt{1651.1711\left(\frac{1}{10} + \frac{(500-560)^2}{769{,}000}\right)} = 13.147$$

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่น 90% ของ μ_{Y/X_0}, $X_0 = 500$ คือ

$\hat{Y}/X_0 \pm t_{.05,8}(S_{\hat{Y}})$

$= 362.05462 \pm (1.86)(13.147)$

$= 362.05462 \pm 24.45$

$= 337.60462,\ 386.50462$

11.44 โรงงานต้องการประมาณต้นทุนการผลิตเนย 500 ปอนด์ เพื่อจะได้ยื่นประมูลกับโรงแรมแห่งหนึ่ง และต้องการทราบช่วงเชื่อมั่น 80% ของค่าประมาณ จงหาช่วงเชื่อมั่นดังกล่าว

80% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a เมื่อ $X_0 = 500$ ปอนด์

$= \hat{Y}_a \pm t_{.10,8} S_{\hat{Y}_a}$

$\hat{Y}_a$ เมื่อ $X_0 = 500 = 362.05462$ (จากข้อ 11.43)

$t_{.10,8} = \pm 1.397$

$$S_{\hat{Y}_a} = \sqrt{MSE\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1651.1711\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(500-560)^2}{769{,}000}\right)}$$

$= 42.7085$

ดังนั้น 80% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a คือ

$$362.05462 \pm (1.397)(42.7085)$$

$$= 362.05462 \pm (59.663806)$$

$$= 302.39082, \quad 421.71842$$