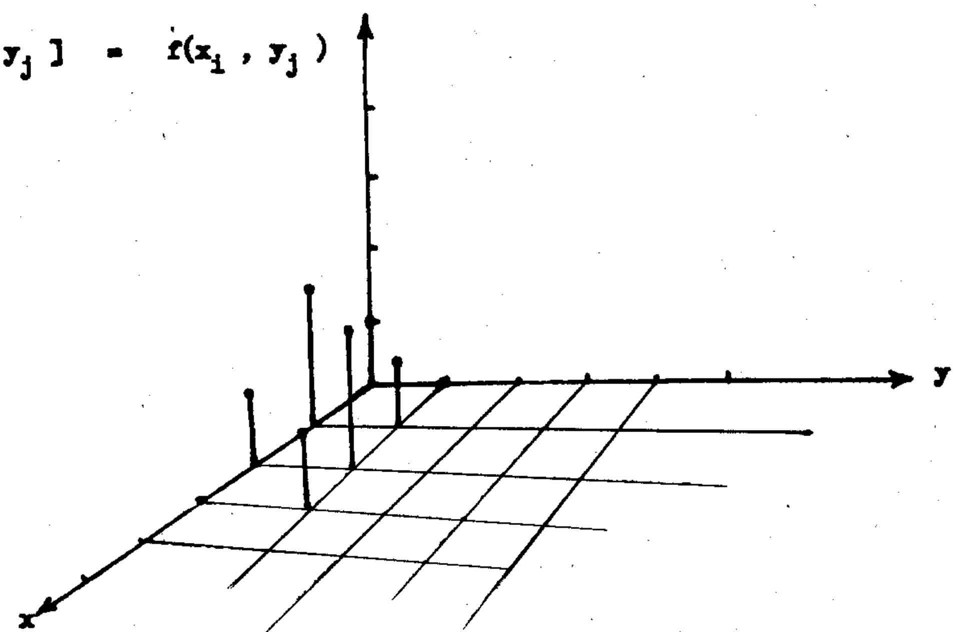
นิยาม

ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชั่น f ที่กำหนด ความน่าจะเป็น $f(x_i, y_j) = P[X = x_i , Y = y_j]$ ให้แก่ผลการทดลองที่เป็นไปได้ (x_i , y_j) เรียกว่า ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ (X, Y) ถ้า $f(x_i , y_j)$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) $0 \leq f(x_i, y_j) \leq 1$ สำหรับทุกค่า x_i , y_j ที่จะเป็นไปได้
2) $\sum_{\text{all } i} \sum_{\text{all } j} f(x_i , y_j) = 1$

ฟังก์ชั่น $f(x_i , y_j)$ อาจจะนำมาเขียนเป็นกราฟได้ ซึ่งลักษณะของกราฟจะเป็นเส้นยืนตั้งฉากกับระนาบระดับ x , y โดยให้ความสูงของเส้นที่ จุด x_i , y_j เท่ากับ $f(x_i, y_j)$ ดังนี้

$P[X = x_i , Y = y_j] = f(x_i , y_j)$



ตัวอย่าง

โยนเหรียญ 3 ครั้ง และให้

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

เป็นกลุ่มผลการทดลอง ซึ่งมีความน่าจะเป็นของแต่ละผลการทดลองเท่ากับ $\frac{1}{8}$ และกำหนดตัวแปรเชิงสุ่ม ดังนี้

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าโยนเหรียญครั้งแรกได้ก้อย} \\ 1 & \text{ถ้าโยนเหรียญครั้งแรกได้หัว} \end{cases}$$

Y = จำนวนวนหัวทั้งหมดที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 ครั้ง

จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

<u>วิธีทำ</u>

จากโจทย์ที่กำหนดให้ สามารถเขียนผลการทดลอง, ค่าของ X และ ค่าของ Y ได้ดังตาราง ต่อไปนี้

ผลการทดลอง	ค่าของ X	ค่าของ Y
HHH	1	3
HHT	1	2
HTH	1	2
THH	0	2
HTT	1	1
THT	0	1
TTH	0	1
TTT	0	0

จากตารางจะเห็นว่า ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X คือ $\{0 , 1\}$
และค่าที่จะเป็นไปได้ของ Y คือ $\{0 , 1 , 2 , 3\}$

$$\because f(x_i , y_j) = P[X = x_i , Y = y_j]$$

$$\therefore f(0 , 1) = P[X = 0 , Y = 1]$$

จะเห็นได้ว่า เหตุการณ์ที่ $X = 0$ และ $Y = 1$ คือเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 3 เหรียญ ครั้งแรกได้ก้อย และ จำนวนหัวที่ได้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1 หัว ซึ่งคือผลการทดลอง THT และ TTH

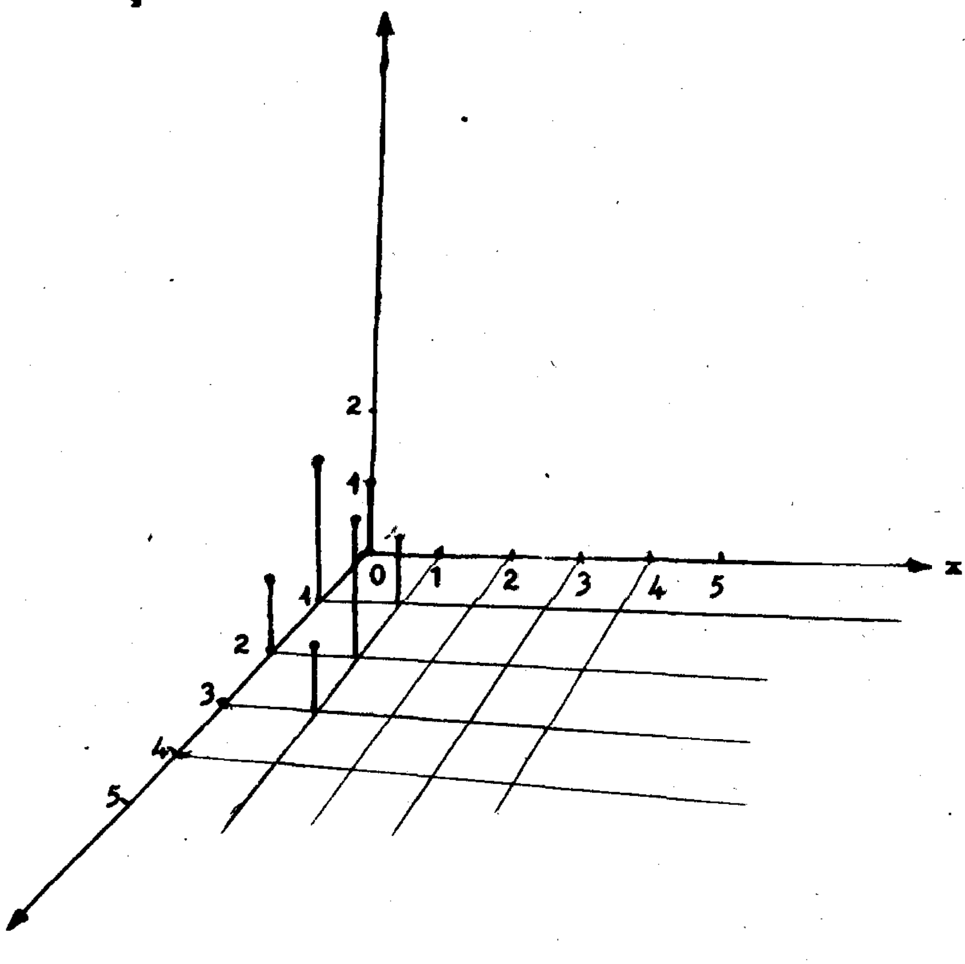
$$\therefore f(0 , 1) = P[THT , TTH]$$

$$= \frac{2}{8}$$

ทำโดยวิธีนี้ไปเรื่อย ๆ ก็จะได้ความน่าจะเป็นของคู่ที่จะเป็นไปได้ ของค่า X และ Y ซึ่งจะเขียนเป็นตารางแสดงฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ได้ดังนี้

x \ y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

และเขียนแสดงเป็นรูปกราฟได้



<u>ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียว</u> (Marginal probability function)

ถึงแม้ว่า เราจะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y แล้ว เรายังสนใจที่จะหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ ตัวแปรเชิงสุ่มแต่ละตัวแยกกันอีกด้วย ซึ่งเรียกฟังก์ชันความน่าจะเป็นของแต่ละตัวที่แยกกันที่มีการแจกแจงร่วมนี้ว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียว (Marginal probability function) ซึ่งมีนิยามดังนี้

<u>นิยาม</u>

เมื่อ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y ดังนั้น $g(x)$ และ $h(y)$ จะเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X (Marginal probability function of X) และของ Y (Marginal probability function of Y) ถ้า

$$g(x) = \sum_{\text{all } y} f(x, y)$$

$$h(y) = \sum_{\text{all } x} f(x, y)$$

ตัวอย่าง

จากโจทย์ตัวอย่างการโยนเหรียญ 3 ครั้ง ค่าที่จะเป็นไปได้ของ X และ Y และฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ดังตาราง

x \ y	0	1	2	3	$P[X = x] = g(x)$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$P[Y=y]=h(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ผลรวมของความน่าจะเป็นร่วมทางแนวตั้ง คือความน่าจะเป็นทางเดียวของ Y และผลรวมของความน่าจะเป็นร่วมทางแนวนอนคือ ความน่าจะเป็นทางเดียวของ X เช่น จะหาความน่าจะเป็นทางเดียวของ Y เมื่อ $y = 0$ คือหา

$$h(y) = P[Y = y]$$

$$h(0) = P[Y = 0]$$

$$= P[X = 0, Y = 0] + P[X = 1, Y = 0]$$

$$= f(0, 0) + f(1, 0)$$

$$= \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$$

หรือ $h(1) = P[Y = 1]$

$$= P[X = 0, Y = 1] + P[X = 1, Y = 1]$$

$$= f(0, 1) + f(1, 1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

เป็นต้น

ถ้าจะหาความน่าจะเป็นทางเดียวของ X เมื่อ x = 0 คือ หา

$$
\begin{aligned}
g(x) &= P[X = x] \\
g(0) &= P[X = 0] \\
&= P[X = 0, Y = 0] + P[X = 0, Y = 1] + P[X = 0, Y = 2] \\
&\quad + P[X = 0, \text{T-31} \\
&= f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) + f(0, 3) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ซึ่งก็จะได้ค่าดังตารางข้างต้น

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบเงื่อนไข (Conditional probability function)

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ X และ Y เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X เราก็จะพิจารณาเฉพาะค่าฟังก์ชันของ X โดยไม่สนใจ หรือ เกี่ยวข้องกับค่าของ Y แต่ถ้าเราสนใจกับค่าอื่น ๆ ที่กำหนดให้ เช่น Y = y ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X เมื่อกำหนดให้ Y = y เรียกว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X สำหรับ Y = y ที่กำหนดให้ (Conditional probability of X given Y = y) ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม

ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ ที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม $f(x, y)$ และให้ $g(x)$, $h(y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ Y ตามลำดับ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X กำหนดให้ Y = y คือ $g(x/y)$ นิยามไว้ดังนี้

$$g(x/y) = \frac{f(x , y)}{h(y)} \quad ; \qquad h(y) > 0$$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y กำหนดให้ X = x คือ $h(y/x)$ นิยามไว้ดังนี้

$$h(y/x) = \frac{f(x , y)}{g(x)} \quad ; \qquad g(x) > 0$$

จากนิยามข้างต้น เราจะได้

$$f(x , y) = g(x/y) \cdot h(y)$$

หรือ $f(x , y) = h(y/x) \cdot g(x)$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y และ ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ ของ Y ดังตารางต่อไปนี้

y \ x	0	1	P [Y = y] = h(y)	
0	$^{7}/_{21}$	$^{7}/_{21}$	$^{7}/_{21}$	h(0)
1	$^{4}/_{21}$	$^{3}/_{21}$	$^{7}/_{21}$	h(1)
P [X = x] = g(x)	$^{11}/_{21}$	$^{10}/_{21}$	1	
	g(0)	g(1)		

จงหา ก) ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด Y = y

ข) ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X = x

วิธีทำ

ก) ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด Y = y คือ หา g(x/y) จากตารางที่กำหนดให้ จะหา g(0/y = 0)

$$g(0/Y = 0) = \frac{f(0,0)}{h(0)}$$

$$= \frac{^{7}/_{21}}{^{14}/_{21}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$g(0/Y = 1) = \frac{f(0,1)}{h(1)} = \frac{^{4}/_{21}}{^{7}/_{21}} = \frac{4}{7}$$

$$g(1/Y = 0) = \frac{f(1,0)}{h(0)} \quad \frac{^{7}/_{21}}{^{14}/_{21}} = \frac{1}{2}$$

$$g(1/Y = 1) = \frac{f(1,1)}{h(1)} \quad \frac{^{3}/_{21}}{^{7}/_{21}} = \frac{3}{7}$$

ซึ่งเขียนเป็นตาราง แสดงฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด Y = y ได้ดังนี้

ตาราง g(x/y)

y \ x	0	1
0	$^{1}/_{2}$	$^{1}/_{2}$
1	$^{4}/_{7}$	$^{3}/_{7}$

ข) จะหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X = x

คือ $h(y/x)$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{f(x,\ y)}{g(x)}$; $f(x) > 0$

$$\therefore h(0/x = 0) = \frac{f(0,\ 0)}{g(0)} = \frac{7/21}{11/21} = 7/11$$

$$h(0/x = 1) = \frac{f(1,\ 0)}{g(1)} = \frac{7/21}{10/21} = 7/10$$

$$h(1/x = 0) = \frac{f(0,\ 1)}{g(0)} = \frac{4/21}{11/21} = 4/11$$

$$h(1/x = 1) = \frac{f(1,1)}{g(1)} = \frac{3/21}{10/21} = 3/10$$

ซึ่งแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง h(y/x)

y \ x	0	1
0	$7/11$	$7/10$
1	$4/11$	$3/10$

<u>การเป็นอิสระทางสถิติของตัวแปรเชิงสุ่ม</u> (Statistical independence of random variables)

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ

ค่าของ $g(x/Y = y)$ โดยปกติแล้วจะมีค่าแตกต่างกัน สำหรับแต่ละค่าของ Y ที่แตกต่างกัน

แต่ถ้าเมื่อ

$g(x/Y = y) = g(x)$ โดยไม่ขึ้นกับค่าของ Y แล้ว เราพูดได้ว่า X และ Y จะเป็นอิสระต่อกัน และเราอาจพิสูจน์ได้ว่า เมื่อ X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$f(x,\ y) = g(x)\ .\ h(y)$$

ซึ่งตามปกติแล้ว มักจะใช้เงื่อนไข $f(x,\ y) = g(x)\ .\ h(y)$ เป็นนิยามที่แสดงการเป็นอิสระกันระหว่างตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัว ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม

X และ Y จะเป็นอิสระต่อกัน เมื่อฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม $f(x, y)$ สามารถเขียนได้ในเทอมของผลคูณของฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และของ Y นั่นคือ

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

และถ้า $f(x, y) \neq g(x) \cdot h(y)$ แล้ว จะเรียกว่าตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y พึ่งพิงกัน (Dependent)

ตัวอย่าง

กำหนดให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y เป็นดังนี้

y \ x	0	1	2	h(y)
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	9.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
g(x)	0.2	0.4	0.4	1.0

อยากทราบว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันเมื่อ

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

เช่น $f(0, 0) = 0.1$, $g(0) = 0.2$, $h(0) = 0.5$

$\therefore g(0) \cdot h(0) = 0.2 \times 0.5 = 1.0$

$= f(0, 0)$

หรือ $f(1,0) = 0.2$, $g(1) = 0.4$, $h(0) = 0.5$

$\therefore g(1) \cdot h(0) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$

$= f(1,0)$

ซึ่งถ้าคำนวณต่อไปเรื่อย ๆ จนทุก ๆ ค่าของ (x, y) แล้ว เราจะได้

$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ เสมอ

ดังนั้น X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระกัน

<u>ค่าคาดหวังของฟังก์ชันของสองตัวแปรเชิงสุ่ม</u> (Expected values of a function of two random variables)

เราสามารถหาค่าคาดหวังของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัวได้ โดยใช้ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรเชิงสุ่ม

เช่นสมมุติว่า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ และให้ $k(X, Y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงสุ่ม X และ Y เช่น $k(X, Y)$ อาจเป็น $X + Y$ หรือ XY หรือ $X - Y$ ก็ได้ เป็นต้น ซึ่งค่าคาดหวังกำหนดไว้ ดังนิยามต่อไปนี้

<u>นิยาม</u> ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ และ $k(X, Y)$ เป็นฟังก์ชันของ X และ Y แล้ว ค่าคาดหวังของ $k(X, Y)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$E[k(X, Y)] = \sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} k(x,y)\, f(x,y)$$

<u>ตัวอย่าง</u>

กำหนดให้ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม เป็นดังนี้

x \ y	0	1	2	3
0	1/8	1/4	1/8	0
1	0	1/8	1/4	1/8

ถ้าให้ $k(X, Y) = X + Y$

จงหา $E[k(X, Y)]$

$$E[k(X,Y)] = \sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} k(x,y)\, f(x, y)$$

ให้ $X + Y = Z$

$\therefore$ จะได้ตารางค่าที่จะเป็นไปได้ของ Z และ ความน่าจะเป็น ดังนี้

ค่าของ Z , z	0	1	2	3	4
ความน่าจะเป็น; f(z)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore \; E(Z) = E(X+Y)$$
$$= \left(0 \times \tfrac{1}{8}\right) + \left(1 \times \tfrac{1}{4}\right) + \left(2 \times \tfrac{1}{4}\right) + \left(3 \times \tfrac{1}{4}\right) + \left(4 \times \tfrac{1}{8}\right)$$
$$= 2$$

จากตัวอย่างนี้ ถ้าเราหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ ของ Y เราก็สามารถที่จะหาค่า E(X) และ E(Y) ได้ดังนี้

x \ y	0	1	2	3	P [X=x] =g(x)
0	1/8	1/4	1/8	0	1/2
1	0	1/8	1/4	1/8	1/2
P [Y=y] =h(y)	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$\therefore \; E(X) = \left(0 \times \tfrac{1}{2}\right) + \left(1 \times \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}$$

และ $E(Y) = \left(0 \times \tfrac{1}{8}\right) + \left(1 \times \tfrac{3}{8}\right) + \left(2 \times \tfrac{3}{8}\right) + \left(3 \times \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{3}{2}$

จากนี้ จะเห็นว่า ถ้าเรานำค่าของ E(X) บวกกับ E(Y) จะได้ค่าเท่ากับ E(X + Y) ที่คำนวณมาแล้วข้างต้น

$$E(X) + E(Y) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{4}{2} = 2 = E(X+Y)$$

และถ้ากำหนดให้ $Z = XY$ ก็จะได้ตารางค่าที่จะเป็นไปได้ของ Z และความน่าจะเป็นดังนี้

z	0	1	2	3
f(z)	1/2	1/8	1/4	1/8

$$\therefore \; E(Z) = E(XY)$$
$$= \left(0 \times \tfrac{1}{2}\right) + \left(1 \times \tfrac{1}{8}\right) + \left(2 \times \tfrac{1}{4}\right) + \left(3 \times \tfrac{1}{8}\right)$$
$$= 1$$
$$\neq E(X) \,.\, E(Y)$$

แต่ในกรณีที่ X และ Y เป็นอิสระต่อกัน เราจะได้ $E(XY) = E(X).E(Y)$
จากตัวอย่างข้างต้น จะได้คุณสมบัติของค่าคาดหวังของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ ดังนี้ ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ

1. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
2. $E(aX \pm Y) = aE(X) \pm E(Y)$
3. $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
4. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

<u>ค่าความแปรปรวนของผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ</u>

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ ค่าความแปรปรวนของผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่มทั้งสอง มีค่าเท่ากับ ผลบวกของความแปรปรวนของ X และ ความแปรปรวนของ Y

คือ $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

และถ้าให้ a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ จะได้

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

นอกจากนี้ ยังได้ว่า

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

และ $V(aX - bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$

<u>ค่าคาดหมาย และค่าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มภายใต้เงื่อนไข</u>

สำหรับฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเงื่อนไขนั้น คุณลักษณะที่สำคัญก็คือ ค่าคาดหมายภายใต้ เงื่อนไข และความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข ซึ่งนิยามไว้ดังนี้

<u>นิยาม</u>

ค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข ของตัวแปรเชิงสุ่ม X เมื่อกำหนด $Y = y$ คือ

$$E(X/Y = y) = \sum_{\text{all } x} x\, g(x/y) = \mu_{x/y}$$

และค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข ของตัวแปรเชิงสุ่ม Y เมื่อกำหนด $X = x$ คือ

$$E(Y/X = x) = \sum_{\text{all } y} y\, h(y/x) = \mu_{y/x}$$

ค่าความแปรปรวนของตัวแปรเชิงสุ่มภายใต้เงื่อนไข

ค่าความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด Y = y

คือ
$$\sigma^2_{x/y} = V[X/Y = y] = \sum_{\text{all } x} (x - \mu_{x/y})^2 g(x/y)$$

และ ค่าความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X = x คือ

$$\sigma^2_{y/x} = V[Y/X = x] = \sum_{\text{all } y} (y - \mu_{y/x})^2 h(y/x)$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ (Cumulative distribution function of two random variables)

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ นิยามไว้ดังนี้

<u>นิยาม</u> ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ และ (x, y) เป็นเลขจำนวนจริง ฟังก์ชัน F ที่กำหนดความน่าจะเป็น F(x, y) ให้แก่เหตุการณ์ ที่ X มีค่าน้อยกว่า หรือ เท่ากับ x และ y มีค่าน้อยกว่า หรือ เท่ากับ y จะเรียกว่า เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม (X,Y)

นั่นคือ $F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$

หรือ $= \sum_{a \leq x} \sum_{b \leq y} f(a, b)$

และ F(x, y) มีคุณสมบัติดังนี้

1. F(x, y) เป็นฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้น (non - decreasing function)
2. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

   $F(\infty, \infty) = 1$
3. F(x, y) เป็น ฟังก์ชันขั้นบันได (Step function) หรือ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางขวามือ (right continuous function)

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y เป็นดังนี้

x \ y	0	1	2	3
0	1/8	2/8	1/8	0
1	0	1/8	2/8	1/8

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และ Y (Cumulative distribution function of X and Y)

$$\because F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

$$\therefore F(0, 0) = P[X \leq 0, Y \leq 0]$$

พิจารณาเหตุการณ์ที่ $[X \leq 0, Y \leq 0]$ จะเห็นว่าเหตุการณ์ที่ $[X<0, Y<0]$ ไม่มี มีแต่เหตุการณ์ที่ $[X = 0, Y = 0]$ เท่านั้น

$$\therefore F(0, 0) = P[X = 0, Y = 0] = f(0, 0)$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$F(0, 1) = P[X \leq 0, Y \leq 1]$$

$$= P[X = 0, Y = 0] + P[X = 0, Y = 1]$$

$$= f(0, 0) + f(0, 1)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = 3$$

$$F(1, 0)) = P[X \leq 1, Y \leq 0]$$

$$= P[X = 0, Y = 0] + P[X = 1, Y = 0]$$

$$= f(0, 0) + f(1, 0) = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$$

$$F(1, 3) = P[X \leq 1, Y \leq 3]$$

$$= P[X = 0, Y = 0] + P[X = 0, Y = 1] + P[X = 0, Y = 2]$$

$$+ P[X = 0, Y = 3] + P[X = 1, Y = 0] + P[X = 1, Y = 1]$$

$$+ P[X = 1, y = 2] + P[X = 1, Y = 3]$$

$$= f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) + f(0, 3) + f(1, 0) + f(1, 1)$$

$$+ f(1, 2) + f(1, 3)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + 0 + 0 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{8}{8}$$

$$= 1$$

ทำต่อไปเรื่อย ๆ จนครบทุก ๆ ค่าของ (x, y) ก็จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และ Y ซึ่งเขียนสรุปได้ดังตาราง

x \ y	0	1	2	3
0	$^1/_8$	$^3/_8$	$^4/_8$	$^4/_8$
1	$^1/_8$	$^4/_8$	$^7/_8$	1

<u>ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X และ ของ Y</u>

(Marginal distribution function of X and of Y)

ให้ G(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X (Marginal distribution function of X)

และ H(y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมทางเดียวของ Y (Marginal distribution function of Y)

ซึ่ง $G(x) = \sum_{a \leq x} g(a)$

และ $H(y) = \sum_{a \leq y} h(b)$

<u>ตัวอย่าง</u>

กำหนดให้ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y เป็นดังนี้

y \ x	0	1	P [Y = y]
0	0	$^1/_2$	$^1/_2$
1	$^1/_2$	0	$^1/_2$
P[X = x]	$^1/_2$	$^1/_2$	1

∴ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ ของ Y เขียนได้ดังนี้

	0	1
g(x)	$^1/_2$	$^1/_2$
h(y	$^1/_2$	$^1/_2$

ถ้าเราบวกฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นทางเดียวของ X สะสมจาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ ก็จะได้ตารางฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X

นั่นคือ
$$G(0) = 1/2$$
$$G(1) = 1/2 + 1/2 = 1$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าเราบวกฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นทางเดียวของ Y สะสมจากค่า $y = 0$ ถึง $y = 1$ ก็จะได้
$$H(0) = 1/2$$
$$H(1) = 1/2 + 1/2 = 1$$

ถ้าเขียนแสดงตาราง จะได้

	0	1
G(x)	1/2	1
H(y)	1/2	1

จะสังเกตเห็นว่า ค่าของฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมทางเดียวของ X และ Y เมื่อค่าของ X และ Y มีค่าเท่ากับ ค่าสูงสุด จะเท่ากับ 1 เสมอ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของฟังก์ชั่น การแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่ม นั่นคือ
$$G(1) = 1$$
$$H(1) = 1$$

<u>ฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไข</u>

การหาฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมภายใต้เงื่อนไขนั้น เราได้จากการสะสมฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขนั่นเอง เช่น ต้องการหาฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมของ X ภายใต้เงื่อนไข $Y = y$ คือ

$$G(x/y) = \sum_{t \le x} g(t/y)$$
$$= \sum_{t \le x} \frac{f(t, y)}{h(y)} \quad ; \quad h(y) > 0$$

หรือจะหาฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมของ Y ภายใต้เงื่อนไข $X = x$ คือ

$$H(y/x) = \sum_{t \le y} h(t/x)$$

$$= \sum_{t \le y} \frac{f(x, t)}{g(x)} \quad ; \quad g(x) > 0$$

<u>ตัวอย่าง</u>

กำหนดตารางความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด $Y = y$ และตารางความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด $X = x$ ให้ดังนี้

ตาราง $g(x/y)$

y \ x	0	1
0	$1/2$	$1/2$
1	$4/7$	$3/7$

ตาราง $h(y/x)$

y \ x	0	1
0	$7/11$	$7/10$
1	$4/11$	$3/10$

จงหา $G(x/y)$ และ $H(y/x)$

$$\therefore \quad G(x/y) = \sum_{t \le x} g(t/y)$$

$$G(0/Y = 0) = \sum_{t \le 0} g(t/Y = 0)$$

$$= g(0/Y = 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$G(1/Y = 0) = \sum_{t \le 1} g(t/Y = 0)$$

$$= g(0/Y = 0) + g(1/Y = 0)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$G(0/Y = 1) = \sum_{t \le 0} g(t/Y = 1)$$

$$= g(0/Y = 1) = \frac{4}{7}$$

$$G(1/Y = 1) = \sum_{t \le 1} g(t/Y = 1)$$

$$= g(0/Y = 1) + g(1/Y = 1)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1$$

$$H(y/x) = \sum_{t \le y} h(t/x)$$

$$\therefore H(0/X = 0) = \sum_{t \le 0} h(t/X = 0)$$

$$= h(0/X = 0) = {}^{7}/_{11}$$

$$H(1/X = 0) = \sum_{t \le 1} h(t/X = 0)$$

$$= h(0/X = 0) + h(1/X = 0)$$

$$= {}^{7}/_{11} + {}^{4}/_{11} = 1$$

$$H(0/X = 1) = \sum_{t \le 0} h(t/X = 1)$$

$$= h(0/X = 1)$$

$$= {}^{7}/_{10}$$

$$H(1/X = 1) = \sum_{t \le 1} h(t/X = 1)$$

$$= h(0/X = 1) + h(1/X = 1)$$

$$= {}^{7}/_{10} + {}^{3}/_{10}$$

$$= {}^{10}/_{10}$$

$$= 1$$

<u>ความเป็นอิสระกันของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ</u>

ความเป็นอิสระกันของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 มิติ นอกจากเราจะดูได้จาก $f(x, y) = g(x).h(y)$ หรือ $g(x/y) = g(x)$ หรือ $h(y/x) = g(y)$ แล้ว เรายังดูได้จากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรเชิงสุ่มทั้ง 2 ได้อีกด้วย ดังนี้

ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$F(x, y) = G(x) \cdot H(y)$$

หรือ $$G(x/y) = G(x)$$

หรือ $$H(y/x) = H(y)$$

พิสูจน์

$$\because G(x/y) = \sum_{t \leq x} g(t/x)$$

$$= \sum_{t \leq x} \frac{f(t, y)}{h(y)}$$

$$= \sum_{t \leq x} \frac{g(t) \cdot \cancel{h(y)}}{\cancel{h(y)}} \quad \because X \text{ และ } Y \text{ เป็นอิสระต่อกัน}$$

$$= \sum_{t \leq x} g(t)$$

$$= G(x)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$H(y/x) = H(y)$$

แบบฝึกหัด

1. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก และสีเขียว 2 ลูก สุ่มลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอลที่อยู่ใน กล่องนี้ แบบสุ่มแล้วกลับคืน ถ้าให้

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าลูกบอลลูกแรกเป็นสีเขียว} \\ 1 & \text{ถ้าลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดง} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเขียว} \\ 1 & \text{ถ้าลูกบอลลูกที่สองเป็นสีแดง} \end{cases}$$

จงหา

ก) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

ข) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ Y

ค) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และ Y

ง) ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข ของ X เมื่อกำหนด Y = 0
และความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด Y = 1

จ) ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X = 0
และความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนด X = 1

ฉ) X และ Y เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ
$$\sum_{\text{all } x} \sum_{\text{all } y} f(x, y) = 1$$

3. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X และ Y กำหนดไว้ดังนี้

$f(x, y) = 1/_{32}(x^2 + y^2)$ สำหรับ $x = 0, 1, 2, 3$ และ $y = 0, 1$

จงแสดงว่า

ก) $g(x) = 1/_{32}(2x^2 + 1)$ สำหรับ $x = 0, 1, 2, 3$

ข) $h(y) = 1/_{16}(2y^2 + 7)$ สำหรับ $y = 0, 1$

ค) $g(x/y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2(2y^2 + 7)}$ สำหรับ $x = 0, 1, 2, 3$ และ $y = 0, 1$

ง) $h(y/x) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2 + 1}$ สำหรับ $x = 0, 1, 2, 3$ และ $y = 0, 1$

4. ทอดเหรียญ 3 ครั้ง ให้

$$X = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าทอดครั้งแรกได้ก้อย} \\ 1 & \text{ถ้าทอดครั้งแรกได้หัว} \end{cases}$$

Z = ค่าสมบูรณ์ (ablolute value) ของผลต่างระหว่างจำนวนหัวกับจำนวนก้อยที่ได้

คือ $Z = |H - T|$

จงหา

ก) ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Z พร้อมทั้งเขียนกราฟ

ข) ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ ของ Z

ค) ฟังก์ชั่นการแจกแจงสะสมของ X และ Z

ง) X และ Z เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

5. ทอดเหรียญ 4 ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนหัวที่ได้ในการทอดเหรียญ 2 ครั้งแรก และ Y เป็นจำนวนหัวที่ได้ในการทอดเหรียญ 2 ครั้งสุดท้าย จงหาฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y และฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และ ของ Y

6. จงพิสูจน์ว่า

ก) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

ข) ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกันแล้ว

ก) $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

ข) $V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ใด ๆ

8. ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีค่าเฉลี่ย $= 50$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 12 ตัวแปรเชิงสุ่ม Y มีค่าเฉลี่ย $= 30$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5 ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ

ก) $X + Y$

ข) $X - Y$

ค) $3X + 2Y$

(หมายเหตุ $\sigma_{X+Y} \neq \sigma_X + \sigma_Y$)

9. ให้ X และ Y เป็นอิสระต่อกัน และกำหนดค่าฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ X และ ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Y ดังนี้

x	1	2
g(x)	.6	.4

y	5	10	15
h(y)	.2	.5	.3

จงหา

ก) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y

ข) ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X และ Y

ค) $G(x)$ และ $H(y)$

ง) $g(x/Y = 5)$, $g(x/Y = 10)$, $g(x/Y = 15)$

และ $h(y/X = 1)$, $h(y/X = 2)$

จ) $G(x/y)$ และ $H(y/x)$

ฉ) $E(XY)$, $E(X + Y)$, $V(X + Y)$

10. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จงพิสูจน์ว่า

$$H(y/x) = H(y)$$

11. กำหนดให้

x \ Y	-4	2	7	Sum
1	$^1/_8$	$^1/_4$	$^1/_8$	$^1/_2$
5	$^1/_4$	$^1/_8$	$^1/_8$	$^1/_2$
Sum	$^3/_8$	$^3/_8$	$^1/_4$	1

จงหา

ก) $E(X)$, $E(Y)$

ข) $g(x/y)$, $h(y/x)$

ค) $E(X/Y = y)$, $E(Y/X = x)$

ง) $\sigma^2_{x/y}$, $\sigma^2_{y/x}$

12. มีเบอร์อยู่ในกล่อง คือ เบอร์ 1, 2, 3,...,21 ต้องการหยิบมาทีละเบอร์ ให้

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าหยิบได้เบอร์คู่} \\ 0 & \text{ถ้าหยิบได้เบอร์คี่} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าหยิบได้เบอร์ที่ หารด้วย 3 ลงตัว} \\ 0 & \text{ถ้าหยิบได้เบอร์ที่ หารด้วย 3 ไม่ลงตัว} \end{cases}$$

จงหา

ก) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นรวมของ X และ Y

ข) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทางเดียวของ X และของ Y

ค) $h(y/X = 1)$, $h(y/X = 0)$, $g(x/Y = 0)$ และ $g(x/Y = 1)$