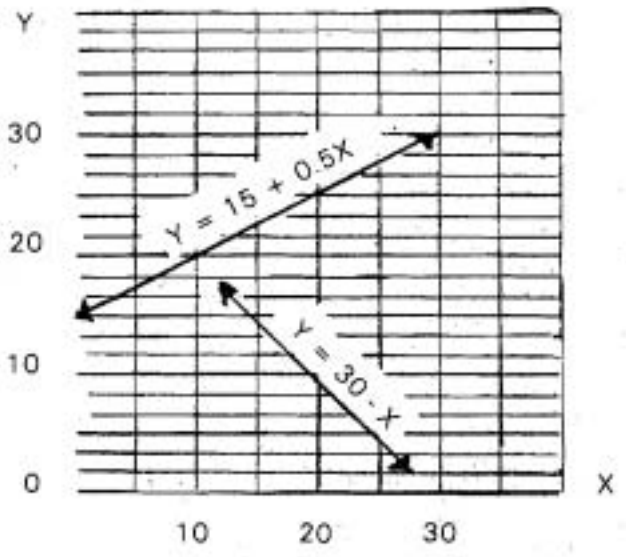
11. ความถดถอยเชิงเดี่ยวและสหสัมพันธ์

1. บทนำ
2. การประมาณค่าโดยใช้เส้นถดถอย
3. การวิเคราะห์สหสัมพันธ์
4. แบบฝึกหัด

1. บทนำ

เมื่อเราวิเคราะห์ข้อมูลที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว เราเรียกว่า การวิเคราะห์**ตัวแปรเชิงเดี่ยว** หรือ Univariate analysis แต่ถ้าปัญหาของเรามีตัวแปร 2 ตัว และเราต้องการทราบความสัมพันธ์ของตัวแปรคู่นั้น เช่น ผู้จัดการฝ่ายขายอาจสนใจใคร่ทราบความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรายได้จากการขายกับค่าใช้จ่ายในการโฆษณา ฝ่ายทะเบียนของวิทยาลัยอาจสนใจความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนในระดับมัธยมปลายกับคะแนนในระดับวิทยาลัย ผู้จัดการฝ่ายบุคคลอาจสนใจความสัมพันธ์ของคะแนนทดสอบความถนัดกับผลงานของลูกจ้าง นักเกษตรอาจสนใจความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนปุ๋ยและผลผลิต นอกจากเราต้องการทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละคู่แล้ว บางครั้งเรายังต้องการพยากรณ์ค่าของตัวแปรตัวหนึ่งโดยใช้ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่งด้วย และเราเรียกวิธีการนี้ว่า การศึกษาความถดถอยและสหสัมพันธ์

การศึกษาความถดถอย จะหมายถึงการหาสมการที่สอดคล้อง (fit) กับข้อมูลที่เก็บมาเพื่อใช้สมการนั้น พยากรณ์ (prediction) และประมาณค่า (estimation) ตัวแปรที่เราพยากรณ์ได้หรือประมาณค่าได้เรียกว่า ตัวแปรพึ่งพา (dependent variable) และตัวแปรอีกตัวหนึ่งซึ่งเป็นพื้นฐานที่ใช้ประมาณค่า เรียกว่า **ตัวแปรอิสระ** (independent variable) การศึกษา**ความถดถอยแบบเชิงเดี่ยว** (simple regression) คือการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ 1 ตัว กับตัวแปรพึ่งพา 1 ตัว ส่วน**การศึกษาความถดถอยแบบเชิงซ้อน** (multiple regression) จะมีตัวแปรอิสระ 2 ตัวขึ้นไป และตัวแปรพึ่งพา 1 ตัว ในบทนี้ จะศึกษาการสร้างสมการถดถอยเชิงเดี่ยว ซึ่งมี X เป็นตัวแปรอิสระ และ Y เป็นตัวแปรพึ่งพา และเรานิยมเรียกว่า**ความถดถอยของ** Y **บน** X (regression of Y on X)



รูปที่ 11.1
แสดงสมการเส้นตรง 2 เส้น

เราจะจำกัดความสนใจศึกษาเฉพาะ**ความถดถอยเชิงเดี่ยว**เท่านั้น นั่นคือเราจะสามารถแสดงความสัมพันธ์โดยกราฟในรูปของเส้นตรง และมีอยู่บ่อยครั้งที่สมการถดถอยเป็นแบบเส้นโค้ง (curvilinear) ในรูปที่ 11.1 จะมีเส้นถดถอย 2 เส้น เส้นหนึ่งมีความลาดชันแบบดิ่งขึ้น (upward sloping) คือเส้นที่แสดงโดยสมการ

$$Y = 15 + 0.5X$$

ส่วนเส้นที่มีความลาดชันแบบดิ่งลง (downward sloping) คือ เส้น

$$Y = 30 - X$$

ดังนั้น รูปแบบของสมการถดถอยเชิงเดี่ยว คือ

$$Y = a + bX$$

ในเมื่อ

a คือ จุดที่เส้นถดถอยตัดแกน Y (Y intercept)

b คือ ความลาดชันของเส้นตรง หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของ Y ต่อทุก ๆ หน่วยของ X ที่เปลี่ยนแปลง

ดังนั้น เราจะสร้างสมการถดถอยได้ก็เมื่อทราบค่า a และ b การที่เราพยายามสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่หนึ่งก็เพื่อใช้ประโยชน์ในการพยากรณ์ โดยใช้ค่าของตัวแปรตัวหนึ่งทำนายค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง เช่น ถ้าเราทราบความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความถนัดกับ GPA เราก็สามารถทำนายผลการเรียน หรือ GPA จากคะแนนความถนัด ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราทราบความสัมพันธ์ระหว่างเงินกู้เพื่อปลูกสร้างที่อยู่อาศัยกับจำนวนบ้านจัดสรร เราก็จะสามารถพยากรณ์จำนวนบ้านจัดสรรที่จะก่อสร้างในแต่ละปีได้จากงบประมาณเงินกู้เพื่อสร้างที่อยู่อาศัย

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่หนึ่งนั้น ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปความสัมพันธ์แบบ**เหตุและผล**เสมอไป (cause-and-effect หรือ causal relationships) ซึ่งหมายถึงตัวแปรอิสระเป็นต้นเหตุของตัวแปรพึ่งพา ในบางครั้งความสัมพันธ์แบบนี้เป็นจริง เช่น ผลผลิตข้าวกับปุ๋ย ปุ๋ยเป็นสาเหตุที่ทำให้ผลผลิตสูง แต่ความสัมพันธ์บางคู่ เช่น คะแนนความถนัดกับ GPA ซึ่งเราทราบว่าน่าจะมีความสัมพันธ์แบบเชิงบวก แต่เราคงจะยอมรับไม่ได้ว่าคะแนนความถนัดเป็นสาเหตุของ GPA ทั้งนี้ เป็นเพราะยังมีปัจจัยอื่น ๆ อีกหลายอย่างที่มีอิทธิพลต่อ GPA จึงสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรบางคู่อยู่ในลักษณะเหตุและผล แต่หลายคู่ที่อยู่ในลักษณะฟังก์ชั่นหรือผลที่ตามมา (functional or consequential) คือ มีแฟคเตอร์ที่สามเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

เมื่อเราสร้างสมการถดถอยเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่หนึ่งแล้ว เราอาจต้องการทราบว่า ตัวแปรคู่นั้น มีความสัมพันธ์กันมากน้อยเพียงใดซึ่งจะต้องอาศัยเทคนิคของ**การวิเคราะห์สหสัมพันธ์** (correlation analysis) ซึ่งจะวัดความใกล้ชิดของความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปร 2 ตัวในสมการถดถอย แต่บางครั้งเราอาจต้องการวัดความใกล้ชิดของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่หนึ่งโดยยังไม่ได้ศึกษาความถดถอยก็ได้ นั่นคือ เราสามารถจะศึกษาความถดถอย และการวิเคราะห์สหสัมพันธ์โดยอิสระต่อกัน

แบบฝึกหัด

11.1 จงบอกลักษณะของสมการข้างล่างว่าอันใด เป็นแบบเชิงเดี่ยว, เชิงซ้อน, เส้นตรง และเส้นโค้ง

ก) $Y = 2 + 3X$

ข) $Y = 1000 - 5000X$

ค) $Y = 10 + 2X_1 + 3X_2 + 4X_3$

ง) $Y = 2 + 3X + X^2$

11.2 จงบอกจุดประสงค์ของการวิเคราะห์ความถดถอยและการวิเคราะห์สหสัมพันธ์

11.3 จงอธิบายความหมาย "ความถดถอย Y บน X" ตัวใดเป็นตัวแปรอิสระ และตัวใดเป็นตัวแปรพึ่งพา

11.4 จากสมการ $Y = a + bX$ จงอธิบายความหมายของค่า a และ b โดยรูปกราฟ

11.5 จงกราฟสมการ $Y = a + bX$ เมื่อ a และ b มีค่าต่าง ๆ ดังนี้

ก) $a = 2, b = 0$

ข) $a = 0, b = 1$

ค) $a = 2, b = 1$

ง) $a = -2, b = 2$

จ) $a = 4, b = -2$

---

2. ความถดถอยเชิงเส้น

(linear regression)

เมื่อเก็บข้อมูลได้แล้วควรพล็อตข้อมูลทั้งหมดในกราฟ เรียกว่า scatter diagram เพื่อให้เรามองดูด้วยตาเปล่าก่อนว่าลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y มีลักษณะแบบเส้น

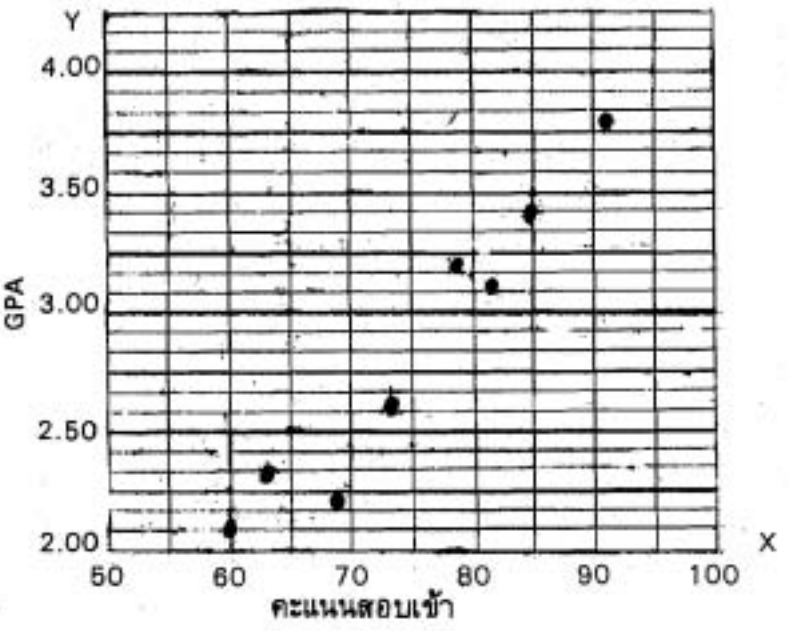
ได้ง หรือเส้นตรงโดยเราจะใช้แกน X แทนค่าต่าง ๆ ของตัวแปร X และแกน Y แทนค่าต่าง ๆ ของตัวแปร Y ข้อมูลที่เก็บมาจะเป็นคู่ลำดับของ X และ Y n คู่ คือ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ เราจึงใช้คู่ลำดับเหล่านี้คือจุดต่าง ๆ n จุดนั่นเอง กล่าวโดยสรุปได้ว่าประโยชน์ของ scatter diagram มี 2 อย่าง คือ 1. ใช้เป็นข้อบ่งชี้ว่า ตัวแปรคู่นั้นมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ 2. ถ้ามีความสัมพันธ์กัน เราจะดูต่อไปว่าจะแทนความสัมพันธ์นั้นด้วยเส้นแบบใด นั่นคือ จะหาสมการประมาณค่าความสัมพันธ์นั้น

ตัวอย่าง ต้องการศึกษาว่า คะแนนสอบเข้ามหาวิทยาลัยและ GPA มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ฝ่ายทะเบียนได้เก็บข้อมูลไว้ในตารางที่ 11.1 ดังนี้

ตารางที่ 11.1 คะแนนสอบเข้า และ GPA เมื่อจบการศึกษาของนักศึกษา 8 คน

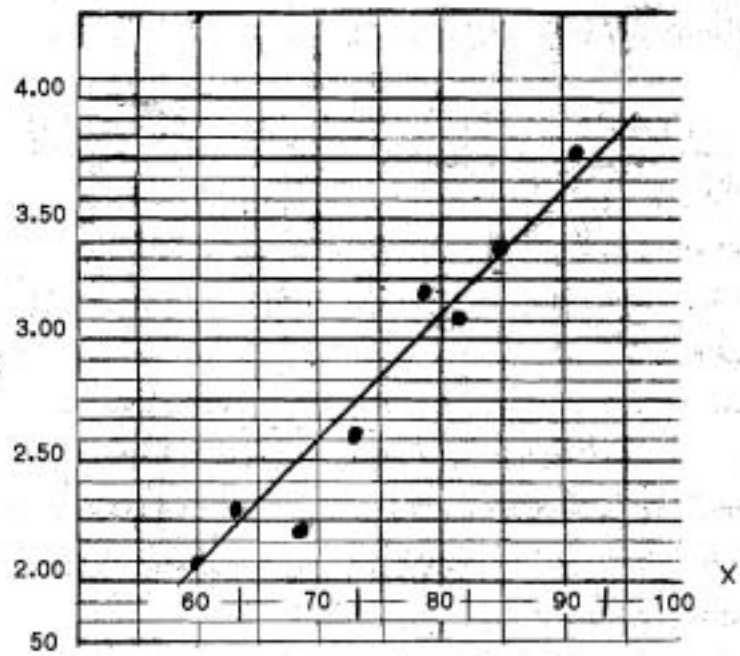
นักศึกษา	A	B	C	D	E	F	G	H
คะแนนสอบเข้า (เต็ม 100 คะแนน)	74	69	85	63	82	60	79	91
GPA (4.0 = A)	2.6	2.2	3.4	2.3	3.1	2.1	3.2	3.8

ในขั้นแรก เราควรย้ายข้อมูลในตาราง 11.1 ลงในกราฟก่อน และเนื่องจากฝ่ายทะเบียนต้องการใช้คะแนนสอบเข้าเป็นตัวพยากรณ์ความสำเร็จของนักศึกษาในขั้นมหาวิทยาลัย จึงควรให้ GPA เป็นตัวแปรพึ่งพาและแทนด้วยแกน Y ส่วนคะแนนสอบเข้าให้เป็นตัวแปรอิสระและแทนด้วยแกน X ดังแสดงในรูปที่ 11.2



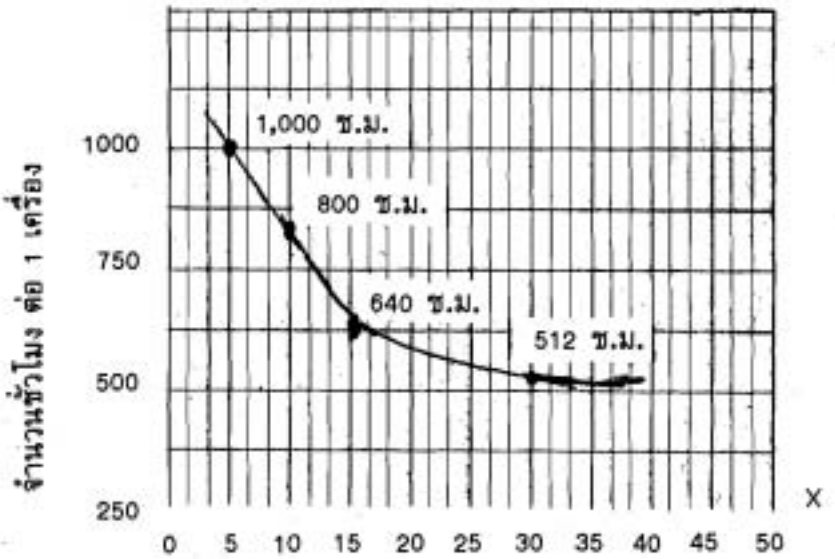
รูปที่ 11.2 scatter diagram ของข้อมูลในตาราง 11.1

เมื่อพิจารณารูปที่ 11.2 ด้วยตาเปล่าจะพบว่า จุด 8 จุด ซึ่งคือคู่ลำดับ (x_i, y_i) 8 คู่ แสดงว่าตัวแปรคู่นี้น่าจะมีความสัมพันธ์กัน และหากว่าเราลากเส้นตรงเส้นหนึ่งให้ลอดไประหว่างกึ่งกลางของกลุ่มของจุดเหล่านี้ โดยให้จำนวนจุดที่อยู่เหนือและใต้เส้นมีจำนวนเท่า ๆ กัน ดังรูปที่ 11.3 โดยเส้นตรงนั้นจะแสดงความสัมพันธ์โดยตรงของ X และ Y แต่เนื่องจากทุกจุดมิได้อยู่บนเส้นตรงทั้งหมด จึงกล่าวได้ว่า คะแนนสอบเข้า (X) และ GPA (Y) มีความโน้มเอียงค่อนข้างสูงที่จะมีความสัมพันธ์กันเชิงเส้นตรง (linear relationship)



รูปที่ 11.3
scatter digram และเส้นตรงแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y

บางครั้งความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y อาจเป็นรูปโค้ง เราเรียกว่ามีความสัมพันธ์แบบเส้นโค้ง เช่นความสัมพันธ์ระหว่างทักษะกับเวลาที่ใช้ในการผลิต ได้มีผู้เก็บสถิติจากพนักงานโรงงานประกอบเครื่องบิน พบว่า พนักงานที่มีทักษะสูงจะใช้เวลาประกอบเครื่องบินลดลง 20% ทุกครั้งที่จำนวนผลิตเพิ่มขึ้น 1 เท่าตัว ดังรูปที่ 11.4 เมื่อผลิตเครื่องบิน 5 ลำ ใช้เวลา 1000 ชั่วโมง ต่อ 1 เครื่อง แต่ระหว่างที่ 6-10 จะใช้เวลาผลิตต่อเครื่องลดลงเหลือ 800 ชั่วโมง (ลดลง 20%) เครื่องที่ 11-15 ใช้เวลาลดลงอีก 20% เหลือ 640 ชั่วโมงต่อเครื่อง

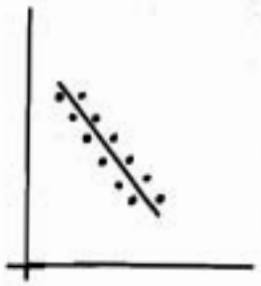


รูปที่ 11.4

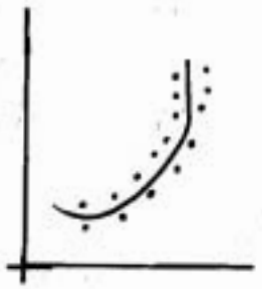
แสดงความสัมพันธ์แบบเส้นโค้งระหว่าง เวลาที่ใช้ผลิต และจำนวนเครื่องที่ผลิตแล้ว บางครั้งเรียกว่าโค้งการเรียนรู้ (learnig curve)

เราจะทราบว่าตัวแปรมีความสัมพันธ์แบบตามกันเรียกว่า**เชิงบวก** หรือมีความสัมพันธ์ในทิศทางตรงข้ามเรียกว่า **เชิงนิเสธ** โดยดูทิศทางของเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ในรูป 11.3 ความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงบวก ในรูป 11.4 ความสัมพันธ์เป็นแบบนิเสธ และในรูป 11.5 จะแสดงความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ รูป a และ b เป็นความสัมพันธ์เชิงบวกและเชิงนิเสธ รูป c และ d เป็นความสัมพันธ์

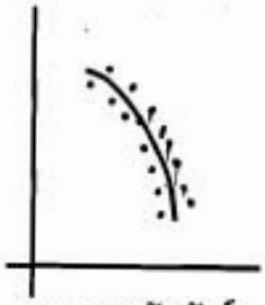
(a) ความสัมพันธ์เชิงเส้น (บวก)



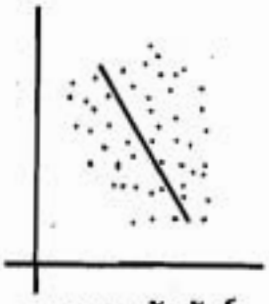
(b) ความสัมพันธ์เชิงเส้น (นิเสธ)



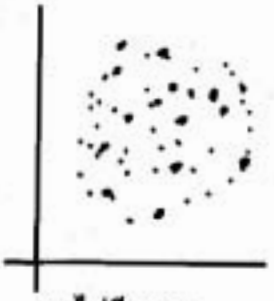
(c) ความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง (บวก)



(d) ความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้ง (นิเสธ)



(e) ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงแต่มีการกระจายสูงขึ้น



(f) ไม่มีความสัมพันธ์

รูปที่ 11.5 แสดงความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ ระหว่าง X และ Y ใน scatter diagram

แบบเส้นโค้งเชิงบวกและเชิงนิเสธ รูป e แสดงความสัมพันธ์เชิงนิเสธ และมีการกระจายของจุดโดยรอบเส้นตรงค่อนข้างสูงแสดงว่าดีกรีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรพึ่งพาจะมีขนาดเล็กกว่าความสัมพันธ์ในรูป b ส่วนลักษณะการเรียงตัวของจุดในรูป f ไม่มีรูปแบบเด่นชัด จึงแสดงว่า ไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่นั้น ดังนั้น จึงไม่สามารถใช้ข่าวสารของตัวแปรหนึ่งพยากรณ์การเกิดขึ้นของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง

ปัญหาคือ เส้นตรงนั้นมาจากไหน วิธีง่ายที่สุดแต่ค่อนข้างหยาบคือการลากเส้นตรงโดยวิธีกะเอา (freehand method) แต่มีข้อเสีย คือ เราไม่ทราบว่าเป็นเส้นที่ปรับเข้ากับข้อมูล (fit) ได้ดีที่สุดหรือไม่

วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

(The Method of Least Squares)

เราสามารถลากเส้นผ่านจุดเหล่านั้นได้หลายเส้นเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน มีหลายเส้นที่ไม่สามารถปรับเข้ากับข้อมูลได้ดี จึงควรตัดทิ้งไปแต่ก็ยังคงเหลืออีกหลายเส้นที่น่าจะปรับเข้ากับข้อมูลได้ดี แต่เราต้องการเพียงเส้นเดียวที่ปรับเข้ากับข้อมูลได้ดีที่สุด จึงควรต้องนิยามคำว่า "ดีที่สุด" ถ้าทุก ๆ จุดอยู่บนเส้นตรงทั้งหมด เราจะเห็นชัดเจนว่าเส้นนั้นปรับเข้ากับข้อมูลได้ดีที่สุด แต่ลักษณะเช่นนี้ จะไม่ค่อยปรากฏ ส่วนใหญ่จะเป็นลักษณะจุดเหล่านั้นกระจายอยู่โดยรอบเส้นตรง อาจมีบางจุดอยู่บนเส้นตรง แต่ไม่ใช่ทั้งหมด เราจึงควรขยายความว่า เส้นที่ดีปรับเข้ากับข้อมูลได้ดีที่สุดจะต้องมีคุณสมบัติอะไรบ้าง หลักเกณฑ์ที่นิยมใช้ทั่วไปคือ **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด** (least squares method) ซึ่งหมายถึงเส้นที่ให้ผลรวมกำลังสองของระยะทางแนวดิ่งระหว่างจุดกับเส้นตรงของทุก ๆ จุด มีค่าน้อยที่สุด

เมื่อนำข้อมูลในตารางที่ 11.2 พล็อตใน Scatter diagram และลากเส้นตรง $Y = a + bX$ ผ่านระหว่างกลางของจุดเหล่านี้ ในรูปที่ 11.6 จุด 20 จุดนั้นคือ (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),.... (X_{20}, Y_{20}) ส่วนสมการเส้นตรงที่ปรับเข้ากับจุด 20 นี้ คือ

$$Y = a + bX$$

ดังนั้น ทุก ๆ ค่าของ X จะมีค่า Y จำนวน 2 ค่า คือข้อมูลที่เก็บมาซึ่งคู่กับค่า X ที่เก็บมาในตารางที่ 11.2 กับอีกค่าหนึ่งคือค่า Y ที่อยู่บนเส้นตรง ซึ่งได้จากการแทนค่า X ลงในสมการ $Y = a + bX$ เช่นที่ $X_1 = 3$ ค่า $Y_1 = 5$ อันนี้คือ ค่า observed Y ยังมีค่า Y_1 อีกอันหนึ่งคือ $Y_1 = a + bX_1$ และจุด (X_1, Y_1) จะอยู่บนเส้นตรง และเป็นเช่นนี้จนถึง X_{20} จะมี obseved $Y_{20} = 5$ และ $Y_{20} = a + bX_{20}$ ความแตกต่างของค่า Y คู่นี้ สำหรับแต่ละค่าของ X คือระยะทางแนวดิ่งในรูป 11.6 และถ้าผลต่างกำลังสองของทุก ๆ คู่ลำดับคือ

$$\Sigma_{i=1}^{n} \quad (Y_i - (a + bX_i) \quad)^2$$

เป็นค่าน้อยที่สุด เราจะเรียกเส้นนั้นว่า **เส้นกำลังสองน้อยที่สุด** ค่า a คือ จุดที่เส้นตรงตัดแกน Y (Y intercept) และ b คือความลาดชันของเส้น เราเรียก a และ b ว่า**สัมประสิทธิ์ความถดถอย** (regression coeffients) ในขณะนี้สมมุติเรามีข้อมูลคือ คะแนนผลงานและ GPA ของพนักงาน 20 คน ในตารางที่ 11.2 โดยให้ GPA เป็นตัวแปรอิสระ (X) และคะแนนผลงานเป็นตัวแปรพึ่งพา (Y) เพราะต้องการพยากรณ์คะแนนผลงาน จาก GPA

ตารางที่ 11.2 คะแนนผลงานและ GPA เมื่อจบการศึกษาของพนักงาน 20 คน

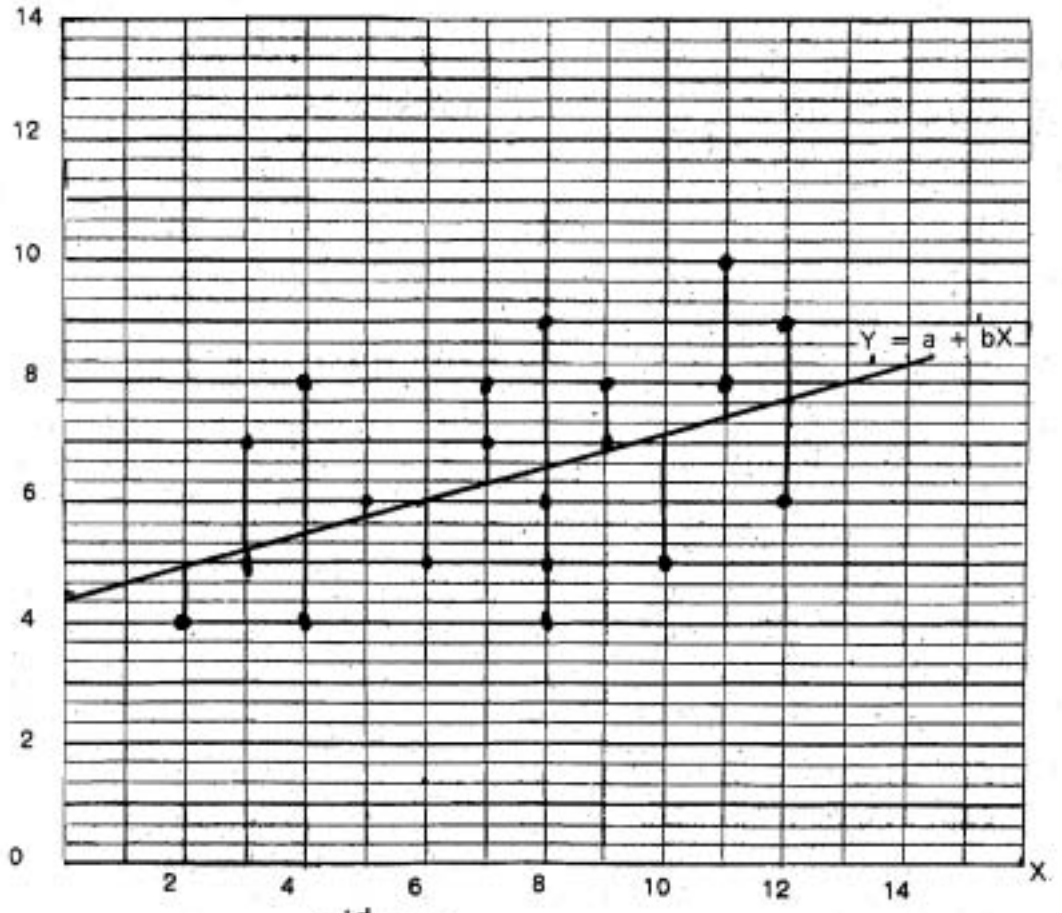
พนักงาน	GPA เมื่อจบการศึกษา (X)	คะแนนผลงาน (Y)
1	3	5
2	2	4
3	4	4
4	12	9
5	11	8
6	8	9
7	9	7
8	7	8
9	6	5
10	5	6
11	4	8
12	8	4
13	3	7
14	12	6
15	9	8
16	8	5
17	11	10
18	7	7
19	8	6
20	10	5

จะเห็นว่า เราจะสร้างเส้นตรงทั้งหลายได้ก็ต่อเมื่อทราบค่า a และ b เราจึงต้องการหาค่า a และ b ที่ทำให้เส้นตรงนั้นปรับเข้ากับข้อมูลได้ดีที่สุดตามเกณฑ์กำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งโดยวิธีคณิตศาสตร์เราจะหาค่า a และ b ได้จากสมการปกติ (normal equations) คือ สมการที่ (11.1) และ (11.2)

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X \qquad (11.1)$$

$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2 \qquad (11.2)$$

ในเมื่อ n คือจำนวนคู่ลำดับ (X, Y) ส่วนค่าอื่น ๆ นอกจากค่า a และ b จะหาได้จากข้อมูลในตารางที่ 11.2 เราจึงหาค่า a และ b จากสมการปกติ



รูปที่ 11.6
แสดงระยะแนวดิ่งจากจุดต่าง ๆ
กับเส้นตรงของข้อมูลในตารางที่ 11.2

ตารางที่ 11.3 แสดงการคำนวณเพื่อหาความถดถอยของคะแนนผลงานและ GPA เมื่อจบการศึกษา

พนักงาน	GPA (X)	(Y)	XY	X^2	Y^2
1	3	5	15	9	25
2	2	4	8	4	16
3	4	4	16	16	16
4	12	9	108	144	81
5	11	8	88	121	64
6	8	9	72	64	81
7	9	7	63	81	49
8	7	8	56	49	64
9	6	5	30	26	25
10	5	6	30	25	36
11	4	8	32	16	64
12	8	4	32	64	16
13	3	7	21	9	49
14	12	6	72	144	36
15	9	8	72	81	64
16	8	5	40	64	25
17	11	10	110	121	100
18	7	7	49	49	49
19	8	6	48	64	36
20	10	5	50	100	25
n=20	$147=\Sigma X$	$131=\Sigma Y$	$1012=\Sigma XY$	$1261=\Sigma X^2$	$921=\Sigma Y^2$

เมื่อใช้ค่าที่คำนวณได้ในตารางที่ 11.3 แทนค่าในสมการปกติ จะได้

(1) $131 = 20\,a + 147\,b$

(2) $1012 = 147\,a + 1261\,b$

เอา 147 คูณสมการ (1) และ 20 คูณสมการ (2) แล้วเอาสมการที่ (2) หักออกจากสมการที่ (1)

(1) $19{,}257 = 2940\,a + 21{,}609\,b$

(2) $20{,}240 = 2940\,a + 25{,}220\,b$

เมื่อลบกันแล้ว จะได้

$$983 = 3611\,b$$

ดังนั้น

$$b = \frac{983}{3611} = \boxed{0.2722}$$

แทนค่า b ในสมการ (1) จะได้

$$131 = 20\,a + 147(0.2722)$$

$$20\,a = 131 - 40.0134 = 90.9866$$

ดังนั้น

$$a = \frac{90.9866}{20} = \boxed{4.55}$$

และสมการกำลังสองน้อยที่สุด คือ

$$Y = 4.55 + 0.27\,X$$

ในปัจจุบันนี้ เราใช้เครื่องคิดเลขขนาดเล็กอย่างกว้างขวาง ดังนั้น เราจึงไม่จำเป็นต้องเขียนค่าต่าง ๆ ดังรายละเอียดของตารางที่ 11.3 เราจะเขียนเฉพาะค่าสรุปคือผลรวมของแต่ละคอลัมน์ สำหรับค่า a และ b ที่ได้นั้น มาจากสูตรซึ่งได้จากสมการปกติ คือ

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} \quad \text{หรือ} \quad \frac{(\Sigma X^2)(\Sigma Y) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2} \qquad (11.3)$$

$$\text{และ } b = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\Sigma(X-\bar{X})^2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2} \qquad (11.4)$$

เราจะใช้สมการที่ (11.3) และ (11.4) หาค่า a และ b ดังนี้

$$a = \frac{(1261)(131) - (147)(1012)}{20(1261) - (147)^2} = \frac{16{,}427}{3611} = 4.55$$

$$b = \frac{20(1012) - (147)(131)}{20(1261) - (147)^2} = \frac{983}{3611} = 0.27$$

จะได้ค่า a และ b เท่าเดิม

เส้น $Y = 4.55 + 0.27X$ คือเส้นในรูป 11.6 และเส้นนี้จะให้ผลรวมของค่ากำลังสองของระยะทางแนวดิ่ง จากจุดต่าง ๆ ไปยังเส้นมีค่าน้อยที่สุด

เมื่อเราหาสมการกำลังสองน้อยที่สุดได้แล้ว เราจะพยากรณ์คะแนนผลการทำงานจาก GPA เช่น สมมุติว่าพนักงานเข้าใหม่คนหนึ่งมี GPA 10 คะแนน เราจะพยากรณ์ผลงานได้โดยการแทนค่า $X = 10$ ในสมการ

$$\hat{Y} = 4.55 + 0.27(10) = 7.25$$

ในเมื่อ $\hat{Y}$ คือค่า Y ที่คำนวณได้จากสมการ ซึ่งต่างจากค่า Y ที่เราสังเกตจากตัวอย่าง อันที่จริงคะแนนผลงาน 7.25 นี้ คือ **ค่าคาดหมาย**โดยกำหนดว่า GPA = 10 พึงสังเกตว่ามีหลายคนที่จบด้วย GPA 10 คะแนนนี้ และแต่ละคนน่าจะมีผลงานต่างกัน ดังนั้นอาจมองอีกด้านหนึ่งได้ว่าค่าที่พยากรณ์ได้จากสมการกำลังสองน้อยที่สุดนี้คือ **ค่าเฉลี่ย**ด้วยเหตุนี้ จึงมีหลายคนเรียกเส้นกำลังน้อยที่สุดนี้ว่า **ค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไข** หรือ conditional mean นั่นคือ ทุก ๆ จุดบนเส้นนี้ คือ ค่าเฉลี่ยของค่า Y ทั้งหลาย เมื่อกำหนดค่า X

เราเรียกสมการกำลังสองน้อยที่สุด $Y = a + bX$ ว่า ความถดถอย Y บน X (regression of Y on X) คำว่า "ความถดถอย" หรือ regression เป็นคำที่ท่าน Francis Galton บัญญัติขึ้นในศตวรรษที่ 19 จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสูงของบิดา และบุตรชาย เขาพบว่าบิดาที่สูงมากมักจะมีบุตรชายสูงมากเช่นกัน ส่วนบิดาที่เตี้ยมากมักจะมีบุตรชายที่เตี้ยมากเช่นกัน อย่างไรก็ตามความสูงเฉลี่ยของบุตรชายที่มีบิดาสูงมากจะต่ำกว่าความสูงเฉลี่ยของบิดาเหล่านั้น และความสูงเฉลี่ยของบุตรชายที่มีบิดาเตี้ยมากจะสูงกว่าความสูงเฉลี่ยของบิดาเหล่านั้น Galton จึงเรียกความโน้มเอียงที่จะกลับไปสู่ความสูงเฉลี่ยของประชากรทั้งหมดอันเป็นความสูงตามปกติว่า "การถดถอย" นั่นคือเส้นถดถอย คือเส้นค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขนั่นเอง

เส้นถดถอยที่เราได้มานี้ เป็น**เส้นถดถอยตัวอย่าง** (sample regression line) เพราะเราสร้างโดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่างคือ พนักงาน 20 คน ถ้าเราสุ่มพนักงานมาอีกชุดหนึ่งจำนวน 20 คน แล้วหาค่า a และ b เราจะได้ค่า a และ b ที่ต่างจากที่หาไว้แล้ว ดังนั้นเราจะได้เส้นถดถอยที่ต่างไปจากเส้นเดิม ถ้าเราแทนเส้นถดถอยของประชากร ซึ่งเป็นเส้นถดถอยที่แท้จริงด้วย

$$\mu_{y/x} = \alpha + \beta X \qquad (11.5)$$

ในเมื่อ $\mu_{y/x}$ คือ ค่าที่แท้จริง (ค่าประชากร) หรือค่าเฉลี่ยของ Y เมื่อกำหนดค่า X, α คือจุดที่เส้น

ถดถอยประชากรตัดแกน Y และ β คือ ความลาดชันของเส้นถดถอยของประชากร และเราจะใช้ a เป็นค่าประมาณของ α และ b เป็นค่าประมาณของ β เราจึงสรุปได้ว่า เส้น $Y = a + bX$ เป็นเส้นที่ใช้ประมาณเส้น

$$\mu_{Y/x} = \alpha + \beta X$$

จึงเห็นได้ว่าที่แท้จริงแล้ว เส้นถดถอยก็คือค่าเฉลี่ยภายใต้เงื่อนไขนั่นเอง และค่า Y ที่เราคำนวณได้จากสมการถดถอยตัวอย่าง ก็คือ ค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างของ Y สำหรับค่า X ที่กำหนดให้ นั่นคือ $\mu_{Y/x}$ คือ **ค่าคาดหมาย** (expected Value) หรือค่าเฉลี่ยของประชากรของ Y เมื่อกำหนดค่า X

ข้อสังเกต

1. ตัวประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุดคือ a และ b ของสมการถดถอยของประชากร (11.5) เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉ และมีประสิทธิภาพสูงกว่าตัวประมาณค่าซึ่งหามาโดยวิธีอื่น นอกเหนือจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

2. ในการหาตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดต้องใช้แคลคูลัสช่วยให้

$Q = \Sigma^{n}_{i=1} (Yi - (\alpha + \beta Xi))^2$

Q จะมีค่าน้อยที่สุดได้โดยมีค่า α และ β ที่เหมาะสม ค่า α และ β ที่จะทำให้ Q มีค่าน้อยที่สุดจะหาได้โดยวิธี partial derivatives Q with respect to α และ β ดังนี้

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \Sigma^{n}_{i=1} \frac{\partial}{\partial \alpha} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = -2\Sigma (Y_i - \alpha - \beta X_i)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \alpha - \beta X_i)$$

เมื่อเทียบสมการทั้งคู่กับศูนย์ และใช้ค่า a และ b แทนค่า α และ β ตามลำดับ จะได้

$-2\Sigma(Y_i - \alpha - \beta X_i) = 0$

$-2\Sigma X_i(y_i - \alpha - \beta X_i) = 0$

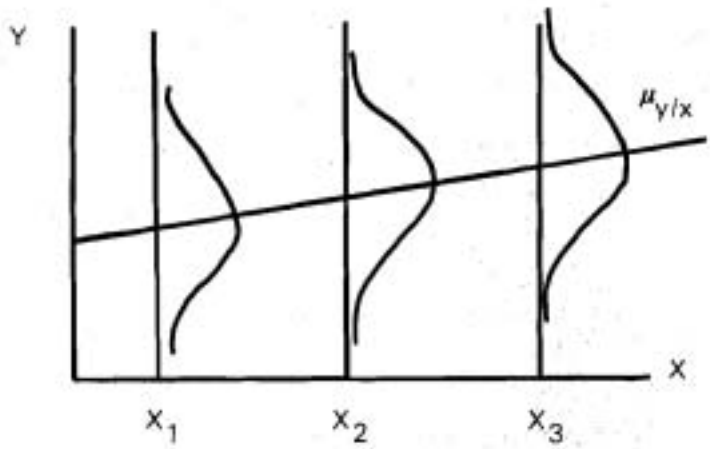
และในที่สุดจะกลายเป็นสมการปกติ (11.1) และ (11.2)

การอนุมานเกี่ยวกับสัมประสิทธิความถดถอย β

ก่อนที่เราจะหาช่วงเชื่อมั่น และทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β ควรทราบวิธีการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y เมื่อกำหนดค่า X

เราทราบว่าแต่ละค่าของ X จะมีค่า Y ที่สังเกตได้ซึ่งมีค่าต่าง ๆ ในลักษณะเชิงสุ่ม กล่าวคือ Y เหล่านั้นจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยมี $\mu_{Y/x}$ เป็นค่าเฉลี่ย และ $\sigma_{Y/x}$ เป็นค่าเบี่ยงเบน

มาตรฐาน และยังสมมุติต่อไปอีกว่า มีการแจกแจงแบบปกติ รูปที่ 11.7 จะแสดงการแจกแจงของ Y เมื่อกำหนดค่า X_1, X_2 และ X_3 รวม 3 ประชากร มีข้อสังเกตคือ $\mu_{y/x}$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของแต่ละประชากรคือจุดบนเส้นถดถอยประชากร



รูปที่ 11.7 แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนดค่า X ให้ 3 ค่า

เราประมาณค่า $\mu_{y/x}$ ด้วย $\hat{Y}$ หรือค่า Y ที่คำนวณได้ , $\hat{Y}$ คือจุดบนเส้นถดถอยตัวอย่าง และเราประมาณค่า $\sigma_{y/x}$ ด้วย $S_{y/x}$ โดยที่ $S_{y/x}$ คือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y เมื่อกำหนด X และหาได้ดังนี้

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} \qquad (11.6)$$

ค่า n - 2 คือ degree of freedom และเหตุที่ต้องนำ 2 มาหักออกเพราะเราต้องประมาณพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ α และ β

เราไม่ใคร่นิยมใช้สมการ (11.6) เพราะต้องหาค่า $\hat{Y}$ นั่นคือต้องสร้างสมการถดถอยแล้วหาผลต่างของค่า Y ที่สังเกตจากตัวอย่าง กับ Y ที่คำนวณได้ ซึ่งจะต้องหาทั้งหมด n ค่า แล้วหาผลบวกกำลังสองของค่าเบี่ยงเบน n ค่านี้อีกที สรุปแล้ว จะต้องคำนวณค่าต่าง ๆ ดังนี้

1. a = ____, b = _____
2. นำค่า a และ b ที่หาได้ สร้างสมการถดถอยตัวอย่าง

   $Y = a + bX$
3. นำค่า X_i ทั้งหลายแทนค่าในสมการจะได้ $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \ldots, \hat{Y}_n$
4. หา $(Y_i - \hat{Y}_i)$ รวม n จำนวน

5. หา $\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2$

X	Y	$\hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})$	$(Y - \hat{Y})^2$
X_1	Y_1	$\hat{Y}_1$	$Y_1 - \hat{Y}_1$	$(Y_1 - \hat{Y}_1)^2$
X_2	Y_2	$\hat{Y}_2$	$Y_2 - \hat{Y}_2$	$(Y_2 - \hat{Y}_2)^2$
X_n	Y_n	$\hat{Y}_n$	$Y_n - \hat{Y}_n$	$(Y_n - \hat{Y}_n)^2$
			$\Sigma = 0$	$\Sigma(Y - \hat{Y})^2$

$$S_{Y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}}$$

เรานิยมใช้สมการ (11.7) เพราะยุ่งยากน้อยกว่า

$$S_{Y/x} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a\Sigma Y - b\Sigma XY}{n - 2}} \qquad (11.7)$$

แทนค่าจากตาราง ที่ 11.2 จะได้ $= \sqrt{\frac{921 - 4.55(131) - 0.27(1012)}{20 - 2}}$

$$= \sqrt{\frac{51.72}{18}} \qquad = 1.695$$

การทดสอบสมมติฐานและการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับ α และ β

ในบทที่ 9 และ 10 เราได้ประมาณค่าและทดสอบสมมติฐานค่าพารามิเตอร์ของประชากร โดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่างซึ่งเป็นการวิเคราะห์เมื่อมีตัวแปรเชิงสุ่มเพียงชนิดเดียว (univariate analysis) ในการประมาณค่าและทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ สัมประสิทธิ์ความถดถอย β ก็เช่นกัน เราจะใช้สัมประสิทธิ์ความถดถอย b จากตัวอย่างเป็นตัวประมาณค่า แต่ b เป็นค่าสถิติ จึงมีค่าที่เปลี่ยนแปลงตามตัวอย่างที่สุ่มมา เช่น b อาจมีค่าต่างจาก 0 แม้ว่า β จะมีค่าแท้จริง = 0 ถ้า $\beta = 0$ จะแสดงว่าตัวแปรคู่นั้นไม่มีความสัมพันธ์กัน การที่ b มีค่าไม่แน่นอน เราจึงจำเป็นต้อง

ทราบลักษณะการแจกแจงของ b ในตัวอย่าง ซึ่งจะพบว่า b มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย- β และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน σ_b ปกติเรามักไม่ทราบค่าแท้จริงของ σ_b จึงต้องประมาณจากตัวอย่างโดย

$$S_b = \frac{S_{y/x}}{\sqrt{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}} \quad \text{หรือ} \quad \frac{Sy/x}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}} \qquad (11.8)$$

และเนื่องจากเราใช้ S_b แทน σ_b และมักเป็นตัวอย่างขนาดเล็ก เราจึงต้องใช้การแจกแจงแบบ- t แทนการแจกแจงแบบปกติ

สำหรับสัมประสิทธิ์ความถดถอย α ซึ่งเราใช้ a เป็นค่าประมาณแบบจุด a จะมีค่าเปลี่ยนแปลงเมื่อเปลี่ยนตัวอย่างชุดใหม่ จึงควรทราบการแจกแจงของ a ด้วย ซึ่งความจริงมีว่า การแจกแจงของ a ในตัวอย่างสุ่มจะเป็นแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย α และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน σ_a และปกติเรามักไม่ทราบค่าแท้จริงของ σ_a จึงต้องประมาณจากตัวอย่างโดย

$$S_a = S_b\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} \qquad (11.9)$$

ดังนั้นจากตาราง 11.2 จะได้

$$S_b = \frac{1.695}{\sqrt{1261 - (147)^2/20}} = 0.126$$

$$S_a = 0.126\sqrt{\frac{1261}{20}} = 1.00$$

ดังนั้น ช่วงเชื่อมั่นของ α คือ $a \pm t(S_a)$
และ ช่วงเชื่อมั่นของ β คือ $b \pm t(S_b)$
เปิดค่า t จากตารางที่ $\nu = (n - 2)$ และ $\alpha/2$
ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ α คือ

$$a \pm t_{18,.025}(S_a) = 4.55 \pm (2.101)(1.0) = 2.449,\ 6.651$$

และ 95% ช่วงเชื่อมั่นของ β คือ

$$b \pm t_{18,.025}(S_b) = 0.27 \pm (2.101)(.126) = 0.0053,\ 0.5347$$

ถ้า $n > 30$ ให้ใช้ค่า Z แทนค่า t

ส่วนวิธีการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับ α และ β ก็ใช้วิธีการในบทที่ 10 นั่นคือ ใช้การทดสอบแบบ t เมื่อ $n \leq 30$ ค่าสถิติที่คำนวณได้จะมีการแจกแจงแบบ t ด้วย $df = n - 2$ และเมื่อ $n > 30$ ใช้ค่า Z แทน t นั่นคือตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ α คือ

$$T = \frac{a - \alpha}{S_a} \qquad (11.10)$$

และตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ β คือ

$$T = \frac{b - \beta}{S_b} \qquad (11.11)$$

การทดสอบความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง X และ Y

จุดประสงค์เบื้องต้นของการศึกษาความถดถอยคือ การพยากรณ์ค่า Y โดยกำหนดค่า X แต่เราควรสำรวจให้แน่ใจก่อนว่า ตัวแปรคู่นั้นมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ถ้าตัวแปรคู่นั้นมีความสัมพันธ์ที่แท้จริงเป็นแบบเชิงเส้น β จะมีค่าที่ต่างจากศูนย์ ดังนั้น ในการทดสอบ เราจึงตั้งสมมติฐานว่างเปล่าว่า X และ Y ไม่มี ความสัมพันธ์เชิงเส้น นั่นคือ $H_o : \beta = 0$ ส่วนสมมติฐานรอง Ha เราจะแย้งได้หลายอย่าง ดังนี้

$H_a : \beta \neq 0$ หมายความว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้น

หรือ

$H_a : \beta > 0$ หมายความว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นและความสัมพันธ์นั้นมีทิศทางเดียวกัน หรือเป็นแบบเชิงบวก

หรือ $H_a : \beta < 0$ หมายความว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้น และความสัมพันธ์นั้นมีทิศทางตรงข้ามกัน หรือเป็นแบบนิเสธ

ตัวอย่าง จากข้อมูลในตาราง 11.2 จงทดสอบว่า คะแนนการทำงาน และ GPA เมื่อจบการศึกษามีความสัมพันธ์เชิงเส้นหรือไม่? $\alpha = .05$

1. $H_o : \beta = 0$ (คะแนนการทำงาน และ GPA ไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้น)
2. $H_a : \beta \neq 0$ (คะแนนการทำงาน และ GPA มีความสัมพันธ์เชิงเส้น)
3. $\alpha = .05$
4. จะปฏิเสธ H_o เมื่อ $T > t_{18,.025} = 2.101$ หรือ $T < -2.101$
5. $T = \frac{b - \beta}{S_b} = \frac{0.27 - 0}{0.126} = 2.143$

6. $T = 2.143 > 2.101$ จึงปฏิเสธ Ho และยอมรับ He จึงสรุปว่า มีหลักฐานพอเพียงที่ชี้แนะว่า GPA เมื่อจบการศึกษา และคะแนนผลงานมีความสัมพันธ์เชิงเส้น

หมายเหตุ ถ้าตรวจดู 95% ช่วงเชื่อมั่นของ β คือ

$$0.0053 < \beta < 0.5347$$

จะเห็นว่า $\beta = 0$ ไม่อยู่ในช่วงเชื่อมั่น โดยเราใช้ค่า $\alpha = .05$ เท่ากัน แสดงว่าต้องปฏิเสธ Ho

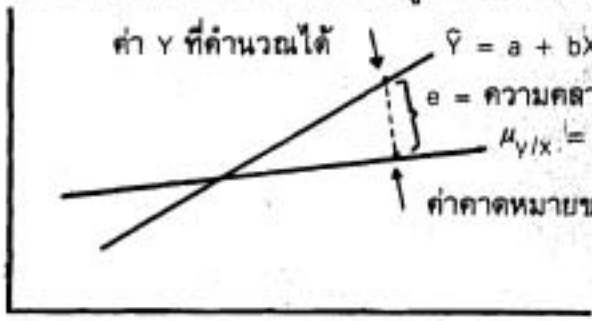
การประมาณค่า $\mu_{Y/x}$

การประมาณค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข $\mu_{Y/x}$ เป็นเทคนิคสำคัญที่นิยมใช้ในธุรกิจและการจัดการ เช่น ถ้ารายได้จากการขายสินค้า Y มีความสัมพันธ์กับค่าใช้จ่ายโฆษณา X ดังนั้น เราจะสามารถประมาณจำนวนขายโดยเฉลี่ยสำหรับงบค่าโฆษณาที่กำหนดให้ หรือถ้าผลงานของพนักงาน Y มีความสัมพันธ์กับคะแนนความถนัด X เราก็จะสามารถประมาณคะแนนผลงานโดยเฉลี่ยจากคะแนนความถนัดที่กำหนดให้ หรือถ้าทราบว่า GPA ระดับมัธยมปลาย X และ GPA ระดับมหาวิทยาลัย Y เราก็จะสามารถประมาณ GPA โดยเฉลี่ยของระดับมหาวิทยาลัยจากคะแนน GPA ระดับมัธยมปลายที่กำหนดให้ ดังนั้น เราจึงควรทราบวิธีการสร้างช่วงเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยที่ประมาณได้ ณ ค่า X ที่กำหนดให้

ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉของ $\mu_{Y/x}$ คือ $\hat{Y}$ และการแจกแจงตัวอย่างของ $\hat{Y}$ จะเป็นแบบโค้งปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\mu_{Y/x}$ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_{\hat{Y}}$ แต่เรามักไม่ทราบค่าแท้จริงของ $\sigma_{\hat{Y}}$ จึงใช้ $S_{\hat{Y}}$ ประมาณ

$$S_{\hat{Y}} = S_{Y/x}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_o - \bar{X})^2}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}} \qquad (11.12)$$

โปรดสังเกตว่า $S_{\hat{Y}}$ คือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของเส้นถดถอยตัวอย่างที่เบี่ยงเบนไปจากค่าจริง คือ เส้นถดถอยประชากร ส่วน $S_{Y/x}$ คือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าสังเกต Y ที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นถดถอยตัวอย่าง $\hat{Y}$ ดังแสดงในรูปที่ 11.7 ความแตกต่างของ $\hat{Y}$ กับ $\mu_{Y/x}$ คือ sampling error



รูปที่ 11.7 แสดงค่า Y ที่คำนวณได้จากสมการถดถอยตัวอย่าง และค่าคาดหมายของ Y

ดังนั้น $(1-\alpha)$ 100% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/x}$ คือ

$$\hat{Y} \pm t_{\alpha/2,\,\nu} S_{\hat{y}} \qquad (11.13)$$

$\nu = n - 2$

ถ้า $n > 30$ เปิดตาราง Z แทนตาราง t

ตัวอย่าง จากข้อมูลในตารางที่ 11.2 จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของค่าคาดหมายของ $\hat{Y}$ หรือ $\mu_{y/x}$ เมื่อ

(1) $X = 4$

(2) $X = 7.35$

(3) $X = 10$

$S_{y/x} = 1.695,\ t_{18,.025} = 2.101,\ \bar{X} = \frac{147}{20} = 7.35$

X	$\hat{Y} = 4.55 + 0.27X$	$t_{(18,.025)}$	$S_{y/x}$	$\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}}$
4	5.63	2.101	1.695	$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{(4 - 7.35)^2}{180.55}} = .3349$
7.35	6.5345	2.101	1.695	$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{(7.35 - 7.35)^2}{180.55}} = .2236$
10	7.25	2.101	1.695	$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{(10 - 7.35)^2}{180.55}} = .2982$

ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/x}$ มีดังนี้

1) เมื่อ $X = 4$, $5.63 \pm (2.101)(1.695)(.3349) = 4.437,\ 6.823$

หรือ $4.437 < \mu_{y/x\,=\,4} < 6.823$

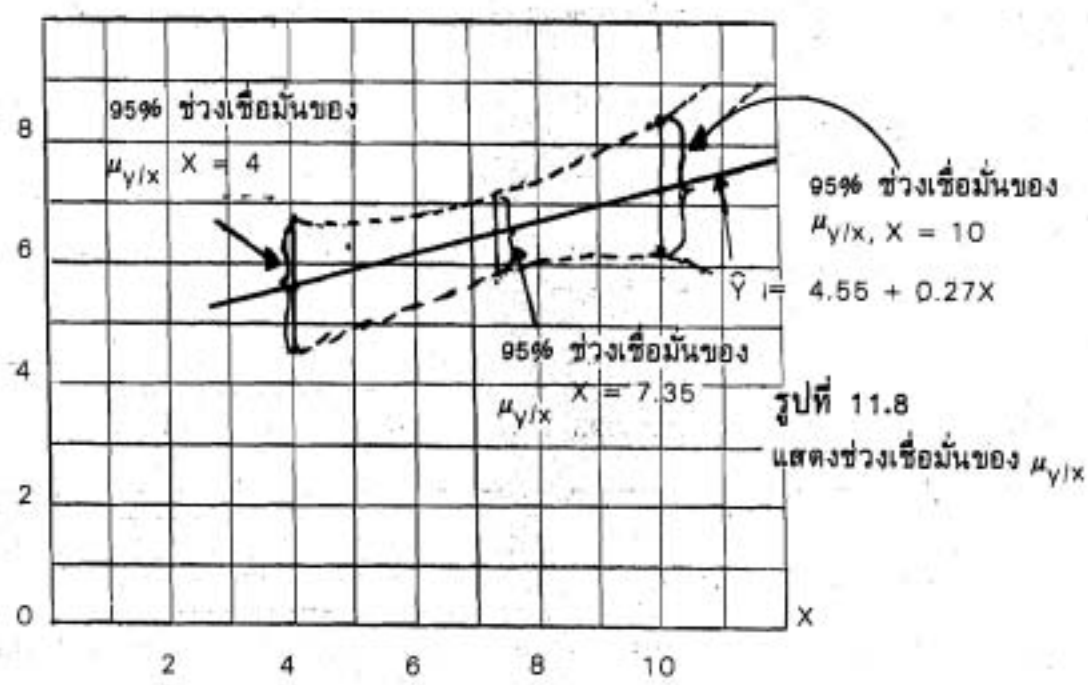
2) เมื่อ $X = 7.35$, $6.5345 \pm (2.01)(1.695)(.2236) = 5.738,\ 7.331$

หรือ $5.738 < \mu_{y/x\,=\,7.35} < 6.823$

3) เมื่อ $X = 10$, $7.25 \pm (2.101)(1.695)(.2982) = 6.188,\ 8.312$

หรือ $6.188 < \mu_{y/x\,=\,10} < 8.312$

ถ้าสังเกตให้ดีจะเห็นว่า ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/x}$ จะกว้างออกเมื่อ x ห่างจาก $\bar{x}$ ซึ่งชี้ให้เห็นว่าค่าเฉลี่ยที่ประมาณได้มีความเชื่อถือได้น้อยลง จากตัวอย่างระหว่างค่า x ต่าง ๆ 3 ค่า $S_{\hat{y}}$ จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \bar{x}$ และจะมีค่าสูงขึ้นเรื่อยเมื่อ x ออกห่าง $\bar{x}$ ดังรูป 11.8



รูปที่ 11.8
แสดงช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/x}$

การประมาณค่าที่แท้จริงของ Y

(Estimation of the actual Y value) หรือ Individual Y Value)

$\mu_{y/x}$ คือ ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข หรือค่าคาดหมายของ Y เมื่อกำหนดค่า x แต่มีบ่อยครั้งที่เราต้องการพยากรณ์บางค่าของ Y เช่น ชาวนาผู้หนึ่งต้องการประมาณผลผลิตข้าว Y ในปีหนึ่งเมื่อใส่ปุ๋ย x จำนวนหนึ่ง, ประธานบริษัทอยากทราบจำนวนขาย Y ในไตรมาสต่อไปจากงบค่าโฆษณา-x ที่กำหนดให้ ให้ Y_a หรือ Y_{actual} คือ ค่าพารามิเตอร์ Y ที่ต้องการประมาณเมื่อกำหนดค่า x ดังนั้น ค่าประมาณแบบจุดของ Y_a ก็คือ $\hat{Y}$ นั่นเอง แต่ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการประมาณค่า Y_a จะสูงกว่า $\mu_{y/x}$ โดยที่

$$\sigma_{Y_a} = \sigma_{y/x}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}}$$

และถ้าไม่ทราบค่า $\sigma_{y/x}$ ต้องประมาณด้วย $S_{y/x}$ จะได้

$$S_{y_a} = S_{y/x}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_o - \bar{X})^2}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}} \qquad (11.14)$$

ดังนั้น $(1 - \alpha)$ 100% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a คือ

$$\hat{Y} \pm t_{\alpha/2,\ (n\ -\ 2)} S_{y_a} \qquad (11.15)$$

ตัวอย่าง

จากตาราง 11.2 - 11.3 ถ้าพนักงานผู้หนึ่งมี GPA เมื่อจบการศึกษาเป็น 10 จงหา 95%ช่วงเชื่อมั่นของคะแนนผลงานที่แท้จริงของพนักงานผู้นั้นในการทดสอบครั้งต่อไป

เมื่อ $X = 10$, $\hat{Y} = 4.55 + 0.27(10) = 7.25$, $t_{18,.025} = 2.101$

$$S_{y_a} = 1.695\sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(10 - 7.25)^2}{180.55}} = 1.7687$$

ดังนั้น 95% ช่วงเชื่อมั่นของ Ya คือ

$$7.25 \pm 2.101(1.7687) = 3.534,\ 10.966$$

หรือ

$$3.534 < Y_a < 10.966$$

พึงสังเกตว่าช่วงเชื่อมั่นของ Y_a จะกว้างกว่า $\mu_{y/x}$ เมื่อกำหนดค่า X เท่ากันคือ $X = 10$

ข้อสมมุติที่สำคัญในการศึกษาความถดถอย

ในการวิเคราะห์ความถดถอย จะต้องมีข้อสมมุติ (assumptions) 5 ประการ ดังนี้

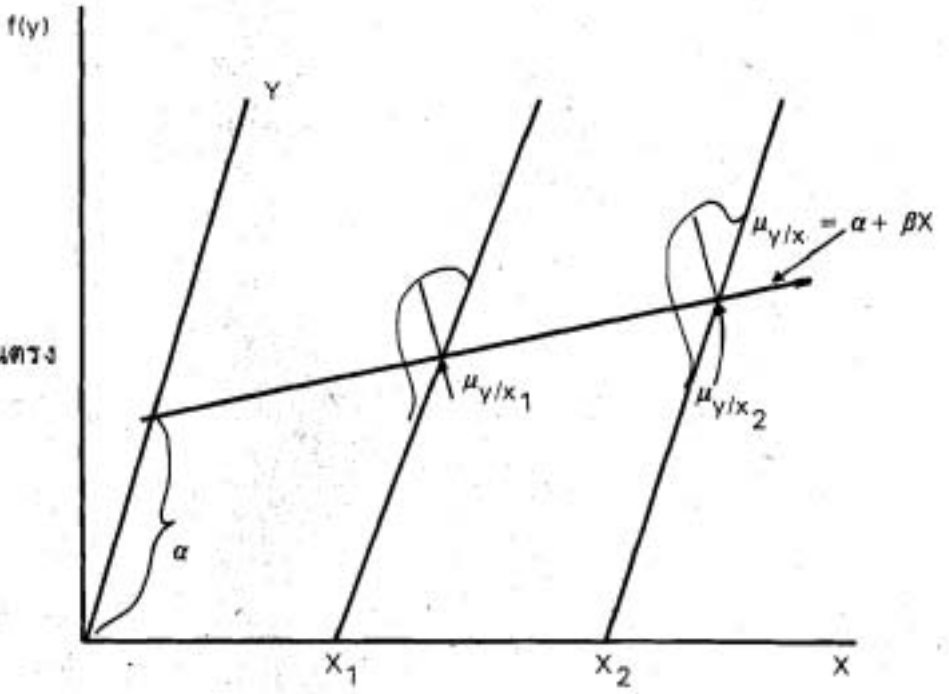
1. ความสัมพันธ์เชิงเส้น (linearity)

คือ สมมุติว่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากร คือ $\mu_{y/x}$ กับค่าต่าง ๆ ของ X นั่นคือ ค่าเฉลี่ยของประชากร Y ทั้งหลายจะอยู่บนเส้นตรง นั่นคือ

$$\mu_{y/x} = \alpha + \beta X$$

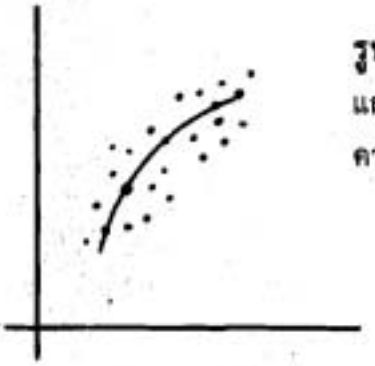
ในเมื่อ α และ β คือค่าพารามิเตอร์ และมี a และ b เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพ และไม่เอียงเฉ

รูปที่ 11.9 และ 11.10 จะแสดงคุณสมบัติของข้อสมมุตินี้ เมื่อมีประชากรของ Y จำนวน 2 ประชากร ส่วนรูปที่ 11.10 เป็น scatter diagram 2 อัน อันซ้ายมือแสดงว่า ข้อสมมุติว่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นน่าจะเป็นจริง ส่วนรูปซ้ายมือแสดงความสัมพันธ์แบบเส้นโค้ง



รูปที่ 11.9
แสดงข้อสมมุติ
ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง

แสดงความสัมพันธ์
เชิงเส้นตรง



แสดงความสัมพันธ์
แบบเส้นโค้ง

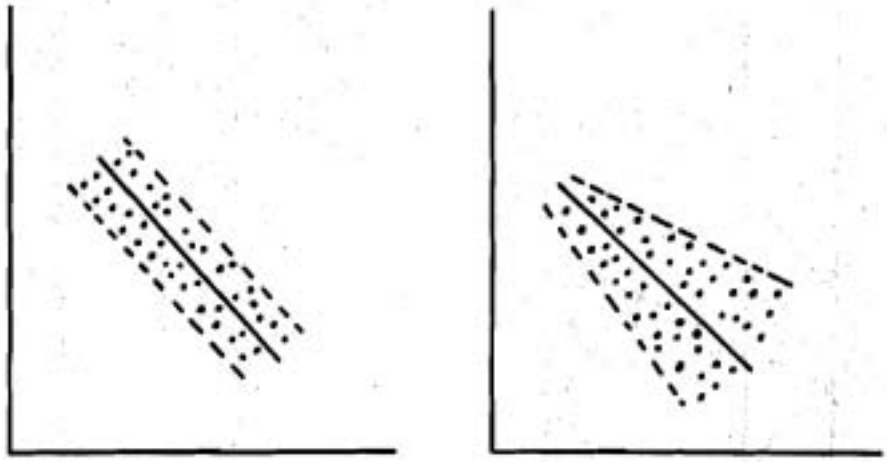
รูปที่ 11.10
แสดงข้อสมมุติ
ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง

2. ความแปรปรวนเป็นเอกภาพ (equal variance)

แต่ละค่าของ X จะมีประชากร Y ซึ่งเรียกว่า subpopulation Y/X นั่นคือจะมีค่า Y หลายค่า แต่ประชากรย่อยเหล่านี้จะมีความแปรปรวนเท่ากัน นั่นคือ $\sigma^2_{y/x_1} = \sigma^2_{y/x_2} = \ldots = \sigma^2_{y/x_n} = \sigma^2_{y/x}$

บางครั้งจะเรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า homocedasticity ในรูปที่ 11.11 แสดง scatter diagram 2 อัน รูปซ้ายมือแสดงว่าข้อสมมุติของความเป็นเอกภาพน่าจะเป็นจริง ส่วนรูปขวามือเห็นชัดว่าเมื่อ X มีค่าสูงขึ้น ความแปรปรวนของ Y จะมากขึ้นด้วย

รูปที่ 11.11 แสดงข้อสมมุติความแปรปรวนเป็นเอกภาพ



ความแปรปรวนเป็นเอกภาพ

ความแปรปรวนไม่เท่ากันทั้งหมด

3. ความเป็นอิสระกัน (independence)

หมายถึงค่าของ Y ในแต่ละค่าของ X จะเป็นอิสระกัน น่าเสียดายที่ไม่สามารถแสดงข้อสมมุตินี้ด้วย scatter diagram

4. กำหนดค่า X ได้

สามารถกำหนดค่าต่าง ๆ ของตัวแปรอิสระ คือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ได้ล่วงหน้าดังนั้น X จึงเป็น fixed variable และ Y เป็น random variable

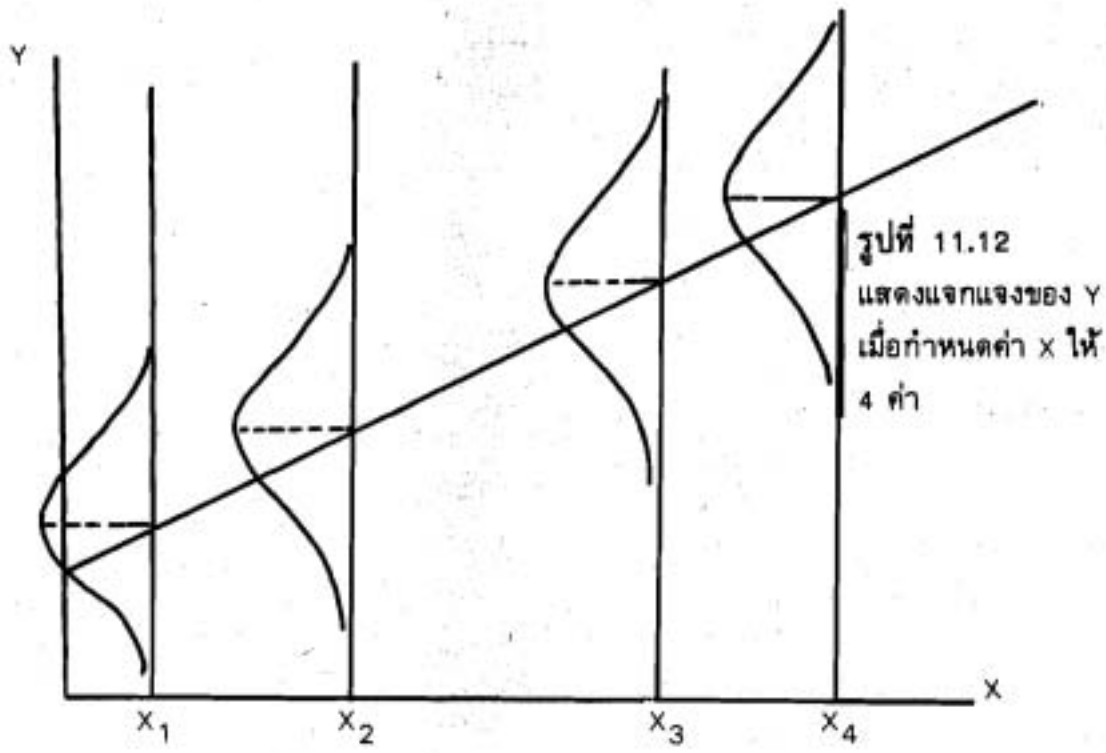
5. การแจกแจงแบบปกติ (normality)

ข้อสมมุตินี้ กำหนดให้รูปร่างของการแจกแจงของ Y ในแต่ละค่าของ X เป็นแบบโค้งปกติ

เมื่อนำคุณสมบัติทั้ง 5 ประการ รวมกันจะได้ตัวแบบดังนี้

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ในเมื่อ ϵ_i คือ ความคลาดเคลื่อน (error term) และ ϵ_i จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคือ $\sigma^2_{y/x}$ และแสดงได้โดยรูป 11.12



รูปที่ 11.12 แสดงแจกแจงของ Y เมื่อกำหนดค่า X ให้ 4 ค่า

แบบฝึกหัด

11.6 จงใช้ข้อมูลที่กำหนดให้

ก) พล็อตใน scatter diagram

ข) สร้างสมการประมาณค่าที่ใช้แทนข้อมูลได้ดีที่สุด

ค) พยากรณ์ค่า Y เมื่อ X = 4, 9 และ 12

X	7	10	8	5	11	3	7	11	12	6
Y	2.0	3.0	2.4	1.8	3.2	1.5	2.1	3.8	4.0	2.2

11.7 จงใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ข้างล่าง

ก) สร้าง scatter diagram

ข) สร้างสมการถดถอย

ค) พยากรณ์ค่า Y เมื่อ X = 12, 14 และ 18

X	20	11	15	10	17	19
Y	5	15	14	17	8	9

11.8

X	56	48	42	58	40	39	50
Y	9.5	7.5	7.0	9.5	6.2	6.6	8.7

ก) หาเส้นตรงที่ปรับเข้ากับข้อมูลได้ดีที่สุด

ข) หาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณ (standard error of estimate หรือ $S_{y/x}$)

ค) หา 95% ช่วงเชื่อมั่นของค่าพยากรณ์ เมื่อ X = 44

11.9 อุดมเป็นผู้จัดการร้านขายเครื่องไฟฟ้า เขาต้องการทราบว่า เงินที่เขาใช้โฆษณาโดยการซื้อเวลาจากโทรทัศน์และวิทยุมีความสัมพันธ์กับจำนวนขายอย่างไร เขาได้เก็บข้อมูลคือ เวลาโฆษณาเป็นนาที (X) และจำนวนสินค้าหลักที่ขายได้ต่อสัปดาห์ (Y) ของ 7 สัปดาห์ก่อน ดังนี้

X (นาที)	25	18	32	21	35	28	30
Y	16	11	20	15	26	32	20

ก) จงสร้างสมการถดถอย

ข) จงหา standard error of estimate

ค) หาช่วงเชื่อมั่นของค่าพยากรณ์ของ Y เมื่อ X = 27, α = .10

11.10 ที่ปรึกษาฝ่ายผลิตของโรงงานหนึ่งให้คำแนะนำว่า โรงงานควรพิจารณาแจกงานซึ่งต้องใช้แรงงานสูงให้เหมาะสมกับอายุของพนักงาน เขาได้สุ่มพนักงานมา 10 คน และได้บันทึกระยะเวลาที่สามารถแบกหามของหนัก ดังนี้

อายุ	42	27	36	25	22	39	57	19	33	30
นาทีของงานหนัก	2	7	5	9	10	4	4	8	6	5

ก) จงพล็อตข้อมูล

ข) สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของอายุ และความสามารถของร่างกาย

ค) เราจะคาดว่า พนักงานที่มีอายุ 30 ปี คนหนึ่งจะสามารถแบกหามของหนักได้นานเท่าใด

11.11 จงแสดงว่า เส้น $Y = a + bX$ และ $Y = \bar{Y} + b(X - \bar{X})$ คือเส้นเดียวกัน

11.12 บริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่งต้องการทราบความสัมพันธ์ของประสพการณ์กับจำนวนขาย จึงสุ่มพนักงานมา 9 คน ให้ X คือจำนวนปีที่ทำงานและ Y คือจำนวนขายต่อปีมีหน่วยเป็น 100,000 บาท ได้ข้อมูลดังนี้

Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	2	1	3	3	4	5	6	5	7

ก. จงประมาณจำนวนขายต่อปีของพนักงานผู้หนึ่งซึ่งทำงานมา 10 ปี

ข. มีหลักฐานพอเพียงที่แสดงว่า β ไม่เป็น 0 ที่ $\alpha = .05$ ไหม?

ค. จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{Y/X}$ เมื่อ $X = 4.5$ และ $X = 10$

ง. จงสร้าง 95% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a เมื่อ $X = 10$

11.13 ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนผลงานของวิศวกร 10 คน และระยะเวลาที่ใช้วิชาชีพ ได้ข้อมูลดังนี้

Y = คะแนนผลงาน	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9
X = อายุการใช้วิชาชีพ	1	3	2	5	5	4	7	6	9	8

ก. จงหาเส้นกำลังสองน้อยที่สุดเพื่อ "fit" ข้อมูล

ข. จงประมาณคะแนนผลงานสำหรับผู้ใช้วิชาชีพ 10 ปี

ค. ทดสอบความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างคะแนนผลงาน และอายุการใช้วิชาชีพโดยใช้ $\alpha = 0.01$

ง. จงหา 99% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/x}$ เมื่อ X = 5 และ X = 1

จ. จงหา 99% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a เมื่อ X = 10

11.14 สถิติค่าใช้จ่ายซ่อมแซมเครื่องจักรชนิดเดียวกันแต่มีอายุการใช้งานต่างกันจำนวน 6 เครื่อง โดยให้ X คืออายุการใช้งาน และ Y คือค่าบำรุงรักษามีหน่วยเป็น 1,000 บาท มีดังนี้

เครื่องจักร	X	Y
1	2	70
2	1	40
3	3	100
4	2	80
5	1	30
6	3	100

ก. จงหาสมการถดถอย Y บน X

ข. จะต้องใช้ค่าบำรุงรักษาเท่าใดสำหรับเครื่องจักรที่มีอายุ 4 ปี

ค. จงทดสอบความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างอายุการใช้งาน และค่าบำรุงรักษา, $\alpha = .01$

ง. จงหาช่วงเชื่อมั่น 99% ของ $\mu_{y/x}$ เมื่อ X = 2

จ. จงหาช่วงเชื่อมั่น 99% ของ Y_a เมื่อ X = 2

11.15 สถิติการลาป่วยต่อปีของพนักงาน 5 คน มีดังนี้

จำนวนปีทำงาน (X)	จำนวนวันลาป่วยต่อปี (Y)
15	10
9	16
13	14
11	15
12	15

ก. จงสร้างเส้นถดถอย

ข. จงหาจำนวนวันลาป่วยต่อปีของพนักงานที่ทำงานมา 14 ปี

ค. มีเหตุผลเพียงพอที่จะรับว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นไหม? $\alpha = .05$

ง. จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{Y/x}$ เมื่อ X = 12 และ X = 15

จ. จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a เมื่อ X = 15

11.16 ให้ X คือคะแนนทดสอบความถนัด Y คือจำนวนผลผลิตต่อชั่วโมงข้อมูลสรุปจากพนักงาน 10 คน มีดังนี้

$n = 10 \quad \Sigma X = 550 \quad \Sigma Y = 680$

$\Sigma XY = 45{,}900 \quad \Sigma X^2 = 38{,}500 \quad \Sigma Y^2 = 56{,}000$

ก) จงหาสมการถดถอย Y บน X

ข) มีหลักฐานพอเพียงที่จะสรุปว่า สัมประสิทธิ์ความถดถอย β มีค่าแตกต่างจาก 0 ด้วย $\alpha = 0.02$ ไหม?

ค) จงหา 98% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{Y/x}$ เมื่อ (1) X = 40, (1) X = 55, (3) X = 70

ง) จงหา 98% ช่วงเชื่อมั่นของ Y_a เมื่อ (1) X = 40, (2) X = 55, (3) X = 70

จ) จงอธิบายความแตกต่างของคำตอบในข้อ (ค) และ (ง)

ข้อควรระวังในการสรุปผลการทดสอบ

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ α และ β โดยสมมุติว่า เรามีข้อสมมุติของความถดถอยที่สมบูรณ์ ได้แก่ ข้อสมมุติเกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติ, ความเป็นอิสระ, ความแปรปรวนเป็นเอกภาพ เป็นต้น ควรเข้าใจความหมายของข้อสรุป ดังนี้

การทดสอบว่าเส้นถดถอยไม่มีความชัน

การทดสอบที่สำคัญที่สุดในการศึกษาความถดถอยคือ การทดสอบว่า ความลาดชันของเส้นถดถอยประชากรมีค่าต่างจาก 0 หรือไม่ ซึ่งเทียบเท่ากับการทดสอบว่า X ช่วยพยากรณ์ Y ได้ดีโดยการใช้ตัวแบบเชิงเส้นหรือไม่ นั่นคือการทดสอบ Ho : $\beta = 0$ ในการสรุปผลการทดสอบ นอกจากจะมีโอกาสเกิดความผิดประเภทที่ 1 (คือการปฏิเสธ Ho ซึ่งเป็นจริง) และความผิดประเภทที่ 2 (คือการยอมรับ Ho ซึ่งเป็นเท็จ) เราจะอธิบายความหมายเมื่อเรายอมรับหรือปฏิเสธ Ho ได้ดังนี้

1. **เมื่อยอมรับ** Ho : $\beta = 0$ (หรือไม่ปฏิเสธ Ho) อาจมีความหมายได้ 2 อย่าง ดังนี้

(ก) X และ Y อาจมีความสัมพันธ์ที่แท้จริงเป็นแบบเชิงเส้นตรง คือตัวแบบ $\mu_{Y/X} = \alpha + \beta X$ ใช้ได้ แต่X ช่วยพยากรณ์ Y ได้น้อยมาก หรืออาจไม่ช่วยเลย นั่นคือ จะใช้ $\bar{Y}$ หรือ $\bar{Y} + \hat{\beta}\ (X - \bar{X})$ พยากรณ์ค่า Y จะได้ผลเท่ากัน ดังรูป 11.13 (ก) หรือ

(ข) ความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y ไม่ใช่เส้นตรง นั่นคือตัวแบบที่แท้จริงอาจเป็นรูปสมการกำลังสอง หรือกำลังสาม หรือสมการที่ซับซ้อนกว่าสมการเส้นตรง ดังรูปที่ 11.13 (ข)

ดังนั้น เมื่อเอาข้อ (ก) และ (ข) รวมกัน จึงสรุปได้ว่า เมื่อยอมรับ Ho : $\beta = 0$ (อย่าลืมว่าการยอมรับ Ho ใด ๆ หมายความเพียง" ยังมีหลักฐานไม่เพียงพอที่จะปฏิเสธ Ho) จะแสดงว่าฟังก์ชั่นเส้นตรงไม่ใช่ตัวแบบที่ดีที่สุด และไม่ช่วยมากนักในการพยากรณ์ Y

2. **เมื่อปฏิเสธ** Ho : $\beta = 0$ มีความหมายดังนี้

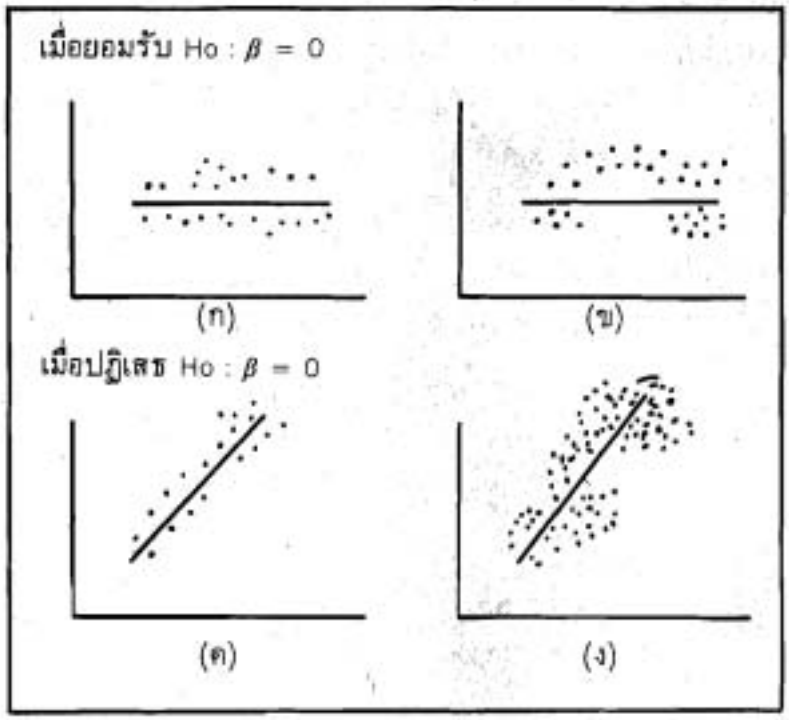
(ก) X ให้ข่าวสารที่มีนัยสำคัญสำหรับพยากรณ์ Y นั่นคือตัวแบบ $\bar{Y} + \hat{\beta}\ (X - \bar{X})$ ดีกว่า $\bar{Y}$ เฉย ๆ ในการพยากรณ์ค่า Y ดังรูปที่ 11.13 (ค)

หรือ

(ข) อาจจะมีตัวแบบที่ดีกว่า เช่น สมการเส้นโค้ง ดังรูปที่ 11.13 (ง) นั่นคือต้องมีค่า X กำลังหนึ่งอยู่ในตัวแบบด้วย

ดังนั้น เมื่อรวมข้อ (ก) และ (ข) ด้วยกัน จะกล่าวได้ว่า เมื่อเราปฏิเสธ Ho : $\beta = 0$ หมายความว่า สมการเส้นตรงปรับเข้ากับข้อมูลได้ดีกว่าสมการที่ไม่มี X อยู่เลย แต่ในขณะเดียวกันสมการเส้นตรงนั้น อาจเป็นเพียง "เส้นตรงโดยประมาณ" แต่ความสัมพันธ์ที่แท้จริงอาจเป็นแบบ "ไม่ใช่เส้นตรง หรือ Nonlinear" ก็ได้

สรุปได้ว่า ไม่ว่าเราจะยอมรับหรือปฏิเสธ Ho ก็ตาม อาจมีกรณีที่สมการเส้นตรงยังไม่เหมาะสม และยังมีเส้นโค้งอื่นที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y ได้ดีกว่า



รูปที่ 11.13
อธิบายการทดสอบ
Ho : $\beta = 0$

การทดสอบว่าจุดตัดที่แกน Y เป็นศูนย์

คือการทดสอบว่าเส้นถดถอยประชากรผ่านจุดกำเนิดหรือไม่ หรือ Ho : $\alpha = 0$ ถ้ายังปฏิเสธ Ho ไม่ได้ เราอาจเอาค่า α ออกจากตัวแบบได้ ถ้าเรามีหลักฐานเชื่อได้ว่า เส้นตรงผ่านจุดกำเนิด และควรมีการเก็บข้อมูลสำหรับค่า X ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดด้วย แต่ปกติเราไม่ค่อยสนใจทดสอบสมมติฐานนี้ และเราไม่ค่อยเก็บข้อมูลที่อยู่ใกล้จุดกำเนิด เช่น ความดันโลหิต (Y) และอายุ (X) เราย่อมไม่สนใจความดันโลหิต เมื่อ X = 0 และเราไม่ค่อยเก็บข้อมูลสำหรับ X ที่มีค่าใกล้ 0

การวิเคราะห์ความถดถอยด้วย
ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน

เราทราบวิธีสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรปกติหลาย ๆ ประชากรว่าต่างกันหรือไม่ โดยการแบ่งความผันแปรทั้งหมด หรือ SST ออกเป็นส่วน ๆ ตามที่มาของความผันแปร ในการศึกษาความถดถอยก็เช่นกัน SST จะมาจากความผันแปร 2 ส่วน คือ ความผันแปรที่อธิบายได้ว่าเนื่องจากตัวแปรอิสระ X หรือเนื่องจากความถดถอย และใช้ SSR และความผันแปรที่เหลือ หรือที่อธิบายไม่ได้ หรือความคลาดเคลื่อน เรียกว่า SSE

ดังนั้น SST = SSR + SSE

$$SST = \Sigma_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 \quad \text{มี } n - 1 \text{ df}$$

$$SSR = \Sigma_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad \text{มี } 1 \text{ df}$$

$$SSE = \Sigma_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad \text{มี } n - 2 \text{ df}$$

เมื่อกระจายสูตรนิยามเหล่านี้ จะได้สูตรที่ใช้เครื่องคำนวณ ดังนี้

$$SST = \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n \quad \text{หรือ } \Sigma Y^2 - n(\bar{Y})^2$$

$$SSR = \frac{[\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2} = \frac{[(\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/n)]^2}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n}$$

$$= \frac{[(n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y))]^2}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

หรือ

$$SSR = b\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$$

หรือ

$$SSR = b^2\Sigma(X - \bar{X})^2 = b^2[\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/n]$$

หรือ

$$SSR = SST - SSE$$

ส่วน

$$SSE = SST - SSR$$

ตารางที่ 11.4 แสดงตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของความถดถอย

ที่มาของความผันแปร	SS	df	MS
เนื่องจากความถดถอย (R)	$SSR = \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$
ความคลาดเคลื่อน (E)	$SSE = \Sigma(Y - \hat{Y})^2$	$n - 2$	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$
รวม	$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2$	$n - 1$	

จะใช้แบบฝึกหัด 11.14 เป็นตัวอย่าง ข้อมูลคือ ค่าบำรุงรักษา และอายุการใช้งานของเครื่องจักร 6 เครื่อง

เครื่องจักร	1	2	3	4	5	6
X = อายุ (ปี)	2	1	3	2	1	3
Y = ค่าซ่อมแซม (1,000 บาท)	70	40	100	80	30	100

$n = 6$ $\quad \Sigma X = 12,\ \Sigma X^2 = 28,\ \bar{X} = 2$

$\Sigma Y = 420,\ \Sigma Y^2 = 33800,\ \bar{Y} = 70$

$\Sigma XY = 970$

$SST = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/n = 33{,}800 - (420)^2/6$

$= 4{,}400$ และมี $df = 6 - 1 = 5$

$$SSR = \frac{[\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2}$$

$\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ = $\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/n$

= 970 − (12)(420)/6

= 130

$\Sigma(X - \bar{X})^2$ = $\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/6$

= 4

ดังนั้น SSR = $\frac{(130)^2}{4}$ = 4,225 และมี df = 1

และ SSE = SST − SSR

= 4,400 − 4,225

= 175 และมี df = 6 − 2 = 4

ที่มาของความผันแปร	SS	df	MS
ความถดถอย (R)	4,225	1	4,225
ความคลาดเคลื่อน (E)	175	4	43.75
รวม	4,400	5	

จุดประสงค์หลักของการสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนคือ การหาอัตราส่วน F หรือค่าสถิติ F

อัตราส่วน $F = \frac{MSR}{MSE} \sim f_{1,\, n-2\, ,\, \alpha}$

จะเป็นตัวสถิติที่ใช้ทดสอบความลาดชัน หรือความสัมพันธ์เชิงเส้น

คือทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$

ซึ่งเดิมเราใช้ t - test คือ ตัวสถิติ

$$T = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} = \frac{b}{S_b} \sim t_{(n-2),\, \alpha/2}$$

ตัวสถิติคู่นี้มีความสัมพันธ์กัน คือ

ค่าสถิติ $(T)^2 = F$

ค่าเปิดตาราง $(t_{(n-2,\alpha/2)})^2 = f_{1,(n-2),\alpha}$

1. Ho : $\beta = 0$ (อายุการใช้งาน และค่าซ่อมแซมไม่มีความสัมพันธ์เชิงเส้น)

2. Ha : $\beta \neq 0$ (อายุการใช้งานและค่าซ่อมแซมมีความสัมพันธ์เชิงเส้น)

3. ให้ $\alpha = .05$

4. จะปฏิเสธ Ho เมื่อ $F > f_{1,(6-2),.05} = 7.71$

5. $F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{4225}{43.75} = 96.58$ (p-value<.05 จึงปฏิเสธ Ho)

6. F = 96.57 > 7.71 ตกอยู่ในเขตวิกฤต จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่าเส้นถดถอยมีความลาดชันไม่ใช่ 0 (มีความลาดชัน) นั่นคือ อายุการใช้งานและค่าซ่อมแซมมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นตรง

ถ้าใช้ t – test **ทำดังนี้**

Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$

$\alpha = .05$, จะปฏิเสธ Ho เมื่อ $T > t_{4,.025}$ หรือ

$T < -t_{4,.025}$ นั่นคือเมื่อ $|T| > 2.776$

$T = b/S_b$

$$b = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\Sigma(X-\bar{X})^2} = \frac{130}{4} = 32.5$$

$$S_b = \sqrt{\frac{S^2_{y/x}}{\Sigma(X-\bar{X})^2}}$$

$$S^2_{y/x} = \frac{\Sigma(Y-\hat{Y})^2}{n-2} = \frac{SSE}{n-2} = MSE$$

ดังนั้น

$$S_b = \sqrt{\frac{MSE}{\Sigma(X-\bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{43.75}{4}} = 3.307$$

ดังนั้น

$$T = \frac{32.5}{3.307} = 9.828$$

T = 9.828 > 2.776 ตกอยู่ในเขตวิกฤต จึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้น เช่นเดียวกับการทดสอบแบบ F

และโปรดสังเกตว่า $(T)^2 = (9.828)^2 = F = 96.58$

ในขั้นนี้เราจึงสรุปได้ว่า ประโยชน์ของ ANOVA คือ

1. ใช้ทดสอบความสัมพันธ์เชิงเส้น
2. ได้ค่าประมาณของ $\sigma^2_{y/x}$ คือ $S^2_{y/x}$ = MSE

3. การวิเคราะห์สหสัมพันธ์

การวิเคราะห์สหสัมพันธ์เป็นเครื่องมือทางสถิติ เพื่อใช้อธิบายขนาด (degree) ของความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรคู่หนึ่ง เรามักทำการวิเคราะห์สหสัมพันธ์ควบคู่กับการวิเคราะห์ความถดถอย เพื่อวัดว่า เส้นถดถอยอธิบายความผันแปรของตัวแปรพึ่งพา Y ได้ดีเพียงไร เราอาจศึกษาเฉพาะการวิเคราะห์สหสัมพันธ์เพื่อวัดดีกรีความเกี่ยวพันกัน (association) ระหว่างตัวแปรคู่หนึ่ง

นักสถิติได้สร้างเครื่องมือที่ใช้วัดสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัวไว้ 2 อย่าง คือ **สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ** (coefficient of determination) **และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์** (coefficient of correlation)

สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ คือ มาตราเบื้องต้นที่ใช้วัดความแรงของการเกี่ยวพันกันระหว่างตัวแปรคู่หนึ่ง คือ X และ Y แต่เนื่องจากเราใช้ข้อมูลจากตัวอย่างเพื่อสร้างเส้นถดถอย เราจึงเรียกมาตรานี้ว่า **สัมประสิทธิ์การตัดสินใจของตัวอย่าง** (sample coeffiecient of determination) ใช้สัญลักษณ์ว่า r^2 และเป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์ ρ^2 ค่า r^2 มาจากความสัมพันธ์ระหว่างความผันแปรของค่า Y ต่าง ๆ จากตัวอย่างที่เก็บมา 2 ชนิด คือ

1. ความผันแปรของ Y โดยรอบเส้นถดถอย
2. ความผันแปรของ Y โดยรอบค่าเฉลี่ยของตัวเอง

คำว่า "ความผันแปร" ในทางสถิติเราหมายถึง "ผลรวมของกำลังสองของค่าเบี่ยงเบน" ดังนั้น เราจะหาความผันแปรทั้ง 2 ชนิดได้ดังนี้

ความผันแปรของ Y โดยรอบเส้นถดถอย $\quad \Sigma(Y - \hat{Y})^2 \quad (11.16)$

และ

ความผันแปรของ Y โดยรอบค่าเฉลี่ยของตัวเอง $\quad = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 \quad (11.17)$

เมื่อนำอัตราส่วนของความผันแปรคู่นี้หักออกจาก 1 จะได้สัมประสิทธิ์การตัดสินใจของตัวอย่าง ซึ่งใช้สัญลักษณ์ r^2:

$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} \qquad (11.18)$$

ยังมีสูตรอื่นที่ใช้คำนวณค่า r^2 ซึ่งจะได้กล่าวถึงภายหลัง

การอธิบายค่า r^2

ก่อนอื่นเราจะพิจารณาค่าต่ำสุดและสูงสุดของ r^2 ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อตัวแปร X และ Y มีค่าในตารางที่ 11.5 และ 11.6

ตารางที่ 5 แสดงสหสัมพันธ์แบบสมบูรณ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว

X	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma X = 36$
Y	4	8	12	16	20	24	28	32	$\Sigma Y = 144$

$$\bar{Y} = \frac{144}{8} = 18 \,,\ \bar{X} = \frac{36}{8} = 4.5$$

จะเห็นว่าค่าของ X เพิ่มขึ้นทีละ 1 หน่วย แต่ค่า Y เพิ่มทีละ 4 หน่วย ดังนั้น เส้นถดถอยจะมีความลาดชัน = 4 หรือ b = 4

ส่วน $a = \bar{Y} - b\bar{X}$

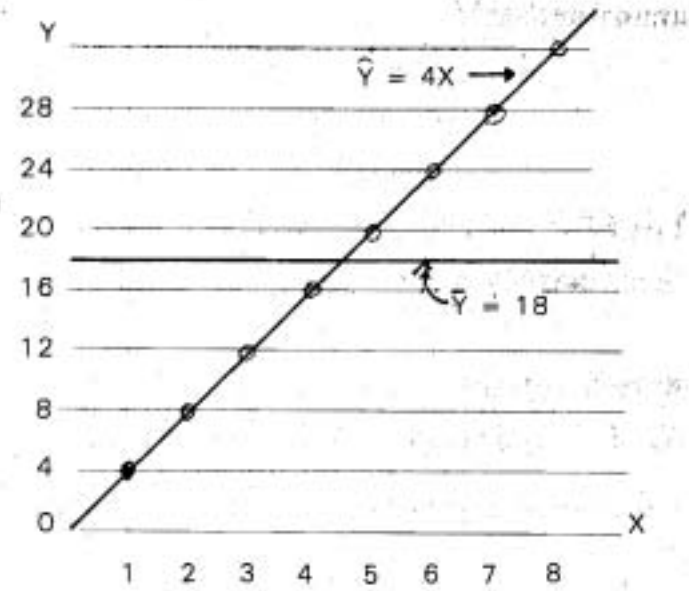
$= 18 - 4(4.5)$

$= 0$

แสดงว่า เส้นถดถอยผ่านจุดกำเนิด ดังนั้นสมการถดถอยคือ

$$\hat{Y} = 4X$$

และมีกราฟเส้นตรงในรูป 11.14



รูปที่ 11.14
แสดงสหสัมพันธ์แบบสมบูรณ์ระหว่าง X และ Y จะเห็นว่าทุกจุดอยู่บนเส้นถดถอย

เราจะคำนวณค่า r^2 ดังนี้

$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}$$

แต่ $\Sigma(Y - \hat{Y})^2 = 0$ เพราะทุกจุดอยู่บนเส้นถดถอย นั่นคือ $Y = \hat{Y}$

และ $\Sigma(Y - \bar{Y})^2$	$= (4 - 18)^2$	$= (-14)^2$	=	196
	$+ (8 - 18)^2$	$= (-10)^2$	=	100
	$+ (12 - 18)^2$	$= (-6)^2$	=	36
	$+ (16 - 18)^2$	$= (-2)^2$	=	4
	$+ (20 - 18)^2$	$= (2)^2$	=	4
	$+ (24 - 18)^2$	$= (6)^2$	=	36
	$+ (28 - 18)^2$	$= (10)^2$	=	100
	$+ (32 - 18)$	$= (14)^2$	=	196
		$\Sigma(Y - \bar{Y})^2$	⟶	672

แทนค่าในสูตรจะได้

$$r^2 = 1 - \frac{0}{672}$$

$$= 1 \longleftarrow$$ สัมประสิทธิ์การตัดสินใจของตัวอย่าง

กรณีที่ตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์แบบสมบูรณ์

ในกรณีที่ $r^2 = 1$ แสดงว่าเส้นถดถอยเป็นตัวประมาณค่าที่สมบูรณ์ เพราะไม่มีความผิดพลาดในการประมาณค่า Y ด้วย $\hat{Y}$ เลย

ตารางที่ 11.6 แสดงค่าของ X และ Y เมื่อมีความสัมพันธ์ในแนวขนานกับค่าแกน X นั่นคือ Y มีค่าคงเดิม เมื่อ X เปลี่ยนแปลง ทำให้มีสหสัมพันธ์เป็น 0 คือไม่มีสหสัมพันธ์กันโดยสิ้นเชิง

X	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma X = 36$
Y	6	12	6	12	6	12	6	12	$\Sigma Y = 72$

$$\bar{X} = \frac{36}{8} = 4.5, \quad \bar{Y} = \frac{72}{8} = 9$$

กรณีนี้เส้นถดถอยจะไม่มีความลาดชัน หรือ $b = 0$ เพราะเมื่อ X เพิ่มทีละ 1 หน่วย Y จะเพิ่ม 6 หน่วย และลด 6 หน่วย เท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็น 0 จะเห็นว่าเมื่อ X เปลี่ยนไปทีละหน่วย Y ยังคงมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง

ดังนั้น

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$= 9 - 0(4.5)$$

$$= 9 \longleftarrow \bar{Y}$$

และเส้นถดถอย คือ

$\hat{Y} = 9$ หรือ $\hat{Y} = \bar{Y}$

เมื่อหาความผันแปรโดยรอบเส้นถดถอยคือ $\Sigma(Y - \hat{Y})^2$ ได้ดังนี้

$$\Sigma(Y - \hat{Y})^2 = (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9$$
$$+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9$$
$$+ (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9$$
$$+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9$$
$$+ (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9$$
$$+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9$$

$$+ (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9$$
$$+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9$$
$$72 \longleftarrow \Sigma(Y - \hat{Y})^2$$

และจะหาความผันแปรของ Y โดยรอบค่าเฉลี่ยของตัวเอง คือ $\Sigma(Y - \bar{Y})^2$ ย่อมจะได้ 72 เท่ากับ $\Sigma(Y - \hat{Y})^2$ เพราะ $\hat{Y} = \bar{Y}$

$$\begin{aligned}
\Sigma(Y - \hat{Y})^2 &= (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9 \\
&+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9 \\
&+ (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9 \\
&+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9 \\
&+ (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9 \\
&+ (12 - 9)^2 = (3)^2 = 9 \\
&+ (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9 \\
&+ (12.9)^2 = (3)^2 = 9 \\
&\qquad 72 \longleftarrow \Sigma(Y - \bar{Y})^2
\end{aligned}$$

แทนค่าในสูตรของ r^2 จะได้

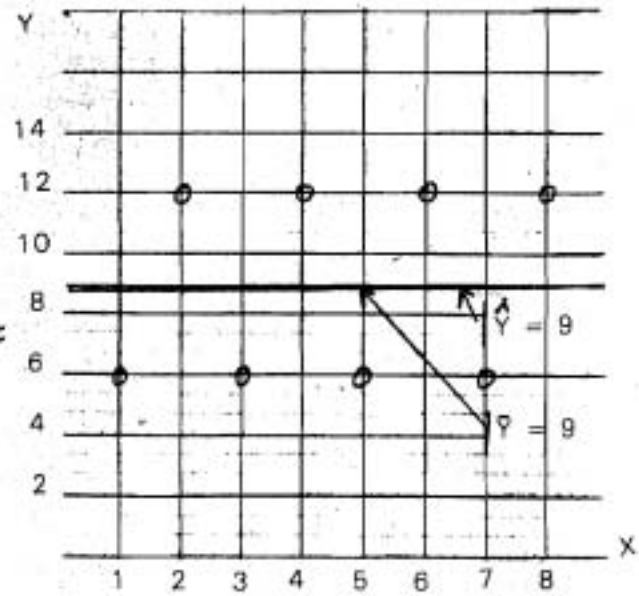
$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}$$

$$= 1 - \frac{72}{72}$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

จึงสรุปได้ว่า $r^2 = 0$ เมื่อตัวแปรคู่นั้นไม่มีสหสัมพันธ์กัน



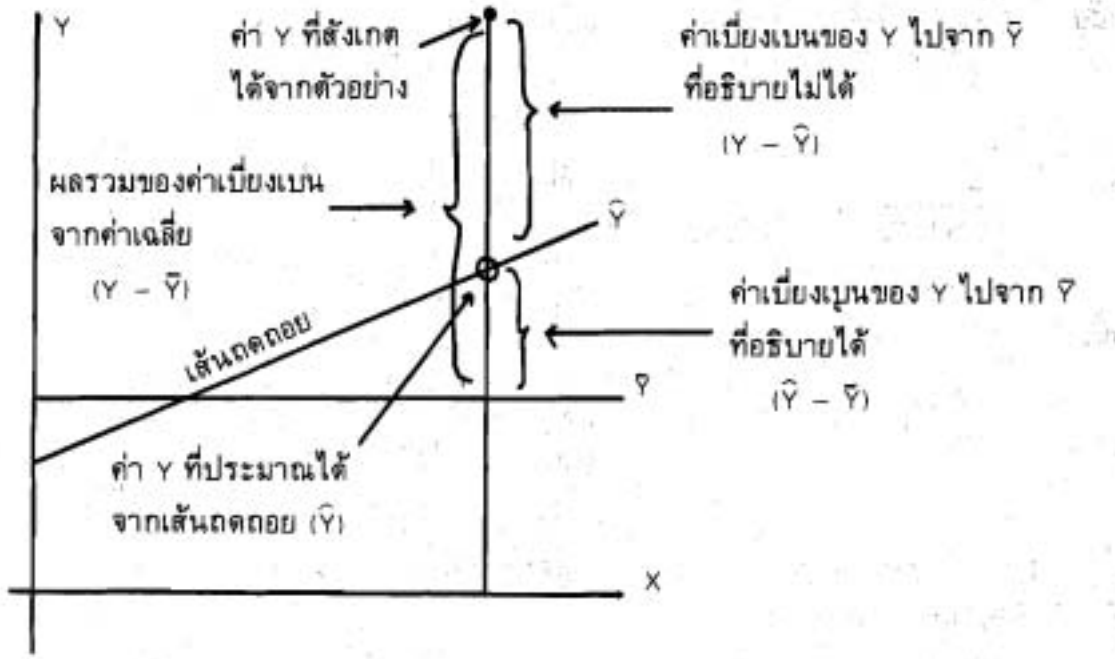
รูปที่ 11.15 แสดงสหสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y = 0 เพราะค่า Y เป็นค่าซ้ำ ๆ กัน ในขณะที่ X เปลี่ยนแปลง

แต่ในทางปฏิบัติเรามักพบปัญหาว่า r^2 ไม่เป็น 0 หรือ 1 ทีเดียว แต่จะมีค่าอยู่ระหว่าง 2 ค่านี้ หากค่า r^2 มีค่าใกล้ 1 จะแสดงว่าตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์ค่อนข้างสูง แต่ถ้าค่า r^2 มีค่าใกล้ 0 แสดงว่าตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์ค่อนข้างน้อย

จุดสำคัญ คือต้องแยกให้ออกว่า r^2 เป็นมาตราวัดความแรงของความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง 2 ตัวแปร ตัวอย่างเช่น ถ้าเรามีจุด (X, Y) จำนวนมากเรียงกันในลักษณะเส้นรอบวงกลม (แต่อยู่ในลักษณะกระจายแบบสุ่ม) จะเห็นได้ชัดเจนว่า จุดเหล่านั้น มีความสัมพันธ์กันแน่นอน (เพราะอยู่ในวงกลมเดียวกัน) แต่ถ้าหาค่า r^2 จะมีค่าใกล้ 0 ทั้งนี้ เพราะจุดเหล่านั้น ไม่ได้เรียงกันในลักษณะ**เชิงเส้นตรง**

ความหมายของ r^2 อีกอย่างหนึ่ง

นักสถิติยังอธิบายความหมายของ r^2 อีกทางหนึ่ง คือ **หมายถึงจำนวนความผันแปรของ Y ที่อธิบายได้โดยเส้นถดถอย** การอธิบายความหมายนี้ควรดูรูป 11.16 ประกอบ



รูปที่ 11.16 แสดงค่าเบี่ยงเบนทั้งหมด, ค่าเบี่ยงเบนที่อธิบายได้ ค่าเบี่ยงเบนที่อธิบายไม่ได้ของค่าสังเกต Y เพียง 1 ตัว

จากรูปที่ 11.16 ค่าสังเกต Y คือวงกลมสีดำ ถ้าเราใช้ค่าเฉลี่ย $\bar{Y}$ เป็นค่าประมาณของ Y เราจะได้ค่าเบี่ยงเบนทั้งหมดคือระยะทาง $(Y - \bar{Y})$ แต่ถ้าใช้เส้นถดถอย $\hat{Y}$ เป็นค่าประมาณของ Y เราจะได้ค่าประมาณที่ดีขึ้น อย่างไรก็ตามเส้นถดถอยจะอธิบายได้เพียงส่วนหนึ่งของค่าเบี่ยงเบนทั้งหมดคือ ระยะทาง $(\hat{Y} - \bar{Y})$ ส่วนที่เหลือจากค่าเบี่ยงเบนทั้งหมดคือระยะทาง $(Y - \hat{Y})$ ยังคงอธิบายไม่ได้

ถ้าเราหาค่าเบี่ยงเบนทั้งหลายนี้ จากทุก ๆ ค่าสังเกต Y ที่เก็บจากตัวอย่าง n ตัวนั้น และหาในรูปผลบวกกำลังสอง เราจะได้ผลบวกกำลังสองของค่าเบี่ยงเบนทั้งหมด จากทุก ๆ จุดไปจากค่าเฉลี่ยของตัวเอง คือ

total sum of squares $= \Sigma(Y - \bar{Y})^2$ หรือ SST (11.19)

และส่วนของความผันแปรทั้งหมดที่อธิบายได้ คือ

regression sum of squares $= \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2$ หรือ SSR (11.20)

และส่วนของความผันแปรทั้งหมดที่อธิบายไม่ได้ คือ

error sum of sguares $= \Sigma(Y - \hat{Y})^2$ หรือ SSE (11.21)

ดังนั้น $\frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}$ คือส่วนของความผันแปรทั้งหมดที่อธิบายสาเหตุไม่ได้

และ $\frac{\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}$ คือส่วนของความผันแปรทั้งหมดที่อธิบายได้

ดังนั้น
$$r^2 = \frac{\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} \qquad (11.22)$$

และ
$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} \qquad (11.23)$$

สูตรที่ (11.22) เป็นสูตรใหม่ สูตร (11.23) ตรงกับสูตรเดิมคือสูตร (11.18) เพราะ r^2 วัดดีกรีของความเกี่ยวพันกันระหว่าง X และ Y

สูตรที่ (11.22) และ (11.23) อาจไม่สะดวกในการคำนวณ ยังมีอีกสูตรที่ง่ายต่อการคำนวณ คือสูตรที่ (11.24) คือ

$$r^2 = \frac{a\Sigma Y + b\Sigma XY - n\bar{Y}^2}{\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2} \qquad (11.24)$$

ในเมื่อ

r^2 = สัมประสิทธิ์การตัดสินใจจากตัวอย่าง
a = จุดตัดบนแกน Y
b = ความลาดชันของเส้นถดถอย
n = ขนาดตัวอย่าง = จำนวนจุด
X = ค่าของตัวแปรอิสระ
Y = ค่าของตัวแปรพึ่งพา
$\bar{Y}$ = ค่าเฉลี่ยของตัวแปรพึ่งพา

และถ้าหากเราสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของความถดถอยคือตารางที่ 11.4 เราจะหาค่า r^2 ได้อีกวิธีหนึ่ง คือ

$$r^2 = \frac{\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} = \frac{SSR}{SST} \qquad (11.25)$$

ตารางที่ 11.7 แสดงการหาค่า r^2 โดยสูตรต่าง ๆ

ปี n = 6	ค่าใช้จ่ายในการวิจัยพัฒนา X	ผลกำไรต่อปี Y	XY	X^2	Y^2
(1)	(2)	(3)	(2)x(3)	(2)	(3)
2525	5	31	155	25	961
2524	11	40	440	121	1,600
2523	4	30	120	16	900
2522	5	34	170	25	1,156
2521	3	25	75	9	625
2520	2	20	40	4	400
	$\Sigma X = 30$	$\Sigma Y = 180$	$\Sigma XY = 1,000$	$\Sigma X^2 = 200$	$\Sigma Y^2 = 5,642$
	$\bar{X} = \frac{30}{6}$	$\bar{Y} = \frac{180}{6}$			
	$= 5$	$= 30$			

$$b = \frac{\Sigma XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2} = \frac{1000 - 6(5)(30)}{200 - 6(5)^2}$$

$$= \frac{1000 - 900}{200 - 150}$$

$$= \frac{100}{50}$$

$$= 2$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$= 30 - 2(5)$$

$$= 20$$

สมการประมาณค่า คือ

$$\hat{Y} = 20 + 2X$$

X	Y	$\hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$	$(\hat{Y} - \bar{Y})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
5	31	30	1	0	1
11	40	42	4	144	100
4	30	28	4	4	0
5	34	30	16	0	16
3	25	26	1	16	25
2	20	24	16	36	100
			42	200	242

ถ้าคำนวณ r^2 โดยสูตร (11.22)

$$r^2 = \frac{\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} = \frac{200}{242} = .826$$

ถ้าใช้สูตร (11.23)

$$r^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y - \hat{Y})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}$$

$$= 1 - \frac{42}{242}$$

$$= 1 - .174 = .826$$

ถ้าใช้สูตร (11.24)

$$r^2 = \frac{a\Sigma Y + b\Sigma XY - n\bar{Y}^2}{\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2}$$

$$= \frac{20(180) + 2(1000) - 6(30)^2}{5642 - 6(30)^2}$$

$$= \frac{3600 + 2000 - 5400}{5642 - 5400} = \frac{200}{242} = .826$$

ANOVA

ที่มา	SS	df	MS
ความถดถอย (R)	200	1	200
ความคลาดเคลื่อน (E)	42	4	10.5
รวม	242	5	

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{200}{242} = .826$$

สรุปได้ว่า ความผันแปรของค่าใช้จ่ายวิจัยและพัฒนา (ตัวแปรอิสระ X) อธิบายได้ 82.6% ของความผันแปรของผลกำไรต่อปี (ตัวแปรพึ่งพา Y)

สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

(The coefficient of correlation)

สัมประสิทธิ์แห่งสหสัมพันธ์เป็นเครื่องมืออีกอันหนึ่งที่ชี้ให้เห็นว่าตัวแปรตัวหนึ่งใช้อธิบายตัวแปรอีกตัวหนึ่งได้ดีมากน้อยเพียงไร ค่าที่คำนวณได้จากตัวอย่างเรียกว่า สัมประสิทธิ์แห่งสหสัมพันธ์จากตัวอย่าง และใช้ r เป็นค่าสถิติที่ใช้ประมาณพารามิเตอร์ ρ มีวิธีหาค่า r 2 วิธี คือ

1. หาจากสูตรโดยตรงคือ

$$r = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \bar{X})^2 \Sigma(Y - \bar{Y})^2}}$$

$$= \frac{\Sigma XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{(\Sigma X^2 - n\bar{X}^2)(\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2)}}$$

2. หาจากสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ

โดยที่ $r = \sqrt{r^2}$

และ r จะมีเครื่องหมายเหมือนความลาดชันของเส้นถดถอย (b) นั่นคือ ถ้า X และ Y มีความสัมพันธ์ใน

ทางกลับกัน r จะมีเครื่องหมายลบ และจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง -1 แต่ถ้า X และ Y มีความสัมพันธ์ในทางเดียวกัน r จะมีเครื่องหมายบวก และจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ดังแสดงในรูปที่ 11.17

การอธิบายความหมายของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ยากกว่า การอธิบายความหมายของ r^2 สมมุติคำนวณได้ r = .9 จะหมายความว่าอย่างไร? อย่าลืมว่า เมื่อ r = .9 ก็คือ r^2 = .81 นั่นเอง ซึ่งหมายความว่า 81% ของความผันแปรทั้งหมดของ Y สามารถอธิบายได้โดยเส้นถดถอย (หรือตัวแปรอิสระ X) และเราทราบว่า $r = \sqrt{r^2}$ และค่าสูงสุดของ r = 1 เมื่อ r = .9 ก็แสดงว่า X และ Y มีสหสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกันค่อนข้างสูง เราก็คงจะอธิบายค่าของ r ได้เพียงแค่นี้เอง

จากข้อมูลในตารางที่ 11.7 เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างรายจ่ายเพื่อพัฒนาและวิจัยกับผลกำไรต่อปี ซึ่งคำนวณค่า r^2 = .826

ดังนั้น $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{.826}$

$= .909$

r จะมีเครื่องหมายเป็นบวก เพราะความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่นี้เป็นไปในทิศทางเดียวกัน (b มีค่าเป็นบวก)

ถ้าหาจากสูตรโดยตรง โดยไม่หาจาก r^2

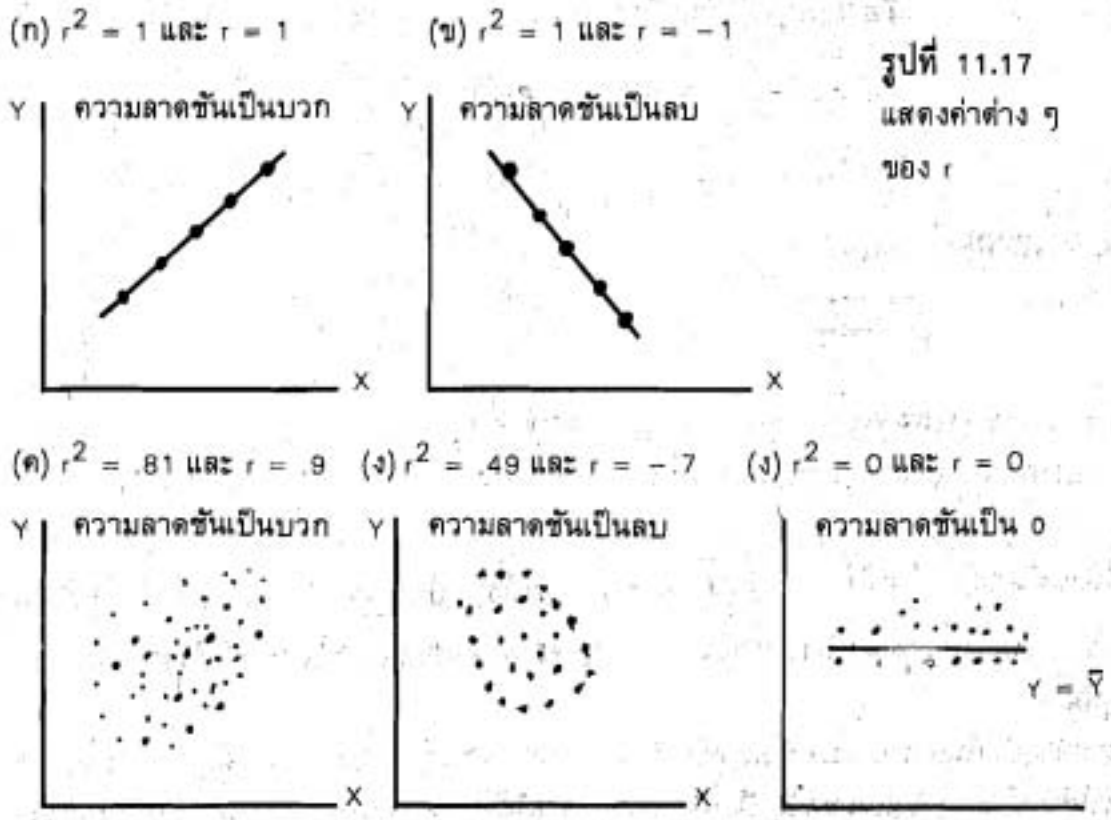
$$r = \frac{\Sigma XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{(\Sigma X^2 - n\bar{X}^2)(\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2)}}$$

$$= \frac{1000 - 6(5)(30)}{\sqrt{(200 - 6(5)^2)(5642 - 6(30^2)}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{(50)(242)}}$$

$$= \frac{100}{110}$$

$$= 0.909$$



รูปที่ 11.17 แสดงค่าต่าง ๆ ของ r

การทดสอบสมมติฐาน

อาจมีบ่อยครั้งที่เราต้องการทราบว่า ค่า r ที่คำนวณได้จากตัวอย่างมีค่าโตพอที่จะแสดงว่า ตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์ในประชากรด้วยหรือไม่มี นั่นคือ เราอาจต้องการทดสอบค่าของ ρ ว่าเป็น 0 หรือไม่

ก่อนการทดสอบต้องมีเงื่อนไขว่า ตัวแปรทั้งคู่นั้นต่างก็มีการแจกแจงแบบปกติ เพื่อเราจะได้ใช้การทดสอบแบบ t ได้ และจะมีขั้นตอนการทดสอบดังนี้

1. Ho : $\rho = 0$ (ตัวแปรคู่นั้นไม่มีสหสัมพันธ์ในประชากร)
2. Ha : $\rho \neq 0$ (ตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์ในประชากร)

หรือ Ha : $\rho > 0$ (ตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์กัน และเป็นแบบเชิงบวก)

หรือ Ha : $\rho < 0$ (ตัวแปรคู่นั้นมีสหสัมพันธ์กัน และเป็นแบบตรงข้าม)

3. กำหนดระดับนัยสำคัญ α
4. จะปฏิเสธ Ho เมื่อ $|T| > t_{\alpha/2,\ \nu}$ สำหรับ Ha : $\rho \neq 0$

เมื่อ $T > t_{\alpha, \nu}$ สำหรับ Ha : $\rho > 0$

เมื่อ $T < -t_{\alpha, \nu}$ สำหรับ Ha : $\rho < 0$

โดยที่ $\nu = n - 2$

5. ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

และ T จะมีการแจกแจงแบบค่า t ในตารางด้วย $\nu = n - 2$

6. ปฏิเสธ Ho ถ้าค่า T ตกอยู่ในเขตวิกฤต

โปรดสังเกตว่า ค่าสถิติ $T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ จะมีค่าโตเมื่อ r เป็นค่าโต (คิด absolute value) ดังนั้น เมื่อ T มีค่าโตมากจนตกในเขตวิกฤต เราจะปฏิเสธ Ho และแสดงว่ามีสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรคู่นั้น

จากตัวอย่างในตาราง 11.7 ซึ่งคำนวณค่า $r = .909$ และ $r^2 = .826$ ถ้าเราต้องการทดสอบว่าค่าใช้จ่ายในการพัฒนาและวิจัย มีสหสัมพันธ์กับรายได้จากการขายแบบเชิงบวก (คือทิศทางเดียวกัน) มีวิธีการดังนี้

1. Ho : $\rho = 0$
2. Ha : $\rho > 0$
3. $\alpha = .05$
4. จะปฏิเสธ Ho เมื่อ $T > t_{.05, 4} = 2.132$
5.

$$T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

$$= .909\sqrt{\frac{6-2}{1-.826}}$$

$$= .909\sqrt{22.988} = .909\ (4.795)$$

$$= 4.36$$

6. ค่า T = 4.36 สูงกว่า 2.132 จึงอยู่ในขอบวิกฤต เราจึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า ค่าใช้จ่ายในการพัฒนาและวิจัยกับรายได้จากการขายต่อปี มีสหสัมพันธ์แบบเชิงบวก

พึงสังเกตว่าค่า T มีคำนวณได้ จะเท่ากับค่า T จากการทดสอบ Ho : $\beta = 0$ จาก ANOVA

$$F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{200}{10.5} = 19.05$$

$$\sqrt{F} = \sqrt{19.5} = 4.36 = T$$

โดยที่

$$T = \frac{b}{S_b} = \frac{2}{.4582} = 4.36$$

$$S_b = \sqrt{\frac{MSE}{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{10.5}{50}}$$
$$= \sqrt{.21}$$
$$= .4582$$

ดังนั้น ความหมายของการทดสอบสมมุติฐาน

Ho : $\rho = 0$ และ Ho : $\beta = 0$

จึงเหมือนกัน

ข้อควรระวังในการอธิบายค่า r

1. ค่า r^2 จะบอกความแรงของขนาดความสัมพันธ์เชิงเส้นได้ดีกว่าค่า r เช่นเมื่อ $r = .5$, r^2 จะมีค่าเพียง .25 และถ้าจะให้ค่า $r^2 > .5$ r จะต้องมีค่า .7 ขึ้นไป หรือเมื่อ $r = 0.3$, $r^2 = .09$ ซึ่งแสดงว่า X อธิบายความผันแปรของ Y ได้เพียง 9% ส่วนที่เหลืออีก 91% ต้องใช้ตัวแปรอื่น ๆ ช่วยอธิบาย
2. r^2 **ไม่ได้วัดความลาดชันของเส้นถดถอย** เช่นถ้าค่า r^2 สูง ($r^2 \to 1$) ก็ไม่จำเป็นที่ β หรือ b จะต้องมีค่าสูงด้วย เช่นในรูปที่ 11.18 ซึ่ง r^2 มีค่าเป็น 1 ทั้ง 2 รูป แต่เส้นทั้ง 2 มีความลาดชันต่างกัน รูป (n) จะมีความลาดชันสูงกว่า ทั้งนี้จะอธิบายได้ ดังนี้

   เมื่อ $r^2 = 1$

   คือ $\frac{SSR}{SST} = 1$

หรือ $\frac{b^2\Sigma(X - \bar{X})^2}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2} = 1$

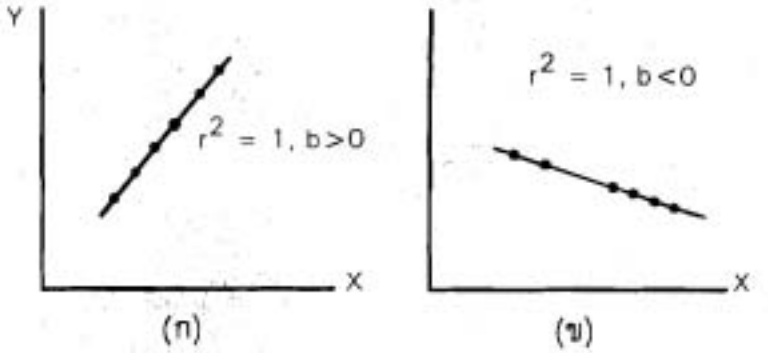
หรือ $\frac{b^2\Sigma(X - \bar{X})^2/(n - 1)}{\Sigma(Y - \bar{Y})^2/(n - 1)} = 1$

หรือ $\frac{b^2 S_x^2}{S_Y^2} = 1$

ดังนั้น $b^2 = \frac{S_Y^2}{S_x^2}$ (เมื่อ $r^2 = 1$)

หมายความว่า แม้ว่าข้อมูล 2 ชุดใด ๆ จะมีความผันแปรของ X เท่ากัน แต่ถ้าความผันแปรของ Y ของกลุ่มใดสูงกว่า จะทำให้ค่า b สูงกว่าด้วย รูป (ก) มีความผันแปรของ Y สูงกว่ารูป (ข) ความลาดชันจึงมากกว่า

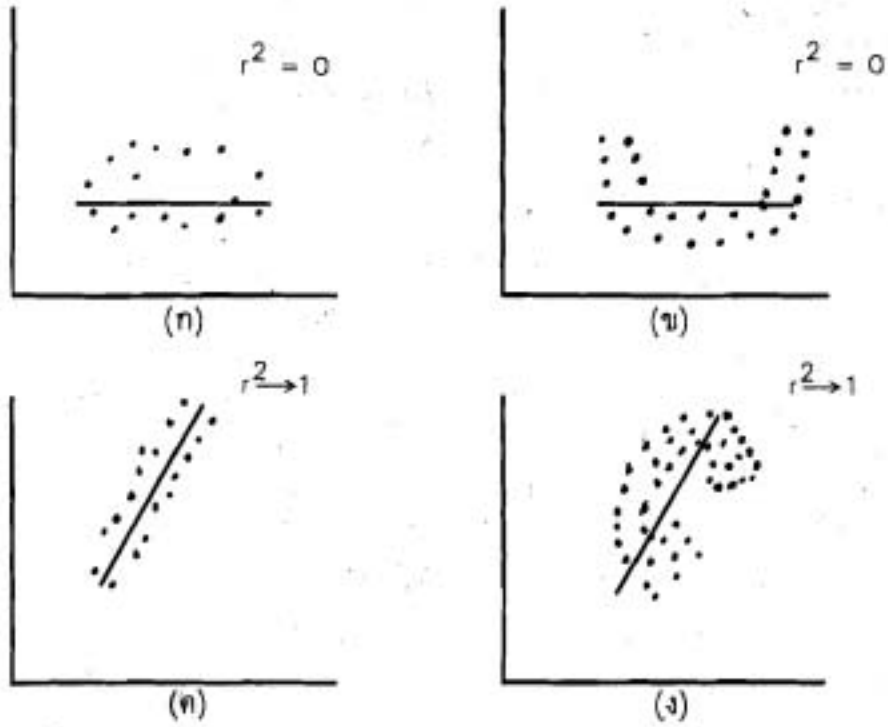
รูปที่ 11.18
แสดงความสัมพันธ์เชิงเส้นแบบสมบูรณ์



3. r^2 **ไม่ได้วัดความเหมาะสมของตัวแบบเชิงเส้น** เช่น ในรูปที่ 11.19 รูป (ก) และ (ข) มีค่า $r^2 = 0$ เหมือนกัน รูป (ก) แสดงว่า X และ Y ไม่มีลักษณะความสัมพันธ์แบบใดทั้งสิ้น แต่รูป (ข) แสดงหลักฐานอย่างมั่นคงว่า X และ Y มีลักษณะความสัมพันธ์แบบเส้นโค้ง (nonlinear-association)

ส่วนในรูป (ค) และ (ง) r^2 ที่คำนวณจะมีค่าสูง และเส้นตรงจะสอดคล้องกับข้อมูลได้อย่างดีในรูป (ค) แต่ในรูป (ง) ตัวแบบเชิงเส้นกลับไม่เหมาะสมกับข้อมูล

รูปที่ 11.19 แสดงว่าค่า r^2 ไม่ได้ใช้วัดความเหมาะสมของตัวแบบเชิงเส้น



แบบฝึกหัดทบทวน

11.17 ข้อมูลข้างล่างคือรายได้ต่อครอบครัว และค่าใช้จ่ายสำหรับอาหารของครอบครัวที่สุ่มมา 8 ครอบครัว คือ

รายได้ (1,000 บาท)	8	12	9	24	13	37	19	16
เปอร์เซ็นต์รายจ่ายสำหรับอาหาร	36	25	33	15	28	19	20	22

ก) จงสร้างสมการประมาณค่าที่ดีที่สุดที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล

(Y = 34.77 − 0.5809X)

ข) จงหา $S_{Y/X}$ (4.963)

ค) จงหาช่วงเชื่อมั่น 90% ของเปอร์เซ็นต์รายจ่ายสำหรับอาหารของครอบครัวที่มีรายได้ 25,000 บาท (15.7375, 24.7575)

11.18 ข้อมูลข้างล่างคือ จำนวนขายเป็นพันบาทต่อเดือน และค่าประมาณของจำนวนขาย เป็นเวลา 10 เดือน ของบริษัทขายเครื่องทีหา จงหาสัมประสิทธิ์การตัดสินใจจากตัวอย่าง และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากตัวอย่าง

Y	55	64	54	63	68	70	76	66	75	74
$\hat{Y}$	55.5	59.5	60.5	63.5	67.5	65.5	73.5	70.5	72.5	76.5

($r = .87991$, $r^2 = .7733$)

11.19 ผู้จัดการบริษัทขายน้ำกรองสังเกตว่า ผู้ใช้น้ำของบริษัทมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนบริโภคน้ำ ซึ่งแต่เดิมเขาพบว่า เส้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกค้า (บ้าน) และจำนวนบริโภค มีความลาดชัน 13 หน่วย จงใช้ระดับนัยสำคัญ .10 ทดสอบว่า ความลาดชันเพิ่มขึ้นหรือไม่ จากข้อมูลต่อไปนี้

จำนวนบ้าน (1,000 หลัง)	8.1	7.8	8.4	7.6	8.0	8.1
จำนวนการบริโภคน้ำ (10,000 แกลลอน)	94	83	97	85	89	92

(b = 17.894736, T = 1.277, ยอมรับ Ho ว่าความลาดชันไม่เปลี่ยนแปลง)

11.20 ในการสำรวจตลาด 10 ท้องที่ของบริษัทจำหน่ายรถจักรยานยนต์พบว่า จำนวนเงินที่ใช้โฆษณาและจำนวนขายจักรยานมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นโดยมีความลาดชันเป็น 1.5 หน่วย และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของความลาดชันเป็น .35 ข้อมูลนี้จะขัดแย้งที่ระดับนัยสำคัญ .10 กับคำกล่าวอ้างของฝ่ายตลาดที่ว่า จะขายมอเตอร์ไซค์ได้เพิ่มขึ้น 60,000 คัน สำหรับรายจ่ายค่าโฆษณาที่เพิ่มขึ้น 25 ล้านบาท (T = −2.57, ปฏิเสธ Ho, จำนวนขายเพิ่มขึ้นต่ำกว่า 60,000 คัน)

11.21 ข้อใดที่เป็นความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (ให้เลือกเพียงข้อเดียว)

ก) บอกได้ว่า ความลาดชันของเส้นถดถอยเป็นบวกหรือลบ

ข) วัดความแรงของความเกี่ยวพันระหว่าง 2 ตัวแปร

ค) จะไม่มีค่าเกิน 1

ง) วัดเปอร์เซ็นต์ของความผันแปรที่อธิบายโดยเส้นถดถอย

11.22 โรงงานผลิตเครื่องปรับอากาศทราบว่า จำนวนขายในฤดูร้อนจะไม่แน่นอน และมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิ จากการศึกษามา 6 ปี ได้ข้อมูลดังนี้

อุณหภูมิ (ซ)	29°	33°	35°	34°	36°	31°
จำนวนขาย (เครื่อง)	66	74	72	76	78	72

จงสร้างสมการที่อธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลนี้ ได้ดีที่สุด

(Y = 28.35 + 1.35X)

11.23 ในการวิเคราะห์ความถดถอย เราสามารถกำหนดค่า X ได้ล่วงหน้าแต่ค่า Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม อยากทราบว่า ค่าของ X และ Y จะเป็นแบบใดเมื่อเราวิเคราะห์สหสัมพันธ์

11.24 ถ้าเรามีตัวอย่าง 2 ชุด และมีค่า r = 0.6 และ r = 0.8 เราจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y ว่าอย่างไร เมื่อเราเปรียบเทียบข้อมูล 2 ชุดนี้เข้าด้วยกัน (r^2 = .36 และ r^2 = .64)

11.25 บริษัทโฆษณาต้องการทราบว่า จำนวนครั้งที่โฆษณาทางโทรทัศน์ต่อสัปดาห์ และจำนวนขายของสินค้าชนิดหนึ่งต่อสัปดาห์ มีสหสัมพันธ์กันหรือไม่ จึงได้เลือกเมืองตัวอย่าง 9 แห่ง และได้ข้อมูลดังนี้

เมือง	A	B	C	D	E	F	G	H	I
จำนวนโฆษณา (X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
จำนวนขาย (Y) (100 หน่วย)	2	1	3	3	4	5	6	5	7

ก) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (r = .9428)

ข) จงทดสอบ Ho : $\rho = 0$, $\alpha = .05$ (T = 7.48 , ปฏิเสธ Ho)

11.26 งานทดลองเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำฝน และผลผลิตข้าว ได้ข้อมูลดังนี้

ปริมาณฝนเป็นนิ้ว (X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
ผลผลิตเป็นบุชเชล (Y)	1	3	2	5	5	4	7	6	9	8

ก) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

ข) ทดสอบ Ho : $\rho = 0$, $\alpha = 0.05$

11.27 สถิติค่าบำรุงรักษาเครื่องบันทึกและเก็บเงินแบบอัตโนมัติของร้านสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง จำนวน 6 เครื่อง มีดังนี้

อายุเป็นปี (X)	2	1	3	2	1	3
ค่าบำรุงรักษา (Y)	$70	40	100	80	30	100

ก) จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (r = .8702, T = 4.996, ปฏิเสธ Ho)

ข) จงทดสอบว่าอายุ และค่าบำรุงรักษาไม่มีความสัมพันธ์กัน, α = .05

11.28 ให้ X คือ GPA ระดับมัธยมปลาย Y = GPA ในมหาวิทยาลัยและกำหนดให้

$\Sigma X = 32.2$ $\Sigma Y = 30.0$ $\Sigma XY = 98.32$

$\Sigma X^2 = 105.74$ $\Sigma Y^2 = 91.90$ $n = 10$

ก) จงหาค่า r (r = .8702)

ข) ทดสอบว่า X และ Y มีความสัมพันธ์กันหรือไม่?, α = .05 (T = 4.996, ปฏิเสธ Ho)

11.29 ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนความถนัด และจำนวนผลผลิตต่อชั่วโมงของคนงานในโรงงานหนึ่งได้ข้อมูลโดยสรุป ดังนี้

$\Sigma X = 550$ $\Sigma Y = 680$ $n = 10$

$\Sigma XY = 45,900$ $\Sigma X^2 = 38,500$ $\Sigma Y^2 = 56,000$

X = คะแนนความถนัด, Y = ผลผลิตต่อชั่วโมง

ก. จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (r = .94725)

ข. จงทดสอบว่า คะแนนความถนัดและผลผลิตต่อชั่วโมงมีความสัมพันธ์กันหรือไม่?

α = .02 (T = 8.3599, ปฏิเสธ Ho)

11.30 จำนวนวันหยุดงานในปีที่ผ่านมา (Y) และจำนวนปีที่เข้าทำงาน (X) ของพนักงานที่สุ่มมา 10 คน จากบริษัทขนาดใหญ่แห่งหนึ่ง มีดังนี้

Y	2	0	5	6	4	9	2	15	0	7
X	7	8	2	3	5	4	6	10	4	11

ก. จงสร้าง scatter diagram

ข. หาสมการกำลังสองน้อยที่สุด โดยให้ Y เป็นตัวแปรพึ่งพา ($Y = 2.225 + .4625X$)

ค. จงประมาณจำนวนวันหยุดงานของพนักงานผู้หนึ่งซึ่งทำงานมา 4 ปีแล้ว
($Y = 4.075$ วัน)

ง. จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ($r = .30$)

จ. จงทดสอบว่า X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์กันโดยใช้ $\alpha = .01$
($T = 0.89$, ยอมรับ Ho, สหสัมพันธ์ไม่มีนัยสำคัญ)

11.31 จำนวนสัปดาห์ที่เข้าทำงาน และจำนวนลูกค้าที่พนักงานสามารถบริการต่อ 1 ชั่วโมงของพนักงานเสริฟอาหาร 5 คน จากภัตตาคารแห่งหนึ่ง มีดังนี้

จำนวนสัปดาห์ที่เข้าทำงาน (X)	จำนวนลูกค้าที่สามารถให้บริการต่อชั่วโมง (Y)
4	10
7	18
2	10
12	28
5	14

ก. จงสร้างสมการถดถอย ($\hat{Y} = 4.4138 + 1.931X$)

ข. จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, $\alpha = .05$ ($T = 9.165$, ปฏิเสธ Ho)

ค. เมื่อ $X = 10$ จงหาช่วงเชื่อมั่น 95% ของ $\mu_{Y/x}$

ง. ค่า ρ ต่างจาก 0 อย่างมีนัยสำคัญที่ $\alpha = .05$ ไหม?

(r = .9826, T = 9.165 , ปฏิเสธ Ho)

11.32 ให้ X คือจำนวนปีที่ทำงาน และ Y คือคะแนนผลงานของพนักงานที่สุ่มมา 10 คน มีดังนี้

X	5	6	5	6	7	8	7	8	9	9
Y	8	9	6	7	4	7	5	6	3	5

ก. จงสร้างสมการกำลังสองน้อยที่สุด (Y = 0.75 − 0.75X)

ข. จงหาค่า r (r = −0.61237)

ค. จงทดสอบว่า ρ เป็น 0 หรือไม่ $\alpha = .01$

(T = −2.19, ยอมรับว่า $\rho = 0$)

11.33 จำนวนชั่วโมงที่ศึกษาวิชาสถิติ (X) และคะแนนสอบวิชาสถิติ (Y) ของนักเรียนที่สุ่มมา 6 คน มีดังนี้

X	9	11	14	4	6	6
Y	38	67	49	12	10	24

ก. จงสร้างสมการถดถอย (Y = −8.7739 + 5.05289)

ข. จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$, $\alpha = .01$

ค. จงหาค่า r (r = .8436)

ง. จงทดสอบ Ho : $\rho = 0$, Ha : P>0, $\alpha = .05$

จ. X อธิบายความผันแปรของ Y ได้เพียงไร? ($r^2 = .71 = 71\%$)

(ข้อ (ข) และ (ง) T = 3.142, ยอมรับ Ho ข้อ (ข) ถ้าใช้ F = 9.87)

11.34 ผลผลิตถั่วเหลือง (Y) และปริมาณน้ำที่ใช้ในระบบชลประทาน (X) สำหรับปลูกถั่วเหลือง 6 แปลง มีดังนี้

X	0	2	4	1	3	5
Y	20	28	32	25	30	31

ก. จงสร้างสมการถดถอย ($Y = 22.095 + 2.228X$)

ข. ถ้าเพิ่มปริมาณน้ำในระบบชลประทาน 1 หน่วย จะมีผลทำให้ผลผลิตเปลี่ยนแปลงไหม?

ค. จงหาค่า r^2 และอธิบายความหมาย ($r^2 = .8577$)

ง. จงทดสอบว่าตัวแปรคู่นี้ไม่มีความสัมพันธ์กัน $\alpha = .01$ ($F = 24.11$, ปฏิเสธ Ho)

จ. เมื่อ $X = 5$ จงหาช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/x}$ และ Y'_a, $\alpha = .05$ ($29.4 < \mu_{y/x} < 37.05$; $26.7 < Y_a < 39.7$)

11.35 ให้ X = ปริมาณปุ๋ยไนโตรเจน Y = ผลผลิตข้าว

$n = 20$ $\Sigma Y = 260$

$\Sigma X = 230$ $\Sigma X^2 = 3144$

$\Sigma XY = 3490$ $\Sigma Y^2 = 3904$

ก. จงสร้างสมการถดถอย ($Y = 1.4769 + 1.00204X$)

ข. จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta > 0$, $\alpha = .01$ ($T = 19.8$ ปฏิเสธ Ho)

ค. จงทดสอบ Ho : $\rho = 0$, Ha : $\rho \neq 0$, $\alpha = .10$ ($T = 19.8$, ปฏิเสธ Ho)

ง. จงหาช่วงเชื่อมั่น 98% ของ β ($1.873 < \beta < 1.131$)

11.36 ในทางธุรกิจเราทราบว่า ถ้าซื้อสินค้าจำนวนมาก ราคาต่อหน่วยจะลดลง ดังข้อมูลที่เก็บมาซึ่งมี X = ปริมาณสินค้าเป็นหน่วยที่ซื้อ และ Y = ราคาต่อหน่วย

X	1	2	3	4	5
Y	10	8	7	6	4

ก) จงหาจุดตัดที่แกน Y และความลาดชันของเส้นถดถอย ($a = 11.2$, $b = -1.4$)

ข) จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$, $\alpha = .05$ ($F = 147$, ปฏิเสธ Ho)

ค) จงหาค่า r ($r = -.9899$)

ง) มีหลักฐานเพียงพอที่จะปฏิเสธ Ho ว่า ไม่มีความสัมพันธ์กันระหว่าง X และ Y หรือไม่? $\alpha = .05$ (คำตอบในข้อ (ข))

11.37 ให้ X คือ คะแนนปีสุดท้าย (GPA) ของผู้จบมหาวิทยาลัย และ Y คือ เงินเดือนขั้นต้นของบัณฑิต 30 คน และมี computor printout ดังนี้

MEANS AND STANDARD DEVIATIONS

X : 2.83833 + − 0.44841 Y : 10740.66667 + − 1967.65248

CORRELATIONS

PEARSON : 0.827368 SPEARMAN : 0.933515 **KENDALL** : 0.799219

LINEAR REGRESSION OF Y ON X

SLOPE : 3630.56128 + – 465.76874

INTERCEPT : 435.92357 + – 1337.85967

S(Y/X) : 1124.71499

ANALYSIS OF VARIANCE : F (1, 28) = 60.75847

ก. จงสร้างสมการถดถอย (Y = 435.92357 + 3630.56128X)

ข. จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของ β

ค. จะปฏิเสธ Ho : β = 4000 ที่ α = .05 ได้ไหม? (T = −0.7932, ยอมรับ Ho)

ง. จะปฏิเสธ Ho : $\mu_{y/x}$ = 11,500 เมื่อ Xo = 2.75 ได้ไหม? α = .05
(T = 5.157, ปฏิเสธ Ho)

จ. จงหา 95% ช่วงเชื่อมั่นของ $\mu_{y/Xo}$ เมื่อ Xo=2.75 (99991.065<$\mu_{y/xo}$<10,848.867)

ฉ. GPA อธิบายความผันแปรของเงินเดือนเริ่มต้นได้กี่เปอร์เซ็นต์? (68.45%)

หมายเหตุ ค่า r ที่เราศึกษาในบทที่ 11 คือ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเบียร์สัน (Pearson carrelation coeffiecient) ส่วนแบบ Spearman และแบบ Kendall เป็นแบบ Nonparametric ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไป

11.38 กำหนดให้ a = 7.73750, b = 24.77500, MSE = 27.99583, n = 8, $\bar{X}$ = 5.5, $\Sigma(X - \bar{X})^2$ = 40.0 และ $S^2_{\hat{y}}$ สำหรับค่าต่างของ $\hat{Y}$ ดังนี้

X_0	:	5	6	7
$S^2_{\hat{y}}$	:	3.674	3.674	5.074

ก. เหตุใด $S^2_{\hat{y}}$ เมื่อ X_0 = 7 จึงต่างหาก 2 อันแรก

ข. จงแสดงว่า เมื่อ X_0 = 6, $S^2_{\hat{y}}$ = 3.674

11.39 เหตุใดเมื่อทดสอบ Ho : $\beta = 0$, Ha : $\beta \neq 0$ โดย F – test จึงเป็นการทดสอบแบบด้านเดียว ทั้ง ๆ ที่สมมติฐานรอง หมายถึง $\beta > 0$ หรือ $\beta < 0$

11.40 โรงงานผลิตภัณฑ์นมและเนยแข็งต้องการทราบความสัมพันธ์ของต้นทุนการผลิต และผลผลิตเนยแข็ง เขามีข้อมูลดังนี้

ผลผลิต	Y = ต้นทุนรวม	X = จำนวนผลผลิต (ปอนด์)
1	300	200
2	500	1,000
3	450	600
4	280	350
5	470	800
6	400	700
7	390	500
8	200	150
9	450	900
10	360	400

$\Sigma X = 5,600; \Sigma Y = 3,800; \Sigma X^2 = 3,905,000; \Sigma XY = 2,358,000;$
$\Sigma Y^2 = 1,526,000$

จงหาสมการกำลังสองน้อยที่สุดเพื่อช่วยโรงงานประมาณต้นทุนการผลิตโดยกำหนดน้ำหนักของผลผลิต ($Y = 212.50977 + 0.2990897X$)

11.41 จากข้อ 11.40 จงหา $S_{y/x}$ (หรือ S_E = standard error of estimate) และสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ และจงอธิบายความหมายของค่าทั้งสอง ($S_{y/x} = 40.634604, r^2 = .8389$)

11.42 จากข้อ 11.40 ภายหลังจากโรงงานได้สมการประมาณค่าแล้ว โรงงานได้พบงานวิจัยชิ้นหนึ่ง ซึ่งอ้างว่าเมื่อเพิ่มจำนวนผลิต 1 ปอนด์ จะทำให้ต้นทุนเพิ่มขึ้น $0.24 (incremental cost) เมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้ในข้อ 11.40 จะมีความขัดแย้งกันว่า incremental cost ต่างจาก $0.24 ต่อปอนด์ที่ระดับนัยสำคัญเท่าใด (จงหา p-value)

11.43 จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 80% ของต้นทุนการผลิตเมื่อกำหนดน้ำหนักให้ (ต่อจากข้อ 11.40)

11.44 จากข้อ 11.40 จงทดสอบ Ho : $\beta = 0$ (T = 6.45; ปฏิเสธ Ho)

11.45 จากข้อ 11.40 จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 90% ของต้นทุนถัวเฉลี่ยสำหรับการผลิต 500 ปอนด์ ($337.6 < \mu_{Y/x_0} < 386.5$)

11.46 โรงงานต้องการประมาณต้นทุนการผลิตเมย 500 ปอนด์ เพื่อจะได้ยื่นประมูลกับโรงแรมแห่งหนึ่ง และต้องการทราบช่วงเชื่อมั่น 80% ของค่าประมาณ จงหาช่วงเชื่อมั่นดังกล่าว ($302.39 < Y_a < 421.72$)