7. การแจกแจงของตัวอย่างสุ่ม

1. การแจกแจงของ $\bar{x}$
2. การแจกแจงของ p
3. แบบฝึกหัด

การแจกแจงของตัวอย่างสุ่ม

เมื่อเรากำหนดว่าจะสุ่มจากประชากรหนึ่งมา n จำนวน เมื่อได้ข้อมูลมา n จำนวน เราจะคำนวณค่าสถิติ เช่น หาค่าเฉลี่ย หาความแปรปรวน หรือหาค่าสัดส่วน สมมุติเราสนใจอยากทราบค่าเฉลี่ย จากตัวอย่างชุดหนึ่ง เราย่อมได้ค่าเฉลี่ยมาเพียงตัวเดียว จึงถือว่าเป็นค่าคงที่ไม่ใช่ตัวแปรเชิงสุ่ม แต่อย่าลืมว่า เรายังสามารถสุ่มตัวอย่างขนาดเดิมนี้ได้อีกหลายชุด แต่ละชุดจะให้ค่าเฉลี่ยได้ชุดละ 1 ค่า เราจึงอยากทราบลักษณะการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างขนาดเดียวกันนี้ (n) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ว่ามีความสัมพันธ์กับประชากรที่ถูกสุ่มมาหรือไม่? อย่างไร?

สมมุติประชากรของเราประกอบด้วยเด็ก 4 คน ซึ่งมีอายุ 1, 3, 5, 7 ตามลำดับ นั่นคือ

$$\mu = (1+3+5+7)/4 = 16/4 = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N} = \frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{4}$$

$$= \frac{(9+1+1+9)}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{5} = 2.326$$

ถ้าสุ่มตัวอย่างเด็กมา 1 คน แต่เป็นการสุ่ม**แบบแทนที่** เด็กแต่ละคนจะมีโอกาสถูกเลือกเท่ากัน จะได้การแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

อายุ (x)	1	3	5	7	รวม
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1.0

ถ้าสุ่มเด็กมา 2 คน แบบ**แทนที่** ต้องการทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของ**อายุเฉลี่ยจากตัวอย่างสุ่ม** จะต้องหาตัวอย่างสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมดก่อน ซึ่งจะมีทั้งหมด = 4 × 4 = 16 ชุด ดังนี้

ตัวอย่างที่	x_1	x_2	รวม	ค่าเฉลี่ย
1	1	1	2	1
2	1	3	4	2
3	1	5	6	3
4	1	7	8	4
5	3	1	4	2
6	3	3	6	3
7	3	5	8	4
8	3	7	10	5
9	5	1	6	3
10	5	3	8	4
11	5	5	10	5
12	5	7	12	6
13	7	1	8	4
14	7	3	10	5
15	7	5	12	6
16	7	7	14	7

ตารางที่ 7.1 แสดงกลุ่มอายุของเด็กที่สุ่มมา 2 ค่าจากกลุ่มอายุ

[1 3 5 7]

$N = 4,\ n = 2$

$\mu = 4\ ,\ \sigma^2 = 5$

$\sigma = 2.326$

จากตารางที่ 7.1 จะมีค่าเฉลี่ยที่เป็นไปได้ 16 ตัว แต่ละตัวจะมีโอกาสเกิด = $(\frac{1}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$ บางตัวก็เป็นค่าซ้ำกัน จึงมีค่าต่าง ๆ กันเพียง 7 ค่า เราจึงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ดังนี้

ตารางที่ 7.2 แสดงการแจกแจงตัวอย่างสุ่มของค่าเฉลี่ย $\bar{x}$

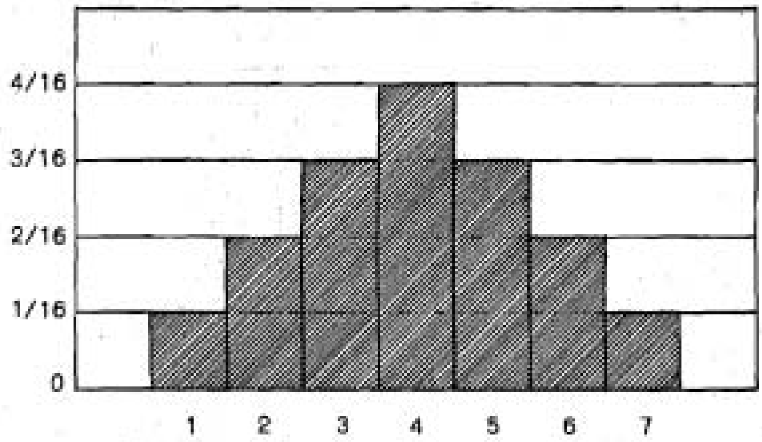
$\bar{x}$	1	2	3	4	5	6	7	รวม
จำนวนกลุ่มตัวอย่าง	1	2	3	4	3	2	1	
ความน่าจะเป็น	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	1.0

รูปที่ 7.1

แสดงการแจกแจงของ $\bar{X}$

ซึ่งมี $n = 2$ จากกลุ่ม

$\{1, 3, 5, 7\}$



นิยาม *การแจกแจงของตัวอย่างสุ่มคือ การแจกแจงความน่าจะเป็นของค่าสถิติซึ่งได้จากตัวอย่างสุ่มทั้งหมดที่มีขนาดเท่ากัน และสุ่มจากประชากรเดียวกัน*

ค่าเฉลี่ยของ $\bar{X}$

เราจะหาค่าเฉลี่ยของ $\bar{X}$ หรือ $\mu_{\bar{X}}$ จากตารางที่ 7.2 ได้ ดังนี้

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \Sigma \bar{x}_i P(\bar{x}_i)$$
$$= 1(1/16) + 2(2/16) + 3(3/16) + 4(4/16) + 5(3/16) + 6(2/16) + 7(1/16)$$
$$= \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 15 + 12 + 7}{16} = \frac{64}{16} = 4 = \mu_X$$

จึงสรุปได้ว่า $E(\bar{X}) = E(X)$ **หรือ** $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$

ซึ่งอาจพิสูจน์ได้ ดังนี้

$$E(\bar{X}) = E(\Sigma_{i=1}^{n} x_i/n) = \Sigma_{i=1}^{n} E(X_i)/n$$
$$= \Sigma_{i=1}^{n}(\mu)/n = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

การหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\bar{X}$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E(\bar{X} - \mu_{\bar{x}})^2$$
$$= E(\bar{X}^2) - \mu_{\bar{x}}^2$$

หาค่า $E(\bar{X}^2)$ ดังนี้

$\bar{x}$	1	2	3	4	5	6	7
$P(\bar{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\bar{x}^2$	1	4	9	16	25	36	49

$E(\bar{X}^2) = \Sigma\bar{x}^2 P(\bar{x})$

$= 1(\frac{1}{16}) + 4(\frac{2}{16}) + 9(\frac{3}{16}) + 16(\frac{4}{16}) + 25(\frac{3}{16} + 36(\frac{2}{16}) + 49(\frac{1}{16})$

$= 18.5$

ดังนั้น

$\sigma^2_{\bar{x}} = 18.5 - 4^2 = 2.5$ และ $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{2.5} = 1.5811$

พึงสังเกตว่า $\sigma^2_x = 5$

$\frac{\sigma^2_x}{n} = \frac{5}{2} = 2.5 = \sigma^2_{\bar{x}}$

จึงสรุปได้ว่า ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยเท่ากับความแปรปรวนของประชากรหารด้วยขนาดตัวอย่างสุ่ม เมื่อสุ่มจากประชากรแบบนับไม่ถ้วน (infinite population) **หรือการสุ่มแบบมีการแทนที่**

ดังนั้น $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 2.326/\sqrt{2} = 1.58$

นิยาม ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) **ของค่าสถิติเรียกว่า ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน** (standard error)

เหตุที่เรียกว่าความ "คลาดเคลื่อน" หรือ "error" เนื่องจากใน**ตัวอย่างขนาดเดียวกัน** และสุ่มมาจากประชากรเดียวกัน จะมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน และแตกต่างจากค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ**ประชากร**ที่สุ่มตัวอย่างมาด้วย

ลองพิจารณาดูความสัมพันธ์ระหว่างตัวอย่างสุ่มกับประชากรแบบนับถ้วน (finite population) จะใช้ตัวอย่างเดิมคือประชากรประกอบด้วยเด็ก 4 คน ซึ่งอายุ 1, 3, 5, 7 ถ้าสุ่มมา 2 คน **แบบไม่แทนที่** จะได้ตัวอย่างทั้งหมด $\binom{4}{2} = 6$ ชุด และมีค่าเฉลี่ยต่าง ๆ ดังนี้

ตัวอย่าง	1	2	3	4	5	6
อายุเด็ก	1, 3	1, 5	1, 7	3, 5	3, 7	5, 7
อายุเฉลี่ย ($\bar{x}$)	2	3	4	4	5	6

จึงสร้างตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ย ได้ดังนี้

$\bar{x}$	2	3	4	5	6	รวม
$P(\bar{x})$	1/6	1/6	2/6	1/6	1/6	1.0

จึงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ $\bar{x}$ ได้ดังนี้

$$E(\bar{X}) = 2(\tfrac{1}{6}) + 3(\tfrac{1}{6}) + 4(\tfrac{2}{6}) + 5(\tfrac{1}{6}) + 6(\tfrac{1}{6})$$
$$= \frac{24}{6} = 4 = \mu_{\bar{x}}$$
$$\sigma^2_{\bar{x}} = E(\bar{X} - \mu_{\bar{x}})^2$$
$$= E(\bar{X}^2) - \mu^2_{\bar{x}}$$
$$E(\bar{X}^2) = \Sigma \bar{x}^2 p(\bar{x})$$
$$= 4(\tfrac{1}{6}) + 9(\tfrac{1}{6}) + 16(\tfrac{2}{6}) + 25(\tfrac{1}{6}) + 36(\tfrac{1}{6})$$
$$= 106/6$$

ดังนั้น

$$\sigma^2_{\bar{x}} = E(\bar{X}^2) - \mu^2_{\bar{x}}$$
$$= \frac{106}{6} - 4^2$$
$$= \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

จะเห็นว่า $\sigma^2_{\bar{x}}$ ไม่เท่ากับ σ^2/n เหมือนการสุ่มแบบแทนที่

ความจริง $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{5}{3}$ คือ $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

ลองแทนค่า $\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, $\sigma^2 = 5, N = 4, n = 2$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

เทอม $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ เรียกว่า finite population correction factor หรือ f p c

บางครั้ง $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ จะมีค่าใกล้ 1 มาก ดังนั้น เมื่อนำไปคูณ $\frac{\sigma^2}{n}$ จึงไม่ทำให้ค่าเปลี่ยนแปลงมาก กรณีที่ fpc จะมีค่าใกล้ 1 คือ เมื่อขนาดตัวอย่าง n เล็กมากเมื่อเทียบกับ N จนทำให้การสุ่มแบบไม่มีการแทนที่ ไม่ต่างกับมีการแทนที่ นั่นคือการสุ่มจาก finite population ไม่ต่างกับ infinite population หลักใหญ่ที่ใช้ปฏิบัติคือ ให้พิจารณาเทอม n/N ซึ่งเรียกว่า sampling fraction ถ้ามีค่าน้อยกว่า .05 ไม่ต้องใช้ fpc

รูปร่างการแจกแจงของตัวอย่างสุ่ม

จากตัวอย่างเรื่องอายุของเด็ก ทำให้เราทราบว่า การแจกแจงของตัวอย่างสุ่มมีความสัมพันธ์กับประชากร คือ $\mu_{\bar{x}} = \mu$ ไม่ว่าจะสุ่มจากประชากรที่มีรูปร่างแบบใดก็ตาม และ $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ เมื่อสุ่มจาก finite population **หรือเป็นการสุ่มแบบไม่แทนที่** และ $\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 1$ ถ้าสุ่มจาก infinite population หรือ **สุ่มแบบแทนที่** แต่ยังไม่ได้กล่าวถึงรูปร่างการแจกแจงของ $\bar{X}$ ว่ามีความสัมพันธ์กับรูปร่างของประชากรอย่างไร ทฤษฎี central limit theorem จะอธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ ดังนี้

"สำหรับประชากรเกือบทั้งหมด คือจะเป็นประชากรแบบปกติหรือไม่ใช่ก็ตาม การแจกแจงของ $\bar{x}$ จะมีการแจกแจงโดยประมาณแบบการแจกแจงปกติ **เมื่อขนาดตัวอย่าง n มีค่าโตพอควร"**

ทฤษฎีนี้ มีความสำคัญมาก เพราะเป็นรากฐานของการประมาณค่าและการทดสอบสมมุติฐานที่จะกล่าวในบทต่อไป คำว่า ขนาดตัวอย่างโตพอควร ปกติถือว่า ต้องไม่น้อยกว่า 30 และถือ $n \geq 30$ เป็นค่าทั่ว ๆ ไปสำหรับประชากรทุกประเภท แต่ถ้าสุ่มจากประชากรปกติ หรือที่มีรูปร่างใกล้เคียงประชากรแบบปกติ อาจให้ n มีค่าไม่ต้องโตมากก็ได้

จากทฤษฎีนี้ ทำให้เราสามารถหาความน่าจะเป็นของ $\bar{x}$ ในรูปของ Z ได้ ดังนี้

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ตัวอย่าง 1 ถ้าคะแนนสอบของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติและมีค่าเฉลี่ย 60 คะแนน ความแปรปรวน 256 คะแนน^2 เมื่อสุ่มตัวอย่างมา 16 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่า 70 คะแนน

กรณีนี้ ถือว่าประชากรเป็นแบบนับไม่ถ้วน เพราะไม่ทราบค่า N ดังนั้น

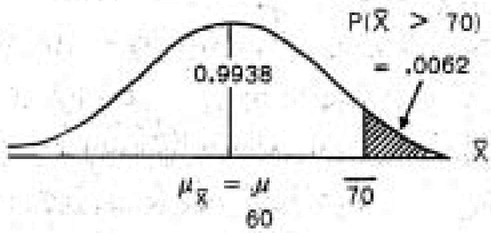
$\mu_{\bar{x}} = \mu = 60$ และ $\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2_x/n = 256/16 = 16$

และ $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{16} = 4$ หรือจะใช้สูตร $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 16/\sqrt{16} = 4$

$P(\bar{X} > 70) \quad P\left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{70 - 60}{16/\sqrt{16}}\right)$

$= P(Z > 2.5)$

$= .0062$



กรณีนี้ เป็นการสุ่มจากประชากรแบบปกติ แม้ว่าขนาดตัวอย่างจะไม่โตมาก การแจกแจงของ $\bar{x}$ จะยังคงเป็นแบบปกติ แต่ถ้าประชากรไม่เป็นแบบปกติ n ต้องโตจึงจะทำให้ $\bar{x}$ มีการแจกแจงแบบปกติ

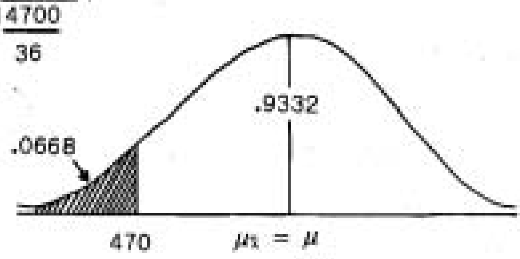
ตัวอย่าง 2 ให้ X แทนค่าจ้างรายสัปดาห์ของพนักงานขาย ซึ่งไม่ทราบรูปแบบการแจกแจงของประชากรแต่น่าเชื่อว่าไม่ใช่แบบปกติ ถ้าสุ่มพนักงานขายมา 36 คน แล้วจดค่าจ้างรายสัปดาห์ไว้ และสมมุติว่าค่าจ้างรายสัปดาห์มาจากประชากรที่มี ค่าเฉลี่ย $\mu = 500$ และ $\sigma^2 = 14,400$ จงหาความน่าจะเป็นที่ $\bar{x}$ จะน้อยกว่า 470

แม้ว่า X จะไม่มีการแจกแจงแบบปกติ แต่ n = 36 ถือว่าโต เพราะมากกว่า 30 จึงแปลงเป็นค่า Z ได้

$$P(\bar{x} < 470) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{470 - 500}{\sqrt{\frac{14700}{36}}}\right)$$

$$= P(Z < -1.5)$$

$$= .0668$$



การแจกแจงตัวอย่างของ p

ในบทที่ 6 ได้กล่าวถึงตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินาม คือ X หมายถึง จำนวนครั้งของความสำเร็จจากการทดลองแบบเบอร์นุยลี่ n ครั้ง หรือหมายถึงความสำเร็จจากตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรแบบนับไม่ถ้วน x จะมีการแจกแจงแบบทวินามและมีฟังก์ชั่นน่าจะเป็น

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n - x}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ในเมื่อ p คือสัดส่วนความสำเร็จของประชากร ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงความสับสนในบทต่อไป จะใช้ π แทน population proportion ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์คือต้องทราบล่วงหน้าก่อนคำนวณความน่าจะเป็น และเมื่อได้กระทำการทดลองแล้ว และนับความสำเร็จได้ x ครั้ง จาก n ครั้ง จะได้สัดส่วนความสำเร็จจากตัวอย่าง คือ $p = x/n$, $0 \leq p \leq 1$

p จึงเป็นค่าสถิติ เพราะหาได้จากตัวอย่าง และต้องทำการทดลองสิ้นสุดแล้วจึงจะทราบค่า p เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างหรือจำนวนครั้ง = n ซึ่งเป็นค่าคงที่ เราอาจทำการทดลองซ้ำ ๆ กันได้

หลาย ๆ ครั้ง โดยใช้ขนาดตัวอย่างเท่าเดิมคือ n ดังนั้น เราจะได้ค่าสถิติ p = สัดส่วนความสำเร็จจากตัวอย่างสุ่มหลายค่า เราจึงอยากทราบลักษณะการแจกแจงของ p
จากบทที่ 6 เราทราบว่า ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มทวินามคือ

$$E(X) = n\pi \qquad \sigma_X^2 = n\pi(1-\pi)$$

$$p = \frac{x}{n}$$

$$E(p) = E\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}E(x) = \frac{1}{n}(n\pi) = \pi$$

$$\sigma_p^2 = \sigma^2\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma_x^2 = \frac{n\pi(1-\pi)}{n^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

สรุป

การแจกแจงตัวอย่างสุ่มของ X	การแจกแจงตัวอย่างสุ่มของ p
$E(X) = n\pi$	$E(p) = \pi$
$\sigma_X^2 = n\pi(1-\pi)$	$\sigma_p^2 = \pi(1-\pi)/n$
$\sigma_x = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$	$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$

Central Limit Thearem

การแจกแจงตัวอย่างสุ่มของ p จะเบ้ ถ้า $p \neq 0.5$ แต่ความเบ้จะลดลงเมื่อ n โตขึ้น ๆ เมื่อ $n \geqslant 30$ จะมีรูปร่างใกล้เคียงกับโค้งปกติ จึงเป็นจริงตามทฤษฎีขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลางที่ว่า

"การแจกแจงตัวอย่างของ x และ p จะเป็นแบบปกติโดยประมาณเมื่อขนาดตัวอย่าง n โตพอสมควร"

คำว่า **"โตพอสมควร"** กว้างมาก เพราะ ถ้า π **มีค่าใกล้เคียง** 0.5 ขนาดตัวอย่าง (n) ก็ไม่ต้องโตมาก **เพราะการแจกแจงของ p มีลักษณะสมมาตร** เมื่อนำโค้งปกติประมาณจึงมีความผิด

พลาดต่ำ แต่ ถ้า π มีค่าต่างจาก 0.5 มาก การแจกแจงจะเบ้ เมื่อประมาณด้วยโค้งปกติซึ่งมีลักษณะสมมาตรจะมีความผิดพลาดสูง ดังนั้น จึงต้องพิจารณาทั้งค่า n และ π

กฎที่ใช้คือ เมื่อ $n\pi \geq 5$ **และ** $n(1-\pi) \geq 5$ เมื่อประมาณด้วยโค้งปกติแล้วก็จะหาความน่าจะเป็นได้ในรูปพื้นที่ภายใต้โค้งปกติแต่ต้องแปลงค่า x หรือ p อยู่ในรูปค่า Z ก่อน ดังนี้

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} = \frac{X - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \quad \text{สำหรับแปลงค่า X}$$

และ

$$Z = \frac{p - E(p)}{\sigma_p} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \quad \text{สำหรับแปลงค่า p}$$

หมายเหตุ ถ้าเปลี่ยนค่า x เป็น Z ต้องปรับความต่อเนื่องโดยนำ 0.5 หักจากค่าต่ำของ x และเอา 0.5 บวกเพิ่มค่าสูงของ x

ตัวอย่าง 1 สุ่มใบสมัครเพื่อขอประกันมา 50 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีใบประกันที่สมบูรณ์อย่างน้อย 30 ใบ สมมุติ $\pi = 0.7$

$p(x \geq 30) = \sum_{x=30}^{50} \binom{50}{x}(.7)^x(.3)^{50-x}$ คิดจากสูตรการแจกแจงที่แท้จริงคือแบบทวินาม ซึ่งยากมาก โดย Central Limit Theorem จะประมาณโดยการแจกแจงแบบปกติได้ เพราะ

$n\pi = 50(.7) = 35 > 5$ และ $n(1-\pi) = 50(.3) = 15 > 5$

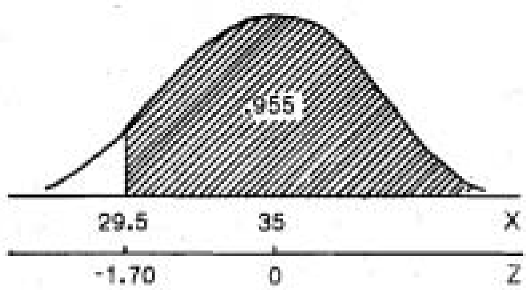
$E(x) = n\pi = 35,\ \sigma_X = \sqrt{n\pi(1-\pi)} = \sqrt{50(.7)(.3)} = 3.24$

$P(x \geq 30)$ เมื่อปรับความต่อเนื่อง คือ $P(X \geq 29.5)$

เปลี่ยน X ในเทอมของ Z จะได้

$$Z = \frac{29.5 - 35}{3.24} = -1.70$$

$$P(X \geq 29.5) = P(Z \geq -1.70) = .955$$



ตัวอย่าง 2 ถ้าสุ่มมา 200 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ค่า p ไม่ต่างจากค่าจริง (π = .7) เกิน 5%

นั่นคือต้องการ $P(.65 < p < .75)$

$$E(p) = \pi = 0.7, \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{.7(.3)}{200}} = .032$$

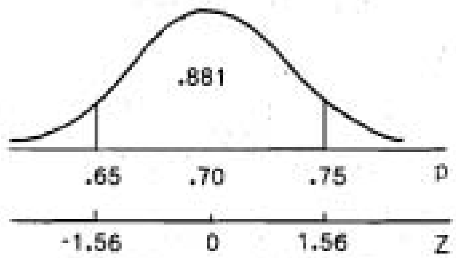
เนื่องจาก n = 200 นับว่าใหญ่มาก จึงไม่ปรับความต่อเนื่อง
เปลี่ยนค่า p เป็น Z ดังนี้

เมื่อ $p = .65,\ Z = \dfrac{.65 - .70}{.032} = -1.56$

เมื่อ $p = .75,\ Z = \dfrac{.75 - .70}{.032} = 1.56$

$P(.65 < p < .75) = P(-1.56 < |Z| <. 56)$

$= 0.881$



แบบฝึกหัด

7.1 เครื่องจักรบรรจุน้ำอัดลมขนาดแก้วละ 100 กรัม และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 กรัม ฝ่ายควบคุมคุณภาพได้สุ่มตัวอย่างมาจำนวนหนึ่งได้น้ำหนักเฉลี่ย 105 กรัม ฝ่ายควบคุมคุณภาพจึงสรุปว่า ตัวอย่างที่ได้ไม่ทำหน้าที่ "ตัวแทน" ที่ดี จงวิจารณ์

7.2 เทอม "error" ที่ใช้กับ "standard error" หมายถึงความคลาดเคลื่อนแบบใด?

7.3 สุ่มตัวอย่างมา 36 ค่าจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย 125 และความแปรปรวน 225 จงหา
(ก) $P(\bar{X} > 127)$ (ข) $P(\bar{X} > 130)$ (.2119, .0228)
ถ้าสุ่มมา 81 ค่า จงหา(ค) $P(\bar{X} < 127)$ (ง) $P(\bar{X} > 130)$ (.8849, .0013)

7.4 จะต้องสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มี $\mu = 72,\ \sigma = 10$ ที่จำนวนจึงจะทำให้ความเชื่อมั่น 90% ที่จะได้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสูงกว่า 70 (42)

7.5 จะต้องใช้ขนาดตัวอย่างเท่าใดเพื่อสุ่มจากประชากรปกติที่มี $\mu = 250$ และ $\sigma = 20$ และให้มีความน่าจะเป็น .95 ที่ค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างจะตกอยู่ระหว่าง 240 - 260 (16)

7.6 บริษัทขายรถได้โดยถัวเฉลี่ยวันละ 10 คัน ด้วยความแปรปรวน 35.5 คัน^2 ถ้าสุ่มมา 7 วัน จงหาความน่าจะเป็น

ก) ที่จะขายได้มากกว่า 16 คัน หรือน้อยกว่า 12 คัน (.8171)

ข) ขายได้น้อยกว่า 16 คัน และมากกว่า 5 คัน (.9830)

7.7 โรงงานผลิตจักรยานได้ประมาณต้นทุนแรงงานโดยถัวเฉลี่ยต่อคัน = 50.2 บาท และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.2 บาท ถ้าสุ่มมา 20 คัน เพื่อคำนวณค่าต้นทุนแรงงาน จะกล่าวด้วยความเชื่อมั่น 98% ได้หรือไม่ว่าค่าเฉลี่ยแรงงานต่อคันจากตัวอย่างสุ่มจะอยู่ระหว่าง 49.5 และ 50.7 บาท

7.8 ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด $n = 16$ จากประชากร $N = 65$, $\mu = 12$, และ $\sigma = 2.1$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ค่าเฉลี่ยอยู่ระหว่าง 11.5 ถึง 12.5 (.7234)

7.9 ถ้า $N = 145$, $\mu = 120$, $\sigma = 15$, $n = 64$

(ก) จงประมาณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย (1.41)

(ข) จงหา $P(122 < \bar{X} < 124)$ (.0755)

7.10 ถ้า $N = 120$, $\mu = 7.5$, $\sigma = 1.5$ จงประมาณความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยเมื่อใช้ขนาดตัวอย่างต่าง ๆ ดังนี้

(ก) $n = 9$ (ข) $n = 25$ (ค) $n = 49$

7.11 นักธุรกิจผู้หนึ่งมีร้านอาหาร 25 ร้าน ได้กำไรถัวเฉลี่ย 21,000 บาท ต่อร้านต่อปี และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3,400 บาท จงหาความน่าจะเป็นที่ร้านอาหารที่สุ่มมา 5 ร้าน จะได้กำไรรวมกันไม่ถึง 100,000 บาท ต่อปี (.2358)

7.12 ให้ X คือจำนวนครั้งที่เครื่องจักรขัดข้องใน 1 วัน ในโรงงานหนึ่งซึ่งทราบว่า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 5$ และ $\sigma^2 = 12$ ถ้าสุ่มตัวอย่างวันทำการมา 4 วัน เพื่อดูจำนวนครั้งที่เครื่องจักรขัดข้องในแต่ละวัน จงหา

ก) จำนวนคาดหมายของเครื่องจักรขัดข้องต่อวัน หรือ $E(\bar{X})$

ข) ความแปรปรวนของ $\bar{X}$ (5, 3.0)

7.13 กำหนดให้ { 10, 12, 14, 16 } เป็นกลุ่มผลทดลองของ X ถ้าสุ่มเลขมา 2 จำนวนแบบแทนที่

ก) จงหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ X (13, 5.0)

ข) จงหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ $\bar{X}$ (13, 2.5)

7.14 ให้ Y คือ จำนวนครั้งที่แม่บ้านคนหนึ่งไปจ่ายตลาดต่อ 1 เดือน และ Y มีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

y	0	1	2	3	4	5	รวม
f(y)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	1.0

ก) จงหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y (2.3, 1.414)

จ) จงหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\bar{Y}$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของแม่บ้านที่สุ่มมา 4 คน (2.3, 0.707)

7.15 ถ้า X แทนจำนวนครั้งที่ประธานบริษัทต้องไปประชุมต่างประเทศต่อ 1 เดือน และ X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

x	0	1	2	3	รวม
P(x)	0.3	0.4	0.2	0.1	1.0

ก) จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ x (1.1, 0.89)

ข) จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ $\bar{x}$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของการสุ่มมา 9 เดือน (1.1, .09889)

7.16 ถ้าเชือกเส้นหนึ่งมีความทนทานเฉลี่ย 2,000 ปอนด์ และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 50 ปอนด์ ให้ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างเชือกที่สุ่มมา 100 เส้น จงหาค่าคาดหมาย และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\bar{x}$ (2,000, 5)

7.17 ถ้า X เป็นอายุการใช้งานของยางรถยนต์ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย 30,000 ไมล์ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 200 ไมล์ ถ้าสุ่มตัวอย่างมา 16 อัน จงหาค่าคาดหมายและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสุ่ม (30,000, 50)

7.18 ถ้าน้ำหนักของลูกวัวแรกเกิดมีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย 50 ปอนด์ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4 ปอนด์

ก) ถ้าสุ่มลูกวัวมา 1 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีน้ำหนักต่ำกว่า 45 ปอนด์ (.1056)

ข) ถ้าสุ่มมา 25 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้น้ำหนักเฉลี่ยสูงกว่า 51 ปอนด์ (.1056)

ค) จากข้อ (ข) จงหาโอกาสที่จะได้น้ำหนักเฉลี่ยระหว่าง 49 ถึง 51 ปอนด์ (.7888)

7.19 กล้วยหอมมีความยาวเฉลี่ย 8 นิ้ว และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.44 นิ้ว สุ่มกล้วยจากแปลงทดลองมา 36 ผล จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ความยาวเฉลี่ย 8.3 นิ้วขึ้นไป (.1056)

7.20 ข้อใดต่อไปนี้ที่จะใช้ประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติตามกฎที่เรียนมา

(ก) $n = 100, \pi = .01$ (ค) $n = 50, \pi = .95$

(ข) $n = 100, \pi = .10$ (ง) $n = 20, \pi = .40$

7.21 ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าของร้านสรรพสินค้าแห่งหนึ่งจะซื้อสินค้า = 0.40 ถ้าสุ่มลูกค้ามา 20 ราย จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ซื้อสินค้าน้อยกว่า 6 ราย โดยใช้โค้งปกติประมาณและควรปรับความต่อเนื่อง (.2467)

7.22 องค์การโทรศัพท์ต้องการทราบเปอร์เซนต์เสาชำรุดที่จะต้องเปลี่ยนภายใน 5 ปี สมมุติ $\pi = .35$ และทำการสุ่มตัวอย่าง 500 หน่วย

(ก) จงหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงตัวอย่างสุ่มของ p

(ข) จงหาความน่าจะเป็นที่ p จะมีค่าต่างจาก π ไม่เกิน 5%

(ค) จงหาความน่าจะเป็นในข้อ (ข) โดยให้ $\pi = .50$, และ $\pi = .20$ ท่านได้แนวความคิดอะไรบ้างไหม? (.02, .9876, .9750, .9948)

การแจกแจงตัวอย่างของผลบวกและผลต่างของตัวสถิติ
สำหรับตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน 2 ชุด

$$\mu_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \mu_1 - \mu_2 , \quad \sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\mu_{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)} = \mu_1 + \mu_2 , \quad \sigma_{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\mu_{(p_1 - p_2)} = \pi_1 - \pi_2 , \quad \sigma_{(p_1 - p_2)} = \sqrt{\pi_1(1-\pi_1)/n_1 + \pi_2(1-\pi_2)/n_2}$$

$$\mu_{(p_1 + p_2)} = \pi_1 + \pi_2 , \quad \sigma_{(p_1 + p_2)} = \sqrt{\pi_1(1-\pi_1)/n_1 + \pi_2(1-\pi_2)/n_2}$$

การแปลงให้เป็น Standard Normal

ใช้ $Z = (\hat{\theta} - \mu_{\hat{\theta}})/\sigma_{\hat{\theta}}$, $\hat{\theta}$ คือ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ หรือ $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ หรือ $(p_1 - p_2)$ หรือ $(p_1 + p_2)$