บทที่ 4
ตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Veriable)

จุดมุ่งหมายของบทนี้ก็เพื่อที่จะให้ทราบถึงความหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable) การสร้างฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม (Probability function of random varible) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม (Cumulative distribution function of random variable) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข (Conditional probability function) ความเป็นอิสระกันของตัวแปรเชิงสุ่ม (Independence of random variable) ตลอดจนการหาค่าคาดหมาย (Expectation) ค่าความแปรปรวน (Variance) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation) ของตัวแปรเชิงสุ่ม เพื่อบรรยายถึงลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม

มีการทดลองเชิงสุ่มบางประเภทที่ให้ผลการทดลองเป็นตัวเลข ซึ่งการทดลองประเภทนี้มักจะมีการวัดหรือนับปริมาณ เช่น ถ้าจะนับจำนวนรถที่มาซ่อมที่อู่ระหว่างเวลา 8.30 - 12.00 น. ผลลัพธ์จากการนับ (ซึ่งเป็นตัวเลข) เป็นผลจากการทำการทดลองเชิงสุ่ม เพราะเราไม่ทราบล่วงหน้าและการนับว่า จะมีรถเข้ามาซ่อมที่อู่กี่คัน ในกรณีนี้ กลุ่มผลการทดลอง (Sample space)
$S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

การนับหรือการวัด ซึ่งเป็นการทดลองเชิงสุ่มเช่นนี้ เรียกว่า การนับเชิงสุ่ม (Random Counting) หรือ การวัดเชิงสุ่ม (Random Measurement) ก่อนที่จะทำการนับหรือวัดแล้วเสร็จ ตัวเลขที่จะได้ เป็นผลลัพธ์ มักจะแทนด้วยอักษรตัวใหญ่ เช่น X และเรียก X ว่า เป็น "ตัวแปรเชิงสุ่ม" (Random Variable) และ X จะเป็นเพียงสัญลักษณ์ แทนตัวเลขที่ยังไม่ทราบว่าจะเป็นค่าใด จนกว่าจะทำการนับหรือวัด เชิงสุ่มแล้วเสร็จ ดังนั้น X จึงเป็นเพียงสัญลักษณ์หนึ่ง ซึ่งแปรไป และขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของ การนับ หรือ วัดเชิงสุ่มว่าจะเป็นอย่างไร และเมื่อทำการนับหรือวัดเชิงสุ่มแล้วเสร็จ ตัวแปรเชิงสุ่ม X ก็จะมีผลลัพธ์เป็นค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะ ซึ่งค่าของตัวแปรเชิงสุ่มเขียนแทนด้วยอักษรตัวเล็ก เช่น x

ในการศึกษา เรื่องตัวแปรเชิงสุ่มนี้ ส่วนใหญ่แล้วมักจะสนใจการคำนวณหาโอกาสที่ตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ๆ จะมีค่าเป็นค่าใดค่าหนึ่ง หรือ จะมีค่าอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง เช่น หาโอกาสที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าเป็น x ใด ๆ คือหา $P[X = x]$ หรือหาโอกาสที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง เช่น (a, b) คือ หา $P[a \angle X \angle b]$

<u>นิยาม</u>

ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real - Valued Function) ซึ่งนิยาม ที่มีโดเมน (Domain) เป็นกลุ่มผลการทดลองของการทดลองเชิงสุ่ม (Sample Space) และมี พิสัย (Range) เป็นเซทของเลขจำนวนจริง (Real number)

ตัวอย่างเช่น การทดลองเชิงสุ่มที่เกิดจากการหยิบลูกบอล 2 ลูก แบบสุ่มแล้วไม่กลับคืน (Sampling without replacement) จากกล่องที่มีลูกบอลสีแดง 4 ลูก และสีดำ 3 ลูก ซึ่งในที่นี้ Sample Space ของการทดลอง คือ

$$S = \{ RR \quad RB \quad BR \quad BB \}$$

ถ้าให้ R แทนลูกบอลสีแดง

B แทนลูกบอลสีดำ

ถ้าเขียนผลที่ได้จากการทดลองเหล่านี้ด้วย

$$S = \{ O_1 , O_2 , O_3 , O_4 \}$$ ตามลำดับ

และสมมุติว่า ให้ X เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามใน S ดังนี้

$$X(O_1) = 2 , \quad X(O_2) = 1 , \quad X(O_3) = 1 , \quad X(O_4) = 0$$

ซึ่งหมายความว่า ถ้าผลการทดลอง เป็น O_1 ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าเป็น 2 ถ้าผลการทดลอง เป็น O_4 ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าเป็น 0 เป็นต้น การที่กำหนด ฟังก์ชัน X ซึ่งนิยามใน Sample Space S ดังกล่าว จะเห็นว่า เป็นการนับจำนวนลูกบอลสีแดง ที่ได้จากการหยิบลูกบอล 2 ลูก พร้อม ๆ กัน การนับเช่นนี้ เป็นการนับเชิงสุ่ม

การคำนวณ ความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม x ว่าจะมีค่าใดค่าหนึ่งนั้น หาได้โดยใช้ความรู้จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นของผลการทดลองใน Sample Space S ตัวอย่าง เช่น ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งแทนจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 2 เหรียญ จะเห็นว่า ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มx ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดมี 3 ค่าด้วยกัน คือ ชุดของ $\{0, 1, 2\}$ ซึ่งคือ พิสัยของตัวแปรเชิงสุ่ม x (Range of random variable) และความน่าจะเป็นของ X จะมีค่าดังนี้

$$P[X = 0] = \frac{1}{4}$$

$$P[X = 1] = \frac{2}{4}$$ (เพราะมี 2 ผลการทดลองที่ทำให้ X = 1)

$$P[X = 2] = \frac{1}{4}$$

<u>ตัวอย่าง</u> การทดลองหยิบหลอดไฟ 2 หลอด จากกล่องใบหนึ่ง ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่แทนจำนวนหลอดไฟที่เสีย ดังนั้น

S = { AA , AB , BA , BB }

เมื่อ A แทนหลอดไฟที่เสีย

B แทนหลอดไฟที่ดี

S = { AA, AB, BA, BB } คือ โดเมน (Domain) ของ X

จากการทดลองเชิงสุ่มนี้ จะเห็นได้ว่า ค่าของ X คือจำนวนหลอดไฟที่เสีย ซึ่งจะมี 3 ค่า คือ 0, 1 และ 2

∴ ชุดของค่าของ X คือ { 0, 1, 2 } จะเป็นพิสัยของ X (Range of X)

หรือเขียนเป็นเชิงคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

X(AA) = 2 X(AB) = 1

X(BA) = 1 X(BB) = 0

ซึ่งหมายความว่า ถ้าผลการทดลองเป็น AA ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าเป็น 2

ถ้าผลการทดลองเป็น BB ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าเป็น 0 เป็นต้น

<u>ชนิดของตัวแปรเชิงสุ่ม</u>

เนื่องจากตัวแปรเชิงสุ่ม เป็นฟังก์ชั่นที่กำหนดในกลุ่มผลการทดลอง ซึ่งมี 2 ประเภท ดังนั้น จึงแบ่งชนิดของตัวแปรเชิงสุ่มออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. <u>ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง</u> (Discrete Random Variable) คือตัวแปรเชิงสุ่มที่กำหนดในกลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ที่ไม่ต่อเนื่อง หรือในกรณีที่พิสัยของตัวแปรเชิงสุ่มมีจำนวนตัวเลขอยู่อย่างมากที่สุด เป็นจำนวนที่นับได้ (Countable set) นั่นเอง เช่น การนับจำนวนลูกค้าที่มาติดต่อซื้อสินค้าใน 1 วัน จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีค่าใดค่าหนึ่งในเซตของ 0, 1, 2, 3,... เป็นต้น ในกรณีนี้ ผลลัพธ์ของตัวแปรเชิงสุ่ม จะเป็นเลขตัวเต็ม (real integer) แต่มีบางกรณี ที่ผลลัพธ์ของตัวแปรเชิงสุ่ม อาจจะไม่เป็นเลขตัวเต็มก็ได้

เช่น กรณีที่กลุ่มผลการทดลองของ X มีตัวเลขที่เป็นไปได้เพียง 5 ค่า คือ

$$S = \{ 3.50 , 3.78 , 15.12 , 17.25 , 25.30 \}$$

ซึ่ง X ก็ยังคงเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

2. <u>ตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง</u> (Continuous Random Variable) คือตัวแปรเชิงสุ่มที่กำหนดในกลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ที่ต่อเนื่อง หรือในกรณีพิสัยของตัวแปรเชิงสุ่มมีจำนวนตัวเลขมากเป็นอนันต์ จนนับไม่ได้ (Uncountably infinite) เช่น การวัดเวลาเดินทางจากบ้านมายังมหาวิทยาลัย เวลาที่จะวัดได้ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งจะมีค่าเป็นจุดทศนิยมกี่ตัวก็ได้ในพิสัย $(0, \infty)$ ในพิสัยนี้ มีจำนวนตัวเลขมากเป็นอนันต์จนนับไม่ได้

<u>ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง</u> (Probability function of random variable)

จากการที่เราทราบความน่าจะเป็นของแต่ละผลการทดลองในกลุ่มผลการทดลอง ว่ามีค่าเป็นเท่าใด จะทำให้สามารถกำหนดความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม จะมีค่าเป็น ค่าใดค่าหนึ่งได้ วิธีการที่กำหนดความน่าจะเป็นให้แก่ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง เราเรียกว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability function) ดังนิยามต่อไปนี้

<u>นิยาม</u> ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ที่มีค่าเป็น $x_1 , x_2, \ldots, x_n$ ฟังก์ชัน f จะเรียกเป็น ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability function) ของ X ถ้า f กำหนดไว้ดังนี้

$$f(x_i) = P[X = x_i] \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

และ $f(x_i)$ ต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1) $0 \leq f(x_i) \leq 1$

2) $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) = 1$

<u>ตัวอย่าง</u> โยนเหรียญ 3 เหรียญ ให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็นจำนวน หัว ที่ได้ จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

<u>วิธีทำ</u> จากการทดลองโยนเหรียญ 3 เหรียญ จะได้กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ดังนี้

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT \}$$

เมื่อ H = หัว , T = ก้อย

ซึ่งเขียนเป็นตารางแสดงผลการทดลอง, จำนวนหัวที่ได้ และความน่าจะเป็นของแต่ละผลการทดลอง ได้ดังนี้

ผลการทดลองที่ได้	จำนวนหัวที่ได้	ความน่าจะเป็นของแต่ละผลการทดลอง
HHH	3	$\frac{1}{8}$
HHT	2	$\frac{1}{8}$
HTH	2	$\frac{1}{8}$
THH	2	$\frac{1}{8}$
HTT	1	$\frac{1}{8}$
THT	1	$\frac{1}{8}$
TTH	1	$\frac{1}{8}$
TTT	0	$\frac{1}{8}$

จากตารางจะเห็นว่า ค่าที่จะเป็นไปได้ของตัวแปรเชิงสุ่ม X (Possible value of random variable X) มี 4 ค่าด้วยกันคือ 0, 1, 2, 3 หมายความว่า ถ้าโยนเหรียญ 3 เหรียญ แล้วได้ผลการทดลองออกมาเป็นก้อยหมดทั้ง 3 เหรียญ (TTT) ค่าของ X จะเท่ากับ 0 แต่ถ้าโยนเหรียญ 3 เหรียญ แล้วผลการทดลองออกมาเป็นหัว 1 และก้อย 2 (HTT, THT, TTH) ค่าของ X จะเท่ากับ 1 เป็นต้น

จากนี้ เราสามารถที่จะหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าใดค่าหนึ่ง ได้คือ $P[X = x_i] = f(x_i)$ เช่นจะหาความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าเป็น 0 คือหา

$P[X = 0] = P$[ที่จะได้ผลการทดลองเป็น TTT]

$= P(TTT) = \frac{1}{8} = f(0)$

หรือ $P[X = 1] = P$[ที่จะได้ผลการทดลองเป็น HTT, THT, TTH]

$= P(HTT) + P(THT) + P(TTH)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = f(1)$

หรือ $P[X = 2] = P$[ที่จะได้ผลการทดลองเป็น HHT, HTH, THH]

$= P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2 = f(2)$

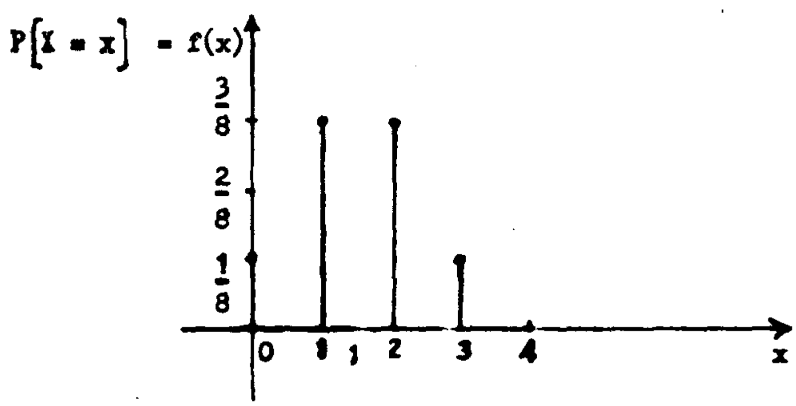
หรือ $P[X = 3] = P$ [ที่จะได้ผลการทดลองเป็น HHH]

$= P(HHH) = \frac{1}{8} = f(3)$

ซึ่งนำมาเขียนแสดงเป็นตารางฟังก์ชันความน่าจะเป็นของจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ได้ดังนี้

จำนวนหัวที่ได้ (ค่าของ X), x_i	0	1	2	3
ความน่าจะเป็น, $f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ดังนั้น จะเห็นว่า ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X และความน่าจะเป็นของ X ดังตารางข้างต้น คือ เซท ของคู่ลำดับ $(x_i, f(x_i))$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X และสามารถเขียนแสดงเป็นรูปกราฟได้ดังนี้



<u>ตัวอย่าง</u> ทอดลูกเต๋า ที่มี 3 หน้า 1 ลูก ซึ่งมีหมายเลข 1, 2 และ 3 กำกับไว้ 2 ครั้ง จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X เมื่อ X เป็นผลบวกของหน้าของลูกเต๋าที่ทอด 2 ครั้ง

จากการทดลองนี้ จะได้ กลุ่มผลการทดลองดังนี้

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\therefore$ ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X คือเซทของ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ จากนี้ เราสามารถหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าใดค่าหนึ่งดังนี้

$P[X = 2] = f(2) = P$ [จะได้ผลการทดลองเป็น (1, 1)]

$= P[(1,1)] = \frac{1}{9}$

$$P\left[X = 3\right] = f(3) = \frac{2}{9}$$

$$P\left[X = 4\right] = f(4) = \frac{3}{9}$$

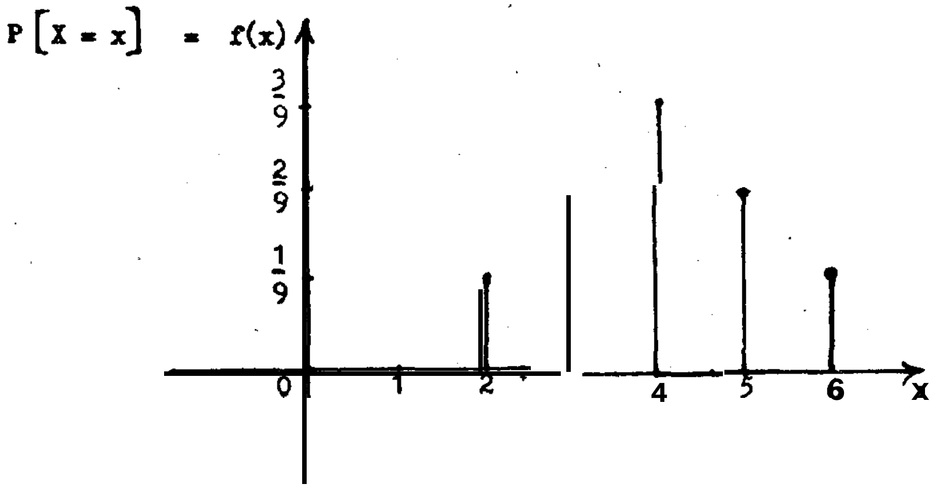
$$P\left[X = 5\right] = f(5) = \frac{2}{9}$$

$$P\left[X = 6\right] = f(6) = \frac{1}{9}$$

ซึ่งเขียนแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ค่าของ X , x_i	2	3	4	5	6
ความน่าจะเป็น, $f(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

และเขียนกราฟแสดงได้



จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่า $P[X > 6] = 0$ เพราะไม่มีผลบวกของหน้าของลูกเต๋า ทั้ง 2 ที่มีค่ามากกว่า 6 เลย นั่นคือ $P[X > 6] = P[\emptyset] = 0$

และ $P[X < 2]$ ก็มีค่าเท่ากับ 0 เช่นเดียวกัน

แบบฝึกหัด

1. ทอดลูกเต๋าที่ได้มาตรฐาน 1 ลูก จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของจำนวนเลขที่ปรากฏบนหน้าของลูกเต๋าที่ทอดได้ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงด้วย
2. ทอดลูกเต๋าที่ได้มาตรฐาน 2 ลูก จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นสำหรับผลบวกของเลขที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋าทั้ง 2 พร้อมทั้งเขียนกราฟ
3. จากจำนวนเครื่องโทรทัศน์ 10 เครื่อง มีเครื่องที่เสียรวมอยู่ด้วย 4 เครื่อง สุ่มตัวอย่างเครื่องโทรทัศน์มา 3 เครื่อง โดยสุ่มแล้วไม่กลับคืน ให้ X เป็นจำนวนของเครื่องที่เสียในตัวอย่างที่สุ่มได้

   ก) จงหา กลุ่มผลการทดลองของการทดลองนี้

   ข) จงหา ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

   ค) เขียนกราฟแสดงฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X
4. ทอดเหรียญที่ได้มาตรฐาน 4 เหรียญ

   ก) ถ้า X เป็นจำนวนก้อยที่ได้ จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X พร้อมทั้งเขียนกราฟ

   ข) ถ้า X เป็นจำนวนหัวที่ได้ ลบด้วยจำนวนก้อยที่ได้ จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X พร้อมทั้งเขียนกราฟ
5. กำหนดให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X เป็นดังนี้

ค่าของ X , x	0	1	2	3	4	5	6	7
ความน่าจะเป็น , f(x)	0	c	2c	2c	3c	c^2	$2c^2$	$7c^2 + c$

   ก) จงหาค่า c

   ข) จงหา $P(X \geq 5)$ และ $P(X < 3)$

   ค) ถ้า $P(X \leq k) > \frac{1}{2}$ จงหาค่าต่ำสุดของ k
6. สุ่มลูกบอล 2 ลูก จากกล่องที่มีลูกบอลสีแดง 4 ลูก และสีดำ 3 ลูก แบบสุ่มแล้วไม่กลับคืน ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่ได้ จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็น พร้อมทั้งเขียนกราฟ
7. ต้องการเลือกคณะกรรมการ 3 คน จากคนกลุ่มหนึ่งซึ่งมีผู้ชาย 5 คน ผู้หญิง 3 คน ถ้าให้ X เป็นจำนวนผู้หญิงที่อยู่ในคณะกรรมการที่เลือกได้ จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

8. ให้ X เป็นจำนวนชั่วโมง ระหว่างที่ท่านกำลังศึกษาในโรงเรียนวันหนึ่ง ๆ สมมุติว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X อยู่ในรูปต่อไปนี้ โดยที่ k คือค่าคงที่ใด ๆ

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{ถ้า } x = 0 \\ k\,x & \text{ถ้า } x = 1 \text{ หรือ } 2 \\ k(5 - x) & \text{ถ้า } x = 3 \text{ หรือ } 4 \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ก) จงหาค่า k

ข) จงสร้างตารางฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดง

ค) จงหาความน่าจะเป็นที่ท่านทำการศึกษาอย่างน้อยที่สุด 2 ชั่วโมง, 2 ชั่วโมงเท่านั้น และอย่างมากที่สุด 2 ชั่วโมง

<u>ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง</u> (Cumulative distribution function of discrete random variable)

นอกจากการใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็น บรรยายคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มแล้ว ยังอาจจะใช้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมบรรยายคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่มได้อีกด้วย โดยให้ $F(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม X แบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

<u>นิยาม</u>

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชัน F จะเรียกว่า เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative distribution function) ถ้า F กำหนดไว้ดังนี้

$$F(x) = P[X \leqslant x]$$

หรือ $$F(x) = \sum_{a \leqslant x} f(a)$$

ในที่นี้ $f(a)$ คือฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ $F(x)$ จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) $F(x)$ จะเป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ x มีค่าใหญ่ขึ้น ซึ่งเรียกว่า เป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้น (increasing function) คือ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $F(x_1) < F(x_2)$

2) $F(+\infty) = 1$ และ $F(-\infty) = 0$

นั่นคือ $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

3) ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม แบบไม่ต่อเนื่อง มีค่าเป็น $x_1, x_2, x_3, \ldots$ โดยที่ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ แล้ว $f(x_i) = F(x_i) - f(x_i - 1)$

4) ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง $F(x)$ จะเป็นฟังก์ชัน แบบขั้นบันได (Step function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ทางขวามือ (Continuous on the right) และขั้นบันไดนั้น เกิดขึ้นที่จุด $X = x_i$ พอดี

<u>ตัวอย่าง</u>

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าที่จะเป็นไปได้ และความน่าจะเป็น $f(x_i)$ ดังนี้

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	0.1	0.4	0.2	0.3

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

<u>วิธีทำ</u> เช่นจะหา F (1) ว่ามีค่าเท่าใด หาได้ดังนี้

จาก $F(x) = P[X \leqslant x]$

$$
\begin{aligned}
F(1) &= P[X \leqslant 1] \\
&= P[X = 1] \quad (\because \text{ ค่าของ } x \text{ ที่น้อยกว่า 1 ไม่มี}) \\
&= f(1) = 0.1 \\
F(2) &= P[X \leqslant 2] \\
&= P[X = 1] + P[X = 2] = f(1) + f(2) \\
&= 0.1 + 0.4 = 0.5 \\
F(3) &= P[X \leqslant 3] \\
&= P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] \\
&= f(1) + f(2) + f(3) \\
&= 0.1\ 4\ 0.4\ 4\ 0.2 = 0.1 \\
F(4) &= P[X \leqslant 4] \\
&= P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) \\
&= 0.1 + 0.4 + 0.2 + 0.3 = 1.0
\end{aligned}
$$

ซึ่งเขียนแสดงเป็นตารางฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X ได้ดังนี้

x_i	1	2	3	4
$F(x_i)$	0.1	0.5	0.7	1.0

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่า F(x) เมื่อ x มีค่าน้อยกว่า 1

จะมีค่าเป็น 0 เช่น $F(0) = P[X \leqslant 0]$

$= P[\emptyset] = 0$

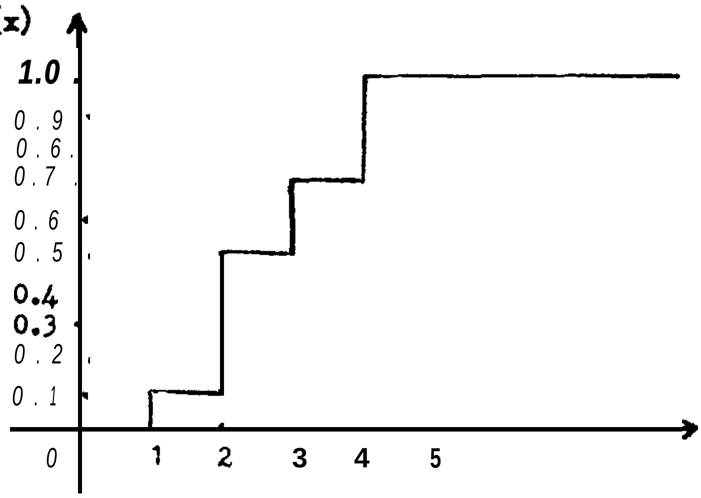
และ F(x) จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ ถ้าค่าของ X มากกว่า หรือเท่ากับ 4 เช่น

$$
\begin{aligned}
F(5) &= P[X \leqslant 5] \\
&= P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + P(\emptyset) \\
&= 0.1 + 0.4 + 0.2 + 0.3 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ซึ่งถ้าสรุปโดยทั่ว ๆ ไป จะได้ว่า ค่าของ $F(x)$ จะมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ เมื่อ X มีค่าน้อยกว่าค่าต่ำสุดของ X และ $F(x)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ เมื่อ X มีค่าเท่ากับหรือมากกว่าค่าสูงสุดของ X

จากตาราง Cumulative distribution function ของ X ข้างต้น สามารถเขียนแสดงเป็นรูปกราฟได้ดังนี้

$P[X \leq x] = F(x)$



จากกราฟ จะเห็นว่า ค่าของ $F(x)$ เมื่อค่าของ X เป็นทศนิยม เช่น $F(2.4)$ จะเห็นว่า เมื่อ $x = 2$ ค่า $F(x)$ จะเท่ากับ 0.5 และค่าของ $F(x)$ จะเท่ากับ 0.5 ตลอดไป เช่น เมื่อ $x = 2.5$ ค่า $F(x)$ ก็ยังคงเท่ากับ 0.5 หรือเมื่อ $x = 2.99$ ค่า $F(x)$ ก็ยังคงเท่ากับ 0.5 อย่างเดิม แต่ถ้า $x = 3$ ค่าของ $F(x)$ จะกระโดดไปที่ 0.7 นั่นแสดงว่า ค่าของ $F(x)$ เมื่อมีค่าเท่ากับ หรือมากกว่า 2 แต่ไม่ถึง 3 จะเท่ากับ 0.5 ซึ่งเราสามารถเขียนแทนว่า

$F(x) = 0.5$ ถ้า $2 \leq x < 3$ ได้ สำหรับค่าอื่น ๆ ก็เช่นเดียวกัน

นอกจากนี้ เรายังสามารถหาค่าความน่าจะเป็นของ X ที่อยู่ในช่วง a, b ใด ๆ $(a < b)$ ได้ โดยใช้ $f(x)$ และ $F(x)$ จากนิยามดังนี้

<u>นิยาม</u> ให้ f และ F เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น และฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ตามลำดับ ของตัวแปรเชิงสุ่ม X สำหรับค่าคงที่ a และ b ใด ๆ $(a < b)$ จะได้ว่า

ก) $P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$

ข) $P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) + f(a)$

ค) $P[a \leq X < b] = F(b) - F(a) + f(a) - f(b)$

ง) $P[a < X < b] = F(b) - F(a) - f(b)$

<u>ตัวอย่าง</u> การทดลองอย่างหนึ่ง โดยการเลือกสุ่มชิ้นส่วน 3 ชิ้น จากขบวนการที่ผลิต ซึ่งมีของดี และของเสียเท่า ๆ กัน จงหาฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้า ให้ X เป็นจำนวนชิ้นส่วนที่ไม่ดี

<u>วิธีทำ</u> ให้ D แทนชิ้นส่วนที่เสีย

N แทนชิ้นส่วนที่ดี

Sample Space = {NNN, NND, NON, DNN, NDD, DND, DDN, DDD)

ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X คือ เซทของ {0, 1, 2, 3}

∴ ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X และ ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ X เขียนได้ดังนี้

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

จากตารางของ x_i และ $f(x_i)$ จะได้ฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมของ X ดังนี้

$$F(0) = P[X \leq 0] = P[X = 0] = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= P[X \leq 1] = P[X = 0] + P[X = 1] \\ &= f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(2) &= P[X \leq 2] \\ &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] \\ &= f(0) + f(1) + f(2) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(3) &= P[X \leq 3] \\ &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] \\ &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

x_i	0	1	2	3
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

แบบฝึกหัด

1. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของจำนวนเลขที่ปรากฏบนหน้าของลูกเต๋าที่ทอดได้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

2. จากจำนวนเครื่องโทรทัศน์ 10 เครื่อง มีเครื่องที่เสียอยู่ 4 เครื่อง สุ่มตัวอย่างเครื่องโทรทัศน์มา 3 เครื่อง โดยไม่กลับคืน ให้ X เป็นจำนวนของเครื่องที่เสียในตัวอย่างที่สุ่มได้

   ก) จงหา ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม X

   ข) จงหา $P[X < 3]$

   ค) จงหา $P[0 < X \leq 3]$

3. กำหนดให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ดังนี้

ค่าของ X, x	0	1	2	3	4	5	6	7
ความน่าจะเป็น, $f(x)$	0	c	$2c$	$2c$	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2 + c$

   จงหาค่า c และหา ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

4. เลือกคณะกรรมการ 3 คน จากคนกลุ่มหนึ่ง ซึ่งมีผู้ชาย 7 คน ผู้หญิง 3 คน ถ้าให้ X เป็นจำนวนผู้หญิงที่อยู่ในคณะกรรมการที่เลือกได้

   ก) จงหา ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

   ข) จงหา $P[X = 2]$, $P[X < 3]$, $P[0 \leq X < 3]$

   ค) จงหา $P[X \leq 2.3]$, $P[X \leq 1.7]$

   ง) จงหา $P[1 < X < 2.7]$

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{10}$; $x = 1, 2, 3, 4$

   ก) จงหา ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X พร้อมทั้งเขียนกราฟ

   ข) จงหา $F(2) - F(1)$

6. กำหนดให้

$$F(m) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad m < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{ถ้า} \quad 0 \leq m < 1 \\ \frac{5}{6} & \text{ถ้า} \quad 1 \leq m < 3 \\ 1 & \text{ถ้า} \quad m \geq 3 \end{cases}$$

จงหา $F(2.4)$, $f(0)$ และ $f(3)$

7. ให้

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{ถ้า } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{ถ้า } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{ถ้า } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } x \geq 3 \end{cases}$$

ก) จงเขียนกราฟของ $F(x)$

ข) จงหา $P[X \leq 1]$, $P[X = 1]$, $P[-1 < X \leq 2]$,
$P[-1 \leq X < 2]$, $P[-1 \leq X \leq 23$, $P[-2 < X \leq 3.5]$,
$P[1.5 < X < 2.7]$

ค) จงหา $f(x)$

8. ให้

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{ถ้า } x = 0 \\ 2k & \text{ถ้า } x = 1 \\ 3k & \text{ถ้า } x = 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ก) จงหาค่า k

ข) จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X

ค) จงหา $P[X < 2]$, $P[0 < X < 2]$

ง) จงหาค่าของ X ที่น้อยที่สุดซึ่งทำให้ $P[X \leq x] > 0.5$

<u>ค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม</u> (Expected Value and Variance of Random Variable)

<u>ค่าคาดหมาย</u> (Expected Value)

<u>นิยาม</u> ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ ค่าคาดหมายของ X คือ

$$E(X) = \sum_{\text{all } x} x\, f(x)$$

เรามักจะใช้สัญลักษณ์ $E(X)$ หรือ μ แทนค่าคาดหมายของ X

จากนิยามข้างต้น จะเห็นว่า $E(X)$ เป็นตัวเลขคงที่ตัวหนึ่ง ที่ใช้บรรยายลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม X

<u>ตัวอย่าง</u> จากตารางมรณะ ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะมีชีวิตอยู่ภายใน 1 ปี มีค่าเท่ากับ 0.992 และความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะตายภายใน 1 ปี มีค่าเท่ากับ 0.008 บริษัทประกันชีวิตได้เสนอขายประกันให้กับคนอายุ 25 ปี คนหนึ่ง ในจำนวนเงินเอาประกัน 20,000 บาท สัญญาในกรมธรรม์ มีอายุ 1 ปี โดยเสียเบี้ยประกัน 200 บาท อยากทราบว่า บริษัทประกันชีวิตคาดว่าจะได้รับกำไรเท่าใด

<u>วิธีทำ</u> ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งเท่ากับกำไรของบริษัท และค่าของ X จะเท่ากับ+ 200 (ถ้าผู้เอาประกันมีชีวิตอยู่) หรือ เท่ากับ - 19,800 (ถ้าผู้เอาประกันตาย) ดังนั้น ฟังก์ชันความน่าจะเป็น เขียนได้ดังนี้

x	+ 200	- 19800
$f(x)$	0.992	0.008

$$\therefore E(x) = 200 \times 0.992 - 19800 \times 0.008$$

$$= 40$$

นั่นคือ ค่าคาดหมายของกำไรของบริษัทมีค่าเท่ากับ 40 บาท

<u>ค่าคาดหวังของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม</u> (Mean or Expected Value of a Function of a Random Variable)

สมมุติให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งค่าของ X คือตัวเลขที่ถูกกำหนดโดยผลการทดลองที่ได้จากการทดลองหนึ่ง ๆ ถ้าค่าของ X เพิ่มขึ้นจากเดิมเท่ากับ 5 ตัวเลขที่ได้ ก็คือ ค่าของตัวแปร

เชิงสุ่มตัวใหม่ คือ $X + 5$ หรือ ถ้าค่าของ X เป็นกำลังสอง ผลที่ได้ ก็คือค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม X^2 ในบทนี้จะศึกษาเฉพาะตัวแปรเชิงสุ่มที่สัมพันธ์ หรือเกี่ยวข้องกับ X เท่านั้น เช่น aX , $X + C$, $aX + C$, X^2 และ $(X - C)^2$ เมื่อ a และ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ และแต่ละตัวแปรเชิงสุ่มนี้ มีค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็น ซึ่งหาได้จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X และแต่ละตัวแปรเชิงสุ่มนี้ ก็จะมีค่าคาดหมาย ในตัวอย่างต่อไปจะแสดงให้เห็นถึงการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรเชิงสุ่มนี้โดยตรงจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X โดยไม่ต้องผ่านขั้นตอนในการหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มที่สัมพันธ์ หรือเกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงสุ่ม X

<u>ตัวอย่าง</u>

ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าและฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

ค่าของ X, x	-1	0	1
ความน่าจะเป็น , $f(x)$	0.2	0.3	0.5

จงคำนวณหาค่าคาดหวังต่อไปนี้ $E(X)$, $E(2X)$, $E(X + 1)$, $E(2X + 1)$, $E(X^2)$ และ $E\left[(X - 0.3)^2\right]$

<u>วิธีทำ</u>

ก) $E(X) = (-1 \times 0.2) + (0 \times 0.3) + (1 \times 0.5)$

$= 0.3$

ข) ค่าที่จะเป็นไปได้ของ $2X$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ

ค่าของ $2X$	-2	0	2
ความน่าจะเป็น	0.2	0.3	0.5

จะสังเกตเห็นว่า $P\left[2X = -2\right]$ คือ $P\left[X = -1\right]$ เป็นต้น

$\therefore$ $E(2X) = (-2 \times 0.2) + (0 \times 0.3) + (2 \times 0.5)$

$= 0.6 = 2E(X)$

ค) $E(X + 1) = ((-1 + 1) \times 0.2) + ((0 + 1) \times 0.3) + ((1 + 1) \times 0.5)$

$= 1.3 = E(X) + 1$

ง) $E(2X + 1) = (-2 + 1) \times 0.2 + (0 + 1) \times 0.3 + (2 + 1) \times 0.5$

$$= 1.6 = 2E(X) + 1$$

จ) สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X^2 นั้น มีค่าที่จะเป็นไปได้เพียง 2 ค่า เท่านั้น คือ 0 และ 1

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่สอดคล้องกันคือ

$$P[X^2 = 0] = P[X = 0] = 0.3$$

$$P[X^2 = 1] = P[X = -1] + P[X = 1]$$

$$= 0.7$$

$$E(X^2) = (0 \times 0.3) + (1 \times 0.7) = 0.7 \neq [E(X)]^2$$

ฉ) $E[(X - 0.3)^2] = (-1.3)^2 \times 0.2 + (-0.3)^2 \times 0.3 + (0.7)^2 \times 0.5$

$$= 0.61$$

จากตัวอย่างข้างต้น นอกจากข้อ (จ) เราสามารถคำนวณค่าคาดหวังของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X ได้โดยใช้ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ซึ่งวิธีการนี้ได้มาจากทฤษฎีดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี</u> ค่าคาดหวัง ของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีค่าที่จะเป็นไปได้ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้คือ

ค่าของ X , x	4	4	....	x_t
ความน่าจะเป็น , $f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	....	$f(x_t)$

ให้ H เป็น ฟังก์ชันของ X ดังนี้ ค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ยของตัวแปรเชิงสุ่มตัวใหม่ $H(X)$ คือ

$$E[H(X)] = H(x_1) f(x_1) + H(x_2) f(x_2) + \dots + H(x_t) f(x_t) \quad \text{..........(1)}$$

หรือ $E[H(X)] = \sum_{i=1}^{i=t} H(x_i) f(x_i)$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติให้ $Y = H(X)$ ซึ่งให้ค่า y_1 สำหรับ m ค่าที่แตกต่างกันของ X คือ $X = x_1, x_2, \dots x_m$ (ตัวอย่างเช่น ค่าของ X ทั้ง 2 คือ $X = -1$ และ $X = +1$ คือค่าของ $X^2 = +1$) ดังนั้น

$$y_1 = H(x_1) = H(x_2) = \dots = H(x_m)$$

ค่าคาดหวังของ Y คือ $y_1 \cdot P[Y = y_1]$

แต่ $P[Y = y_1] = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m)$

ดังนั้น $y_1 \cdot P[Y = y_1] = y_1 f(x_1) + y_1 f(x_2) + \ldots + y_1 f(x_m)$

$$= H(x_1)f(x_1) + H(x_2)f(x_2) + \ldots + H(x_m)f(x_m)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเซทอื่น ๆ ของค่าของ X เช่น y_2 หรือ y_3 เป็นต้น เราก็สามารถเขียนได้ในเทอมของสมการ (1) ได้

$$y_1 P[Y = y_1] + y_2 P[Y = y_2] + \ldots = E(Y)$$

QED

ข้อสังเกต

1) ทฤษฎีนี้ สมมุติว่า กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ของ X เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง และกลุ่มผลการทดลองชนิดที่เป็นอนันต์ที่สามารถนับได้

2) จากตัวอย่าง ข้อ (ข) สามารถใช้กับทฤษฎีนี้ได้ดังนี้

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 f(x_i)$$

$$= (-1)^2 \times 0.2 + (0)^2 \times 0.3 + (1)^2 \times 0.5$$

$$= 0.7$$

ซึ่งค่าที่ได้ก็จะเหมือนกับตัวอย่างข้างต้น

3) ถ้าไม่ใช้ทฤษฎีนี้ หาคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่มตัวใหม่ $Y = H(X)$ จำเป็นจะต้องคำนวณมาจากฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Y โดยบวกผลคูณของค่าที่จะเป็นไปได้ของ Y กับความน่าจะเป็นของค่า Y แต่ละค่า ในตัวอย่างข้างต้น ข้อ (ข) ถ้าให้

$$Y = 2X$$

∴ ค่าที่จะเป็นไปได้ของ Y คือ

$$y_1 = 2x_1 = 2 \times (-1) = -2$$

$$y_2 = 2x_2 = 2 \times 0 = 0$$

$$y_3 = 2x_3 = 2 \times 1 = 2$$

และความน่าจะเป็นคือ

$$P[Y = y_1] = P[Y = -2] = P[X = -1] = f(x_1)$$

$$P[Y = y_2] = P[Y = 0] = P[X = 0] = f(x_2)$$

$$P[Y = y_3] = P[Y = 2] = P[X = 1] = f(x_3)$$

$$E(Y) = y_1 P[Y = y_1] + y_2 P[Y = y_2] + y_3 P[Y = y_3]$$
$$= y_1 f(x_1) + y_2 f(x_2) + y_3 f(x_3)$$
$$= 2x_1 f(x_1) + 2x_2 f(x_2) + 2x_3 f(x_3)$$

ซึ่งได้ค่าสอดคล้องกับสมการ (1)

<u>ข้อควรระวัง</u> ค่าของ $E(Y) \neq 2x_1 f(2x_1) + 2x_2 f(2x_2) + 2x_3 f(2x_3)$ เพราะว่า ความน่าจะเป็นของ 2X ที่ให้ค่า $2x_i$ คือ ค่าเดียวกับความน่าจะเป็น ซึ่ง X ให้ค่า x_i ซึ่งในที่นี้ คือ $f(x_i)$ ไม่ใช่ $f(2x_i)$

จากตัวอย่างข้างต้น ได้ข้อสรุป ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ใช้โดยทั่ว ๆ ไป รวมทั้งข้อพิสูจน์ ดังนี้

<u>ทฤษฎี</u> ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย E(X) จะได้ว่า $E(aX + b) = aE(X) + b$ สำหรับค่าคงที่ใด ๆ a และ b

<u>พิสูจน์</u> สมมุติให้ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$[\{x_i , f(x_i)\} \;;\; i = 1, 2, \ldots ,t] \text{ ดังนี้}$$

$$E(aX + b) = (ax_1 + b) f(x_1) + (ax_2 + b) f(x_2) + \ldots + (ax_t + b) f(x_t)$$
$$= a[x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_t f(x_t)] + b[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_t)]$$

วงเล็บแรกคือ E(X) ซึ่ง $= \sum_{\text{all } i} x_i f(x_i)$ และวงเล็บที่ 2 คือ 1 เพราะว่า $\sum_{\text{all } i} f(x_i) = 1$

$\therefore$ จะได้ผลดังนี้คือ

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

QED

<u>บทแทรก</u> ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีค่าเฉลี่ย $E(X) = \mu$ ดังนั้น

$$E(X - \mu) = 0$$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎีที่ว่า $E(aX + b) = aE(X) + b$

ถ้าให้ $a = 1$, $b = -\mu$

$$\therefore E(X - \mu) = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0 \quad \text{QED}$$

และจากทฤษฎีข้างต้น จะสรุปเป็นคุณสมบัติของค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่ม X ได้ดังนี้

ถ้าให้ a เป็นค่าคงที่ใด ๆ

1) $E(a) = a$
2) $E(aX) = aE(X)$
3) $E(X + a) = E(X) + a$

แบบฝึกหัด

1. จากตารางมรณะพบว่า ความน่าจะเป็นที่ผู้ชายอายุ 30 ปี จะมีชีวิตอยู่ภายใน 1 ปี มีค่าเท่ากับ 0.895 และความน่าจะเป็นที่จะตายภายใน 1 ปี มีค่าเท่ากับ 0.105 บริษัทประกันชีวิตเสนอขายประกันให้กับชายผู้หนึ่งซึ่งมีอายุ 30 ปี แบบชั่วคราว สัญญามีอายุ 1 ปี ในวงเงินประกัน 20,000 บาท สำหรับเบี้ยประกัน 200 บาท ค่าคาดหมายที่บริษัทจะได้รับจะเป็นเท่าไร ?

2. ในการเล่นเกมส์การพนันชนิดหนึ่ง ชายคนหนึ่งจะได้เงิน 5 บาท ถ้าเขาโยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้หัวทั้งหมด หรือได้ก้อยทั้งหมด และเขาจะเสียเงิน 3 บาท ถ้าเขาโยนเหรียญทั้ง 3 แล้วได้หัว 1 หรือ 2 อยากทราบว่าชายผู้นี้คาดหมายผลที่จะได้รับเท่าไร ?

3. ในการรับประกันชีวิต บริษัทรับประกันได้รับเบี้ยประกันจากลูกค้าซึ่งมีอายุ 35 ปี 1,000 บาท หากผู้มาซื้อประกันตายภายใน 1 ปี บริษัทจะจ่ายเงินค่าประกันให้เป็นจำนวน 150,000 บาท และจากตารางมรณะพบว่า ความน่าจะเป็นของผู้ที่มีอายุ 35 ปี จะมีชีวิตอยู่ภายในเวลา 1 ปี มีค่าเท่ากับ $\frac{199}{200}$ และความน่าจะเป็นที่จะตายภายใน 1 ปี มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{200}$ อยากทราบว่าบริษัทคาดหมายว่าจะได้รับกำไรเท่าใด จากการรับเงินประกันชีวิตของบุคคลคนนี้

4. จำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาระหว่าง 16.30 – 18.30 น. ของวันศุกร์ คือ 0, 1, 2 หรือ 3 ด้วยค่าความน่าจะเป็นตามลำดับดังนี้คือ 0.94, 0.03, 0.02, 0.01 จงหาค่าคาดหวังของจำนวนอุบัติเหตุที่จะเกิดในช่วงเวลาดังกล่าวในวันศุกร์

5. ในการละเล่นอย่างหนึ่ง ซึ่งมีชื่อว่า " Chuck – a – Luck " ผู้เล่นที่ชนะจะได้เงิน 15, 10 และ 5 บาท ด้วยความน่าจะเป็นตามลำดับดังนี้คือ $\frac{1}{216}$, $\frac{15}{216}$ และ $\frac{75}{216}$ และผู้เล่นที่แพ้จะเสียเงิน 5 บาท ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{125}{216}$ จงหาค่าคาดหวังที่จะได้รับของผู้เล่นเกมส์นี้

6. สุ่มลูกบอล 4 ลูก แบบไม่กลับคืน จากกล่องซึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และสีขาว 5 ลูก ถ้าลูกบอลที่สุ่มได้นั้นมีสีแดง 2 ลูก หรือมากกว่า ผู้เล่นเกมส์จะได้รับเงิน 1 บาท แต่ถ้าลูกบอลที่สุ่มได้เป็นอย่างอื่น ผู้เล่นเกมส์จะเสียเงิน 0.50 บาท จงหาค่าคาดหวังที่เขาจะได้รับ

7. กสิกรผู้หนึ่ง คาดว่า ภายในเวลา 1 ปี ไก่ของเขาจะไข่ 10,000 โหล และเขายังคาดต่อไปอีกว่าหลังจากที่เขาคิดจำนวนราคาต่าง ๆ กัน และการขึ้นลงของราคาตามฤดูกาลแล้ว เขาอาจจะได้กำไรอย่างมากที่สุด 6 บาท ต่อไข่ 1 โหล หรือเขาอาจจะขาดทุนอย่างมากที่สุด 2 บาท ต่อไข่ 1 โหล ซึ่งจะแสดงความน่าจะเป็นและกำไรที่เขาจะได้รับดังตารางต่อไปนี้

กำไร (บาท/โหล)	6	4	2	0	-2
ความน่าจะเป็น	0.20	0.50	0.20	0.06	0.04

อยากทราบว่า เขาควรจะคาดว่า ค่าคาดหมายของกำไรที่เขาจะได้รับ จะเป็นเท่าไร ? (บาท/โหล)

8. ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X คือเลขตัวเต็มจาก n ถึง $n + m$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเลขตัวเต็มแต่ละตัวมีค่าเท่า ๆ กัน จงหา $E(X)$

9. กำหนดให้

ค่าของ X, x	-2	-1	0	1	2
ความน่าจะเป็น, f(x)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

จงหา

ก) $E(X)$ ข) $E(3X - 1)$ ค) $E(2X + 3)$

ง) $E(X)^2$ จ) $E(X^2 + 1)$

10. กำหนดให้

ค่าของ X, x	1	2	3	4	5
ความน่าจะเป็น , f(x)	0.2	0.3	0.2	0.2	0.1

จงหา ก) $E(X)$ ข) $E(3X - 7)$ ค) $E(X - 2.7)$

ง) $E(10X)$ จ) $E(X^2)$ ฉ) $E\left[(X - 2.7)^2\right]$

11. จงพิสูจน์ว่า

ก) $E(a) = a$

ข) $E(aX) = aE(X)$

ค) $E(aX + b) = aE(X) + b$

ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ

12. กำหนดให้ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

จงแสดงว่า ค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าที่จะเป็นไปได้ คือ $1,2,3,\ldots,n$ และมีความน่าจะเป็น ที่จะได้ค่าแต่ละค่าเท่า ๆ กัน คือ

$$\mu = \frac{n+1}{2}$$

13. จงแสดงว่า ถ้า $\sum_{k=1}^{k=N} (x_k - C)f(x_k) = 0$ แล้ว $C = E(X)$

14. ทอดเหรียญอันหนึ่งจนกระทั่งได้หัว 1 หัว หรือ ได้ก้อยทั้ง 5 ครั้ง จงหาค่าคาดหมายของจำนวนครั้งของการทอดเหรียญของเหรียญอันนั้น

15. ผู้เล่นเกมส์อย่างหนึ่ง โดยการทอดเหรียญ 2 เหรียญ เขาจะได้เงิน 1 บาท หรือ 2 บาท ถ้าเหรียญทั้ง 2 นั้น ได้หัว 1 หรือ 2 หัว และเขาจะเสียเงิน 5 บาท ถ้าเหรียญทั้ง 2 นั้น ไม่ได้หัวเลย จงหาค่าคาดหมายของการเล่นเกมส์นี้

16. กล่องใบหนึ่งมีสิ่งของอยู่ 8 สิ่ง ซึ่งมีของเสียอยู่ 2 สิ่ง ชายคนหนึ่งต้องการเลือกสิ่งของ 3 สิ่ง จากกล่องใบนี้ จงหาค่าคาดหมายของจำนวนของสิ่งของที่เสียจากสิ่งของที่เลือกได้

<u>ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรเชิงสุ่ม</u> (Variance and standard deviation of random variable)

ความแปรปรวน (Variance) เป็นค่าคงที่ ซึ่งแสดงลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่มที่สำคัญอีกตัวหนึ่ง นอกจากค่าคาดหมายของตัวแปรเชิงสุ่ม ค่าคงที่นี้ เป็นดัชนี (Index) ที่ชี้ให้เห็นถึงการกระจายของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม ว่ากระจายห่างจากค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหมายมากน้อยเพียงใด ซึ่งถ้ากระจายห่างจากค่าเฉลี่ยมาก ความแปรปรวนก็จะมีค่าสูง ถ้ากระจายห่างจากค่าเฉลี่ยน้อย ความแปรปรวนก็จะมีค่าต่ำ หรือ ถ้าไม่มีการกระจายห่างจากค่าเฉลี่ยเลย ความแปรปรวนจะมีค่าเท่ากับ 0

ค่าความแปรปรวนสามารถคำนวณได้จากนิยามต่อไปนี้

<u>นิยาม</u>

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ที่มี $E(X) = \mu$ แล้วจะได้ว่า ความแปรปรวนของ X คือ $V(X) = \sigma^2$ กำหนดไว้ดังนี้

$$V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

หรือ $$= \sum_{\text{all } i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

และ $\sqrt{V(X)}$ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรเชิงสุ่ม X (Standard deviation of X)

ความแปรปรวนของ X มักใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย V(X) หรือ σ^2_X และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน มักจะใช้สัญญลักษณ์ σ_X แทน ดังนั้น จะเห็นได้ว่า σ^2 เป็นค่าคงที่ตัวหนึ่ง ซึ่งจะมีค่าเป็นบวกเสมอ และสามารถคำนวณหา σ^2 และ σ ได้ เมื่อทราบค่าฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม

<u>ตัวอย่าง</u>

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าของ X และฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ X ดังนี้

X	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

จงหา ค่าความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

<u>วิธีทำ</u>

$$\because V(X) = \sum_{\text{all } i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

$$\because \mu = \sum_{i=0}^{i=2} x_i f(x_i)$$

$$\therefore \mu = (0 \times \tfrac{1}{4}) + (1 \times \tfrac{1}{2}) + (2 \times \tfrac{1}{4}) = 1$$

$$\therefore V(X) = \sum_{i=0}^{i=2} (x_i - 1)^2 f(x_i)$$

$$= (0-1)^2(\tfrac{1}{4}) + (1-1)^2(\tfrac{1}{2}) + (2-1)^2(\tfrac{1}{4})$$

$$= \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} = 0.50$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{V(X)}$$

$$= \sqrt{0.50}$$

$$= 0.7071$$

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋าที่มี 6 หน้า 1 ลูก จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของจำนวนของเลขบนหน้าของลูกเต๋าที่ได้

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนของเลขบนหน้าของลูกเต๋าที่ได้
ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

ค่าของ X, x	1	2	3	4	5	6
ความน่าจะเป็น, f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \mu_X = (1 \times \tfrac{1}{6}) + (2 \times \tfrac{1}{6}) + (3 \times \tfrac{1}{6}) + (4 \times \tfrac{1}{6}) + (5 \times \tfrac{1}{6}) + (6 \times \tfrac{1}{6})$$
$$= 21 \times \tfrac{1}{6} = \tfrac{7}{2} = 3.5$$

$$V(X) = E\left[(X - \mu_X)^2\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{i=6} (x_i - \mu_X)^2 f(x_i)$$
$$= (1 - \tfrac{7}{2})^2 \times \tfrac{1}{6} + (2 - \tfrac{7}{2})^2 \times \tfrac{1}{6} + (3 - \tfrac{7}{2}) \times \tfrac{1}{6} + (4 - \tfrac{7}{2})^2 \times \tfrac{1}{6} + (5 - \tfrac{7}{2})^2 \times \tfrac{1}{6} + (6 - \tfrac{7}{2})^2 \times \tfrac{1}{6}$$
$$= \frac{35}{12}$$

จากตัวอย่างทั้ง 2 ข้างต้น เราสามารถที่จะคำนวณหาค่าความแปรปรวนของ X ได้โดยอีกวิธีหนึ่งที่ง่ายกว่า จากทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ที่มีค่าเฉลี่ย $E(X) = \mu$ และความแปรปรวน $V(X) = \sigma^2$ ดังนี้

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2$$

พิสูจน์

$$\because V(X) = E[(X - \mu)^2]$$
$$= \sum_{\text{all } i} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$
$$= \sum_{\text{all } i} (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) f(x_i)$$

$$= \sum_{\text{all } i} x_i^2 f(x_i) - 2 \sum_{\text{all } i} x_i \mu f(x_i) + \sum_{\text{all } i} \mu^2 f(x_i)$$

เนื่องจากค่าเฉลี่ย μ เป็นค่าคงที่ และ $\sum_{\text{all } i} f(x_i) = 1$

$$\therefore \quad V(X) = \sum_{\text{all } i} x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum_{\text{all } i} x_i f(x_i) + \mu^2 \sum_{\text{all } i} f(x_i)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2E(X)\,E(X) + [\,E(X)\,]^2$$

$$\therefore \quad V(X) = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2$$

QED

ดังนั้น ความแปรปรวนที่คำนวณโดยใช้สูตร $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ จะมีค่าเท่ากับความแปรปรวนที่คำนวณโดยใช้สูตร $V(X) = E[(X - \mu)^2]$ เช่น จากตัวอย่างของการทอดลูกเต๋าข้างต้น

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = (1^2) \times \frac{1}{6} + (2)^2 \times \frac{1}{6} + (3^2) \times \frac{1}{6} + (4)^2 \times \frac{1}{6} + (5^2) \times \frac{1}{6} + (6)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{91}{6}$$

$E(X)$ คำนวณแล้วได้ $= \frac{7}{2}$

$$\therefore \quad V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4}$$

$$= \frac{182 - 147}{12}$$

$$= \frac{35}{12}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากันกับค่าที่คำนวณจากสูตร $V(X) = E[(X - \mu)^2]$

<u>คุณสมบัติของความแปรปรวน</u>

ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ โดยที่ $V(X) \geqslant 0$ สำหรับค่าคงที่ a และ C ใด ๆ จะได้ว่า

1) $V(C) = 0$

2) $V(X + C) = V(X)$

3) $V(CX) = C^2V(X)$

4) $V(aX + C) = a^2V(X)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ทอดเหรียญ 4 เหรียญ

   ก) ถ้า X เป็นจำนวนก้อยที่ได้ จงหาความแปรปรวนของ X

   ข) ถ้า X เป็นจำนวนหัวที่ได้ ลบ จำนวนก้อยที่ได้ จงหาความแปรปรวนของ X

2. จากจำนวนเครื่องโทรทัศน์ 10 เครื่อง มีเครื่องที่เสียอยู่ 4 เครื่อง สุ่มตัวอย่างเครื่องโทรทัศน์มา 3 เครื่อง แบบไม่กลับคืน ให้ X เป็นจำนวนของเครื่องที่เสียจากตัวอย่างที่สุ่มมาได้ จงคำนวณหาความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

3. สุ่มลูกบอล 2 ลูก จากกล่องที่มีลูกบอลสีแดง 4 ลูก และสีดำ 3 ลูก แบบไม่กลับคืน ให้ Y เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่ได้ จงหาความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y

4. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่า −1, 0 และ 1 และความน่าจะเป็นของแต่ละค่า 0.3, 0.2 และ 0.5 ตามลำดับ จงคำนวณหาความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

5. จงแสดงให้เห็นว่า ค่าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งมีค่าที่จะเป็นไปได้ คือ 1,2,3...,n และมีความน่าจะเป็นของแต่ละค่าเท่ากัน คือ $\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$

   กำหนดให้ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

6. จงพิสูจน์

ก) $V(cX) = c^2V(X)$

ข) $V(X + c) = V(X)$

ค) $V(c) = 0$

สำหรับค่าคงที่ c ใด ๆ

7. กำหนดให้

ค่าของ X,x	9,998	9,999	10,000	10,001
ความน่าจะเป็น, $f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

จงหา σ_X^2 และ σ_X

8. กำหนดให้

ค่าของ Y,y	0.0016	0.0032	0.0064
ความน่าจะเป็น, $f(x)$	0.6	0.3	0.1

จงหา σ_Y^2 และ σ_Y

9. กำหนดให้

ค่าของ X,x	- 300	- 200	- 100	0
ความน่าจะเป็น, $f(x)$	0.25	0.35	0.15	0.25

จงหา σ_X^2 และ σ_X

10. ถ้าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม X เป็น 0.76 จงหาความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $10X$, $2X$ และ $\frac{X}{2}$

11. ถ้าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม Y เป็น 15 จงหาความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $Y + 7$ และ $Y - 3$

12. ต้องการเลือกคณะกรรมการ 3 คน จากคนกลุ่มหนึ่งซึ่งประกอบด้วยผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 3 คน ถ้าให้ X เป็นจำนวนผู้หญิงที่อยู่ในคณะกรรมการที่เลือกได้ จงคำนวณหาค่าความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

13. จงพิสูจน์ว่า สำหรับค่าคงที่ a ใด ๆ

$$E[(X - a)^2] = V(X) + [E(X) - a]^2$$

14. ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และกำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่มตัวใหม่ คือ $Y = g(X)$ ถ้า $g(x) = a + bx + cx^2$ จงแสดงว่า

$$E(Y) = a + bE(X) + c[E(X)]^2 + cV(X)$$

15. เหรียญที่ไม่เที่ยงตรงอันหนึ่ง มี $P(H) = \frac{3}{4}$ และ $P(T) = \frac{1}{4}$ ถูกโยน 3 ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนหัวที่ได้ จงหา $E(X)$, σ_X^2 และ σ_X

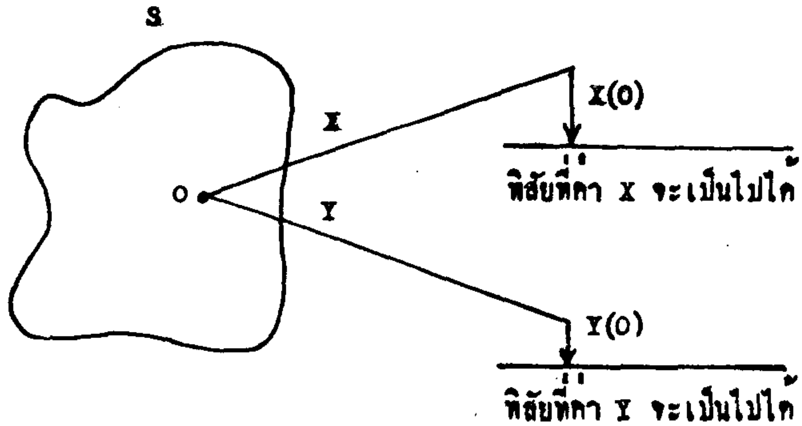
__ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัวแปร__ **(Joint probability function of two random variables)**

ในหัวข้อข้างต้น เราพิจารณาผลการทดลองของการทดลองเชิงสุ่มเพียงคุณลักษณะเดียวเท่านั้น ซึ่งตัวแปรเชิงสุ่มที่กำหนดในกลุ่มผลการทดลองเช่นนั้น เราเรียกว่า ตัวแปรเชิงสุ่มมิติเดียว (one - dimensional random variable) โดยส่วนใหญ่แล้ว เรามักจะสนใจผลการทดลองที่มีมากกว่าหนึ่งคุณลักษณะ เช่น ต้องการจะศึกษาลักษณะพิเศษของคน จำเป็นจะต้องพิจารณา ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก ส่วนสูง และอายุ ซึ่งเราจะต้องกำหนดให้ การวัดน้ำหนัก, ส่วนสูง และอายุ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 3 ตัว ซึ่งค่าของตัวแปรเชิงสุ่มเหล่านี้ จะถูกกำหนดโดยผลการวัดที่ได้จากคุณลักษณะของคน ๆ นั้น ที่ถูกเลือกมาอย่างสุ่ม ๆ จากประชากรของชุมชนหนึ่ง ๆ

ในเชิงคณิตศาสตร์ เรามักจะกำหนดให้ กลุ่มผลการทดลอง S และ n ตัวแปรเชิงสุ่มที่จำกัดของเซตใน S เมื่อ n คือเลขตัวเต็ม ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2($n \geq 2$) ในที่นี้ เราจะศึกษาตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (Two - dimensional random variables)

__นิยาม__

ให้ S เป็นกลุ่มผลการทดลองของการทดลองเชิงสุ่ม ถ้า X และ Y เป็นฟังก์ชันที่กำหนดจำนวนจริง $X(O)$ และ $Y(O)$ หรือ (x, y) ให้แก่แต่ละผลการทดลอง $O \in S$ เราเรียก (X, Y) ว่า เป็นตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติ (Two - dimensional random variables)



จากรูป จะเห็นว่า S เป็น domain ของ ฟังก์ชั่น X และ Y

X เป็นฟังก์ชั่นซึ่ง map จากจุด o ใน S ไปยังเลขจำนวนจริง X(0)

และ Y เป็นอีกฟังก์ชั่นหนึ่งที่ map จากจุด o ใน S ไปยังเลขจำนวนจริง Y(0)

<u>ชนิดของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ</u>

ตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ แบ่งออกเป็น 2 แบบ เหมือนตัวแปรเชิงสุ่มมิติเดียว คือ ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ ตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง

<u>นิยาม</u>

(X, Y) จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง 2 มิติ ถ้าค่าที่จะเป็นไปได้ของ (X, Y) มีจำกัด หรือเป็นอนันต์ นับได้โดยให้ (x_i, y_j) ; $i , j = 1, 2, \ldots$ แทนค่าที่จะเป็นไปได้ของ (X, Y)

ในการศึกษาตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ เราไม่สนใจเพียงแต่เฉพาะคุณลักษณะของแต่ละอย่างแยกกันเท่านั้น เรายังสนใจถึงความสัมพันธ์ภายใน (Interrelationship) ที่มีอยู่ในระหว่างคุณลักษณะต่าง ๆ นั้นด้วย และการพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างคุณลักษณะต่าง ๆ นั้น เราจำเป็นที่จะต้องศึกษาถึงฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของตัวแปรเชิงสุ่มทั้งสองด้วย ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่มทั้งสอง (Joint probability function of two random variables)