บทที่ 5
ทฤษฎีการตัดสินใจ
(Decision Theory)

ทฤษฎีการตัดสินใจนั้นมองปัญหาทางสถิติเหมือนกับเกมส์ที่มีผู้เล่น 2 ฝ่าย ฝ่ายหนึ่งคือนักสถิติและอีกฝ่ายหนึ่งคือเหตุการณ์ธรรมชาติ ซึ่งฝ่ายนักสถิตินั้นจะเลือกกโลบายต่าง ๆ โดยไม่ทราบว่า อีกฝ่ายหนึ่งคือ ธรรมชาติจะเลือกกโลบายอะไรและผลตอบแทน (Payoff) ก็คือผลลัพธ์ที่ได้จากการตัดสินใจทั้งสองฝ่าย

เป็นที่บ่งแน่ชัดแล้วว่า สถิติคือวิธีการหนึ่งของการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน และความไม่แน่นอนนี้เราสามารถวัดได้ในรูปของทฤษฎีความน่าจะเป็น ซึ่งเราได้ศึกษาทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็นมาแล้วในบทที่ 3 และทฤษฎีความน่าจะเป็นนี้มีบทบาทสำคัญในกระบวนการตัดสินใจ ที่มีทั้งการตัดสินใจในสภาวะที่มีข้อมูลข่าวสารสมบูรณ์ และการตัดสินใจในสภาวะที่มีข้อมูลข่าวสารไม่สมบูรณ์หรือในสภาวะที่ไม่แน่นอน และส่วนมากแล้วเรามักจะทำการตัดสินใจในสภาวะที่มีข้อมูลข่าวสารไม่สมบรูณ์ เนื่องจากว่าการตัดสินใจในสภาวะที่มีข้อมูลข่าวสารสมบรูณ์นั้นมักจะเกิดไม่บ่อยนัก ดังนั้นแนวความคิดเกี่ยวกับความน่าจะเป็นที่นำมาใช้ ส่วนมากมักจะเป็นความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัย (Subjective probability)

ในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีการตัดสินใจนั้นจะกล่าวถึงการเลือกเกณฑ์ในการตัดสินใจภายใต้สภาวะการณ์ต่าง ๆ ซึ่งสามารถจะประเมินผลได้ และใช้เกณฑ์ต่าง ๆ เหล่านั้นมาพิจารณาหาทางเลือกที่ดีที่สุด

<u>โครงสร้างของการตัดสินใจ</u>

ในเรื่องการตัดสินใจนั้นมีสิ่งที่ควรจะทราบและทำความเข้าใจให้ชัดเจนหลายอย่างด้วยกัน โดยเริ่มจากประการแรกคือ ความหมายของคำว่าการตัดสินใจว่าหมายถึงอะไร

การตัดสินใจนั้นหมายถึง การเลือกแนวทางกระทำของผู้ตัดสินใจ โดยเลือกแนวทางกระทำที่ดีที่สุด จากทางเลือกแนวทางกระทำที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ประการที่ 2 การทำการตัดสินใจเป็นการทำนาย ในการตัดสินใจผู้ตัดสินใจจะต้องทำนายผลลัพธ์ของแต่ละแนวทางการเลือกการกระทำอย่างอื่น ๆ ทั้งหมด

(alternative course of action) ได้ในขณะที่การทำการตัดสินใจและผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในอนาคตเรียกว่า เหตุการณ์ หรือมักเรียกว่า สภาวการณ์นอกบังคับ (States of nature) ซึ่งสภาวการณ์นอกบังคับ หมายถึง ผลร่วม (Combination) ใด ๆ ขององค์ประกอบที่เกิดขึ้นตามกฎของการสุ่ม (Laws of randomness) เช่นสภาพของสังคม ดินฟ้าอากาศความพอใจของผู้บริโภค การเปลี่ยนแปลงทางเทคโนโลยี เป็นต้น

ประการที่ 3 การตัดสินใจนั้นเป็นการตัดสินใจภายใต้สภาวการณ์ที่ไม่แน่นอน สำหรับแต่ละแนวทางการเลือกการกระทำ ซึ่งจะมีผลลัพธ์ต่าง ๆ ที่เรียกว่า ผลตอบแทน (Payoff) ในการที่จะวัดผลตอบแทนของแต่ละทางเลือกของทุก ๆ การกระทำนั้น ในทางบริหารธุรกิจและทางเศรษฐศาสตร์มักจะวัดในรูปของเงินตรา (Money)และอัตถประโยชน์(Utility)

สำหรับในแต่ละการกระทำ (action) ที่กำหนดให้หนึ่ง ๆ จะมีผลตอบแทน (Payoff) สำหรับแต่ละการกระทำของทุก ๆ สภาวะการณ์นอกบังคับ (State of nature) ตารางที่ประกอบด้วยผลตอบแทนทั้งหมดสำหรับแนวทางการเลือกการกระทำทั้งหมดซึ่งขึ้นอยู่กับสภาวการณ์นอกบังคับต่าง ๆนั้นเรียกว่า ตารางสัมพันธ์ของผลตอบแทน

(Payoff table หรือ Payoff matrix) ซึ่งตารางนี้อาจจะอธิบายในเทอมของเงินตราหรือของอัตถประโยชน์ก็ได้

ประการสุดท้าย จาก Payoff matrix หนึ่งที่กำหนดให้ เรามักจะตั้งกโลบาย (Strategy) ขึ้นมาเพื่อใช้ในการเลือกแนวทางการกระทำที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งจุดประสงค์ของการทำการตัดสินใจก็คือเลือกการกระทำที่ดีที่สุด เพื่อให้ได้ตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

ตารางของผลตอบแทน (Payoff table) สรุปคุณลักษณะทั้งหมดของปัญหาการตัดสินใจได้ดังนี้

สภาวการณ์นอกบังคับ (States of nature)		θ_1	$\theta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \theta_j$
กโลบาย (Strategies)	a_1	X_{11}	$X_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots X_{1j}$
	a_2	X_{21}	$X_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots X_{2j}$
	a_3	X_{31}	$X_{32} \ldots\ldots\ldots\ldots X_{3j}$
	a_i	X_{i1}	$X_{i2} \ldots\ldots\ldots\ldots X_{ij}$

เมื่อ $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots \theta_j$ คือสภาวการณ์นอกบังคับ (States of nature)

$a_1, a_2 \ldots\ldots a_i$ คือกโลบาย (Strategies)

และ $X_{11}, X_{12} \ldots\ldots X_{ij}$ คือผลตอบแทน (Payoff)

หรือ ถ้าให้ action set = A

$$A = \{i\} \; i = 1,2 \ldots$$

และให้ state set = s

$$S = \{\theta_j\} \; ; \; j = 1,2,\ldots$$

ในแต่ละเซทของ action และ State ที่กำหนดให้ ผู้ทำการตัดสินใจสามารถที่จะหาเซทของผลตอบแทนที่สัมพันธ์กับแต่ละ action ที่ขึ้นอยู่กับข้อมูลข่าวสารที่มีอยู่ในรูปของผลได้และผลเสีย (gains and losses) ที่จะเป็นไปได้ ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ผลตอบแทนเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง (เงินตราหรืออัตถประโยชน์) ที่ผู้ตัดสินใจเป็นผู้กำหนดให้และค่านี้จะเขียนแทนด้วย $X(\theta_{ij})$ หรือ $X(a_i, \theta_j)$ หรือ X_{ij} หมายถึงผลตอบแทนที่ผู้ตัดสินใจจะได้รับ ในการเลือก Action a_i เมื่อ State of nature เป็น θ_j จาก S

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทผู้ผลิตเครื่องใช้ในบ้านแห่งหนึ่งกำลังพิจารณา กโลบาย 3 อย่างเกี่ยวกับมอเตอร์ไฟฟ้าของเครื่องใช้แบบใหม่ที่บริษัทกำลังจะนำออกขาย ซึ่งกโลบายเป็นดังนี้

กโลบาย 1 บริษัทจะใช้นโยบายเดิม คือซื้อมอเตอร์ที่ประกอบแล้ว

กโลบาย 2 บริษัทจะซื้อส่วนประกอบต่าง ๆ ของมอเตอร์แล้วนำมาประกอบเอง

กโลบาย 3 บริษัทจะผลิตมอเตอร์และส่วนต่าง ๆ เอง

ผลตอบแทนของแต่ละกโลบายขึ้นอยู่กับความนิยมของผู้ใช้เครื่องว่า สูงหรือต่ำ (สภาวการณ์นอกบังคับ) ถ้าให้สภาวการณ์ทั้งสอง คือ ผู้ใช้นิยมมาก (θ_1) และผู้ใช้นิยมน้อย (θ_2)

ตารางผลตอบแทน (Payoff table) ที่ผู้จัดการของบริษัทประมาณได้ สรุปได้ดังนี้

สภาวการณ์นอกบังคับ	ผู้ใช้นิยมน้อย (θ_1)	ผู้ใช้นิยมมาก (θ_2)
กโลบาย a_1 ซื้อมอเตอร์	40	110
a_2 ประกอบมอเตอร์	30	150
a_3 ผลิตมอเตอร์	− 40	180

ถ้าผลตอบแทนมีหน่วยเป็น 100,000 บาท

จากตารางจะเห็นได้ว่า ถ้าสินค้าใหม่ได้รับความนิยมสูง บริษัทก็จะเลือกกโลบาย 3 (a_3) เพราะได้กำไรสูงสุด แต่ถ้าได้รับความนิยมน้อย กโลบาย 3 (a_3) จะขาดทุนเพราะค่าใช้จ่ายคงที่สูง ส่วนกโลบาย 2 และ 3 จะได้ผลตอบแทนสุทธิเล็กน้อย ถ้าได้รับความนิยมน้อยและจะได้ผลตอบแทนสุทธิมากขึ้น ถ้าได้รับความนิยมสูง

<u>ชนิดของการตัดสินใจ</u> (Kinds of Decisions)

นักตัดสินใจแบ่งประเภทการตัดสินใจได้เป็น 4 ประเภทดังนี้ คือ

1. การตัดสินใจภายใต้ความแน่นอน (Decision under certainty)
2. การตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง (Decision under risk)
3. การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน (Decision under uncertainty)
4. การตัดสินใจภายใต้การแข่งขันหรือการขัดแย้ง (Decision under competitive conditions or conflict)

สำหรับในที่นี้จะกล่าวถึงการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยงและการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนเท่านั้น

<u>การตัดสินใจภายใต้การเสี่ยง</u> (Decision under risk)

การตัดสินใจแบบนี้ใช้เมื่อปัญหาการตัดสินใจนั้น มีจำนวนสภาวการณ์มาก ๆ

และผู้ตัดสินใจทราบความน่าจะเป็นที่สภาวการณ์ แต่ละอย่างจะเกิดขึ้น คือไม่สามารถระบุสภาวการณ์ด้วยความแน่ใจได้ แต่สามารถระบุได้ด้วยความน่าจะเป็นที่ทราบค่า

สำหรับเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจภายใต้การเสี่ยงนี้ นักตัดสินใจใช้เกณฑ์การตัดสินใจที่ใช้ค่าคาดหวังของผลตอบแทน (Expected value of the payoff, EP) หรือเรียกอีกอย่างว่า เกณฑ์การตัดสินใจแบบเบยส์ (Baysian decision criterion) ของกโลบายแต่ละอย่างผลตอบแทนคาดหวังของกโลบายนั้นจะเป็นผลรวมของผลตอบแทนที่เป็นไปได้ ในสภาวการณ์ต่าง ๆ คูณด้วยความน่าจะเป็นที่สอดคล้องกัน

ดังนั้นตามเกณฑ์นี้ผู้ตัดสินใจจะคำนวณผลตอบแทนคาดหวังของแต่ละทางเลือก แล้วเลือกทางเลือกที่มีผลตอบแทนคาดหวังที่ดีที่สุด คือถ้าผลตอบแทนเป็นกำไรก็จะเลือกทางเลือกที่มีผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด แต่ถ้าผลตอบแทนเป็นต้นทุนค่าใช้จ่าย หรือค่าสูญเสียโอกาสก็จะเลือกทางเลือกที่มีค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่ต่ำที่สุด นั่นคือเกณฑ์ตัดสินใจแบบนี้จะเลือกกโลบายที่มี

$$EP(a) = E\left[X(a,\theta)\right] = \sum_j X_{ij}\, f(\theta_j)$$ มากที่สุด

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ Payoff table เป็นดังนี้

Act	state of nature		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	2.5	1.5	- 1.0
a_2	1.6	2.0	0.0
a_3	1.2	1.2	0.0

และกำหนด $f(\theta_j)$ ดังนี้

$$f(\theta_j) = \begin{cases} \frac{4}{7} & \text{สำหรับ } \theta_j = \theta_1, \\ \frac{2}{7} & \text{สำหรับ } \theta_j = \theta_2, \\ \frac{1}{7} & \text{สำหรับ } \theta_j = \theta_3, \end{cases}$$

จากโจทย์เราสามารถคำนวนหาผลตอบแทนคาดหวังของแต่ละกโลบายได้ ดังนี้

$$EP(a_1) = 2.5(4/7)+1.5(2/7)+(-1.0)(1/7) = 1.7143$$

$$EP(a_2) = 1.6(4/7)+2.0(2/7)+0.0(1/7) = 1.4857$$

$$EP(a_3) = 1.2(4/7)+1.2(2/7)+0.8(1/7) = 1.1429$$

ดังนั้นเลือกกโลบาย a_1 เพราะกุกโลบาย a_1 ให้ผลตอบแทนคาดหวังสูงสุดเกณฑ์ผลตอบแทนค่าคาดหวังสามารถนำไปใช้กับการสูญเสีย (Regret) หรือค่าเสียโอกาส (Opportunity loss) ได้เช่นเดียวกัน โดยเลือกกโลบายที่มี

$$EL(a) = E\left[L(a, \theta)\right] = \sum L(a_i, \theta_j)\ f(\theta_j)$$

ต่ำที่สุด เมื่อ $L(a_i, \theta_j)$ คือค่าเสียโอกาสสำหรับกโลบาย a_i เมื่อสภาวการณ์นอกบังคับเป็น θ_j โดยที่

$$L(a_i, \theta_j) = \left| X(a_i, \theta_j) - X(a^*, \theta_j) \right|$$

เมื่อ a^* คือกโลบายที่ดีที่สุด (optimal act) สำหรับสภาวการณ์ θ_j และ $X(a^*, \theta_j)$ คือค่าของฟังชั่นผลตอบแทน สำหรับ optimal act เมื่อ State of nature เป็น θ_j

ค่าสูญเสียหรือค่าเสียโอกาสวัดได้จากผลต่างระหว่างผลตอบแทนที่ได้จริงถ้าสภาวะการณ์ต่าง ๆ เกิดขึ้นกับผลตอบแทนที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดตารางผลตอบแทน (Payoff table) เป็นดังนี้

Act	stats of nature		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	2.5	1.5	− 1.0
a_2	1.6	2.0	0.0
a_3	1.2	1.2'	0.8

ถ้านักตัดสินใจ ทราบว่า สภาวะการณ์ θ_3

$\therefore$ Optimal act; $a^* = a_3 = 0.8$

ดังนั้น เราสามารถสร้างตารางสัมพันธ์ของการสูญเสียหรือค่าเสียโอกาส (Regret or Opportunity Loss Table) ได้ดังนี้

Act	State of nature		
	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	0.0	0.5	1.8
a_2	0.9	0.0	0.8
a_3	1.3	0.8	0.0

จากตาราง คำนวนค่าเสียโอกาสคาดหวัง สำหรับทางเลือกต่าง ๆ ได้จากสูตร

$$EL(a) = E\left[L(a,\theta)\right] = \sum_j L(a_i, \theta_j) f(\theta_j)$$

$$\text{โดยที่ } f(\theta_j) = \begin{cases} \frac{4}{7} & \text{เมื่อ } \theta_j = \theta_1 \\ \frac{2}{7} & \text{เมื่อ } \theta_j = \theta_2 \\ \frac{1}{7} & \text{เมื่อ } \theta_j = \theta_3 \end{cases}$$

$$EL(a_1) = 0.0(4/7) + 0.5(2/7) + 1.8(1/7) = 0.4$$

$$EL(a_2) = 0.9(4/7) + 0.0(2/7) + 0.8(1/7) = 0.6$$

$$EL(a_3) = 1.3(4/7) + 0.8(2/7) + 0.0(1/7) = 0.9$$

ดังนั้นเลือกกโลบาย a_1 เพราะกโลบาย a_1 ให้ค่าเสียโอกาสต่ำสุดจากตัวอย่างทั้งสองจะเห็นว่า ทางเลือกที่ดีที่สุดจะเป็นทางเลือกเดียวกัน คือ a_1 ไม่ว่าจะเป็นแนวความคิดของกำไรสุทธิหรือแนวความคิดของค่าเสียโอกาส

<u>การตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน</u> (Decision under Uncertainty)

การตัดสินใจแบบนี้ใช้เมื่อไม่ทราบความน่าจะเป็นที่สภาวการณ์นอกบังคับต่าง ๆ จะเกิดขึ้น แต่ผู้ตัดสินใจก็ยังสามารถระบุสภาวการณ์และผลตอบแทนที่เกี่ยวข้องได้

สำหรับเกณฑ์ที่จะหาทางเลือกที่ดีที่สุดมีอยู่ 2 แบบด้วยกัน คือ เกณฑ์ตัดสินใจแบบไม่สุ่มตัวอย่าง (หรือแบบที่ไม่ได้รวบรวมข้อมูลข่าวสารจากตัวอย่าง) และเกณฑ์ตัดสินใจแบบสุ่มตัวอย่าง (หรือแบบรวบรวมข้อมูลข่าวสารจากตัวอย่าง)

1. <u>การตัดสินใจแบบไม่สุ่มตัวอย่าง</u> (Decision without Sampling)

การตัดสินใจลักษณะนี้เป็นการตัดสินใจที่ไม่อาศัยการรวบรวมข้อมูลจากตัวอย่างที่เกี่ยวกับสภาวการณ์แต่อาศัยข้อมูลที่มีอยู่มาช่วยในการพิจารณาตัดสินใจ ซึ่งเกณฑ์ในการเลือกกโลบายที่ดีที่สุดของการตัดสินใจแบบนี้มีอยู่หลายเกณฑ์ด้วยกัน คือ

ก. <u>เกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยสุด</u> (Maximin Criterion)

การตัดสินใจแบบนี้ ผู้ตัดสินใจจะนำเอาผลที่ได้ต่ำสุดของทุก ๆ กโลบายมาเปรียบเทียบกันแล้วเลือกกโลบายที่ให้ได้สูงสุด (Maximize minimum payoff) เพราะผู้ตัดสินใจถือว่า ผลประโยชน์ขั้นต่ำ (Worst) จะเกิดขึ้น ดังนั้นจะเห็นได้ว่าผู้ที่ใช้เกณฑ์การตัดสินใจแบบนี้มักจะเป็นผู้ที่มองโลกในแง่ร้าย (Pessimist) เพราะคิดว่าเหตุการณ์ที่เลวร้ายที่สุดจะเกิดขึ้น ซึ่งถ้าใช้เกณฑ์นี้ไปนาน ๆ ก็จะทำให้ไม่มีการริเริ่มดำเนินกิจการใหม่ ดังนั้นเกณฑ์นี้จึงมีจุดอ่อนที่ไม่ได้คิดถึงผลประโยชน์ สูงสุดเลย

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าให้ Payoff table เป็นดังนี้

Act	State of nature			ผลขั้นต่ำ (Worst or Minimum)
	o_1	o_2	o_3	
a_1	2.5	1.5	− 1.0	− 1.0
a_2	1.6	2.0	0.0	0.0
a_3	1.2	1.2	0.8	0.8

จะเห็นว่า สำหรับกโลบาย a_1 ผลขั้นต่ำ (Worst or Minimum) คือ − 1.0 ส่วนกโลบาย a_2 ผลขั้นต่ำคือ 0.0 และกโลบาย a_3 ผลขั้นต่ำคือ 0.8 ดังนั้นถ้าใช้เกณฑ์เพิ่มค่าน้อยที่สุด ผู้ตัดสินใจจะเลือกกโลบาย a_3 เพราะ

กโลบาย a_3 นั้นให้ผลขั้นต่ำสูงสุด ในบรรดาผลขั้นต่ำของกโลบายทั้งหมด

ข. เกณฑ์เพิ่มค่าที่มากที่สุด (Maximax Criterion)

การตัดสินใจแบบนี้ ผู้ตัดสินใจจะนำผลได้ที่สูงสุดของแต่ละกโลบายมาเปรียบเทียบกันแล้วเลือกกโลบายที่ให้ผลได้สูงสุด (Maximize maximum payoff) เพราะผู้ตัดสินใจถือว่าผลประโยชน์สูงสุดจะเกิดขึ้น ซึ่งผู้ที่ใช้เกณฑ์นี้ มักจะเป็นผู้ที่มองโลกในแง่ที่ดี (Optimist) ซึ่งตรงกันข้ามกับเกณฑ์เพิ่มค่าที่น้อยที่สุด

ตัวอย่าง จากตาราง Payoff เดิมจะเห็นได้ว่าสำหรับกโลบาย a_1 ผลดีที่สุดคือ 2.5 ส่วนกโลบาย a_2 ให้ผลดีที่สุดคือ 2.0 และกโลบาย a_3 ให้ผลดีที่สุดคือ 1.2 ซึ่งสรุปได้ดังนี้

กโลบาย	ผลดีที่สุด (Best or Maximum Payoff)
a_1	2.5
a_2	2.0
a_3	1.2

ดังนั้นถ้าใช้เกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด ผู้ตัดสินใจจะเลือกกโลบาย a_1 เพราะกโลบาย a_1 ให้ผลดีที่สุด

ค. เกณฑ์เฮอร์วิคซ (Hurwicz Criterion)

เกณฑ์นี้นำเอาส่วนเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของผลตอบแทนที่มากที่สุดกับน้อยที่สุด ในแต่ละกโลบายเป็นเกณฑ์ตัดสินใจโดยผู้ทำการตัดสินใจจะเลือกน้ำหนักที่สะท้อนถึงทัศนคติเชิง จิตวิสัย (Subjective Opinion) ของเขาเองและน้ำหนักนี้ Hurwicz ถือว่าเป็นดัชนีที่บอกถึงระดับการมองโลกในแง่ดี (Coefficient of Optimism) แทนด้วย α (โดยที่ α มีค่าระหว่าง 0 กับ 1) ซึ่งขึ้นอยู่กับผู้ตัดสินใจว่าจะมีแนวโน้มไปทางการมองในแง่ร้ายหรือในแง่ดี ถ้าเป็นผู้มองโลกในแง่ดีค่าของ α จะเข้าใกล้ 1 และถ้าเป็นผู้มองโลกในแง่ร้ายค่าของ α จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้นดัชนีที่บอกถึงระดับการมองโลกในแง่ร้าย (Coefficient of Pessimism) คือ $(1-\alpha)$ สำหรับเกณฑ์นี้ เราจะเปรียบเทียบทางเลือกหรือกโลบายโดยใช้ H เมื่อ

$$H = 2(\max) + (1-\alpha)(\min)$$

โดยเลือกทางเลือกหรือกโลบายที่มี H สูงสุดเป็นกโลบายที่ดีที่สุด ถ้าให้ $\alpha = 1/4$

จากตัวอย่างข้างต้น สามารถสรุปได้ดังนี้

Act	ผลตอบแทนมากสุด (Max. Payoff)	ผลตอบแทนต่ำสุด (Min. Payoff)	H
a_1	2.5	- 1.0	$2.5(\frac{1}{4})$ $(-1.0)(\frac{3}{4}) = -.1$
a_2	2.0	0.0	$2.0(\frac{1}{4})$ $0.0(\frac{3}{4}) = 0.5$
a_3	1.2	0.8	$1.2(\frac{1}{4})$ $0.8(\frac{3}{4}) = 0.9$

ดังนั้นถ้าใช้เกณฑ์นี้ผู้ตัดสินใจจะเลือกกโลบาย a_3 ซึ่งทำให้ 2= 1 เกณฑ์นี้จะเป็นเกณฑ์เพิ่มค่าน้อยที่สุด แต่ถ้า 2= 0 เกณฑ์นี้ก็จะเป็นเกณฑ์เพิ่มค่าที่มากสุด

ง. <u>เกณฑ์ลดค่าที่มากที่สุด</u> (Minimax or Regret Criterion)

เกณฑ์นี้เน้นที่ค่าเสียโอกาส (Opportunity Cost) ของการตัดสินใจที่ผิด ซึ่งการตัดสินใจแบบนี้ต้องสร้างตารางสูญเสีย (Regret or loss table) และในแต่ละทางเลือก ผู้ตัดสินใจจะคำนวนการสูญเสียที่มากที่สุดที่เขาจะได้รับตามสภาวการณ์ต่าง ๆ ทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นแล้ว จึงเลือกทางเลือกที่มีการสูญเสียน้อยที่สุด ในพวกที่มากที่สุดเหล่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ Regret or Loss table เป็นดังนี้

Act	State of nature			ค่าสูญเสียที่มากที่สุด
	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	0.0	0.5	1.8	1.8
a_2	0.9	0.0	0.8	0.9
a_3	1.3	0.8	0.0	1.3

จะเห็นว่า a_2 เป็นทางเลือกที่ดีที่สุด สำหรับเกณฑ์การตัดสินใจแบบนี้

จ. <u>เกณฑ์ของลาปลาส</u> (Laplace Criterion)

เกณฑ์นี้ใช้หลักของเหตุผลที่ไม่เพียงพอ (Principle of Insufficient Reason) คือเมื่อไม่ทราบความน่าจะเป็นเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของสภาวการณ์นอกบังคับ θ_j $(j = 1,2,\text{--}n)$ ก็ให้กำหนดความน่าจะเป็นให้แก่สภาวการณ์ต่าง ๆ นั้นเท่า ๆ กันดังนั้น ค่าคาดหวังของผลตอบแทนของแต่ละกโลบาย a_i จะเป็น

$$EP(a_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

แล้วเลือกกโลบายที่ให้ผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด

<u>ตัวอย่าง</u> จากตาราง Payoff ดังต่อไปนี้

Act	State of nature		
	θ_1	θ_2	θ
a_1	i.5	1.5	− 1.0
a_2	1.6	2.0	0.0
a_3	1.2	1.2	0.8

จะได้ผลตอบแทนคาดหวังของแต่ละกโลบายดังนี้

$$EP(a_1) = \frac{1}{3}(2.5 + 1.5 - 1.0) = 1.0$$

$$EP(a_2) = \frac{1}{3}(1.6 + 2.0 + 0.0) = 1.2$$

$$EP(a_3) = \frac{1}{3}(1.2 + 1.2 + 0.8) = 1.1$$

ดังนั้นตามเกณฑ์นี้ ผู้ตัดสินใจจะเลือกนโยบาย a_2 เนื่องจากนโยบาย a_2 ให้ผลตอบแทนคาดหวังสูงสุด

2. <u>การตัดสินใจแบบสุ่มตัวอย่าง</u> (Decision with Sampling)

การตัดสินใจแบบนี้ต้องมีข้อมูลข่าวสารเพิ่มเติมเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของสภาวการณ์นอกบังคับ ซึ่งข้อมูลที่ได้นี้จะนำไปใช้ขยายและปรับปรุงความน่าจะเป็นก่อนสุ่มตัวอย่างที่เรียกว่า Prior Probability ดังนั้นจะเห็นว่าการตัดสินใจแบบนี้ใช้ทั้งข้อมูลข่าวสารก่อนสุ่มตัวอย่างและข้อมูลข่าวสารจากตัวอย่าง ช่วยในประกอบการพิจารณาหานโยบายที่ดีที่สุด โดยผู้ตัดสินใจจะพยายามหาข้อมูลเพิ่มเติมจากการสุ่มตัวอย่าง เพื่อมาปรับปรุง Prior Probability ที่มีอยู่ก่อนการสุ่มตัวอย่างให้เป็นความน่าจะเป็นใหม่และความน่าจะเป็นใหม่นี้เรียกว่า ความน่าจะเป็นหลังการสุ่มตัวอย่าง (Posterior Probability) ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นเกี่ยวกับสภาวการณ์และหาได้จากทฤษฎีเบยส์ (Bayes' theorem)

<u>การหา Posterior probability</u>

กำหนดให้ State of nature เป็น random variable

$$S = \{\theta_j\} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots$$

$f(z|\theta)$ = ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ z เมื่อกำหนด θ

เมื่อ z เป็น random variable ที่แทนผลที่ปรากฏออกมา (outcome) จากการทดลอง

$g(\theta)$ = ความน่าจะเป็นของ θ หรือคือความน่าจะเป็นก่อนการสุ่มตัวอย่าง (Prior probability)

$f(z,\theta)$ = ความน่าจะเป็นร่วมของ Z และ S ซึ่งหาได้จากสูตร

$f(z,\theta)$ = $f(z|\theta) \cdot g(\theta)$

และ $f(z)$ = ความน่าจะเป็นทางเดียวของ Z ซึ่งหาได้จาก

$$f(z) = \underset{\theta}{E}\, f(z|\theta)$$

$$= \sum_{\theta} f(z|\theta) \cdot g(\theta)$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นหลังการทดลอง (Posterior probability) จะหาได้จาก Bayes' Formula ดังนี้

ให้ $f(\theta|z)$ = ความน่าจะเป็นของ θ โดยมีเงื่อนไข $Z = z$

$$f(\theta|z) = \frac{f(z,\theta)}{f(z)}$$

$$= \frac{f(z|\theta).g(\theta)}{f(z)}$$

$$= \frac{f(z|\theta).g(\theta)}{\sum_{\theta} f(z|\theta).g(\theta)}$$

$f(\theta|z)$ เป็น Posterior probability ของ θ เมื่อกำหนด $Z = z$

<u>ตัวอย่าง</u>

กำหนดให้

	$f(z\|\theta_1)$	$f(z\|\theta_2)$
z_1	.8	.1
z_2	.2	.9

และ

θ	θ_1	θ_2
$g(\theta)$	.7	.3

จากตารางจะได้ $f(z_1) = f(z_1|\theta_1).g(\theta_1) + f(z_1|\theta_2).g(\theta_2)$

$= (.8)(.7)+(.1)(.3) = .59$

$$f(z\ \ ) = f(z_2|\theta_1).g(\theta_1) + f(z_2|\theta_2).g(\theta_2)$$

$$= (.2)(.7) + (.9)(.3) = .41$$

ข้อสังเกต $f(z_1) + f(z_2)$ ต้อง เท่ากับ 1 เสมอ

Posterior probability หาได้ดังนี้

$$f(\theta_1|z_1) = \frac{f(z_1|\theta_1).g(\theta_1)}{\sum_\theta f(z_1|\theta).g(\theta)}$$

$$= \frac{(.8)(.7)}{.59} = \frac{56}{59}$$

$$f(\theta_1|z_2) = \frac{f(z_2|\theta_1).g(\theta_1)}{\sum_\theta f(z_2|\theta).g(\theta)}$$

$$= \frac{(.2)(.7)}{.41} = \frac{14}{41}$$

$$f(\theta_2|z_1) = \frac{f(z_1|\theta_2).g(\theta_2)}{\sum_\theta f(z_1|\theta).g(\theta)}$$

$$= \frac{(.1)(.3)}{.59} = \frac{3}{59}$$

$$f(\theta_2|z_2) = \frac{f(z_2|\theta_2).g(\theta_2)}{\sum_\theta f(z_2|\theta).g(\theta)}$$

$$= \frac{(.9)(.3)}{.41} = \frac{27}{41}$$

Posterior probabilityมีประโยชน์ในการใช้หา Bayes' Stategy โดยการหา Posterior expected loss ซึ่ง Posterior expected loss ในกรณีที่มี data หาได้จาก

$$E\left[l(\theta,a)\right] = \sum l(\theta,a).f(\theta|z)$$

แล้วเลือก action ที่ Minimize posterior expected lossและ action ที่ได้เรียกว่า Bayes' action หรือ Bayes's strategy

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา Bayes' Stategy กำหนดให้ Prior Probability function เป็นดังนี้

	$f(z\|\theta_1)$	$f(z\|\theta_2)$
z_1	.8	.1
z_2	.2	.9

θ	θ_1	θ_2
$g(\theta)$	.7	.3

และ Loss table เป็นดังนี้

Act	θ_1	θ_2
a_1	4	4
a_2	5	0
a_3	2	5

ซึ่งจากตัวอย่างข้างต้น เราหา $f(z_1)$ ได้เท่ากับ .59 และ $f(z_2) = .41$

และ Posterior probability หาได้โดยสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

	θ_1	θ_2
$f(\theta\|z_1)$	$^{56}/_{59}$	$^{3}/_{59}$
$f(\theta\|z_2)$	$^{14}/_{41}$	$^{27}/_{41}$

ซึ่งเราจะ Posterior expected loss ได้ดังนี้

เมื่อ $Z = z_1$; $E\left[l(\theta, a_1)\right] = \sum_{\theta} l(\theta, a_1).f(\theta|z_1)$

$$= 4 \times \frac{56}{59} + 4 \frac{3}{59} = \frac{236}{59}$$

เมื่อ $Z = z_2$; $E\left[l(\theta, a_1)\right] = \sum l(\theta, a_1).f(\theta|z_2)$

$$= 4 \times \frac{14}{41} \text{ T-4 } \times \frac{27}{41} = \frac{164}{41}$$

เมื่อ $Z = z_1$; $E\left[l(\theta, a_2)\right] = \sum_{\theta} l(\theta, a_2).f(\theta|z_1)$

$$= 5 \times \frac{56}{59} + 0 \times \frac{3}{59} = \frac{280}{59}$$

เมื่อ $Z = z_2$; $E\left[l(\theta, a_2)\right] = \sum_{\theta} l(\theta, a_2).f(\theta|z_2)$

$$= 5 \times \frac{14}{41} + 0 \times \frac{27}{41} = \frac{70}{41}$$

เมื่อ $Z = z_1$

$$E\left[l(\theta, a_3)\right] = \sum_{\theta} l(\theta, a_3)\ f(\theta|z_1)$$

$$= 2 \times \frac{56}{59} + 5 \times \frac{3}{59} = \frac{127}{59}$$

เมื่อ $Z = z_2$

$$E\left[l(\theta, a_3)\right] = \sum_{\theta} l(\theta, a,)\ f(\theta|z_1)$$

$$= 2 \times \frac{14}{41} + 5 \times \frac{3}{41} = \frac{163}{41}$$

ตาราง Posterior expected loss

	z_1	z_2
a_1	$\frac{236}{59}$	$\frac{164}{41}$
a_2	$\frac{280}{59}$	$\frac{70}{41}$
a_3	$\frac{127}{59}$	$\frac{163}{41}$

Bayes ' Stategy คือเลือก action a ที่ Minimize Posterior expected loss ตาม ผลที่ปรากฏออกมาจากการทดลอง (Z) ดังนี้ คือ

1. ถ้าผลที่ปรากฏออกมาจากการทดลองเป็น z_1 คือ ถ้า $Z = z_1$
   Bayes' Strategy คือ a_3 เพราะว่ากโลบาย a_3 ให้ค่า Posterior expected loss ที่ต่ำที่สุด คือ $\frac{127}{59}$

2. ถ้า $Z = z_2$
   Bayes' strategy คือ a_2 เพราะกโลบาย a_2 ให้ค่า Posterior expected loss ที่ต่ำที่สุดคือ $\frac{70}{41}$.