6. การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distributions)

1. การแจกแจงของความน่าจะเป็น
2. ตัวแปรเชิงสุ่ม
3. ค่าคาดหมายคณิตศาสตร์
4. การแจงแจงแบบเบอร์นุยลี่ และการแจกแจงแบบทวินาม
5. การแจกแจงแบบไฮเปอร์ยีออเมตริก
6. การแจกแจงแบบปัวซอง
7. การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล
8. การแจกแจงแบบปกติ
9. การเลือกการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมาะสม
10. แบบฝึกหัดทบทวน

นิยาม สเกลการวัด คือการกำหนดตัวเลขให้กับเหตุการณ์หรือวัตถุสิ่งของ ตาม**กฎเกณฑ์**ที่ระบุไว้ จึงทำหน้าที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขกับเหตุการณ์ แบ่งเป็น 4 ประเภท คือ

1. **สเกลนามบัญญัติ** (Nominal Scale) เป็นสเกลที่หยาบที่สุด ใช้แบ่งเหตุการณ์ตามคุณลักษณะ เช่น เพศ : 0 = ชาย, 1 = หญิง, กลุ่มเลือด : 1 = A, 2 = B, 3 = C, 4 = O, สี : 1 = แดง, 2 = ขาว, 3 = น้ำเงิน เป็นต้น
2. **สเกลเรียงอันดับ** (Ordinal Scale) สามารถเรียงอันดับเหตุการณ์ได้ เช่น ความสวย : 1 = สวยมาก, 2 = ปานกลาง, 3 = ขี้เหร่, น้ำหนัก : 1 = อ้วน, 2 = พอดี, 3 = ผอม สติปัญญา : 1 = โง่, 2 = ปานกลาง, 3 = ฉลาด ขนาดเสื้อผ้า : 1 = S, 2 = M, 3 = L
3. **สเกลอันตรภาคชั้น** (Interval Scale) ตัวเลขที่ให้กับเหตุการณ์จะมีช่วงห่างเท่า ๆ กัน เช่น 1 ปี แบ่งเป็น 365–366 วัน อุณหภูมิ คะแนน (0–100) แต่ไม่มีศูนย์แท้ เพราะ 0 องศา เป็นศูนย์เทียม หรือศูนย์สัมพันธ์ 0 คะแนนก็เป็นศูนย์เทียม เพราะนักเรียนที่ได้ 0 คะแนนยังมีความรู้ ไม่ใช่ความรู้เป็นศูนย์
4. **สเกลอัตราส่วน** (Ratio Scale) เป็นสเกลที่ละเอียดที่สุด ต่างกับสเกลอันตรภาคชั้นตรงที่มีศูนย์แท้ เช่น น้ำหนัก = 0 แสดงว่าไม่มีน้ำหนัก ความสูง = 0 แสดงว่าไม่มีความสูง การมีศูนย์แท้ทำให้การคิดอัตราส่วนเป็นความจริง เช่น ทารกน้ำหนัก 10 ปอนด์หนักเป็น 2 เท่าของทารกน้ำหนัก 5 ปอนด์ แต่สเกลอันตรภาคชั้นเมื่อคิดเป็นอัตราส่วนแล้วจะไม่จริง เช่น คนได้ 40 คะแนน ไม่ได้มีความรู้เป็น 2 เท่าของคนได้ 20 คะแนน

การพิจารณาว่าเป็นสเกลแบบใด จะต้องตอบคำถาม 4 ข้อ คือ (ก) เหตุการณ์หรือวัตถุ 2 อย่างนั้นเท่ากันหรือไม่ ? (ข) เหตุการณ์หรือวัตถุ 2 อย่างนั้น จัดอันดับได้หรือไม่ ? (ค) สามารถพิจารณาระยะห่างระหว่างเหตุการณ์หรือวัตถุ 2 อย่างนั้นได้หรือไม่ ? (ง) สเกลมีศูนย์แท้ (Absolute Zero Point) หรือไม่ ?

สเกล	(ก)	(ข)	(ค)	(ง)
นามบัญญัติ	✓ yes	✗ No	✗	✗
เรียงอันดับ	✓	✓	✗	✗
อันตรภาคชั้น	✓	✓	✓	✗
อัตราส่วน	✓	✓	✓	✓

1. การแจกแจงของความน่าจะเป็น

ตัวอย่าง การแจกแจงของความน่าจะเป็น

ถ้าโยนเหรียญสมดุลย์อันหนึ่งซ้ำกัน 2 ครั้ง จะได้เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ ดังนี้

ตารางที่ 6.1 แสดงเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด จากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 ครั้ง

โยนครั้งที่ 1	โยนครั้งที่ 2	จำนวนก้อย จากโยน 2 ครั้ง	ความน่าจะเป็น
T	T	2	.5 × .5 = .25
T	H	1	.5 × .5 = .25
H	T	1	.5 × .5 = .25
H	H	0	.5 × .5 = .25
			1.00

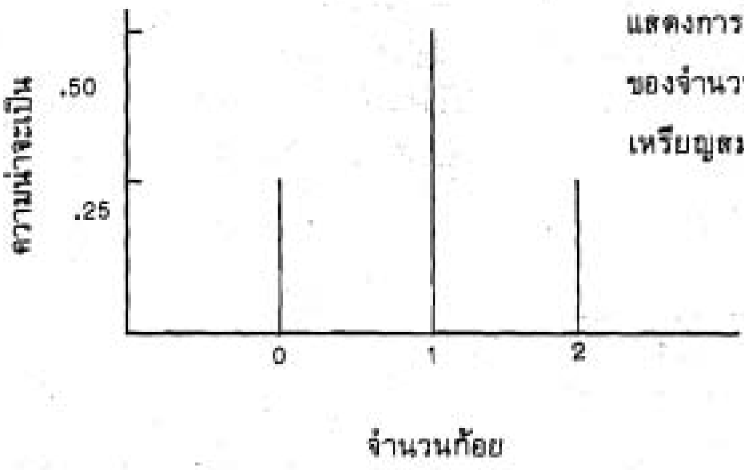
สมมุติว่า เราต้องการสร้างการแจกแจงของความน่าจะเป็นที่จะได้ก้อย จากการทดลองนี้ เราจะรวบรวมได้ดังนี้

ตารางที่ 6.2 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนก้อยจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 ครั้ง

จำนวนก้อย T	เหตุการณ์	ความน่าจะเป็น
0	(H, H)	.25
1	(T, H) + (H, T)	.50
2	(T, T)	.25

พึงสังเกตว่า ความน่าจะเป็นในตาราง 6.2 นั้น ไม่ใช่เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ๆ เป็นเพียงเหตุการณ์ทางทฤษฎี คือ เป็นเพียงภาพแสดงหนทางต่าง ๆ ที่เราคาดว่าจะเกิดขึ้นจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 ครั้ง

ซึ่งจะแสดงโดยรูปกราฟ ดังนี้

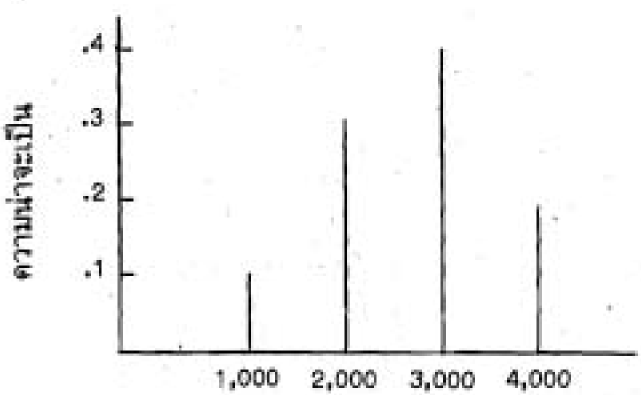


รูปที่ 6.1
แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนก้อยจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 ครั้ง

ลองพิจารณาตัวอย่างอีกอันหนึ่ง

ในการเลือกผู้แทนของสำนักงานแห่งหนึ่ง สมมุติว่า จำนวนผู้มาออกเสียงจำแนกได้ 4 ชนิด คือ

จำนวนผู้ออกเสียง (E_i)	1,000	2,000	3,000	4,000	
ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ = $P(E_i)$	.1	.3	.4	.2	รวม 1.0



รูปที่ 6.2
แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนผู้ออกเสียง

ข้อสังเกต

การแจกแจงความน่าจะเป็นและการแจกแจงความถี่มีความคล้ายคลึงกันมาก แต่ไม่เหมือนกันทีเดียว การแจกแจงความถี่เป็นบันทึกของเหตุการณ์ที่ได้เกิดขึ้นเรียบร้อยแล้ว ส่วนการแจกแจงเป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สามารถเกิดขึ้นเมื่อได้กระทำการทดลองแล้ว ความน่าจะเป็นของการแจกแจงอาจเป็นแบบทฤษฎี (แบบคลาสสิค) เช่น เรื่องการโยนเหรียญหรือเป็นแบบจิตวิสัย เช่น การประมาณผู้ออกเสียงเลือกตั้ง

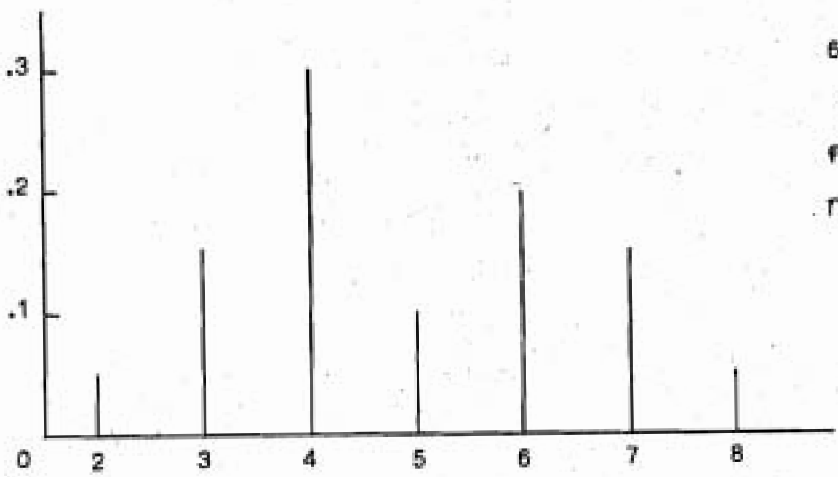
ลักษณะของการแจกแจงความน่าจะเป็น

เราอาจจำแนกการแจกแจงความน่าจะเป็นออกเป็น 2 ลักษณะ คือ การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete) และการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (continuous) ความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง จะมีค่าที่เป็นไปได้เพียงจำนวนจำกัด ดังรูปที่ 6.1 และ 6.2 ในรูปที่ 6.1 ความน่าจะเป็นจะเกิดเพียง 3 ค่า คือ 0, 1 และ 2 ส่วนในรูป 6.2 จะมีความน่าจะเป็นเพียง 4 ค่า คือ 1,000, 2,000, 3,000 และ 4,000 ส่วนการแจกแจงแบบต่อเนื่อง จะมีลักษณะตรงข้ามกล่าวคือจะสามารถมีความน่าจะเป็นได้ทุก ๆค่าในช่วงค่าที่เป็นไปได้ เช่น น้ำหนักของทารกแรกเกิด สมมุติว่า มีช่วงค่าที่เป็นได้ระหว่าง 500-5000 กรัม จะเห็นว่า เด็กทารกจะมีน้ำหนักได้ทุก ๆ จุดในช่วงนี้ ไม่เป็นเฉพาะบางจุดแบบไม่ต่อเนื่อง

แบบฝึกหัด

6.1 จงเขียนกราฟแสดงการแจกความน่าจะเป็นของการจ้างพนักงานของร้านสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง

จำนวนพนักงาน	0	5	10	15	25
ความน่าจะเป็น	.08	.18	.30	.24	.20



6.2 จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของกราฟด้านซ้ายมือนี้

6.3 จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของผลรวมของหน้าลูกเต๋า 2 ลูก ในการโยน 1 ครั้ง

6.4 ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจริงสำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็น

ก) การแจกแจงความน่าจะเป็นจะให้ข่าวสารในระยะยาว หรือความถี่คาดหมายของผลการทดลอง

ข) กราฟแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นจะใช้แกนนอนแสดงผลการทดลอง

ค) การแจกแจงความน่าจะเป็นคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดแบบสุ่ม

ง) เราจะสามารถหาการแจกแจงความน่าจะเป็นได้จากความถี่ของเหตุการณ์ เช่นเดียวกับการสร้างการแจกแจงความถี่

จ) เราจะสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยการประมาณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์แบบจิตวิสัย

6.5 ตัวแทนจำหน่ายรถผู้หนึ่งได้รวบรวมรายการพิเศษเป็น 4 ประเภทคือ

1) หน้าต่างเปิด-ปิดโดยปุ่มอัตโนมัติ, หลังคาหุ้มไวนีล, หลังคาเลื่อนเปิด-ปิดไฟฟ้า
2) หลังคาเลื่อนเปิด-ปิดไฟฟ้า วิทยุสเตอริโอเอฟเอ็ม หน้าต่างเปิด-ปิดโดยปุ่มอัตโนมัติ
3) หลังคาหุ้มไวนีล วิทยุสเตอริโอเอฟเอ็ม เบาะหนังแท้
4) วิทยุสเตอริโอเอฟเอ็ม หลังคาเลื่อนเปิด-ปิดไฟฟ้า หลังคาหุ้มไวนีล

เขาคิดว่าลูกค้าจะต้องการรถประเภทต่าง ๆ ด้วยโอกาสใกล้เคียงกัน

ก) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าคนหนึ่งจะสั่งรถที่มีหลังคาเลื่อนเปิด-ปิดไฟฟ้า ($\frac{3}{4}$)

ข) ถ้ามีลูกค้าสั่งรถ 2 คัน จงสร้างตารางแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนการสั่งจองรถที่มีหลังคาเลื่อนเปิด-ปิดไฟฟ้า

6.6 ผู้จัดการโรงงานทอถุงเท้าสตรีได้ผลิตถุงเท้าใยบัวแบบใหม่ให้มีความยาวเพียงเหนือเข่าเล็กน้อย ซึ่งขณะนี้อยู่ในช่วงขายในตลาดทดลอง (test market) เขาประมาณการเบื้องต้นว่า จะมีโอกาส 60% ที่จะขายได้ 16,000 คู่ ในขณะที่ผู้ช่วยของเขาประมาณว่า จะขายได้ 12,000 คู่ โดยโอกาสครึ่งหนึ่งของการขาย 16,000 คู่ และทั้งคู่เห็นสอดคล้องกันว่าหากมีการกระตุ้นเล็กน้อยจะทำให้ยอดขายเพิ่มอีก 2,000 คู่ จงเขียนกราฟแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนขายถุงเท้าในตลาดทดลอง

ST 206 แผ่นที่ 4

2. ตัวแปรเชิงสุ่ม

ตัวแปรเชิงสุ่มคือ ตัวแปรที่มีค่าที่เป็นไปได้*หลาย ๆ ค่า* ซึ่งเป็นผลได้จากผลการทดลองแบบสุ่ม ตัวแปรเชิงสุ่มอาจเป็นตัวแปรแบบ*ไม่ต่อเนื่อง* หรือ *แบบต่อเนื่อง* หากตัวแปรเชิงสุ่มใดมีค่าที่เป็นไปได้แต่เพียงบางค่าและจำนวนจำกัด จะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง ในทางตรงข้ามหากตัวแปรใดที่มีค่าที่เป็นได้ทุก ๆ ค่าโดยไม่จำกัดจำนวนในพิสัยที่กำหนดให้ ก็จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง

ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่มคือ*ตัวเลข* ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ ซึ่งไม่สามารถจะทำนายล่วงหน้าได้ เช่น จำนวนคนไข้ที่เข้ารับการตรวจรักษาในโรงพยาบาลต่างๆ ในแต่ละวัน จะไม่มีผู้ใดบอกจำนวนล่วงหน้าได้ เมื่อสิ้นสุดวันจึงจะทราบ และจะมีจำนวนไม่เท่ากันในแต่ละวัน ดังนั้น จำนวนคนไข้แต่ละวันจะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะมีค่าขึ้นอยู่กับเหตุการณ์แต่ละวัน เช่น จำนวนคนไข้ของคลีนิคแห่งหนึ่งใน 100 วัน จะมีระหว่าง 100-115 คน และมีการแจกแจงดังนี้

จำนวนคนไข้	จำนวนวัน (ความถี่)
100	1
101	2
102	3
103	5
104	6
105	7
106	9
107	10
108	12
109	11
110	9
111	8
112	6
113	5
114	4
115	2
	100

ตารางที่ 6.3 แสดงการแจกแจงความถี่ของคนไข้ที่เข้ารับการรักษาที่คลีนิคแห่งหนึ่งใน 100 วัน

ดังนั้น ถ้าให้ x คือ จำนวนคนไข้ในแต่ละวัน x จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

x = จำนวนคนไข้	ความน่าจะเป็น $P(x_i)$
100	.01
101	.02
102	.03
103	.05
104	.06
105	.07
106	.09
107	.10
108	.12
109	.11
110	.09
111	.08
112	.06
113	.05
114	.04
115	.02
	1.00

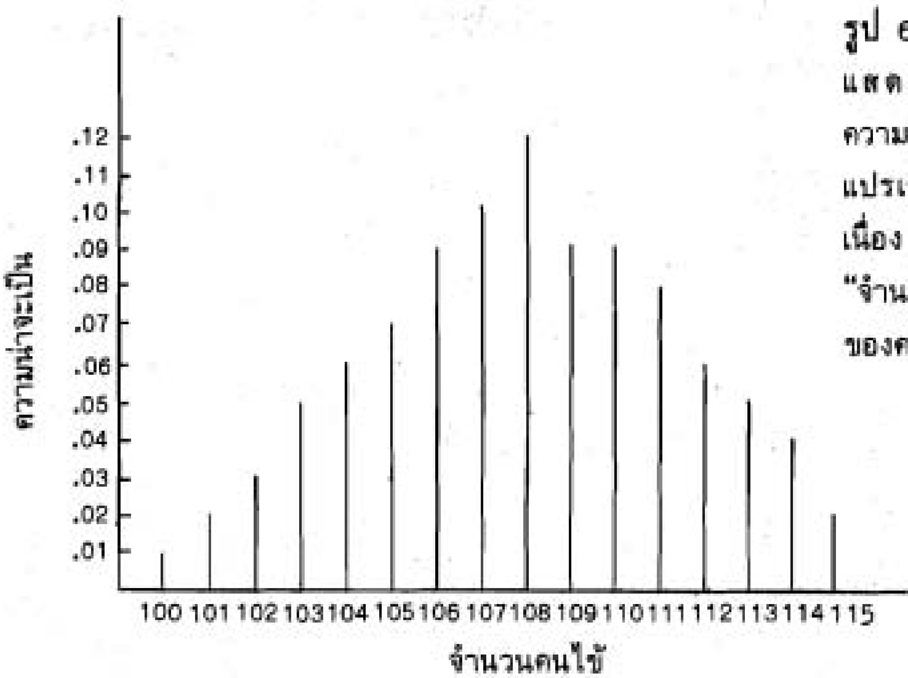
ตารางที่ 6.4 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนคนไข้

ข้อสังเกต

1) ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มต้องเป็นตัวเลข

2) ผลรวมของความน่าจะเป็นของทุก ๆ ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรเชิงสุ่มต้องเป็นหนึ่ง นั่นคือ

$$\sum_{\text{all } i} P(X = x_i) = \sum_{\text{all } i} P(x_i) = 1$$



รูป 6.3 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง "จำนวนคนไข้รายวัน" ของคลีนิคหนึ่ง

ค่าคาดหมายของตัวตัวแปรเชิงสุ่ม

ถ้าโยนเหรียญอันหนึ่ง 10 ครั้ง เป็นด้านหัวเสีย 7 ครั้ง เราย่อมรู้สึกแปลกใจนิด ๆ ว่าได้หัวมากไปหน่อย ถ้าลองให้เพื่อนโยนอีก 20 ครั้ง ได้ด้านหัว 15 ครั้ง ด้านก้อย 5 ครั้ง รวมทั้งหมดเป็นหัว 22 ครั้ง ก้อย 8 ครั้ง จากการโยน 2 ครั้งนี้ สิ่งที่ติดค้างในใจ คือ เราย่อมมีตัวเลขคาดหมายหรือตัวกลางซึ่งกำหนดไว้ในใจว่า ควรจะได้ด้านหัวและก้อยเป็นจำนวนเท่า ๆ กัน ถ้าเหรียญนี้สมดุลย์ นั่นคือ 15 : 15 หรืออาจต่างไปบ้างไม่มากนัก หรือถ้าทำการทดลองโยนต่อไปจนครบ 1,000 ครั้ง และได้หัว 780 ครั้ง เรายิ่งเพิ่มความไม่แน่ใจมากขึ้นว่าเหรียญนี้จะสมดุลย์ เพราะค่าที่ได้ต่างไปจากค่าคาดหมายที่เรากำหนดไว้ในใจมาก (500 : 500) ดังนั้น เรื่องของค่าคาดหมายจึงเป็นรากฐานเบื้องต้นในการศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็น และเป็นรากฐานที่ใช่ในธุรกิจประกันภัยในรอบ 30 ปีที่ผ่านมา นอกจากนั้น ยังมีการใช้ค่าคาดหมายอย่างกว้างขวางในการตัดสินใจภายใต้สภาวการณ์ที่ไม่แน่นอน

ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มได้จากผลรวมของผลคูณระหว่างค่าต่าง ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่มกับความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กัน นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) \\
&= x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \ldots\ldots + x_n P(x_n)
\end{aligned}
$$

ในเมื่อ n คือจำนวนค่าต่าง ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม ดังนั้น เราจะหาค่าคาดหมายของจำนวนคนไข้ของคลีนิคนั้น ใน 1 วัน ดังนี้

x_i = ค่าต่าง ๆ ของตัวแปร (1)	$P(x_i)$ (2)	$x P(x)$ (1) × (2)
100	.01	1.00
101	.02	2.02
102	.03	3.06
103	.05	5.15
104	.06	6.24
105	.07	7.35
106	.09	9.54
107	.10	10.70
108	.12	12.96
109	.11	11.99
110	.09	9.90
111	.08	8.88
112	.06	6.72
113	.05	5.65
114	.04	4.56
115	.02	2.30

ค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม X "จำนวนคนไข้ต่อวัน" → 108.02

ตารางที่ 6.1 แสดงการคำนวณค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง "จำนวนคนไข้ต่อวัน"

$E(X) = 108.02$ นั่นคือ เราสามารถคาดหมายได้ว่า จำนวนคนไข้เข้ารับการรักษาในแต่ละวันจะมีจำนวนโดยเฉลี่ย 108 คน

แบบฝึกหัด

6.7 จงสร้างตารางแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นจากการแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

Y	10	12	14	16	18	20
ความถี่	15	20	45	42	18	10

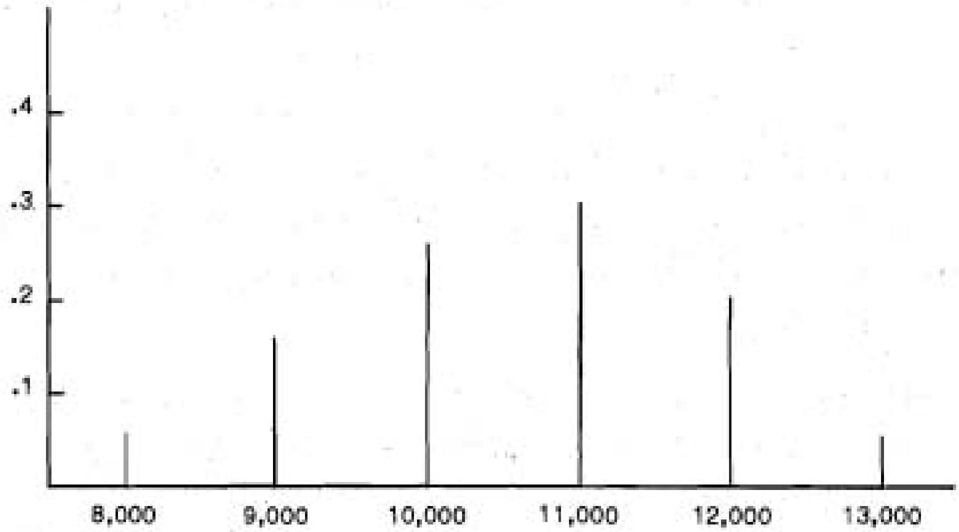
ก) จงสร้างกราฟแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็น

ข) จงหาค่าคาดหมายของ Y

6.8 จากกราฟซึ่งแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นข้างล่าง

ก) จงสร้างตารางแสดงการแจงความน่าจะเป็น

ข) จงหาค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม



6.9 อัตราผลตอบแทนรายปีต่อหุ้นของบริษัทหนึ่ง มีดังนี้

อัตราผลตอบแทน ($)	0.00	5.00	10.00	25.00	50.00
ความน่าจะเป็น	.25	.40	.20	.10	.05

ก) จงหาค่าคาดหมายของอัตราผลตอบแทน (9 บาท)

ข) ถ้าผู้ลงทุนรายหนึ่งจะซื้อหุ้นบริษัทนี้ ถ้าอัตราผลตอบแทนคาดหมายสูงกว่า 10% ต่อปี เขาจะซื้อหุ้นบริษัทนี้หรือไม่? (ไม่ซื้อ)

6.10 การแจกแจงความถี่ของตัวแปร X มีดังนี้

x	0	1	2	3	4	5
ความถี่	18	48	180	252	72	30

ก) จงสร้างตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X

ข) จงหาค่าคาดหมายของ x (2.67)

6.11 โรงงานผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปจะผลิตเสื้อผ้ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความนิยมของแฟชั่น แต่โรงงานจะต้องซื้อผ้ามาสำรองไว้ก่อน จากสถิติความต้องการต่อสัปดาห์ตลอด 5 ปีที่ผ่านมา มีดังนี้

ปริมาณผ้า (หลา)	3,000	4,000	4,500	5,000
ความน่าจะเป็น	.2	.4	.2	.2

ก) จงหาปริมาณผ้าโดยถัวเฉลี่ยที่ใช้ต่อสัปดาห์ (4,100)

ข) ถ้าต้นทุนผ้า $4 ต่อหลา และขายหลาละ $5 ถ้าโรงงานซื้อผ้าเท่ากับจำนวนค่าคาดหมายทุก ๆ สัปดาห์ โรงงานจะได้กำไรหรือขาดทุนถ้ามีผู้ต้องการซื้อเพียง 2,500 หลา (ขาดทุน 3,900 บาท)

6.12 กล่องบรรจุลูกบอลล์หมายเลข 2, 4, 6 และ 8 รวม 4 ลูก เมื่อเขย่าให้เข้ากันแล้วหยิบแบบสุ่มมา 1 ใบ ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X แทนเลขที่ของลูกบอลล์ที่หยิบได้แบบแทนที่ จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

6.13 โยนลูกเต๋า 1 ลูก เพื่อดูว่าจะหงายด้านใด

(ก) ควรให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X แทนอะไร?

(ข) จงหาฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ X

6.14 ให้ X คือจำนวนด้านหัวที่หงายขึ้นจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 อัน จงหา

(ก) $P(X \leq 2)$ $(\frac{11}{16})$ (ง) $P(1 \leq X \leq 3)$ $(\frac{14}{16})$

(ข) $P(X \geq 2)$ $(\frac{11}{16})$ (จ) $P(0 < X \leq 4)$ $(\frac{15}{16})$

(ค) $P(X \leq 3)$ $(\frac{15}{16})$ (ฉ) $P(1 < X < 3)$ $(\frac{6}{16})$

6.15 โยนเหรียญที่ไม่สมดุลย์ 3 ครั้ง ถ้าโอกาสที่จะหงายด้านหัว = 0.60 จงสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X, ในเมื่อ X คือจำนวนด้านหัวจากการโยนเหรียญนั้น 3 ครั้ง

6.16 ร้านขายเครื่องเสียงแห่งหนึ่งขายเครื่องเสียง 2 ชนิด คือ H และ T และได้รับความนิยมจากลูกค้าเท่ากันทั้ง 2 ชนิด นั่นคือ 50% ของลูกค้าจะนิยมซื้อแบบ H และอีก 50% จะนิยมซื้อแบบ T และสมมุติว่าร้านมีเครื่องเสียงอยู่ในสต็อคแบบละ 3 เครื่อง ถ้าในวันหนึ่งร้านขายเครื่องเสียงได้ 3 เครื่อง

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องเสียงที่ขายได้ 3 เครื่องนั้น จะเป็นแบบเดียวกัน $(\frac{1}{4})$

(ข) จงนิยามตัวแปรเชิงสุ่มของการทดลองนี้

(ค) จงแสดงค่าของตัวแปรเชิงสุ่มที่สัมพันธ์กับเหตุการณ์ (simple event)

(ง) จงสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม

6.17 ในการเล่นเกมโยนเหรียญสมดุลย์ 3 ครั้ง ถ้าหงายด้านก้อยทั้ง 3 ครั้ง จะไม่ได้อะไรเลย แต่ถ้าหงายด้านหัว 1 ครั้ง จะได้ 1 บาท ถ้าหงายด้านหัว 2 ครั้ง จะได้ 4 บาท และถ้าหงายด้านหัวทั้ง 3 ครั้ง จะได้ 9 บาท ดังนั้น ถ้า X แทนจำนวนด้านหัวที่หงายขึ้น และ Y แทนจำนวนเงินที่ได้เมื่อชนะ ในเมื่อ $Y = X^2$ จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ Y

6.18 จงสร้างตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y ในข้อ 6.17

6.19 จากข้อ 6.18 ตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y เป็นอิสระกันหรือไม่? เพราะเหตุใด?

6.20 ให้ X คือจำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 อัน จงสร้างการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

6.21 ลูกเต๋าไม่สมดุลย์ลูกหนึ่งจะหงายแต่ละด้านเป็นสัดส่วนกับจำนวนจุด

(ก) ควรให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X แทนอะไร

(ข) จงหาฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ X จากการทดลองนี้

6.22 ในการสำรวจความนิยมสินค้าตัวใหม่ที่นำออกสู่ตลาด จะถามผู้ที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่างสุ่มว่า "ใช้สินค้าตัวใหม่นี้หรือไม่" ซึ่งจะได้รับคำตอบเพียง 3 อย่าง คือ "ใช้" กับ "ไม่ใช้" ให้แทนค่าคำตอบด้วยเลข 1 และ 0 ตามลำดับ และให้ p คือความน่าจะเป็นที่จะตอบว่า "ใช้" ให้ W คือ ตัวแปรเชิงสุ่มจากงานทดลองนี้ จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ W

6.23 บริษัทหนึ่งต้องการเพิ่มจำนวนขายโดยการแจกบัตรคูปองลดราคาให้แม่บ้านสมมุติว่าในตลาดซุปเปอร์แห่งหนึ่งมีแม่บ้านใช้บัตรคูปองนั้น 10% ให้ X แทนจำนวนแม่บ้านที่ใช้บัตรคูปองจากการสุ่มแม่บ้านที่ซื้อของในตลาดซุปเปอร์นั้นมา 3 ราย จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

6.24 กระทรวงหนึ่งเรียกประกวดราคาเพื่อซื้อเครื่องพิมพ์ดีด ถ้าบริษัทหนึ่งมีสถิติชนะการประกวดราคาโดยเฉลี่ย 50% ของการยื่นใบเสนอราคา ให้ X แทนรายการที่บริษัทดังกล่าวชนะประกวดราคาจากการยื่น 3 รายการ และกำหนดให้ทั้ง 3 รายการเป็นอิสระกัน จงหาฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ X

6.25 ศาลแห่งหนึ่งมีลูกขุน 12 คน เป็นหญิง 4 คน ถ้าจะตั้งคณะลูกขุน 3 คน โดยวิธีการสุ่มชื่อแบบไม่แทนที่ ให้ X แทนจำนวนลูกขุนที่เป็นหญิงในคณะลูกขุนชุดนั้น จงหาฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ X

6.26 ถ้ามีลูกขุน 10 คน เป็นข้าราชการบำนาญ 3 คน ถ้าจะตั้งคณะลูกขุน 4 คน โดยการหยิบชื่อแบบสุ่มและไม่ใส่คืน ให้ X แทนจำนวนลูกขุนที่เป็นข้าราชการบำนาญในคณะลูกขุน 4 คนนั้น จงสร้างฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ X

6.27 ในสินค้า 20 ชิ้น มีชำรุดอยู่ 4 ชิ้น ผู้ซื้อไม่ทราบว่าชิ้นใดชำรุดจึงสุ่มมาตรวจสอบคุณภาพ 3 ชิ้น ให้ X แทนจำนวนสินค้าชำรุดที่ตรวจพบ จงหา P(X) เมื่อ X = 0, 1, 2 และ 3

6.28 ให้ X แทนจำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 ครั้ง และ $Y = X^2$ จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ Y

6.29 ให้ X แทนจำนวนขาย และ Y แทนค่าโฆษณา และมีนิยามดังนี้

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าจำนวนขายต่ำกว่า 10,000 บาท/เดือน} \\ 1 & \text{ถ้าจำนวนขายอย่างน้อย 10,000 บาท/เดือน แต่ต่ำกว่า 20,000 บาท/เดือน} \\ 2 & \text{จำนวนขายอย่างต่ำ 20,000 บาท/เดือน} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าค่าโฆษณาต่อปีต่ำกว่า 10,000 บาท} \\ 1 & \text{ถ้าค่าโฆษณาต่อปีอย่างน้อย 10,000 บาท แต่ไม่ถึง 20,000 บาท} \\ 2 & \text{ถ้าค่าโฆษณาต่อปีอย่างน้อย 20,000 บาท} \end{cases}$$

และฝ่ายวิจัยตลาดได้สร้างตารางความน่าจะเป็นร่วมกัน ของ X และ Y ดังนี้

Y \ X	0	1	2	รวม
0	0.08	0.07	0.05	0.20
1	0.10	0.18	0.12	0.40
2	0.02	0.05	0.33	0.40
รวม	0.20	0.30	0.50	1.00

(ก) X และ Y เป็นอิสระกันหรือไม่?

(ข) จงหา $P(X = 1 \cap Y = 2)$ (.05)

(ค) จงหา $P(Y = 1/X)$ เมื่อ $X = 0$, $X = 1$ และ $X = 2$

(ง) จงใช้แผนภาพพฤกษาแสดงการหาความน่าจะเป็นร่วมกันของทุก ๆ คู่ลำดับของ X และ Y ในรูปผลคูณของ marginal prob และ conditional prob.

6.30 ร้านขายเครื่องดูดฝุ่น 2 ยี่ห้อ คือ A และ B โดยจะขายได้ในจำนวนใกล้เคียงกัน ถ้าในวันหนึ่งร้านเหลือเครื่องดูดฝุ่นชนิดละ 3 เครื่อง และในวันนั้นขายได้ 3 เครื่อง ให้ X แทนจำนวนเครื่องดูดฝุ่นชนิด A ที่ขายได้ในวันนั้น จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

6.31 ให้ X คือผลได้จากการโยนเหรียญสมดุลย์อันหนึ่ง โดยให้ X = 0 ถ้าหงายด้านก้อย และ X = 1 ถ้าหงายด้านหัว ให้ Y แทนผลได้จากการทอดลูกเต๋าสมดุลย์ลูกหนึ่ง นั่นคือ Y จะมีค่าเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ส่วน Z คือผลรวมของ X และ Y $(Z = X + Y)$ จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ Z

6.32 จากข้อ 6.31 จงหาความน่าจะเป็นที่ Z จะมีค่าอย่างน้อยที่สุด 5 $(\frac{5}{12})$

3. การใช้ค่าคาดหมายช่วยในการตัดสินใจเชิงสถิติ

ลองพิจารณาปัญหาการขายส่งสินค้าที่เสียง่าย เช่น ผัก ผลไม้ ขนมปัง ขนมเค้ก ซึ่งถ้าสินค้าเน่าเสียก่อนจะทำให้ผู้ขายขาดทุน ดังนั้น ผู้ขายจะต้องคาดจำนวนสต็อคสินค้าไม่ให้มากเกินไป ในขณะเดียวกันก็ต้องไม่น้อยจนเกินไป เพราะจะสูญเสียโอกาสที่จะได้กำไร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

พ่อค้าซื้อลิ้นจี่มากิโลกรัมละ 20 บาท เพื่อขายในราคากิโลกรัมละ 50 บาท เขาจะไม่ทราบล่วงหน้าว่าแต่ละวันจะขายได้กี่กิโลกรัม แต่เขาสามารถวิเคราะห์จากการแจกแจงความถี่ของจำนวนขายใน 100 วัน ได้ดังนี้

จำนวนขาย	จำนวนวันที่ขายได้	ความน่าจะเป็นของจำนวนขาย
10	15	.15
11	20	.20
12	40	.40
13	25	.25
	100	1.00

ความหมายของความสูญเสีย

ผู้ขายส่งจะพบกับความสูญเสีย 2 อย่าง คือ

1. Obsolescence loss คือความสูญเสียเนื่องจากสั่งสินค้ามาเก็บไว้มากเกินไปในแต่ละวัน และถ้าขายไม่ได้ในวันนั้น อาจต้องทิ้งไปหรือลดราคาลงสำหรับวันรุ่งขึ้น

2. Opportunity loss หรือความสูญเสียโอกาส จะเกิดขึ้นเมื่อสั่งสินค้ามาน้อยไป เมื่อลูกค้าต้องการซื้อจึงไม่มีสนองตอบ จึงสูญเสียรายได้ที่พึงจะได้ หากมีสินค้าเพียงพอ

ถ้าในวันใดผู้ขายสั่งสินค้าไว้เป็นจำนวนพอดีกับความต้องการก็จะไม่มีความสูญเสียทั้ง 2 ประเภทนี้ ดังนั้น เราอาจแสดงความสูญเสียทั้งหมดได้ในตารางความสูญเสียภายใต้เงื่อนไข ดังนี้

จำนวนความต้องการลิ้นจี่	จำนวนสต็อคสินค้าที่เป็นไปได้ 10	11	12	13
10	0	20	40	60
11	30	0	20	40
12	60	30	0	20
13	90	60	30	0

ตารางที่ 6.7 แสดงความสูญเสียภายใต้เงื่อนไข

พึงสังเกตว่า ตัวเลขภายใต้เส้นทะแยงมุม (เลขศูนย์คือเส้นทะแยงมุม) คือ ความสูญเสียโอกาสซึ่งเกิดขึ้น เนื่องจากมีสินค้าน้อยกว่าความต้องการของลูกค้า ส่วนตัวเลขที่อยู่เหนือเส้นทะแยงมุม คือ ความสูญเสียจากสินค้าเน่าเสียเพราะสต็อคมากเกินความต้องการของลูกค้าในวันนั้น

การหาค่าสูญเสียคาดหมาย : (Expected Losses **หรือ** EOL)

เนื่องจากผู้ขายมีทางเลือกที่จะตัดสินใจสต็อคสินค้า 4 จำนวน คือ 10, 11, 12 และ 13 กิโลกรัมต่อวัน ลองพิจารณาความสูญเสีย ถ้าสต็อควันละ 10 กิโลกรัม และหาค่าคาดหมาย ได้ดังนี้

ความต้องการ	ความสูญเสียภายใต้เงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของความต้องการ		ความสูญเสียคาดหมาย
10	0	X	.15	=	.00
11	30	X	.20	=	6.00
12	60	X	.40	=	24.00
13	90	X	.25	=	22.50
			1.00	EOL →	52.50

ตารางที่ 6.8 แสดงการหาค่าผลสูญเสียคาดหมาย **เมื่อสต็อควันละ 10 กิโลกรัม**

ค่าผลสูญเสียได้จากคอลัมน์แรกของตาราง 6.7 จากตาราง 6.8 จะสรุปได้ว่า หากเตรียมลิ้นจี่ไว้ขายวันละ 10 กิโลกรัม ทุกๆ วันแล้ว ในระยะยาวจะมีผลสูญเสียโดยถัวเฉลี่ยวันละ 52.50 บาท

ดังนั้น วิธีการหาผลสูญเสียของการเตรียมสินค้าวันละ 11, 12 และ 13 กิโลกรัม ก็จะหาได้โดยวิธีเดียวกัน ดังนี้

EOL (เตรียมไว้ 11 กิโลกรัม) $= (20 \times .15) + (0 \times .20) + (30 \times .40) + (60 \times .25)$
$= 30$ บาท/วัน

EOL (เตรียมไว้ 12 กิโลกรัม) = (40 × .15) + (20 × .20) + (0 × .40) + (30 × .25)
= 17.50 บาท/วัน

EOL (เตรียมไว้ 13 กิโลกรัม) = (60 × .15) + (40 × .20) + (20 × .40) + (0 × .25)
= 25.00 บาท/วัน

เนื่องจากค่าเหล่านี้คือความสูญเสียโดยถัวเฉลี่ยต่อวัน ดังนั้น จึงควรเลือกจำนวนสต็อคที่ให้ผลสูญเสียถัวเฉลี่ยน้อยที่สุด นั่นคือ ควรจัดเตรียมไว้วันละ 12 กิโลกรัม จะให้ผลสูญเสียโดยถัวเฉลี่ยวันละ 17.50 บาท

แบบฝึกหัด

6.33 ร้านสรรพสินค้าจะสั่งกระเป๋าใส่เครื่องสำอางค์และเสื้อผ้าสำหรับสตรีใช้เดินทางเพื่อขายในเทศกาลลดราคา ร้านจะต้องสั่งล่วงหน้าจากโรงงานด้วย ผู้จัดการได้ประมาณจำนวนขายที่เป็นไปได้ ดังนี้

จำนวนกระเป๋า	27	28	29	30	31	32	33
ความน่าจะเป็น	.11	.13	.17	.20	.15	.14	.10

ถ้าร้านตั้งใจจะขายใบละ 370 จากต้นทุนใบละ 220 บาท ร้านควรจะสั่งจองจากโรงงานกี่ใบ ถ้าใช้วิธีความสูญเสียถัวเฉลี่ยน้อยที่สุด (โดยปกติทางร้านไม่ขายกระเป๋าชนิดนี้ ดังนั้นถ้าขายไม่หมดในเทศกาลลดราคาจะต้องเก็บไว้โดยไม่มีกำหนด เท่ากับเสียต้นทุน 220)

6.34 บริษัทให้เช่ารถสำหรับนักท่องเที่ยวจะซื้อรถให้เช่าราคาคันละ 100,000 บาท เพื่อให้เช่าวันละ 200 บาท โดยจะเปิดบริการสัปดาห์ละ 6 วัน (312 วันต่อปี) บริษัทจะต้องเสียค่าใช้จ่ายผันแปรอีกวันละ 10 บาทต่อคัน และเมื่อถึงสิ้นปีจะขายรถ และคาดว่าจะได้เงินคืน 50,080 บาท ขณะนี้ บริษัทอยู่ในระหว่างตัดสินใจว่าควรจะซื้อรถจำนวนกี่คัน ซึ่งบริษัทได้ประมาณความต้องการโดยถัวเฉลี่ยต่อวัน ดังนี้

จำนวนรถให้เช่า	8	9	10	11	12	13
ความน่าจะเป็น	.17	.18	.20	.16	.15	.14

จงใช้วิธีการของผลสูญเสียคาดหมายหาจำนวนรถที่บริษัทควรลงทุนจัดซื้อมาบริการและจะทำให้บริษัทได้กำไรสูงสุด (8 คัน)

6.35 ถ้า W แทนผลที่ได้ (H หรือ T) จากการโยนเหรียญสมดุลย์อันหนึ่ง จงหาค่าคาดหมายของ W (ให้ H = 1, T = 0) (.5)

6.36 ถ้า X คือจำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 อัน จงหาค่าคาดหมายของ X (1.0)

6.37 ถ้า X คือจำนวนจุดบนลูกเต๋า ในการโยน 1 ครั้ง จงหาค่าคาดหมายของ X (3.5)

6.38 ถ้า X คือผลรวมของจุดจากการโยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาค่าคาดหมายของ X (7)

6.39 จะออกสลากชิงรางวัล 1,000 ใบ ในราคาใบละ 2 บาท ผู้โชคดีจะได้รางวัลมูลค่า 400 บาท ถ้าท่านซื้อสลาก 2 ใบ จงหาค่าคาดหวังกำไรของท่าน (-3.20)

6.40 ให้ X คือผลตอบแทนจากการลงทุนซื้อหุ้น 2,000,000 บาท และมีการแจกแจง ดังนี้

x (ล้านบาท)	1	2	3	4	5
P(x)	.2	.3	.2	.2	.1

จงหากำไรคาดหมายจากการลงทุน 2 ล้านบาท (2,700,000)

6.41 ให้ $f(x) = X^2$, X คือ จำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 อัน และ f(x) คือ ผลได้ถ้าหงายด้านหัว จงหาผลได้คาดหมายจากการโยนเหรียญ 2 อัน (1.5)

6.42 โทรทัศน์เครื่องหนึ่งมีหลอด 10 หลอด ถ้ามีชำรุด 2 หลอด ช่างจึงสุ่มถอดมาตรวจ 2 หลอด เพื่อหาชิ้นส่วนที่ชำรุด ถ้า X คือ จำนวนหลอดชำรุดที่ตรวจพบจากการสุ่มมา 2 หลอดนั้น จงหาค่าคาดหมายของ X (0.4)

6.43 ถ้าความน่าจะเป็นที่ผู้ขับขี่รถจะประสบอุบัติเหตุรถยนต์ในแต่ละปีเป็น 0.02 และความเสียหายจากอุบัติเหตุมีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

ความเสียหาย (บาท)	500	1,000	2,000	3,000	10,000	15,000
ความน่าจะเป็น	.40	.20	.15	.10	.09	.06

จงหาจำนวนความเสียหายคาดหมายต่อปี เนื่องจากอุบัติเหตุ (2,800)

6.44 จงหาค่าคาดหมายของ Y ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

Y	0	1	2	3	4	รวม
P(y)	.20	.15	.25	.05	.35	1.00

(E(Y) = 2.2)

6.45 ถ้าลูกค้าต้องการประกันไฟไหม้บ้านมูลค่า 100,000 บาท ซึ่งมีโอกาสที่จะถูกไฟไหม้ในแต่ละปี = .0002 บริษัทควรจะเรียกค่าเบี้ยประกันรายปีเท่าไร จึงจะทำให้บริษัทมีเงินสำหรับค่าใช้จ่ายในการจัดการ, การขาย และกำไร 100 บาท (120.004)

6.46 ผู้รับเหมารายหนึ่งได้เสนอโครงการซึ่งอาจทำให้ได้กำไร 800,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.6 และอาจจะขาดทุน 400,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.4 จงหากำไรคาดหมายของผู้รับเหมา (320,000)

6.47 ให้ X คือจำนวนครั้งที่เครื่องจักรขัดข้องใน 1 วันของโรงงานแห่งหนึ่ง ให้ความน่าจะเป็นที่- X จะมีค่า 0, 1, 2 และ 3 เป็น .30, .40, .20 และ .10 ตามลำดับ จงหาค่าคาดหมายของจำนวนครั้งที่เครื่องจักรขัดข้องในแต่ละวัน (1.1)

การใช้ค่าคาดหมายหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของประชากร

เราทราบว่า ค่าเฉลี่ยของประชากร คือ μ ได้จาก

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

จากสูตรนี้ จะหา μ ได้ ต้องเป็นประชากรที่นับถ้วน (finite population) โดยที่ N คือจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดในประชากรนั้น แต่ถ้าประชากรเป็นแบบอนันต์นับ (infinite population) คือเมื่อ N เข้าไปสู่ ∞ จะใช้สูตรดังกล่าวหาค่าเฉลี่ยประชากรไม่ได้

ตัวอย่างประชากรแบบอนันต์นับ เช่น ถ้าเราสนใจน้ำหนักทารกแรกเกิดในอดีต, ปัจจุบันและอนาคต จะเห็นว่าการที่เราจะมีข้อมูลอย่างสมบูรณ์ คือ น้ำหนักทารกทั้งหมดที่เกิดแล้ว และที่กำลังจะเกิด ดูจะเป็นสิ่งเหลือวิสัย เพราะมีทารกมากมายนับไม่ถ้วน เช่นนี้เรียกว่าประชากรแบบนับไม่ถ้วน วิธีหาค่าเฉลี่ยของประชากรแบบนับไม่ถ้วน จะต้องทราบการแจกแจงความน่าจะเป็น

ตัวอย่างที่ 1 กล่องบรรจุลูกบอลล์ 10 ลูก หมายเลข 0, 1, 2,...,9 ตามลำดับถ้าหยิบแบบสุ่มคราวละ 1 ลูก จดหมายเลขไว้ ใส่กลับคืนไปแล้วหยิบอีกให้ x คือ หมายเลขที่หยิบได้ จงหาค่า μ

ตัวอย่างนี้ มองได้ 2 แง่ คือ เลขทั้ง 10 ตัว หมายถึงประชากรที่นับถ้วนจึงใช้สูตร $\mu = \Sigma X_i / N$ หรือจะมองอีกแง่ว่าเป็นประชากรแบบอนันต์นับก็ได้เนื่องจากเป็นการหยิบ **แบบแทนที่** (with replacement) **และไม่จำกัด**จำนวนครั้งที่หยิบ เลขต่าง ๆ จึงมีสิทธิปรากฏนับครั้งไม่ถ้วน ดังนั้น ในการหาค่าเฉลี่ย จึงต้องหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของเลขทั้งหมด ซึ่งจะมีโอกาสเกิดเท่ากัน เนื่องจากมีเลขละ 1 ลูก และการหยิบเป็นแบบสุ่มและมีการแทนที่ ให้ x คือหมายเลขที่หยิบได้ x จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (x)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของ x คือ

$$\mu = 0(1/10) + 1(1/10) + \ldots + 9(1/10)$$

$$= 45/10 = 4.5$$

เนื่องจากค่าต่าง ๆ ของ x เกิดด้วยโอกาสเท่ากันคือ 0.1 (uniform) ดังนั้น วิธีการหาค่า μ จึงดูเหมือนกับสูตรเดิมคือ $\Sigma X / N$

$$\frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{10} = 4.5$$

ซึ่งเป็นการพ้องกันโดยบังเอิญ

ตัวอย่างที่ 2 ถ้ากล่องนั้นมีลูกบอลล์ 4 หมายเลข คือ 2, 4, 6 และ 8 ลูกบอลล์หมายเลข 2 มี 20% หมายเลข 4 มี 30% หมายเลข 6 มี 40% และหมายเลข 8 มีเพียง 10% เมื่อเขย่าโดยทั่วกัน และหยิบแบบสุ่มและแทนที่ ให้ x คือหมายเลขที่หยิบได้ จงหาค่าเฉลี่ยของ x

x จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

x	2	4	6	8
f(x)	0.2	0.3	0.4	0.1

ค่าเฉลี่ยของ X คือ

$$\mu = 2(0.2) + 4(0.3) + 6(0.4) + 8(0.1)$$
$$= 4.8$$

นั่นคือ

$$\boxed{\mu = \Sigma x f(x)}$$ สำหรับประชากร แบบนับไม่ถ้วน

ข้อสังเกต ถ้าใช้สูตรประชากรแบบนับถ้วนจะได้ค่าต่างไป

$$\mu = \Sigma X/N$$
$$= (2 + 4 + 6 + 8)/4 = 5$$

ซึ่งเป็นค่าที่ไม่ถูกต้อง เพราะค่าเฉลี่ยประชากรจะเท่ากับ 5 เฉพาะกรณีที่ทุกค่าเกิดด้วยโอกาสเท่ากัน (uniform) คือ $\frac{1}{4}$ เท่านั้น

การหาความแปรปรวนของประชากร

ให้ s^2 คือ ความแปรปรวนของตัวอย่างสุ่มขนาด n

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

(df หายไป 1 เพราะต้องประมาณ μ ด้วย $\bar{x}$)

ให้ σ^2 = ความแปรปรวนของประชากรขนาด N

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{N} (X - \mu)^2}{N} \\ &= E(X - \mu)^2\end{aligned}}$$

เฉพาะประชากรแบบนับถ้วน
(finite population)

เพราะ

$$(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$$

ดังนั้น

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$$
$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$
$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

นั่นคือ **สำหรับประชากรแบบนับไม่ถ้วน**

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = \Sigma x^2 f(x) - \mu^2$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X จากตัวอย่างที่ 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	$\Sigma x^2 f(x)$
f(x)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	= 28.5
$x^2f(x)$	0.0	0.1	0.4	0.9	1.6	2.5	3.6	4.9	6.4	8.1	

$$\sigma^2 = \Sigma x^2 f(x) - \mu^2$$
$$= 28.5 - 4.5^2$$
$$= 28.5 - 20.25 = 8.25$$

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8.25} = 2.8723$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X ในเมื่อ X คือจำนวน หัว จากการโยนเหรียญสมดุลย์ 3 อัน

x	0	1	2	3	รวม
x^2	0	1	4	9	
f(x)	1/8	3/8	3/8	1/8	1.0
xf(x)	0	3/8	6/8	3/8	12/8 = 3/2 = 1.5
$x^2f(x)$	0	3/8	12/8	9/8	24/8 = 3.0

$E(X)$	=	$\mu = 1.5$
$E(X^2)$	=	$\Sigma x^2 f(x) = 3.0$
σ^2	=	$E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = \Sigma x^2 f(x) - \mu^2$
	=	$3.0 - 1.5^2 = 3.0 - 2.25 = 0.75$
σ	=	$\sqrt{0.75} = 0.86603$

แบบฝึกหัด

6.48 ให้ X คือ จำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 2 อัน จงหาความแปรปรวนของ X (0.5)

6.49 ให้ X คือ ผลรวมของจุดบนหน้าลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความแปรปรวนของ X (5.83)

6.50 ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอลล์หมายเลข 0, 2, 4 และ 6 รวม 4 ลูกให้ X คือ เลขของลูกบอลล์ที่หยิบได้คราวละ 1 ลูก แบบมีการแทนที่จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X (5)

6.51 ถ้าความน่าจะเป็นที่พนักงานผู้หนึ่งจะขายรถได้ 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 คันต่อวันเป็น 0.10, 0.20, 0.30, 0.25, 0.10 และ 0.05 ตามลำดับ ให้ X คือ จำนวนรถที่ขายได้ต่อ 1 วัน จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X (1.66)

6.52 ถ้าผลตอบแทนการลงทุนของบริษัทหนึ่ง มีการแจกแจง ดังนี้

ผลตอบแทน (บาท)	ความน่าจะเป็น
1,000,000	0.2
2,000,000	0.3
3,000,000	0.2
4,000,000	0.2
5,000,000	0.1

ให้ X คือ ผลตอบแทนการลงทุน จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

(2.7, 1.61)

6.53 กำหนดให้ Y มีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

y	0	1	2	3	4
f(y)	0.20	0.15	0.25	0.05	0.35

จงหาความแปรปรวน และค่าเฉลี่ยของ Y (μ = 2.2, σ^2 = 2.36)

6.54 กำหนดการแจกแจงความน่าจะเป็นของ IQ นักเรียนที่จบมัธยมปลายมีดังนี้

IQ	ความน่าจะเป็น
42.5 — 57.5	0.01
57.5 — 72.5	0.02
72.5 — 87.5	0.05
87.5 — 102.5	0.40
102.5 — 117.5	0.30
117.5 — 132.5	0.10
132.5 — 147.5	0.08
147.5 — 162.5	0.04

จงหาระดับ IQ ถัวเฉลี่ย (106.7)

6.55 จากข้อ 6.54 จงหาความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระดับ IQ (376.11,19.39)

6.56 เตาอบระบบไมโครเวฟ มีหลอดไฟ 8 หลอด และเชื่อว่ามี 2 หลอด ที่ชำรุด ถ้าถอดมาแบบสุ่ม 2 หลอด ให้ X คือจำนวนหลอดที่ชำรุดที่ถอดมา จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X (0.5, .567)

6.57 ลูกเต๋าไม่สมดุลย์ลูกหนึ่ง เมื่อโยนแล้วแต่ละด้านจะหงายขึ้นด้วยโอกาสที่เป็นสัดส่วนกับจำนวนจุด ให้ X คือจำนวนจุดที่นับได้จากการโยน 1 ครั้ง จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X (4.333, 1.49)

4. การแจกแจงแบบเบอร์นุยลี่ และการแจกแจงแบบทวินาม

การแจกแจงแบบทวินาม เป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเป็นผลต่อเนื่องมาจากการ**ทดลองแบบเบอร์นุยลี่** (Bernoulli trials or Bernoulli process) ซึ่งได้ชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ชื่อ Jacob หรือ Jacque Bernoulli (1654-1705) ตัวอย่างการทดลองแบบเบอร์นุยลี่ คือการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง คุณสมบัติของกระบวนการเบอร์นุยลี่ คือ จะมีผลทดลอง (simple event) เพียง 2 ชนิด เช่น การโยนเหรียญ จะมีเหตุการณ์เพียง 2 อย่าง คือ หัวกับก้อย คำถามที่ต้องการเพียงคำตอบรับหรือปฏิเสธ (ใช่-ไม่ใช่) เช่น ถามเพื่อนว่า เมื่อคืนนี้ได้ชมรายการฟุตบอลทางทีวีหรือไม่ คำตอบคือ "ได้" หรือ "ไม่ได้" การตรวจสอบคุณภาพสินค้าถ้าจำแนกเพียง 2 ลักษณะ คือ "ชำรุด"-"ไม่ชำรุด" เนื่องจากมีผลการทดลองเพียง 2 อย่าง นักสถิติจึงนิยมเรียกผลทดลองนั้นว่า ความสำเร็จและความล้มเหลว (success or failure ตัวย่อคือ S และ F) แต่ไม่ได้หมายความว่า นิยม S มากกว่า F เนื่องจาก S และ F เป็นการจำแนกตามคุณภาพ เมื่อเราต้องการตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยลี่ จึงต้องให้ S และ F มีค่าเป็นตัวเลข และนิยมให้ S เป็น 1 และ F เป็น 0 ส่วน p คือความน่าจะเป็นที่เกิด S ดังนั้น $(1 - p) = q$ คือความน่าจะเป็นของ F ดังนั้น ถ้าให้ W. เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นุยลี่ W จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

w	0	1	รวม
P(w)	1 − p	p	1.0

ตารางที่ 6.9 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเบอร์นุยลี่

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ W

$$\mu_w = E(W) = 0(1-p) + 1(p) = p$$

$$\sigma^2_w = E(W-\mu_w)^2$$

$$= E(W^2) - \mu^2_w$$

$$E(W^2) = 0^2(1-p) + 1^2(p) = p$$

ดังนั้น $\sigma^2_w = p - p^2 = p(1-p) = pq$

และ $\sigma_w = \sqrt{pq}$

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_w &= p\\ \sigma^2_w &= pq\end{aligned}}$$

นั่นคือ ถ้า W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นุยลี่ W จะมีค่าเฉลี่ย = p และมีความแปรปรวน = pq

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของการโยนเหรียญสมดุลย์ 1 อัน

ให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยลี่ และให้ S แทนเหตุการณ์ที่โยนแล้วได้ด้านหัว

$$E(W) = p = 0.5$$

$$\sigma^2_w = pq = (0.5)(0.5) = (0.25)$$

ดังนั้น

$$\sigma_w = \sqrt{pq} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

ตัวอย่าง 2 โรงงานทอผ้าแห่งหนึ่งมีคนงานหญิง 80% ให้ W = 1 ถ้าคนงานที่สุ่มมา 1 คนเป็นหญิง และ W = 0 ถ้าคนงานที่สุ่มมา 1 คน เป็นชาย จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ W

S คือสุ่มมาได้เพศหญิง, $p(S) = p = 0.8,\ q = 0.2$

$$E(W) = p = 0.8$$

$$\sigma_w = \sqrt{pq} = \sqrt{0.8(0.2)} = \sqrt{0.16} = 0.4$$

ข้อสังเกต

p คือความน่าจะเป็นของ S ในขณะเดียวกัน p คือสัดส่วนของประชากรด้วย (population proportion ซึ่งต่อไปในเรื่องการทดสอบสอบสมมุติฐาน และการประมาณค่าจะใช้แทนด้วย π เพราะเป็นค่าพารามิเตอร์) เพราะ p คือ สัดส่วนของความสำเร็จในระยะยาว เช่นจากตัวอย่างที่ 2 ได้ p = 0.8 ความจริงคือ $\pi = 0.8$ แต่ถ้าเราสุ่มได้หญิง 65 คน จากตัวอย่างที่สุ่มมา 100 คน p = 65/100 = .65 p ตัวนี้เป็นค่าสถิติ เพราะคือสัดส่วนที่ได้จากตัวอย่างสุ่ม (sample proportion) ถ้า $n \to \infty$,$p \to \pi$

แบบฝึกหัด

6.58 ถ้า 40% ของแม่บ้านนิยมใช้ผงซักฟอกสินไทย ให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยลี่ของงานทดลองนี้

(ก) จงนิยามตัวแปรเชิงสุ่ม W

(ข) จงนิยามพารามิเตอร์ π

6.59 บริษัทวิจัยธุรกิจแห่งหนึ่งมีพนักงานจบสาขาบริหารธุรกิจ 75% อีก 25% จบสาขาอื่น

ให้ $W = 1$ ถ้าพนักงานที่สุ่มมา 1 คน จบบริหารธุรกิจ

$W = 0$ ถ้าพนักงานที่สุ่มมา 1 คน จบสาขาอื่น

จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ W (.75, .1875)

6.60 ถ้า 90% ของพนักงานบริษัทหนึ่งมีรถยนต์ส่วนตัว

ให้ $W = 1$ ถ้าพนักงานที่สุ่มมา 1 คน มีรถยนต์ส่วนตัว

$W = 0$ ถ้าพนักงานที่สุ่มมา 1 คน ไม่มีรถยนต์ส่วนตัว

จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ W (.9, .3)

6.61 เชื่อว่าวัคซีนป้องกันหวัดชนิดหนึ่ง จะมีผลป้องกันได้ 50% นั่น คือโดยถัวเฉลี่ยจะมี 50 คนจาก 100 คน ที่ฉีดวัคซีนชนิดนี้แล้วจะไม่เป็นหวัดตลอดฤดูฝน ให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นุยลี่ จงหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ W (.5, .5)

6.62 ให้ $p = 0.1$ คือความน่าจะเป็นที่จะตรวจพบสินค้าชำรุด จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ W ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มเบอร์นุยลี่ และหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ W (.1,.09)

6.63 กำหนดให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มเบอร์นุยลี่ p คือ สัดส่วนของตัวอย่างสุ่ม และค่าต่าง ๆ ของ W จากตัวอย่างสุ่ม 10 จำนวนมีดังนี้

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1

จงหาค่า p (.5)

6.64 จากข้อ 6.63 ถ้า $p = \sum_{i=1}^{n} W_i/n$

p คือ ค่าเฉลี่ยของ W ด้วยหรือไม่? จงอธิบาย

การแจกแจงแบบทวินาม

การแจกแจงแบบทวินามเป็นผลมาจากการกระทำการทดลองแบบเบอร์นุยลี่ซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดย $P(S) = p$ เป็นค่าคงที่ทุก ๆ ครั้ง นอกจากนั้นการกระทำแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระกัน จึงจะเรียกว่าการทดลองแบบทวินาม ซึ่งสรุปแล้วจะมีคุณสมบัติ 4 ข้อ ดังนี้

1. การทดลองนั้น ต้องสามารถกระทำซ้ำได้ n ครั้ง
2. ผลการทดลองแต่ละครั้งมีเพียง 2 อย่าง คือ S และ F
3. p เป็นค่าคงที่ตลอด n ครั้ง (จะทำให้ q เป็นค่าคงที่ด้วย)
4. การกระทำแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน

ดังนั้น ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จากการทดลองแบบทวินาม

X **คือจำนวนความสำเร็จจากการทดลองแบบทวินาม** ซึ่งคือผลรวมของ W นั่นเอง

$$X = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Sigma W$$

และ X จะมีค่าน้อยที่สุด = 0 , ค่ามากที่สุด = n

ตัวอย่าง 1 ถ้าโยนเหรียญอันหนึ่ง 10 ครั้ง ถ้าหงายด้านหัวให้ W = 1 ถ้าหงายด้านก้อยให้ W = 0 ถ้าผลทดลองมีดังนี้

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0

นั่นคือมีความสำเร็จ (หัว) 6 ครั้ง

$$X = \Sigma W = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 6$$

จะเห็นว่า X จะมีค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด $n + 1 = 11$ ค่า คือ 0, 1, 2,...,10 X จึงเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องเพราะค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดไม่ต่อเนื่องกัน และเป็นค่าที่เกิดจาก**การนับ** (จึงเป็นค่าติดลบไม่ได้)

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

$$\begin{aligned} E(X) &= E(W_1 + W_2 + \dots + W_n) \\ &= E(W_1) + E(W_2) + \dots + E(W_n) \\ &= p + p + \dots + p = np \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_X &= np \\ \sigma^2_X &= npq \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_X &= \sigma^2(W_1 + W_2 + \dots + W_n) \\ &= \sigma^2_{W_1} + \sigma^2_{W_2} + \dots + \sigma^2_{W_n} \\ &= pq + pq + \dots + pq \\ &= npq \end{aligned}$$

โดยที่ W_i เป็นอิสระกัน

จึงสรุปได้ว่า

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินาม จะมีค่าเฉลี่ย $\mu = np$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = npq$

หมายเหตุ ค่า p และ q เป็นค่าพารามิเตอร์ ดังนั้น เมื่อถึงบทการทดสอบสมมติฐาน จะใช้ในรูป π และ $(1 - \pi)$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ x ในเมื่อ X จำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 อัน

นั่นคือ $n = 4, p = 0.5, q = 0.5$

$\mu = E(X) = np = 4(0.5) = 2$

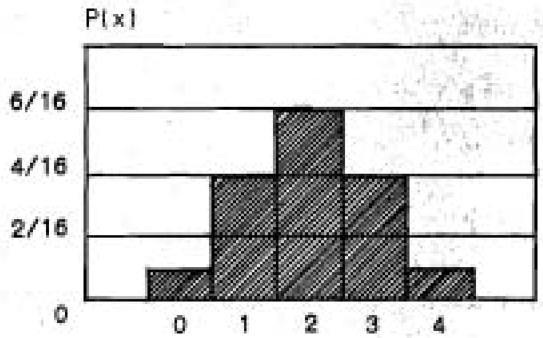
$\sigma^2_X = npq = 4(0.5)(0.5) = 1$

การหาฟังก์ชั่นน่าจะเป็นแบบทวินาม

ลองหาฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของ X จากตัวอย่างที่ 2 ซึ่งให้ X คือ จำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 อัน การทดลองนี้จะมีกลุ่มผลทดลองทั้งหมด $2^4 = 16$ อย่าง คือ

ตารางที่ 6.10 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X จำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 อัน

ผลทดลอง	x	P(x)		
T T T T	0	$(1-p)^4 = (1/2)^4$	=	1/16
T T T H				
T T H T	1	$4(p)(1-p)^3 = 4(1/2)(1/2)^3$	=	4/16
T H T T				
H T T T				
T T H H				
T H T H				
H T T H	2	$6(p)^2(1-p)^2 = 6(1/2)^2(1/2)^2$	=	6/16
H H T T				
H T H T				
T H H T				
T H H H				
H T H H	3	$4(p)^3(1-p) = 4(1/2)^3(1/2)$	=	4/16
H H T H				
H H H T				
H H H H	4	$p^4 = (1/2)^4$	=	1/16
รวม				16/16 = 1



รูปที่ 6.4 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X, จำนวนหัวจากการโยนเหรียญสมดุลย์ 4 อัน

จากตารางที่ 6.10 จะเห็นว่า X มีค่าต่าง ๆ (n + 1) = 5 ค่า แต่ละค่าจะมีจำนวนหนทางซึ่งต่อไปจะเรียกว่า "สัมประสิทธิ์ทวินาม" (binomial coefficient) ดังนี้

$x = 0$	1 ครั้ง	$\binom{4}{0} = \frac{4!}{4!\,0!}$	$= 1$
$x = 1$	4 ครั้ง	$\binom{4}{1} = \frac{4!}{3!\,1!}$	$= 4$
$x = 2$	6 ครั้ง	$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!}$	$= 6$
$x = 3$	4 ครั้ง	$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1!\,3!}$	$= 4$
$x = 4$	1 ครั้ง	$\binom{4}{4} = \frac{4!}{0!\,4!}$	$= 1$

นอกจากนี้ จากตารางที่ 6.10 จะสรุปสูตรการหาความน่าจะเป็นของ x คือความสำเร็จจากการทดลองแบบทวินาม ดังนี้

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$x = 0, 1, 2, \ldots, n$ รวม $n + 1$ ค่า

ในภาคผนวกท้ายเล่มจะมีตารางสำเร็จของการแจกแจงแบบทวินามทั้งแบบค่าเฉพาะ (individual-term) และค่าสะสม individual term จะให้ $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, x เป็นค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปร วิธีดูตารางคือเลือก p และ n แล้วตรวจดูค่า x ที่ต้องการ ส่วนตารางแบบสะสมจะให้ $P(X \leq x)$ หรือ $\sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ คือสะสมจากค่าน้อยที่สุดของ x คือ 0 ถึงค่าที่ต้องการ คือ เมื่อ $x = r$

ตัวอย่างที่ 3 ยาชนิดหนึ่งมีผลการรักษาให้หาย 70% ถ้ามีคนไข้กินยานั้น 30 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้หายจากโรค 20 คน

เปิดตารางทวินามสะสมที่ n = 30, p = .70

$$P(X = 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 19) = .41119 - .26963 = .14156$$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้าแม่บ้านอนุญาตให้คนขายประกันเข้าไปสัมภาษณ์ในบ้านแล้ว จะมี 30% ของแม่บ้านเหล่านั้นที่ตกลงซื้อประกันอุบัติเหตุ ถ้ามีแม่บ้าน 10 ราย ให้การต้อนรับผู้ขายประกันโดยเชิญเข้าบ้าน จงหาความน่าจะเป็นของ (1) มีอย่างมาก 4 ราย ตกลงซื้อประกัน และ (2) มีอย่างน้อย 4 ราย ตกลงซื้อประกัน

ตารางที่ 6.11 แสดงส่วนหนึ่งของตารางการแจกแจงทวินามแบบสะสม

	n = 10		
x \ p	. . .	0.3	. . . . . .
0			
1			
2			
3		0.64961	
4		0.84973	
5			
6			
7			
8			
9			
10			

ใช้เปิดตารางทวินามแบบสะสม

1) $P(X \leq 4/n = 10, p = 0.3) = 0.84973$

2) $P(X \geq 4/n = 10, p = 0.3)$

$= P(X > 3/n = 10, p = 0.3)$

$= 1 - P(X \leq 3)/n = 10, p = 0.3)$

$= 1 - 0.64961 = 0.35039$

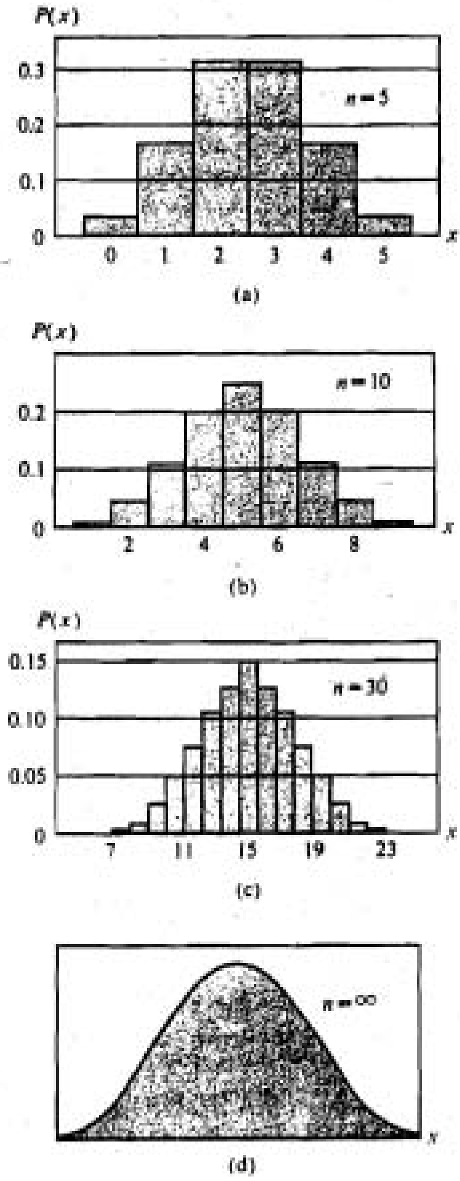
ตัวอย่างที่ 5 โรงงานแห่งหนึ่งใช้วิธีตรวจคุณภาพชิ้นส่วนที่ซื้อมาเพื่อผลิตสินค้าโดยการสุ่มจากกล่องขนาดใหญ่ คราวละ 20 ชิ้น ถ้าพบสินค้าชำรุด 2 ชิ้นขึ้นไป จะไม่ยอมรับสินค้ากล่องนั้นถ้ากล่องใบหนึ่งมีสินค้าชำรุดอยู่ 10% (1) จงหาโอกาสที่จะตรวจรับสินค้ากล่องนั้น (2) จงหาโอกาสที่จะไม่ตรวจรับสินค้ากล่องนั้น

ให้ X คือ จำนวนสินค้าชำรุดที่ตรวจพบจากตัวอย่างที่สุ่มมา 20 ชิ้น

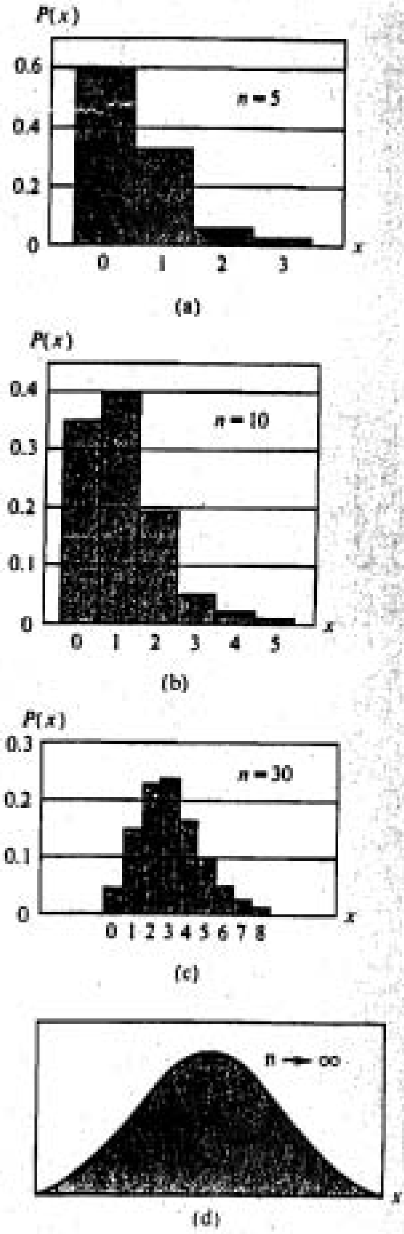
P(ตรวจรับสินค้ากล่องนั้น) = $P(X \leq 1/n = 20, p = 0.1) = 0.39175$

ดังนั้น P ไม่ตรวจรับ) = $1 - 0.39175 = 0.60825$

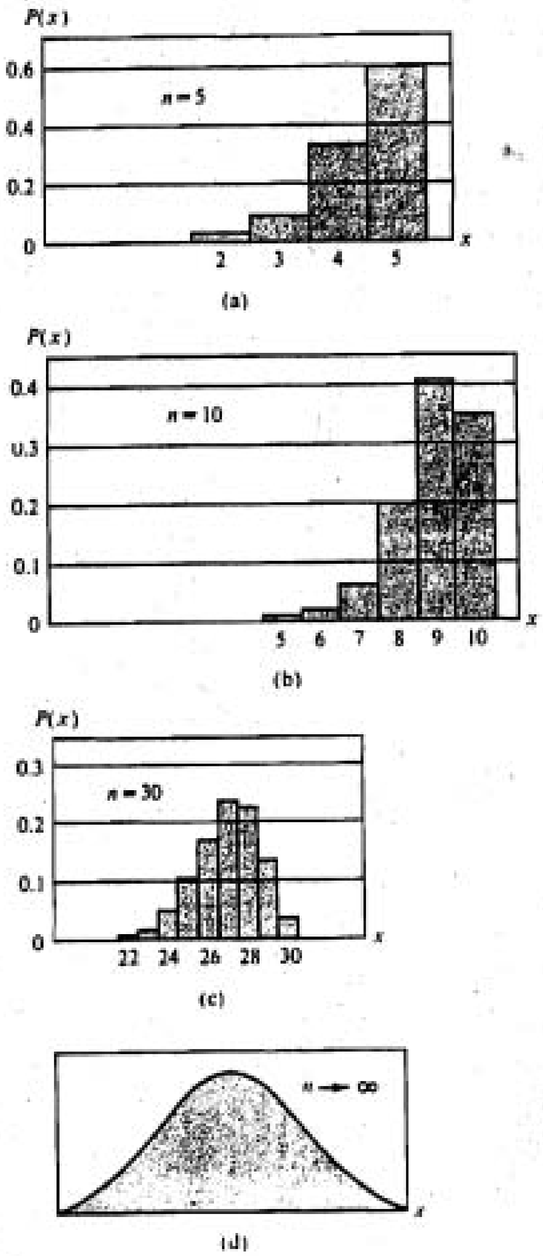
เนื่องจากการแจกแจงแบบทวินาม มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ n และ p ดังนั้นรูปร่างของการแจกแจงจึงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ 2 ตัวนี้ เมื่อ $p = q = 0.5$ และ n จะมีค่าเล็กหรือโตก็ตาม การแจกแจงจะเป็นแบบสมมาตร ดังรูปที่ 6.5 แต่เมื่อ $p \neq q$ การแจกแจงจะไม่สมมาตรเมื่อ n มีขนาดเล็ก แต่เมื่อ $n \longrightarrow \infty$ จะกลายเป็นการแจกแจงแบบปกติ (ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง) ดังรูปที่ 6.6 และ 6.7



รูปที่ 6.5
แสดงกราฟการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อ $p = 0.5$ และ n มีค่าต่าง ๆ



รูปที่ 6.6
แสดงกราฟการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อ p = 0.1 และ n มีค่าต่าง ๆ



รูปที่ 6.7
แสดงกราฟการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อ p = 0.9 และ n มีค่าต่าง ๆ

แบบฝึกหัด

6.65 การทดลองต่อไปนี้ ข้อใดเป็นแบบเบอร์นุยลี่ และข้อใดเป็นแบบทวินาม

1. ตอบคำถาม ถูก-ผิด จำนวน 1 ข้อ
2. โทรศัพท์ถึงลูกค้าว่า ได้รับสินค้าที่สั่งหรือยัง
3. หาคำตอบหรือคำถามประเภทถูก-ผิด จำนวน 10 ข้อ
4. สัมภาษณ์สมาชิกครอบครัวหนึ่ง ซึ่งมีจำนวน 5 คน ว่านิยมใช้สินค้าชนิดหนึ่งหรือไม่

6.66 ข้อสอบแบบปรนัยมีทั้งหมด 10 คำถาม แต่ละข้อ 5 ตัวเลือกซึ่งจะมีตัวเลือกที่ถูกเพียงตัวเดียว ถ้านักศึกษาทำข้อสอบแบบเดาสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่

(ก) เดาถูก 5 ข้อ (.02642)

(ข) เดาถูก 3 ข้อหรือน้อยกว่า (.87913)

(ค) เดาถูก 5 ข้อขึ้นไป (.03279)

6.67 ข้อสอบแบบถูก-ผิด มีทั้งหมด 20 ข้อ ถ้านักเรียนคนหนึ่งตอบแบบเดา จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะเดาถูก

(ก) 10 ข้อ (.17620)

(ข) 5 ข้อ หรือน้อยกว่า (.02069)

(ค) 7 ข้อ หรือมากกว่า (.94234)

6.68 ยาชนิดหนึ่งมีผลในการรักษา 50% ให้ X คือจำนวนคนไข้ที่หายจากโรคเมื่อกินยานั้น ถ้ามีคนไข้กินยานั้น 30 คน จงหาความน่าจะเป็น

(ก) $P(X \leq 20)$ (.97861)

(ข) $P(X \geq 18)$ (.1808)

(ค) $P(12 < X < 22)$ (.81658)

6.69 เครื่องเรดาห์ชุดหนึ่งมี 10 ตัว แต่ละตัวทำงานเป็นอิสระกัน และแต่ละเครื่องมีความสามารถตรวจสอบจรวดของข้าศึกได้ 80% จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องเรดาห์ 9 ตัว สามารถตรวจสอบจรวดของข้าศึก (.26844)

6.70 ถ้า 90% ของนักเรียนสอบผ่านวิชาเศรษฐศาสตร์เบื้องต้น ถ้ามีนักเรียนเข้าสอบ 15 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่านอย่างน้อยที่สุด 3 คน (1.0)

6.71 ถ้า 10% ของหลอดภาพโทรทัศน์ยี่ห้อหนึ่งจะชำรุดก่อนหมดเวลาประกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีหลอดชำรุดก่อนหมดเวลาประกัน 5 หลอดขึ้นไป จากทั้งหมด 30 หลอด (.1755)

6.72 เหรียญอันหนึ่งมีโอกาสเกิดหัว = 0.7 ให้ X คือจำนวนหัวจากการโยน 30 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของ

(1) $P(X = 21)$ (2) $P(X \leq 15)$ (3) $P(X \geq 16)$

(4) $P(14 < X < 20)$ (5) $P(14 \leq X \leq 20)$

(.56848, .01694, .98306, .26326, .40907)

6.73 บริษัทผลิตรถยนต์เชื่อว่า ลูกค้า 3 ใน 10 ราย ที่อ่านเอกสารโฆษณารถรุ่นใหม่แล้ว จะตกลงซื้อรถรุ่นใหม่จากตัวแทนจำหน่าย ถ้าสุ่มผู้อ่านเอกสารดังกล่าวมา 5 คน จงหาความน่าจะเป็นของ

ก) ไม่มีผู้ใดตกลงซื้อเลย (.16807)

ข) ทั้ง 5 คน ตกลงซื้อ (.00243)

ค) อย่างมาก 3 คน ตกลงซื้อ (.96922)

ง) อย่างน้อยที่สุด 3 คน ตกลงซื้อ (.16308)

---

5. การแจกแจงแบบไฮเปอร์ยีออเมตริก
(Hypergeometric Distribution)

เนื่องจากการแจกแจงแบบทวินามต้องมีความน่าจะเป็น p คงที่ตลอด n ครั้ง และผลการทดลองแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระกัน ซึ่งถ้าเป็นเรื่องเกี่ยวกับการสุ่มตัวอย่าง n จำนวน จากประชากรขนาด N ความน่าจะเป็นของผลสำเร็จ คือ p ต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้น จึงต้องหยิบตัวอย่าง**แบบมีการแทนที่** หรือเป็นการเลือกตัวอย่างจากประชากรแบบนับไม่ถ้วน (infinite population) เพื่อที่จะได้ค่าสังเกตที่เป็นอิสระกัน แต่ถ้าเป็นการสุ่มตัวอย่าง**แบบไม่มีการแทนที่** ค่าสังเกตที่ได้จะไม่เป็นอิสระกัน และความน่าจะเป็นของความสำเร็จแต่ละครั้งจะเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ ซึ่งจะต้องใช้การแจกแจงแบบไฮเปอร์ยีออเมตริก

นิยาม ถ้าประชากรหนึ่งประกอบด้วยของ 2 ลักษณะด้วยจำนวน N_1 และ N_2 ตามลำดับ ($N_1 + N_2 = N$) และเมื่อต้องการสุ่มแบบไม่แทนที่ n จำนวนจากประชากรดังกล่าว ให้ X แทนจำนวนความสำเร็จ (ซึ่งคือลักษณะใดลักษณะหนึ่งจาก 2 อันนั้น) ที่ปรากฏในตัวอย่างสุ่มขนาด n X จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

$$P(X = x) = p(x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N_1 + N_2}{n} \text{ หรือ } \binom{N}{n}} \quad \text{ในเมื่อ } x = 0, 1, \ldots, n$$

ตัวอย่าง 1 ผู้ขายส่งซื้อวิทยุทรานซิสเตอร์จากผู้ผลิต ซึ่งจะบรรจุมาหีบละ 20 เครื่อง ในการตรวจรับสินค้า ผู้ขายส่งใช้วิธีสุ่มมาตรวจหีบละ 4 เครื่อง และถ้าดีทั้ง 4 เครื่อง จึงจะยอมรับสินค้ากล่องนั้น ถ้ากล่องหนึ่งมีเครื่องชำรุด 5 เครื่อง จงหาความเสี่ยงที่ผู้ขายส่งจะตรวจรับสินค้ากล่องนั้น

ให้ X คือ จำนวนเครื่องชำรุดที่พบจากตัวอย่างสุ่ม 4 เครื่องนั้น N_1 จำนวนเครื่องชำรุดในลังนั้น = 5, N_2 = จำนวนของไม่ชำรุด = 15 N = จำนวนของทั้งหมด = 20, n = ขนาดตัวอย่าง = 4

$$P(\text{ตรวจรับ}) = P(X = 0) = \binom{5}{0}\binom{15}{4}\Big/\binom{20}{4}$$

$$= 1365/4845 \qquad = 0.28$$

ตัวอย่าง 2 พนักงานห้องอาหารแห่งหนึ่งมีทั้งหมด 30 คน มาจากภาคอีสาน 15 คน จากภาคกลาง 10 คน และจากภาคเหนือ 5 คน ถ้าสุ่มพนักงานมา 6 คน เพื่อให้ทำงานพิเศษ จงหาโอกาสที่จะได้พนักงานทั้ง 3 ภาค เป็นสัดส่วนกับประชากร คือ อยู่ในอัตรา 3 : 2 : 1

$$N_1 = 15,\ N_2 = 10,\ N_3 = 5,\ N = 30$$

$$n_1 = 3,\ \ n_2 = 2,\ \ n_3 = 1,\ n = 6$$

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1) = \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{30}{6}} = \frac{102,375}{593,775} = \frac{455}{2639} = .1724$$

แบบฝึกหัด

6.74 คณะกรรมการองค์การหนึ่งมี 9 คน เป็นนักกฎหมาย 3 คน อีก 6 คน ไม่ใช่นักกฎหมาย ถ้าจะตั้งอนุกรรมการจากกรรมการ 9 คนนี้ โดยการสุ่มมา 3 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้อนุกรรมการทั้งชุดเป็นนักกฎหมาย $(\frac{1}{84})$

6.75 จากข้อ 6.67 จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ในเมื่อ X คือจำนวนนักกฎหมายในอนุกรรมการ 3 คนนั้น

6.76 ถ้าสินค้าที่ผลิตจากเครื่องอัดโนมัติมีอัตราชำรุด 15% จาก 20 ชิ้น และถ้าสุ่มแบบไม่แทนที่มา 5 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) ฟังก์ชั่นน่าจะเป็นของจำนวนชำรุดจากตัวอย่าง

(ข) ไม่พบของชำรุดเลยจากตัวอย่าง $(\frac{6,188}{15,504})$

(ค) มีชำรุดอย่างน้อย 1 ชิ้น $(\frac{9316}{15,504})$

(ง) มีชำรุดอย่างมาก 1 ชิ้น $(\frac{13,328}{15,504})$

6.77 กรรมการรัฐสภาชุดหนึ่งมี 10 คน เป็นสมาชิกพรรคประชาธิปัตย์ 4 คน และพรรคกิจสังคม 6 คน ถ้าสุ่มแบบไม่แทนที่ และให้ X คือ จำนวนสมาชิกพรรคประชาธิปัตย์ จากตัวอย่างที่สุ่มมา 4 คน จงหา

(ก) ความน่าจะเป็นที่จะได้สมาชิกจากพรรคประชาธิปัตย์ทั้งหมด $(\frac{1}{210})$

(ข) ความน่าจะเป็นจะมีสมาชิกจากทั้ง 2 พรรค ด้วยจำนวนเท่ากัน

(ค) จงแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X $(\frac{90}{210})$

6.78 ในลิ้นชักอันหนึ่งมีถุงเท้าทั้งหมด 12 คู่ เป็นสีน้ำตาล สีเขียว และสีขาว จำนวน 5, 4 และ 3 คู่ ตามลำดับ ถ้าสุ่มตัวอย่างมา 6 คู่ แบบไม่แทนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สีละ 1 คู่ $(\frac{180}{924})$

6.79 พนักงานแผนกหนึ่งมีจบจากรามคำแหง 3 คน จากทั้งหมด 7 คน ถ้ามีตำแหน่งสำคัญว่างลง 3 ตำแหน่ง ให้ X คือจำนวนผู้จบจากรามคำแหงที่จะได้รับการพิจารณาบรรจุเข้าตำแหน่งสำคัญ 3 ตำแหน่งนั้น จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

---

6. การแจกแจงแบบปัวซอง

(Poisson Exponential Distribution)

Simeon Denis **Poisson**(1781 - 1840) ชาวฝรั่งเศสเป็นผู้สร้างการแจกแจงนี้ สำหรับกระบวนการต่าง ๆ ที่ให้ ค่าสังเกต **ต่อ 1 หน่วยเวลาหรือขอบเขต** เช่น จำนวนลูกค้าเข้ารับบริการต่อ 5 นาที จำนวนโทรศัพท์ของสำนักงานหนึ่งต่อ 1 นาที จำนวนครั้งที่เครื่องจักรขัดข้องต่อ 1 วัน จำนวนสินค้าชำรุดต่อ 1 หีบ จำนวนใบสั่งสินค้าต่อ 1 วัน จำนวนรอยชำรุด (รูรั่ว) ของสายไฟฟ้าต่อ 1 ฟุต จำนวนคำผิดของเสมียนพิมพ์ดีดคนหนึ่งต่อ 1 หน้า จำนวนคนไข้ของสำนักงานแพทย์

ต่อ 1 วัน จำนวนรถเข้าเติมน้ำมัน ณ สถานีบริการหนึ่ง ต่อ 5 นาที จำนวนรถไฟเข้าสถานีต่อ 5 นาที จำนวนหญิงถูกข่มขืนต่อ 1 วัน จำนวนเด็กทารกคลอด ณ โรงพยาบาลหนึ่งต่อ 1 วัน ค่าเหล่านี้ คือ ค่าคาดหมายหรือจำนวนถัวเฉลี่ยของผลสำเร็จ (μ_X) ต่อ 1 หน่วยเวลาหรือขอบเขต คล้ายกับการแจกแจงแบบทวินามซึ่งจำแนกตามจำนวนความสำเร็จใน n ครั้ง

ค่าสังเกต "ต่อ 1 หน่วยเวลาหรือขอบเขต" จะทำหน้าที่แทนขนาดตัวอย่าง n ของการแจกแจงแบบทวินาม โดยที่การแจกแจงแบบทวินามมีพื้นฐานมาจากการทดลองเบอร์นูลลี่ คือต้องทราบความน่าจะเป็นของผลสำเร็จ (p) ของการทดลอง 1 ครั้ง และเมื่อ p มีค่าเล็กมากในขณะที่ n มีค่าโต X จะมีการแจกแจงแบบปัวซอง

ให้ μ คือจำนวนความสำเร็จคาดหมาย (ค่าถัวเฉลี่ย) ในช่วงเวลาหรือขอบเขตที่กำหนด ให้ X คือจำนวนความสำเร็จจากตัวอย่างขนาด n ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2,...,n ($\mu = np$) X จะมีการแจกแจงแบบปัวซอง และมีฟังก์ชันน่าจะเป็น ดังนี้

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

$$e = 2.71828, \quad x = 0, 1, \ldots$$

นั่นคือ ต้องทราบค่า μ จึงจะหาความน่าจะเป็นแบบปัวซองได้

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซอง

μ คือค่าเฉลี่ย จำนวนครั้งของเหตุการณ์ในคาบเวลาที่กำหนดให้

ตัวแปรแบบปัวซองจะสนใจ<u>จำนวน</u>อุบัติเหตุ/คาบเวลา, จำนวนลูกค้า/คาบเวลา, จำนวนยานพาหนะที่เข้าเทียบท่าหรือผ่านด่าน/คาบเวลา $E(X) = \mu$ และ $V(X) = \mu$

<u>ตัวอย่าง</u> สำนักงานหนึ่งมีโทรศัพท์เข้าโดยเฉลี่ย 3 ครั้ง/นาที ในช่วง 8.00-10.00 น. ดังนั้นโอกาสที่จะมีผู้โทรเข้า 2 ราย ณ นาทีใดๆ คือ

$$P(X = 2 \mid \mu = 3) = (e^{-3}.3^2)/2! = .2219$$

การแจกแจงแบบปัวซองยังใช้ในการควบคุมคุณภาพสินค้า และทฤษฎีแถวคอย และใช้ประมาณการแจกแจงแบบทวินาม ที่ $n \to \infty$ และ p มีค่าเล็กมากๆ

คุณสมบัติของกระบวนการปัวซอง

จะขอยกตัวอย่าง จำนวนยานพาหนะที่ผ่านด่านเก็บเงินเพื่อขึ้นทางด่วนพิเศษในช่วงชั่วโมงรีบด่วน จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1) จะต้องทราบค่าเฉลี่ย คือ จำนวนยานพาหนะโดยถัวเฉลี่ยต่อ 1 ชั่วโมงเร่งด่วนซึ่งอาจประมาณจากข้อมูลสถิติที่เก็บไว้

2) ถ้าแบ่งเวลาคือชั่วโมงเร่งด่วนนั้น ออกเป็นส่วนย่อย ๆ เช่น 1 วินาที จะต้องมีคุณสมบัติ 4 ข้อต่อไปนี้ด้วย คือ

   (ก) ความน่าจะเป็นที่จะมียานพาหนะจำนวน 1 คัน ผ่านด่าน (1 ช่อง) ต่อ 1 วินาที จะมีค่าเล็กมาก และเป็นค่าคงที่ตลอดทุก ๆ ช่วง 1 วินาที

   (ข) ความน่าจะเป็นที่จะมียานพาหนะมากกว่า 1 คัน ผ่านด่าน (1 ช่อง) ภายใน 1 วินาที จะเป็นค่าเล็กมากจนสามารถแทนค่าด้วย 0

   (ค) จำนวนยานพาหนะที่ผ่านด่านตรวจต่อ 1 วินาทีที่กำหนดให้ จะเป็นอิสระกับเวลา 1 วินาทีในช่วงชั่วโมงรีบด่วน

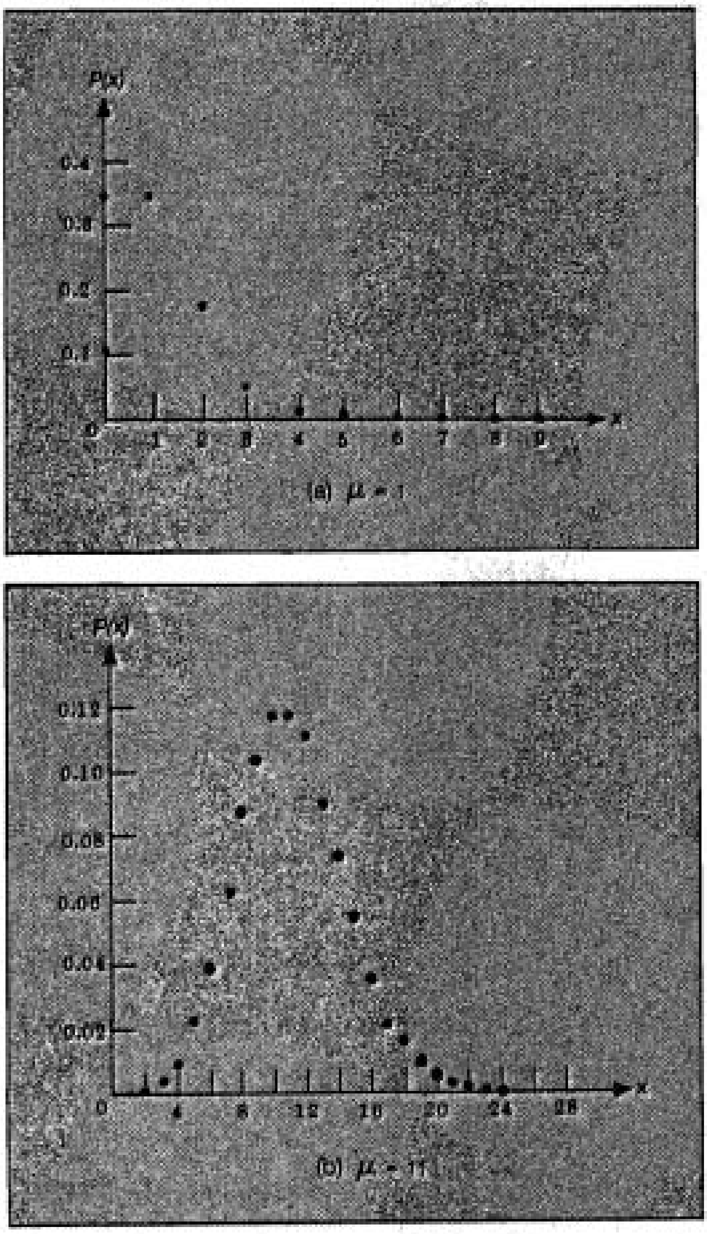
   (ง) จำนวนยานพาหนะต่อ 1 วินาที ของแต่ละวินาทีจะไม่เกี่ยวข้องกัน

การใช้การแจกแจงแบบปัวซองประมาณ

การแจกแจงแบบทวินาม

เมื่อการคำนวณค่าการแจกแจงแบบทวินามมีปัญหา คือ เมื่อ n โต จะสามารถใช้การแจกแจงแบบปัวซองประมาณได้โดยยึดหลักว่า p **ต้องมีค่าเล็ก** นั่นคือ จำนวนครั้งของการทดลองต้องมาก และความน่าจะเป็นของผลสำเร็จเล็กมาก กฎที่ใช้ คือ เมื่อ $n \geq 20$ และ $p \leq 0.05$ **จะใช้การแจกแจงแบบปัวซองโดยมี** $\mu = np$

รูปร่างของการแจกแจงแบบปัวซองจะเบ้มาทางด้านขวา ในรูปที่ 6.4และเมื่อ n มีค่าโตขึ้น จะทำให้ $\mu = np$ มีค่าโตขึ้นด้วย การแจกแจงจะเรียบขึ้นจนกลายเป็นโค้งการแจกแจงแบบปกติซึ่งมีลักษณะสมมาตร



รูปที่ 6.8
แสดงกราฟการแจกแจงแบบปัวซอง เมื่อ $\mu = 1$ และ $\mu = 11$

ตัวอย่าง 1 ถ้าจำนวนโทรศัพท์เรียกเข้ามาของสำนักงานหนึ่งในระหว่างวันทำการจะมีโดยถัวเฉลี่ย 3 ครั้ง ต่อ 1 นาที ให้ X คือจำนวนโทรศัพท์เรียกเข้า ณ นาทีใดนาทีหนึ่ง เช่น 8.00-8.01 น. ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าต่าง ๆ จะหาได้จากตารางการแจกแจงแบบปัวซองท้ายเล่ม ดังนี้

จำนวนครั้ง (x)	P(x)		ความน่าจะเป็นสะสม = $P(X \leq x)$
0	$\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}$	= 0.04979	0.04979
1	$\frac{e^{-3}3^{1}}{1!}$	= 0.14936	0.19915
2	$\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}$	= 0.22404	0.42319
3	$\frac{e^{-3}3^{3}}{3!}$	= 0.22404	0.64723
4	$\frac{e^{-3}3^{4}}{4!}$	= 0.16803	0.81526

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามา 1 รายใน 1 นาที ที่กำหนดให้ = 0.14936, มีโทรศัพท์เข้ามา 2 ราย = 0.22404, มีโทรศัพท์เข้ามาน้อยกว่า 3 ราย = 0.42319, มีโทรศัพท์เข้ามา 3 รายขึ้นไป = 1-0.42319 = 0.57681

ตัวอย่าง 2 เครื่องผลิตสกรูจะผลิตสกรูที่มีขนาดไม่ได้มาตรฐาน 2% ถ้าบรรจุกล่องละ 100 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ซื้อผู้หนึ่ง ซึ่งต้องการสกรูไปประกอบชิ้นส่วน 98 ตัว จะได้สกรูไม่ครบตามต้องการ

$\mu = np = 100(0.02) = 2$ ต่อ 1 กล่อง

เปิดตารางปัวซอง ที่ $\mu = 2$

x	P(x)
0	0.13534
1	0.27067
2	0.27067
$P(X \leq 2)$ =	0.67668

ให้ X คือจำนวนสกรูชำรุด

$$P(\text{ได้สกรูไม่ครบ 98 ตัว}) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - 0.67668$$
$$= 0.32332$$

แบบฝึกหัด

6.80 โรงงานหนึ่งมีเครื่องจักรทำการผลิต 50 เครื่อง ในแต่ละวันเครื่องจักรแต่ละเครื่องจะทำงานขัดข้องด้วยความน่าจะเป็น 0.02 จงหาความน่าจะเป็นที่ในวันหนึ่งจะมีเครื่องขัดข้องอย่างมากที่สุด 2 เครื่อง (.9197)

6.81 จากข้อ 6.80 จงหาความน่าจะเป็นที่ในวันหนึ่งจะมีเครื่องขัดข้องอย่างน้อย 2 เครื่อง (.26424)

6.82 ถ้าเครื่องจักรเครื่องหนึ่งผลิตสกรูชำรุด 1% ถ้าสุ่มมา 300 ตัว จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) เป็นสกรูที่ได้มาตรฐานทั้งหมด (.04979)

(ข) มีชำรุด 2 ตัว หรือน้อยกว่า (.42319)

(ค) มีชำรุด 2 ตัว หรือมากกว่า (.80085)

6.83 ถ้าโอกาสที่คนไข้จะเกิดอาการข้างเคียงภายหลังจากกินยาชนิดหนึ่งเป็น 0.002 ให้ X คือจำนวนคนไข้ที่เกิดอาการข้างเคียงจากตัวอย่างที่สุ่มมา 1,000 คน จงหา

(ก) $P(X = 1)$ (ง) $P(X > 0)$

(ข) $P(X < 3)$ (จ) $P(2 \leq X \leq 5)$

(ค) $P(X \geq 3)$

(.27067, .67668, .32332, .86466, .57743)

6.84 ถ้าโรงงานหนึ่งมีพนักงานหญิงอยู่ 10% ถ้าสุ่มมา 50 คน จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) เป็นชายทั้งหมด (.00674)

(ข) เป็นหญิง 1 คน (.03369)

(ค) มีหญิงน้อยกว่า 3 คน (.12465)

(ง) มีหญิงอย่างน้อยที่สุด 3 คน (.87535)

6.85 ถ้าจำนวนถัวเฉลี่ยของอุบัติเหตุ ณ ทางแยกแห่งหนึ่งเป็น 4 ราย ต่อ 1 วัน จงหาโอกาสที่ในวันหนึ่ง ณ ทางแยกแห่งนั้นจะเกิด

(ก) ไม่มีอุบัติเหตุเลย (.01832)

(ข) เกิดอุบัติเหตุ 3 ราย หรือน้อยกว่า (.43348)

(ค) เกิดอุบัติเหตุ 3 ราย หรือมากกว่า (.76189)

6.86 สมมุติว่ามีลูกค้าไปติดต่อธนาคารโดยถัวเฉลี่ยนาทีละ 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ใน 1 นาที

(ก) จะไม่มีลูกค้าเลย (.36788)

(ข) มีลูกค้าอย่างมาก 3 ราย (.98101)

(ค) มีลูกค้าอย่างน้อย 3 ราย (.0803)

6.87 โรงงานหนึ่งมีพนักงาน 2,000 คน ในแต่ละวันจะมีพนักงานหยุดงานโดยถัวเฉลี่ย 0.5% จงหาความน่าจะเป็นที่ในวันหนึ่งจะ

(ก) มีพนักงานมาทำงานครบ (.00005)

(ข) มีพนักงานขาดงาน 2 คน (.00227)

6.88 ถ้าโอเปคขึ้นราคาน้ำมันโดยถัวเฉลี่ย 4 ครั้ง ต่อทุก ๆ 3 ปี จงหาความน่าจะเป็นของ

ก) ไม่มีการขึ้นราคาเลยในช่วง 3 ปี (.01832)

ข) ขึ้น 4 ครั้ง ในช่วง 3 ปี (.19537)

ค) ขึ้น 5 ครั้ง ขึ้นไปในช่วง 3 ปี (.37115)

6.89 ถ้า X มีการแจกแจงแบบทวินามด้วย $n = 25$, $p = 0.02$ จงใช้การแจกแจงแบบปัวซองประมาณความน่าจะเป็นของ

ก) $P(X = 20)$ ข) $P(X = 5)$ ค) $P(X = 2)$ (0, 0, .01637)

6.90 ถ้าพนักงานสูงอายุของโรงงานหนึ่งมีสถิติหยุดพักโดยเฉลี่ย 4.1 ครั้งต่อ 1 ชั่วโมง (ไม่รวมเวลาที่โรงงานให้พักโดยปกติ) โดยจะใช้เวลาประมาณ 3 นาที/ครั้ง ถ้าผู้จัดการฝ่ายผลิตตั้งเกณฑ์ว่า ถ้าโอกาสที่พนักงานหยุดพัก 12 นาทีขึ้นไปต่อ 1 ชั่วโมง สูงกว่า 0.5 เขาจะย้ายพนักงานสูงอายุเหล่านั้นไปอยู่แผนกอื่นที่เหมาะสมกว่า เขาจะย้ายพนักงานสูงอายุหรือไม่? (ควรย้าย)

6.91 ในภาวะน้ำตาลขาดแคลน ประชาชนจะนิยมตุนน้ำตาลทำให้อุปสงค์พุ่งขึ้นสูงอย่างรวดเร็วผู้จัดการร้านซุปเปอร์แห่งหนึ่ง พบว่า ลูกค้าจะซื้อน้ำตาลจนหมดชั้นที่วางขายโดยเฉลี่ยวันละ 5.4 ครั้ง

ก) จงหาโอกาสที่ชั้นวางขายน้ำตาลจะว่าง 5 ครั้ง ในวันหนึ่ง

ข) ถ้าความน่าจะเป็นที่ชั้นวางขายน้ำตาล จะว่าง 4 ครั้ง หรือน้อยกว่าเป็น 0.3733 จงหาโอกาสที่ชั้นวางขายน้ำตาลจะว่าง 5 ครั้งขึ้นไปในวันหนึ่ง (.1728, .6267)

6.92 บริษัทตะวันตกเฉียงใต้อีเล็กโทรนิคประสบความสำเร็จในการสร้างเครื่องคำนวณชนิดใหม่ ซึ่งในระยะเริ่มแรกนี้ จะมีผลผลิตอยู่ 4% ที่คำนวณผิดพลาด ถ้าบริษัทนำเครื่อง 50 เครื่องไปแสดง จงหา

ก) ความน่าจะเป็นที่จะไม่มีเครื่องใดคำนวณผิดพลาด (.2707)

ข) ความน่าจะเป็นที่จะมีเครื่องคำนวณผิดพลาดอย่างน้อยที่สุด 1 เครื่อง (.7293)

6.93 ถ้าองค์การโทรศัพท์จ้างบริษัทเอกชนให้แจกจ่ายสมุดรายชื่อผู้ใช้โทรศัพท์เป็นเวลาหลายปี โดยบริษัทเอกชนจะสามารถจัดส่งให้ 97% ของรายชื่อทั้งหมดที่องค์การฯให้ ถ้าองค์การฯ สุ่มผู้ใช้โทรศัพท์มา 100 ราย เพื่อตรวจสอบว่าได้รับหนังสือหรือไม่

ก) จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ไม่ได้รับหนังสือ 3 ราย (.2240)

ข) จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ไม่ได้รับเพียงรายเดียว (.1494)

---

7. การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล

Exponential Probability Distribution

การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียลใช้สำหรับอธิบายระยะเวลาของปรากฏการณ์ เช่น ระยะเวลาระหว่างลูกค้าคนที่ 1 และคนที่ 2 ของร้านแห่งหนึ่ง มีฟังก์ชั่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \lambda e^{(-\lambda x)} \qquad 0 < x < \infty$$

λ คือ พารามิเตอร์ และต้องมีค่าเป็นบวก

ตัวอย่าง 1 ถ้า X คือเวลาเป็นนาทีที่ตำรวจใช้เดินทางถึงสถานที่เกิดเหตุ โดยนับตั้งแต่ได้รับแจ้งเหตุร้ายทางโทรศัพท์ และ X มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล ที่มี $\lambda = .2$ X จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

$$f(x) = \lambda e^{-0.2x}$$

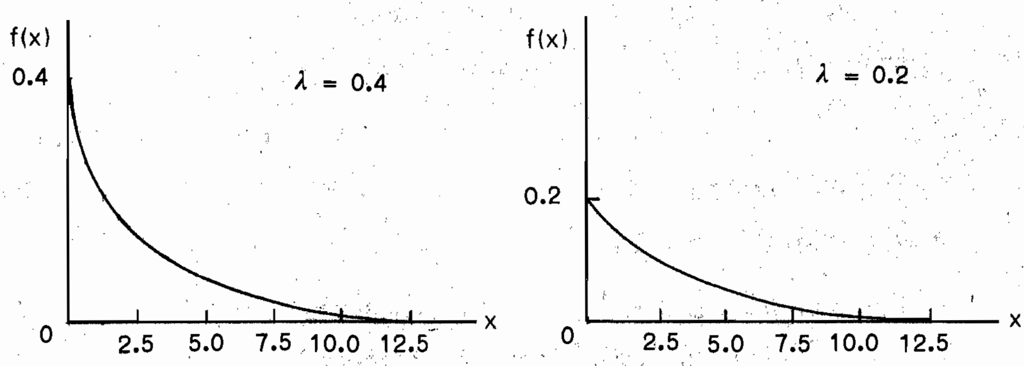
ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

$E(X)$	=	$1/\lambda$
$\sigma^2(X)$	=	$1/\lambda^2$
$\sigma(X)$	=	$1/\lambda$

นั่นคือ การแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล มีค่าเฉลี่ยเท่ากับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ตัวอย่าง 2

จากตัวอย่างที่ 1 เวลาเป็นนาทีโดยเฉลี่ยกว่ารถตำรวจจะไปถึงสถานที่เกิดเหตุ คือ $E(X) = 1/0.2 = 5$ นาที และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 5 นาที และความแปรปรวน $\sigma^2(X) = 5^2 = 25$ นาที



รูปที่ 6.9 แสดงฟังก์ชั่นน่าจะเป็นเอ็กซ์โพเน็ลเชียล ซึ่งจะมีรูปร่างเปลี่ยนไปตามค่าของ λ

ในตารางสถิติภาคผนวกจะมีตารางความน่าจะเป็นแบบสะสม $F(x)$ ของการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล เช่นจากตัวอย่าง ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นที่ตำรวจใช้เวลาไม่เกิน 15 นาที คือหา $P(X \leq 15)$ จากตารางสถิติ B – 7 ดูที่ $\lambda X = 0.2\,(15) = 3.0$ จะได้ .9502 นั่นคือ จะมีความน่าจะเป็น .95 ที่ตำรวจใช้เวลาไม่เกิน 15 นาที จะถึงที่เกิดเหตุ ถ้าต้องการทราบโอกาสที่รถตำรวจจะมาถึงภายใน 5 นาที คือ $P(X \leq 5)$ ดูตาราง B – 7 ที่ $\lambda X = 0.2\,(5) = 1.0$ จะได้ $P(X \leq 5) = .6321$ นั่นคือมีโอกาสเพียง 63% ที่รถตำรวจจะมาถึงภายใน 5 นาที

ตัวอย่าง 3 ถ้าระยะเวลาที่ต้องรอที่เคาน์เตอร์สายการบินเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล $\lambda = 0.5$ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าคนหนึ่งจะต้องใช้เวลารอเกิน 5 นาที

$\lambda X = .5(5) = 2.5$ เราต้องการ $P(X > 5)$

จากตาราง B – 7 ดูที่ $\lambda X = 2.5$ จะได้

$P(X \leq 5) = .9179$

ดังนั้น $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - .9179 = .0821$

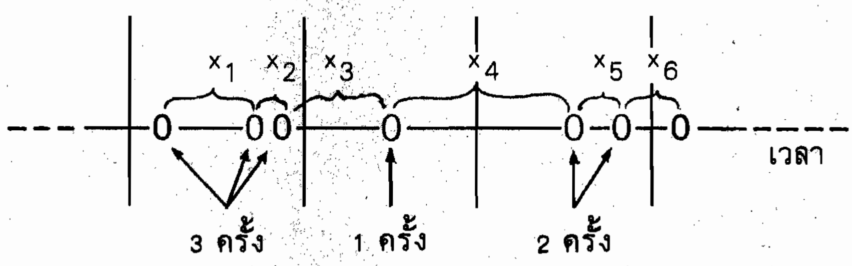
ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบปัวซอง กับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล

ระยะเวลาปรากฏการณ์ของกระบวนการปัวซอง คือตัวแปรเชิงสุ่มแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียล และจะมีพารามิเตอร์เดียวกันคือ λ (หรือ μ)

ตัวอย่าง 4

ถ้าจำนวนอุบัติเหตุในแต่ละเดือนของโรงงานหนึ่งมีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 2$ ครั้ง / เดือน ดังนั้น **ระยะเวลาระหว่างอุบัติเหตุแต่ละครั้งจะมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็นเชียล ด้วยค่าเฉลี่ย $E(X) = 1/\mu = 1/2 = 0.5$ เดือน / ครั้ง**

รูปที่ 6.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบปัวซองและการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ล-เชียล



แบบฝึกหัด

6.94 ถ้าระยะเวลาที่ต้องใช้ตอบปัญหาแก่ลูกค้าทางโทรศัพท์มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียลด้วยค่าเฉลี่ย 1.5 นาที

ก) จงหาค่าของ λ (0.67)

ข) ในเวลา 1.5 นาที จะตอบคำถามได้คิดเป็นสัดส่วนเท่าใดของคำถามทั้งหมด (63.21%)

6.95 ถ้าอายุการใช้งานของส่วนประกอบเครื่องคิดเลขชิ้นหนึ่งมีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเน็ล-เชียล ที่มี $\lambda = .005$

ก) จงหา F (400) และอธิบายความหมาย

จงหาความน่าจะเป็นที่ชิ้นส่วนนั้นจะมีอายุใช้งานเกิน 400 ชั่วโมง (.1353)

ข) จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งาน (200)

6.96 เครื่องบรรจุน้ำอัดลมใส่ขวดจะทำงานตลอดเวลา นอกจากมีเหตุขัดข้อง ถ้าระยะระหว่างเหตุขัดข้องเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเอ็กซ์โพเน็ลเชียลที่มีค่าเฉลี่ย 10 นาที

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องจักรจะทำงาน

(1) ได้น้อยกว่า 12 นาที โดยไม่มีเหตุขัดข้องเลย (.6988)

(2) เกิน 24 นาที โดยไม่มีเหตุขัดข้อง (.0907)

(ข) จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของระยะเวลาระหว่างเหตุขัดข้อง (10)

(ค) ถ้าเครื่องจักรสามารถบรรจุได้ชั่วโมงละ 6,000 ขวด จงหาความน่าจะเป็นที่จะบรรจุทั้ง 6,000 ขวด โดยไม่มีเหตุขัดข้อง (.0025)

---

8. การแจกแจงแบบปกติ

คารล์ กอส (Karl gauss) นักคณิตศาสตร์-ดาราศาสตร์ เป็นผู้สร้างฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติ ในศตวรรษที่ 18 การแจกแจงแบบปกติจึงมีชื่ออีกหนึ่งว่า "การแจกแจงแบบกอสเซียน" (Gaussian distribution)

คุณสมบัติ

1. เป็นโค้งที่มีจุดยอดเพียงแห่งเดียว (unimodal) และมีรูปเหมือนระฆังคว่ำ
2. มีค่าเฉลี่ยอยู่ส่วนกลางของโค้งการแจกแจง
3. มีรูปร่างสมมาตร จึงทำให้ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมอยู่แห่งเดียวกัน คือส่วนกลาง
4. ปลายหางทั้ง 2 ด้านจะขนานกับแกนนอนจนถึงค่าอนันต์นับ ($-\infty$, $+\infty$) นั่นคือไม่มีวันบรรจบกับแกนนอน

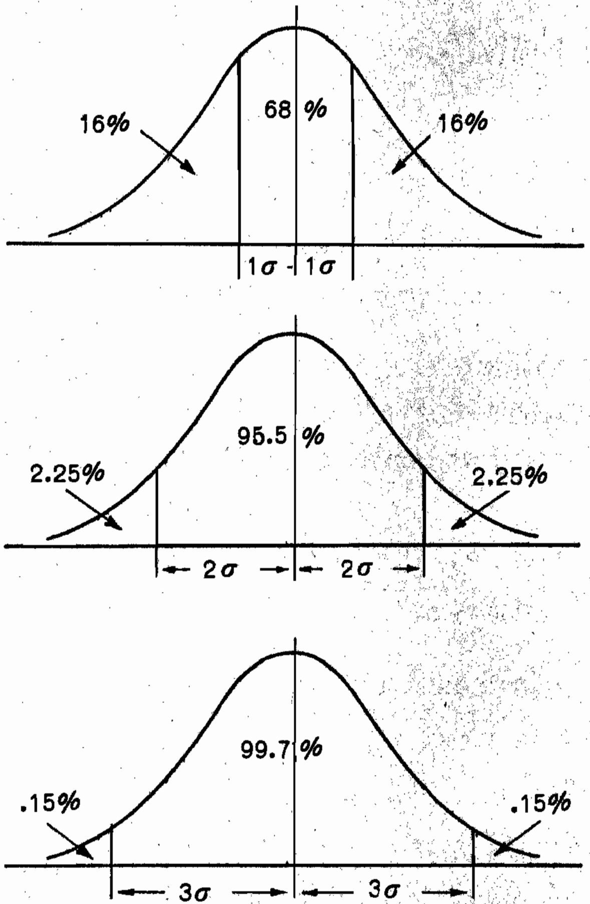
พื้นที่ภายใต้โค้งปกติ

โค้งปกติจะมีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ μ = ค่าเฉลี่ย และ σ = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และพื้นที่ทั้งหมดภายใต้โค้ง = 1.00 นั่นคือพื้นที่คือความน่าจะเป็นนั่นเอง และยังมีคุณสมบัติพิเศษ ดังนี้

1. ประมาณ 68% ของค่าสังเกตจะกระจายอยู่ระหว่าง 1 หน่วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากค่าเฉลี่ย นั่นคือ $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$

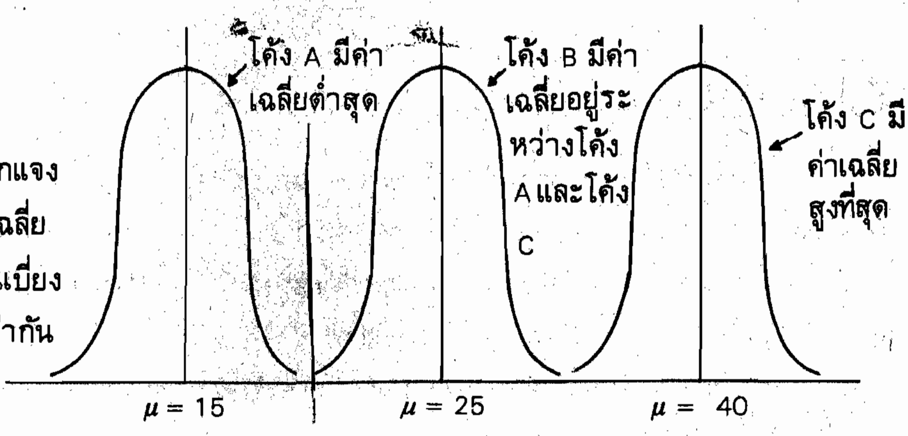
2. ประมาณ 95.5% ของค่าสังเกต จะกระจายอยู่ระหว่าง 2 หน่วย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากค่าเฉลี่ย นั่นคือ $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.955$

3. ประมาณ 99.7% ของค่าสังเกตจะกระจายอยู่ระหว่าง 3 หน่วยเบี่ยงเบนมาตรฐานจากค่าเฉลี่ย นั่นคือ $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.997$

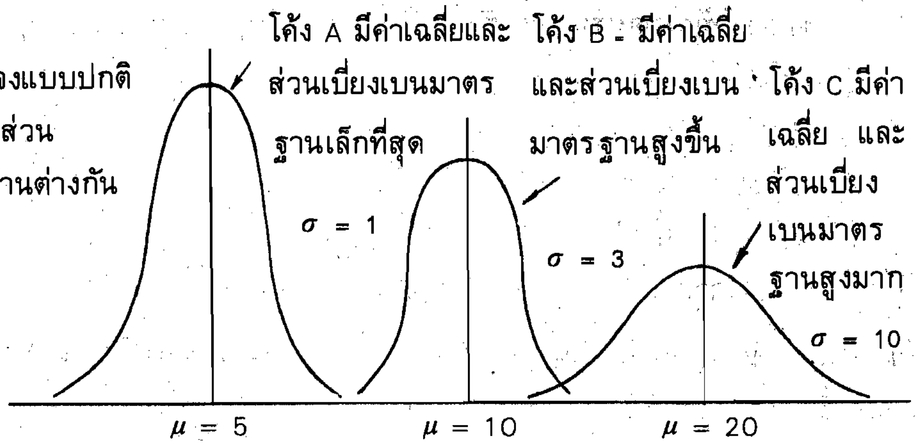


รูปที่ 6.11
แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ภายใต้โค้งการแจกแจงแบบปกติกับระยะทางจากค่าเฉลี่ยซึ่งวัดโดยใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

รูปที่ 6.12
แสดงรูปการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยต่าง ๆ แต่มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน



รูปที่ 6.13
แสดงการแจกแจงแบบปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน

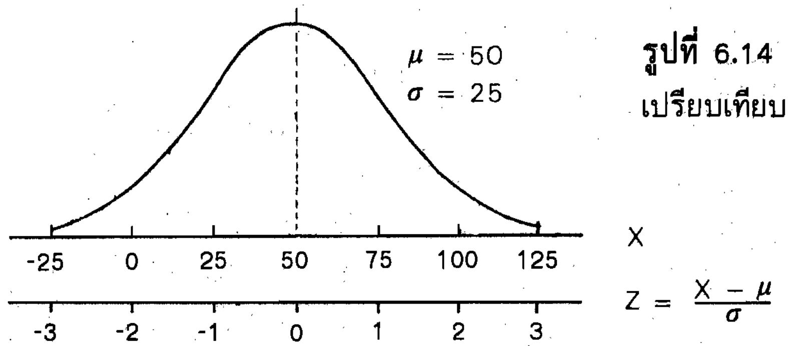


เนื่องจากโค้งปกติมีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน ดังรูป6.13ดังนั้น การหาพื้นที่ภายใต้โค้ง ต้องคิดเป็นหน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากค่าเฉลี่ย โดยการแปลงค่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่มมาตรฐาน โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

X คือตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ

Z จะมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน คือ $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ และพื้นที่ภายใต้โค้งในตาราง Z ท้ายเล่ม



รูปที่ 6.14
เปรียบเทียบระหว่างค่า Z และ X

ตัวอย่าง 1 ถ้าการฝึกอบรมพนักงานฝ่ายผลิตเป็นโปรแกรมที่สามารถปฏิบัติการด้วยตนเอง จากประสบการณ์พบว่า ผู้เข้ารับการอบรมต้องใช้เวลาอบรมโดยถัวเฉลี่ย 500 ชั่วโมง จึงจะสิ้นสุดโปรแกรมและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 100 ชั่วโมง ถ้าสุ่มพนักงานในโปรแกรมอบรมมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นของ

1) ต้องใช้เวลาอบรม 500 ชั่วโมงขึ้นไป
2) ใช้เวลาอบรม 500 — 650 ชั่วโมง
3) ใช้เวลาอบรมมากกว่า 700 ชั่วโมง
4) ใช้เวลาอบรม 550 — 650 ชั่วโมง
5) ใช้เวลาอบรมไม่เกิน 580 ชั่วโมง
6) ใช้เวลาอบรม 420 — 470 ชั่วโมง

วิธีทำ ให้ X คือเวลาที่พนักงานใช้อบรมจนสิ้นสุดโปรแกรม X จะมีการแจกแจงแบบปกติ μ = 500 ชั่วโมง σ = 100 ชั่วโมง

1) $P(X \geq 500)$ คือพื้นที่ด้านขวามือของค่าเฉลี่ย = 0.5

2) $P(500 < X < 650) = 0.4332$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{เมื่อ } X = 650$$

$$Z = \frac{650 - 500}{100} = 1.5$$

จากตารางที่ 1 เมื่อ Z = 1.5 จะได้ความน่าจะเป็น 0.4332

3) $P(X > 700) = .0228$

$$\text{จาก} \quad Z = \frac{700 - 500}{100} = 2.0$$

จากตารางที่ 1 เมื่อ Z = 2.0 จะให้พื้นที่ .4772 คือพื้นที่จากแกนกลางถึงจุด Z = 2.0 แต่พื้นที่จาก $\mu \longrightarrow \infty$ = 0.5 ดังนั้น พื้นที่ที่มากกว่าจุด Z = 2.0 คือ 0.500 - 0.4772 = .0228

4) $P(550 < X < 650)$

เมื่อ X = 550, $Z = \frac{550 - 500}{100} = 0.5$

เมื่อ X = 650, $Z = \frac{650 - 500}{100} = 1.5$

นั่นคือต้องการหา $P(0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < 0.5)$

$Pr(Z < 1.5) = .4332$

$Pr(Z < 0.5) = .1915$

$.2417 \longleftarrow Pr(0.5 < Z < 1.5)$

5) $P(X < 580) = P(Z < 0.8) = .7881$

$$Z = \frac{580 - 500}{100} = 0.8$$

เปิดตารางที่ 1 เมื่อ $Z = 0.8$ จะมีพื้นที่จากแกนกลาง = .2881 ดังนั้น พื้นที่ทั้งหมดที่น้อยกว่า 0.8 ต้องรวมพื้นที่ครึ่งหนึ่งด้านซ้ายมือด้วย

นั่นคือ $P(Z < 0.8) = .5000 + .2881 = .7881$

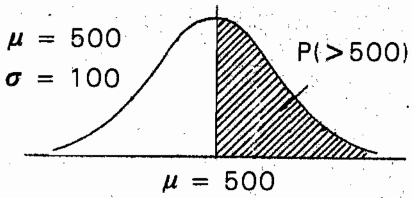
6) $P(420 < X < 570) = P(-0.8 < Z < 0.7) = .5461$

เมื่อ $x = 420$, $Z = \frac{420 - 500}{100} = -0.8$ คืออยู่ด้านซ้ายมือของ μ 0.8 หน่วย

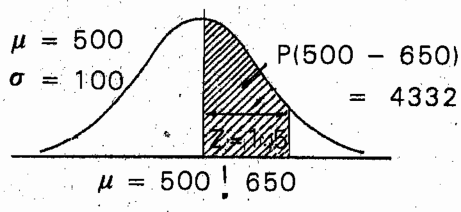
เมื่อ $x = 570$, $Z = \frac{570 - 500}{100} = 0.7$ คืออยู่ด้านขวามือของ μ 0.7 หน่วย

จากตารางที่ 1

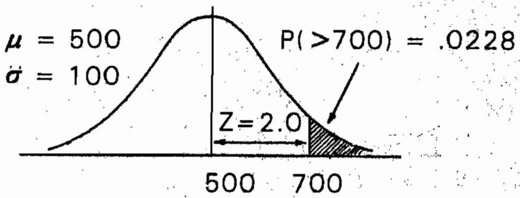
เมื่อ $Z = 0.7$ จะมีพื้นที่จากค่าเฉลี่ย	=	.2580
เมื่อ $Z = 0.8$ จะมีพื้นที่จากค่าเฉลี่ย	=	.2881
		.5461



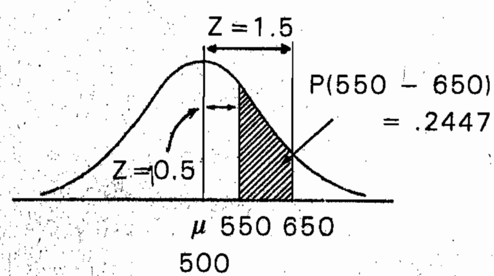
(1)



(2)

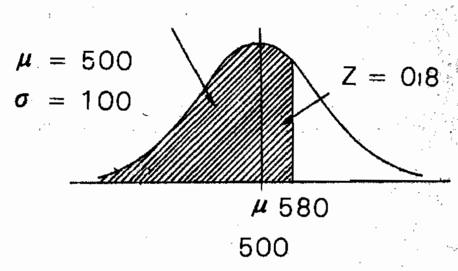


(3)



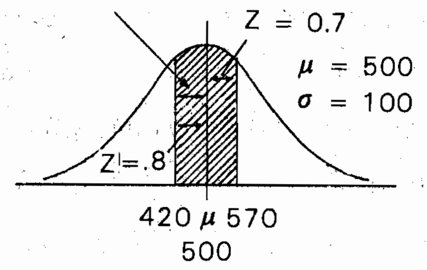
(4)

P (น้อยกว่า 580) = .7881



(5)

P(420 – 570) = .5461

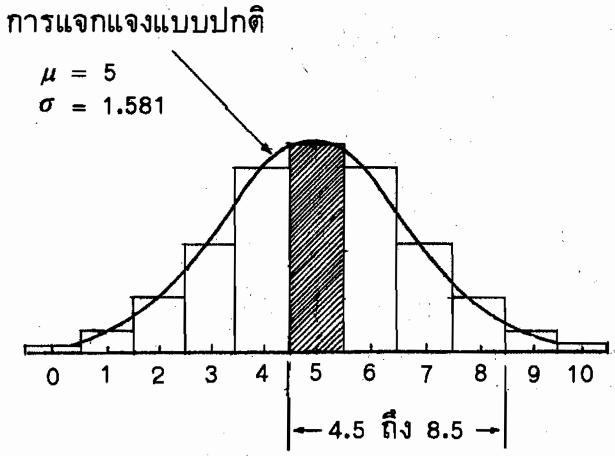


(6)

การใช้การแจกแจงแบบปกติเป็นค่าประมาณของการแจกแจงแบบทวินาม

แม้ว่า การแจกแจงแบบปกติจะเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง แต่เราสามารถใช้ประมาณความน่าจะเป็นแบบทวินามได้ **เมื่อ** np **และ** nq **มีค่าอย่างต่ำ** 5 นั่นคือเมื่อ p มีค่าไม่เล็ก หรือโตเกินไป และ n โตมาก (ถ้า p มีค่าเล็กมากหรือใหญ่มาก และ n โต ใช้ประมาณโดยการแจกแจงแบบปัวซอง)

ลองพิจารณา n = 10, p = .5, np = 5, nq = 5 เช่น โยนเหรียญสมดุลย์อันหนึ่ง 10 ครั้ง X คือจำนวนครั้งที่หงายด้านหัว X จะมีการแจกแจงแบบทวินาม ถ้าอยากทราบโอกาสที่จะหงายด้านหัว 5-8 ครั้ง เมื่อใช้ตารางการแจกแจงแบบทวินามจะได้ความน่าจะเป็น .6123 จากรูป 6.13 แสดงการแจกแจงแบบปกติซ้อนทับการแจกแจงแบบทวินามที่มี $n = 10, p = \frac{1}{2}$ ดังนั้น การแจกแจงแบบปกติ จะมี $\mu = np = 10(\frac{1}{2}) = 5$ และ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = \sqrt{2.5} = 1.581$



รูปที่ 6.13
แสดงการแจกแจงแบบทวินามที่มี
$n = 10,\ p = \frac{1}{2}$
ซ้อนทับกับการแจกแจงปกติซึ่งมี
$\mu = 5$ และ $\sigma = 1.581$

ลองพิจารณาพื้นที่ระหว่างจุด 5 − $\frac{1}{2}$ และ 5 + $\frac{1}{2}$ ภายใต้โค้งปกติ จะมีพื้นที่ใกล้เคียงกับแท่งที่ระบายสีไว้ซึ่งแสดงความน่าจะเป็นที่จะหงายด้านหัว 5 ครั้ง ค่า $\frac{1}{2}$ ที่เอามาลบออก และบวกเข้าไป ทำหน้าที่เป็น "ตัวปรับการต่อเนื่อง" เพราะการแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง เมื่อเอาการแจกแจงแบบปกติซึ่งเป็นแบบต่อเนื่องไปประมาณ จะต้องเอา $\frac{1}{2}$ ลบออกจากค่าต่ำสุด และเอา $\frac{1}{2}$ บวกค่าสูงสุด

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ด้านหัว 5 − 8 ครั้ง = $P(4.5 < X < 8.5)$

เมื่อ $x = 4.5, \quad Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{4.5 - 5.0}{1.581} = |-0.32$

เมื่อ $x = 8.5, \quad Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{8.5 - 5.0}{1.581} = 2.21$

พื้นที่จากค่าเฉลี่ยไปทาง**ซ้ายมือ**	
0.32 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	.1255
พื้นที่จากค่าเฉลี่ยไปทาง**ขวามือ**	
2.21 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	<u>.4864</u>
$P(4.5 < X < 8.5)$ =	<u>.6119</u>

แบบฝึกหัด

6.97 ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 5.6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.4 จงหา

ก) $P(5.0 < X < 6.0)$ ค) $P(X < 4.4)$

ข) $P(X > 7.0)$ ง) $P((X < 3.4)$ หรือ $(X > 6.4))$

(.2767, .1587, .1949, .3425)

6.98 ถ้า X มีการแจกแจงแบบทวินาม n = 80, p = .40 จงใช้การแจกแจงแบบปกติประมาณความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก) $P(X > 25)$ ค) $P(X < 35)$

ข) $P(X > 40)$ ง) $P(30 < X < 36)$

(.9564, .0436, .9641, .563)

6.99 ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4.0 และ $P(X > 30) = 0.06$

ก) จงหาค่าเฉลี่ยของการแจกแจง (23.78)

ข) 10% ของค่าต่ำสุดของ X จะอยู่ระหว่างค่าใด (18.652)

6.100 สายการบินแห่งหนึ่งมีรายได้ต่อวันผันแปรมาก แต่รายจ่ายเป็นค่าคงที่ไม่ว่าจะมีจำนวนผู้โดยสารมากหรือน้อย ถ้ารายได้ต่อวันมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 72 (X $ 1,000) และมีรายได้ต่อวันที่ต่ำกว่า 82 หน่วย อยู่ 85%

ก) จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงนี้ (9.6478)

ข) รายได้ระดับใดขึ้นไปคือระดับสูงสุด 5% ($87870)

6.101 ในการตรวจสภาพรถ จะมีรถอยู่ 7% ที่มีสภาพไม่ปลอดภัย จึงไม่อนุญาตให้ผ่านการตรวจ จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีรถไม่ผ่านการตรวจสภาพ 10 ถึง 20 คัน จากรถทั้งหมด 200 คัน (.8575)

6.102 อู่รถแห่งหนึ่งมีรถเข้ารับบริการโดยถัวเฉลี่ยวันละ 24 คัน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4.6 คัน ทางอู่มีขีดความสามารถจะบริการได้ไม่เกิน วัน 30 คัน ถ้ามีรถเข้ารับบริการเกิน 30 คัน จะต้องจ้างช่างพิเศษอีก 2 คน ถ้าจำนวนรถเข้ารับบริการแต่ละวัน มีการแจกแจงแบบปกติ ทางอู่จะต้องเรียกช่างพิเศษกี่เปอร์เซ็นต์ของเวลา (9.68%)

6.103 บรรณาธิการสำนักพิมพ์แห่งหนึ่งพบว่า จะต้องใช้เวลาโดยถัวเฉลี่ย 11 เดือนสำหรับการจัดพิมพ์หนังสือ 1 เล่ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2.4 เดือน และเชื่อว่าเวลาจัดพิมพ์มีการแจกแจงแบบปกติ ถ้าในปีนี้จะพิมพ์ 19 เล่ม จะมีหนังสือกี่เล่มที่เสร็จภายใน 1 ปี (66.16%)

---

9. การเลือกใช้การแจกแจงที่เหมาะสม

การแจกแจงแบบปัวซองมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบทวินามมาก ดังนั้นต้องระวังและสังเกตความแตกต่างให้ดี ถ้าเป็นการแจกแจงแบบทวินามจะต้องกำหนดค่า n ไว้ล่วงหน้าก่อนการทดลอง การทดลองแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระกัน และต้องมีผลทดลองเพียง 2 อย่างคือ ความสำเร็จกับความล้มเหลว และต้องไม่มีผลร่วมกัน ส่วนการแจกแจงแบบปัวซองจะใช้กับการทดลองที่ต้องเป็นอิสระกัน แต่ตัวแปรเชิงสุ่มจะมีค่าที่เป็นได้โดยไม่จำกัดจำนวน

สำหรับการแจกแจงแบบต่อเนื่องได้กล่าวถึงการแจกแจงแบบปกติเพียงอันเดียว ในบทต่อไปจะกล่าวถึงการแจกแจงแบบต่อเนื่องอื่น ๆ คือ การแจกแจงแบบ "ที" แบบ "ไคสแควร์" และแบบ "เอฟ."

แบบฝึกหัดทบทวน

6.104 เหตุการณ์ต่อไปนี้มีการแจกแจงแบบใด

ก) การแจกแจงของลูกค้าที่มาร้องเรียน ณ หน่วยงานแห่งหนึ่ง

ข) การแจกแจงของคะแนนสอบวัดสติปัญญา

ค) จำนวนแม่บ้านที่สั่งซื้อสินค้าจากบ้านทั้งหมด 10 หลัง

ง. ปริมาณฝนตกต่อปี

6.105 ถ้าสถิติอุบัติเหตุของบริษัทท่องเที่ยวแห่งหนึ่ง จะเกิดโดยถัวเฉลี่ยเพียง 1 รายต่อระยะทาง 250,000 ไมล์ ถ้าในวันหนึ่งบริษัทมีหมายกำหนดรถท่องเที่ยวด้วยระยะทางทั้งหมด 50,000 ไมล์ จงหา

ก) ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุ 1 ครั้ง (.1637)

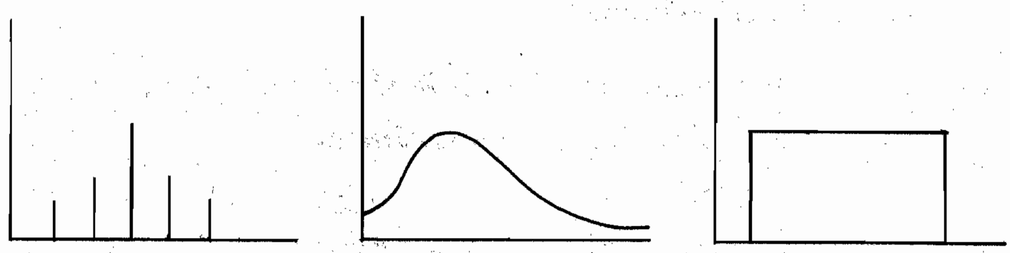
ข) ไม่เกิดอุบัติเหตุ (.8187)

6.106 สำนักงานกฎหมายแห่งหนึ่งนิยมจ้างนักศึกษานิติศาสตร์ใกล้จบให้ช่วยทำคดีในระหว่างนักศึกษาปิดเทอม โดยเฉลี่ยแต่ละคดีจะต้องใช้นักศึกษา 2 คน สถิติจำนวนคดีในรอบ 10 ปี มีดังนี้

จำนวนคดี : 6 4 8 7 5 6 4 5 4 5

อยากทราบว่าสำนักงานควรจ้างนักศึกษากี่คนสำหรับปีต่อไป (11 คน)

6.107 การแจกแจงต่อไปนี้ เป็นการแจกแจงแบบใด (ต่อเนื่อง, ไม่ต่อเนื่อง)



(ก) (ข) (ค)

6.108 เหตุการณ์ต่อไปนี้ ควรใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบใด : ทวินาม ปัวซอง หรือ แบบปกติ

ก) $n = 10, p = 0.5$ ค) $n = 500, p = .04$

ข) $n = 200, p = 0.01$ ง) $n = 30, p = .10$

6.109 พ่อค้าขายส่งเงาะ ซื้อเงาะในราคากิโลกรัมละ 8 บาท เพื่อขายปลีกกิโลกรัมละ 15 บาท แต่ถ้าขายไม่ได้ในวันรุ่งขึ้นจะต้องลดราคาเหลือกิโลกรัมละ 8 บาท ถ้าความต้องการเงาะในแต่ละวันเป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีค่า 2, 3, 4, 5 คันรถ (1 คัน = 400 กิโลกรัม) ด้วยความน่าจะเป็น .1, .3, .4 และ .2 ตามลำดับ เขาควรจะซื้อมาวันละกี่คัน จึงจะได้กำไรสูงสุด (4 คัน)

6.10 ถ้าบริษัทหนึ่งมีใบสั่งซื้อสินค้าที่ค้างชำระโดยเฉลี่ย 4.5 รายการ ใน 30 รายการ

ก) จงหาโอกาสที่จะมีลูกค้าค้างชำระ 6 รายการ จากบัญชีทั้งหมด 30 รายการ?

ข) มีค้างชำระ 9 รายการ จากบัญชีทั้งหมด 30 รายการ

(.1282, .0232)

6.111 ในการผลิตแผ่นเสียงลองเพลย์จากเทปมาสเตอร์ บริษัทพบว่า จะเกิดความผิดพลาดทางเทคนิคโดยเฉลี่ย 3 ชุด ต่อ 1 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีความผิดพลาดทางเทคนิค 4 แผ่น ในวันหนึ่ง (.1681)

6.112 จากข้อ 6.111 เมื่ออัดแผ่นเสียงแล้วจะต้องติดป้ายบอกชื่อเพลง ถ้าโดยถัวเฉลี่ยมีการติดป้ายชื่อเพลงผิดพลาด 4.5 แผ่นต่อวัน จงหาโอกาสที่จะติดชื่อผิดพลาด 3 แผ่น ในวันหนึ่ง (.1687)

6.113 ชาวไร่ซื้อเมล็ดพืชจากผู้ขายโดยได้รับการประกันว่าจะงอก 80% ถ้าเขาปลูก 15 เมล็ด จงหาความน่าจะเป็น

ก) จะงอก 12 เมล็ดขึ้นไป (.6482)

ข) จะงอกน้อยกว่า 12 เมล็ด (.3518)

ค) จะงอก 8 เมล็ดหรือต่ำกว่า (.0181)

6.114 พนักงานขายกล้องถ่ายภาพของบริษัทหนึ่งต้องขับรถโดยเฉลี่ยเดือนละ 6,250 ไมล์ และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 178 ไมล์ อยากทราบว่ามีพนักงานขายที่ขับรถไม่เกินเดือนละ 6,000 ไมล์ อยู่กี่เปอร์เซ็นต์ (8.02%)

6.115 ฝ่ายจัดซื้อของบริษัทหนึ่งต้องการรถที่ประหยัดน้ำมัน ขณะนี้สนใจรถ 2 ยี่ห้อ คือ A และ B โดยมีข้อมูลดังนี้

	จำนวนไมล์เฉลี่ย ต่อ 1 แกลลอน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
A	23	7
B	25	1

ผู้จัดซื้อรู้สึกกังวลสำหรับค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานซึ่งต่างกันมาก เขาจึงตั้งเกณฑ์ใหม่ว่า "ต้องการรถที่ให้ค่าใกล้เคียง 26 ไมล์ต่อแกลลอนมากที่สุด" เขาจะซื้อยี่ห้อใด? (เลือก A)

6.116 จากข้อ 6.115 ถ้าเปลี่ยนเกณฑ์ตัดสินใจใหม่ว่าจะปฏิเสธรถที่มีโอกาสให้จำนวนไมล์ต่ำกว่า 24 ไมล์ต่อแกลลอนมากที่สุด เขาจะซื้อยี่ห้อใด? (ปฏิเสธ A)

6.117 ถ้าผลการสำรวจของธนาคารชาติ พบว่า อายุเฉลี่ยของบัญชีออมทรัพย์ของธนาคารพาณิชย์เท่ากับ 18 เดือน ด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 6.45 เดือน

ก) ถ้าผู้ฝากคนหนึ่งพึ่งเปิดบัญชีออมทรัพย์ จงหาความน่าจะเป็นที่เขายังมีบัญชีเงินฝากอยู่ต่อไปถึง 22 เดือน (.62)

ข) จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะปิดบัญชีเงินฝากก่อน 2 ปี (.8238)

6.118 ถ้าการตรวจรับสินค้ากล่องใหญ่มากใช้วิธีสุ่มสินค้าตัวอย่าง มากล่องละ 10 ชิ้น ถ้าพบสินค้าชำรุดเกิน 2 ชิ้น จะไม่รับสินค้ากล่องนั้น

ก) ถ้าสินค้ากล่องหนึ่งมีสินค้าชำรุดปนอยู่ 20% จงหาโอกาสที่จะไม่รับสินค้ากล่องนั้น (.3222)

ข) ให้ X คือจำนวนของชำรุดในตัวอย่าง 30 ชิ้น จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X (4.8)

6.119 ผู้ผลิตประตูแบบม้วนอ้างว่า 40% ของประตูที่ชำรุดมีสาเหตุจากผู้ใช้ไม่ปฏิบัติตามข้อบ่งใช้ ถ้าคำกล่าวนี้จริง จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีประตูชำรุดเพราะไม่ปฏิบัติตามข้อบ่งใช้ 20 รายขึ้นไปจากที่ชำรุดทั้งหมด 30 ราย (.00286)

6.120 ข้อสอบแบบ ถูก-ผิด มีทั้งหมด 30 ข้อ ถ้านักเรียนผู้หนึ่งไม่มีความรู้เลย จงหาความน่าจะเป็นของ

(ก) ได้เกรด A (25 ข้อขึ้นไป) (.00017)

(ข) ได้เกรด B (20-24 ข้อ) (.0492)

(ค) ได้เกรด C (15-19 ข้อ) (.52286)

(ง) ได้เกรด D (12-14 ข้อ) (.32753)

(จ) สอบตก (11 ข้อหรือน้อยกว่า) (.10024)

6.121 ถ้า 10% ของผู้สูบบุหรี่นิยมบุหรี่ชนิดหนึ่ง ให้ Y คือจำนวนผู้นิยมบุหรี่ชนิดนี้ในกลุ่มตัวอย่าง 100 คน จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y (3 คน)

6.122 เครื่องจักรผลิตสกรูชำรุด 20% ของสกรูทั้งหมด ถ้าสุ่มมา 100 ตัว จงหาค่า μ และ σ (20, 4)

6.123 ในการสัมภาษณ์ผู้ชมโทรทัศน์ 30 ราย ทางโทรศัพท์ มี 12 รายที่ตอบรับว่าชมรายการที่อ้างถึง ให้ W เป็นตัวแปรเชิงสุ่มเบอร์นุยลี

(ก) จะหาค่าเฉลี่ยของ W (.4)

(ข) จงหาสัดส่วนของตัวอย่าง (.4)

6.124 บริษัทขุดเจาะแก๊สธรรมชาติได้ทำการขุดเจาะหาแก๊สทั้งหมด 10 หลุม ในบริเวณที่ตามหลักธรณีวิทยาจะมีโอกาสพบแก๊ส = 0.1

(ก) จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบแก๊สเพียงหลุมเดียว (.38742)

(ข) จะพบ 2-4 หลุม (.26226)

6.125 ถ้าบรรจุวัคซีนชนิดหนึ่ง 36 ขวด ต่อ 1 กล่อง และสมมุติว่า $\frac{1}{4}$ ของวัคซีนในกล่องนั้น คุณภาพเสื่อม (ตัวเชื้อไม่แข็งแรง)

(ก) จงหาโอกาสที่จะได้วัคซีนคุณภาพเสื่อม 2 ขวด จากที่สุ่มมา 6 ขวด $\left(\frac{631,800}{1,947,792}\right)$

(ข) จงหาโอกาสที่จะได้วัคซีนคุณภาพเสื่อมไม่เกิน 2 ขวด (จาก 6 ขวด) $\left(\frac{1,654,380}{1,947,792}\right)$

6.126 ถ้าที่ทำการไปรษณีย์สามารถให้บริการลูกค้าโดยไม่ต้องเข้าแถวรอ 4 รายต่อ 1 นาที ถ้ามีลูกค้าโดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 180 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าต้องเข้าแถวรอ (.1847)

6.127 ถ้าสินค้าชนิดหนึ่งมีอัตราชำรุด 10% ถ้าซื้อสินค้านั้นมา 40 หน่วย

ก) จงหาโอกาสที่จะมีชำรุดอย่างมาก 2 หน่วย (.2381)

ข) อย่างน้อย 2 หน่วย (.9084)

(ใช้การแจกแจงปัวซองประมาณการแจกแจงแบบทวินาม)
