บทที่ 3
ความน่าจะเป็น (Probability)

วัตถุประสงค์

การศึกษาถึงความน่าจะเป็น จุดมุ่งหมายก็เพื่อต้องการให้เข้าใจความหมายของคำว่า ความน่าจะเป็น วิธีการคำนวณหาความน่าจะเป็นของผลการทดลองต่าง ๆ การคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับความน่าจะเป็น ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ทฤษฎีของเบยส์ และความเป็นอิสระกันของเหตุการณ์

คำนำ ความน่าจะเป็น มีบทบาทสำคัญกับชีวิตประจำวันของมนุษย์ เนื่องจากมนุษย์ทุกคนจะต้องเผชิญกับเหตุการณ์ชีวิตประจำวัน ซึ่งมักจะเป็นเหตุการณ์ที่มนุษย์ไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าเหตุการณ์นั้น ๆ จะเกิดขึ้นหรือไม่ ตัวอย่างเช่น ทุกคนไม่สามารถจะทราบได้ว่าตนจะตายเมื่ออายุเท่าใดแน่ หรือถ้าเราซื้อล็อตเตอรี่งวดนี้ เราก็ไม่สามารถบอกได้ว่าเราจะถูกรางวัลหรือไม่ หรือถ้าเราขับรถออกไปนอกบ้านเราไม่สามารถบอกได้ว่าจะเกิดอุบัติเหตุหรือไม่ หรือถ้าเราลงทุนทำกิจการใดก็ตาม เราก็ไม่สามารถบอกได้ว่าเราจะขาดทุนหรือได้กำไร เป็นต้น ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นสิ่งที่ไม่แน่นอน และผู้ที่ประสบกับปัญหาดังกล่าวนี้ส่วนมากก็จะเดาเหตุการณ์ไว้ล่วงหน้าว่า จะเกิดหรือไม่เกิด โดยใช้คำว่า " อาจจะ " " คงจะ " "น่าจะ " เช่น ซื้อล็อตเตอรี่งวดนี้อาจจะถูกรางวัลใดรางวัลหนึ่งได้ หรือหญิงที่มีครรภ์อาจจะพูดว่า " คลอดลูกครั้งนี้อาจจะเป็นผู้ชาย " เป็นต้น ซึ่งคำพูดที่แสดงความไม่แน่นอนเหล่านี้ เราสามารถที่จะทำให้ตัวเราเองหรือผู้ฟังเชื่อถือได้มากน้อยแค่ไหนนั้นเป็นเรื่องของการศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไปดังนี้

ก่อนที่จะศึกษาถึงความน่าจะเป็นว่าคืออะไร นักศึกษาควรจะทราบความหมายของการทดลองเชิงสุ่ม (Random trial) กลุ่มผลการทดลอง (Sample space) เหตุการณ์ (Event) และ Funtion ก่อน

การทดลองเชิงสุ่ม (**Random Trial**)

นักวิทยาศาสตร์ได้แบ่งการทดลอง (**trial**) ใด ๆ ออกเป็น 2 ประเภท คือ

ก. การทดลองที่ทราบผลลัพธ์แน่นอน (**Deterministic trial**) เป็นการทดลองที่เราทราบผลของการทดลองล่วงหน้าว่าจะเป็นอย่างไร การเกิดของผลการทดลองนี้อาศัยทฤษฎีหรือกฎเกณฑ์ตามธรรมชาติ ตัวอย่างของ **deterministic trial** เช่น การโยนของจากที่สูง จะบอกได้ล่วงหน้าว่าของชิ้นนั้นจะตกลงพื้นอย่างแน่นอน การกู้เงินจากธนาคาร 20,000 บาท ภายใน 2 ปี เราก็ทราบว่าจะต้องเสียดอกเบี้ย 3,000 บาท (ถ้าอัตราดอกเบี้ยธนาคารคิด 15% ต่อปี) หรือการทดลองทางวิทยาศาสตร์ก็เป็น **deterministic trial** ซึ่งการทดลองประเภทนี้ เราจะไม่นำมาพูดถึงในเรื่องของความน่าจะเป็น เนื่องจากเราทราบผลการทดลองที่จะเกิดขึ้นล่วงหน้าก่อนการทดลองแล้ว การทดลองที่เราจะนำมาพูดถึงเรื่องความน่าจะเป็น จะเป็นการทดลองประเภทที่สอง คือ

ข. การทดลองเชิงสุ่ม (**Non deterministic trial หรือ Random trial**) เป็นการทดลองใด ๆ ที่ผลลัพธ์ของการทดลองที่ออกมาไม่สามารถทำนายได้ล่วงหน้าว่า ผลลัพธ์จะออกมาในรูปใด ผลลัพธ์ดังกล่าวขึ้นกับตัวประกอบบางประการซึ่งไม่สามารถควบคุมได้ ซึ่งตัวประกอบเหล่านี้จัดรวมกันเข้าเรียกว่าตัวประกอบเชิงสุ่ม (**random factor**)

ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ ผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นได้มีได้ 2 อย่าง คือ หงายหัว หรือ หงายก้อย ซึ่งเราไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่า เหรียญที่เราโยนไปนั้นจะหงายเป็นหัวหรือหงายเป็นก้อย การโยนเหรียญจึงเป็นการทดลองเชิงสุ่ม หรือการหยิบลูกบอลล์จากกล่องใบหนึ่ง ซึ่งมีหมายเลข 1, 2, 3,..., 10 กำกับไว้ เราก็ไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าเราจะหยิบได้ลูกบอลล์หมายเลขอะไร การหยิบลูกบอลล์จากกล่องก็เป็นการทดลองเชิงสุ่ม หรือถ้าหากเราจะสับไพ่ให้ดี และจะดึงไพ่ออกมาหนึ่งใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ เราก็ไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าจะได้ไพ่ใบไหน การดึงไพ่จากสำรับจึงเป็นการทดลองเชิงสุ่ม หรือการตายของคนเราไม่ทราบล่วงหน้าว่าแต่ละคนจะตายเมื่ออายุเท่าใด ก็เป็นการทดลองเชิงสุ่ม หรือการขับรถไปตามท้องถนน ขณะที่ฝนตก ก็เป็นการทดลองเชิงสุ่ม เพราะ

เราไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่า จะประสบอุบัติเหตุหรือไม่ เป็นต้น

Sample Space (กลุ่มผลการทดลอง)

เมื่อเราพิจารณาการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ก็คือกลุ่มผลการทดลอง (**Sample space**) ของการทดลองนั้น ๆ และแต่ละผลลัพธ์ของการทดลองที่ได้เราเรียกว่า **outcome** หรือ **sample point** ซึ่งจะนิยามคำว่า **Sample space** ไว้ดังนี้

นิยาม **Sample space** ของการทดลองหนึ่ง ๆ คือ เซทของผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ (ที่แตกต่างกัน) ทั้งหมด ของการทดลองนั้น ซึ่งเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย " S "

ถ้าให้ สัญลักษณ์ที่เขียนแทน **outcome** ที่จะเป็นไปได้ คือ $o_1, o_2, o_3, \ldots$

$$\therefore \; S = \{ o_1, o_2, o_3, \ldots \}$$

ข้อสังเกต

เนื่องจาก การทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ นั้น ถ้าเราพิจารณาในทัศนะที่ต่างกัน **outcome** ที่จะเป็นไปได้ อาจจะไม่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น การขับรถไปตามท้องถนนเพื่อไปทำงาน ซึ่งเป็นการทดลองเชิงสุ่มอย่างหนึ่ง ถ้าเรามองในแง่ของการเกิดอุบัติเหตุ ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปทั้งหมด ก็จะมีอยู่ 2 ผลลัพธ์เท่านั้น คือ เกิดอุบัติเหตุ กับไม่เกิดอุบัติเหตุ ดังนี้

Sample Space $= \{ o_1, o_2 \}$

เมื่อ o_1 = เกิดอุบัติเหตุ

o_2 = ไม่เกิดอุบัติเหตุ

แต่ถ้าเรามองในแง่ของการใช้เวลาในการเดินทางไปยังที่ทำงาน เราไม่สามารถจะบอกได้ล่วงหน้าอย่างแน่นอนลงไปว่า จะใช้เวลาเดินทางเท่าใด ซึ่งผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้

ทั้งหมดของการทดลองนี้ ก็จะประกอบไปด้วยเวลาเดินทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด ตั้งแต่ 0 ถึง ∞

$\therefore$ **Sample space** = { เวลาเดินทาง (t)/$0 \angle t \angle \infty$ }

ดังนั้น เมื่อกล่าวถึง การทดลองเชิงสุ่มทุกครั้ง จะต้องกำหนดให้แน่นอนลงไปด้วยว่า **Sample space** ของการทดลองเชิงสุ่มที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นคืออะไร

ตัวอย่างการหา **Sample space** ของการทดลองเชิงสุ่มต่าง ๆ มีดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 การโยนลูกเต๋า 1 ลูก เป็นการทดลองเชิงสุ่มซึ่งมีผลลัพธ์ (**outcome**) ที่จะเป็นไปได้อยู่ 6 **outcome** ด้วยกัน คือ อาจจะโยนแล้วได้หน้า 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 หรือ 5 หรือ 6

$\therefore$ S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

ตัวอย่างที่ 2 การโยนเหรียญ 1 เหรียญ เป็นการทดลองเชิงสุ่มที่มีผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้อยู่ 2 **outcomes** ด้วยกัน คือ อาจโยนแล้วได้หัวหรือได้ก้อย

$\therefore$ S = { หัว, ก้อย }

ตัวอย่างที่ 3 การซื้อล็อตเตอรี่งวดหนึ่ง ๆ เป็นการทดลองเชิงสุ่มที่มีผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้อยู่ 2 **outcomes** คือ ถูกรางวัล หรือ ไม่ถูกรางวัล ถ้าให้ O_1 = ถูกรางวัล

O_2 = ไม่ถูกรางวัล

$\therefore$ S = { ถูกรางวัล ,ไม่ถูกรางวัล }

ตัวอย่างที่ 4 โยนลูกเต๋า 2 ลูก ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้จะเป็น **ordered pair** ต่าง ๆ ของลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง และลูกที่สอง ซึ่งถ้าให้ลำดับแรกเป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการโยนลูกเต๋าลูกแรก และลำดับที่สองเป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการโยนลูกเต๋าลูกที่สอง ดังนั้น ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจะมีอยู่ 36 **outcomes**

$\therefore$ S = { (1,), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1),(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1),(3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1),(4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1),(5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1),(6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> การสอบของนักศึกษาในวิชา ST 205 จำนวน 100 คน เกรดที่นักศึกษาจะได้ จะมี 3 เกรด คือ G, P และ F

$$\therefore S = \{G, P, F\}$$

จำนวนเกรด G, P และ F ใน S รวมกันแล้วจะต้องเท่ากับ 100 เกรด

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง เป็นการทดลองเชิงสุ่มที่มีผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 52 outcomes

$$\therefore S = \{\heartsuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$
$$\clubsuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$
$$\diamondsuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$
$$\spadesuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> การนับจำนวนอุบัติเหตุบนท้องถนนสายหนึ่ง ในเวลา 6.00 น. ถึง 24.00 น. การนับก็เป็นการทดลองเชิงสุ่ม ดังนั้น ผลลัพธ์ของการทดลอง อาจจะเป็นตัวเลขใดตัวเลขหนึ่งก็ได้ตั้งแต่ 0 ถึง

$$\therefore S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กล่องใบหนึ่งมีลูกปัดอยู่ 30 ลูก เป็นสีแดง 10 ลูก สีเขียว 8 ลูก ที่เหลือเป็นสีเหลือง ถ้าหยิบลูกปัดมา 1 ลูก แบบสุ่ม ๆ ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจะมี 3 outcomes คือ หยิบได้ลูกปัดสีแดง หรือสีเขียว หรือสีเหลือง

$$\therefore S = \{\text{แดง, เขียว, เหลือง}\}$$

ซึ่งจำนวนลูกปัดสีต่าง ๆ เมื่อหยิบแล้วจะต้องมีจำนวนต่าง ๆ ดังนี้คือ ลูกปัดสีแดง 10 ลูก สีเขียว 8 ลูก สีเหลือง 12 ลูก

จากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้นนั้น ก็พอจะเป็นแนวความคิดที่นักศึกษาจะหา Sample space ของการทดลองเชิงสุ่มต่าง ๆ ได้ ไม่ยากนัก

ชนิดของ Sample space

มีอยู่ 2 ชนิด ดังนี้คือ

1. **Finite sample space** คือ sample space ที่มีจำนวน sample points ที่สามารถนับได้ถ้วน

2. **Infinite sample space** คือ sample space ที่มีจำนวน sample points ที่ไม่สามารถนับได้ถ้วน

เหตุการณ์ (Events)

นิยาม เหตุการณ์คือซับเซท (Subset) ของกลุ่มผลการทดลอง (Sample space) มักจะใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น A, B, C,... เขียนสัญญลักษณ์แทนเหตุการณ์ใด ๆ และจำนวนสมาชิกของซับเซทดังกล่าวนี้ อาจจะมีจำนวนมากน้อยเท่าใดก็ได้ แต่ต้องไม่เกินจำนวนสมาชิกที่มีอยู่ใน sample space ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสนใจ หรือข้อจำกัดซึ่งเรากำหนดไว้

ดังนั้น ถ้าจะแบ่งเหตุการณ์ตามลักษณะโครงสร้างภายในจะแบ่งได้เป็น 2 ชนิด คือ เหตุการณ์อย่างง่าย (Simple event) คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงหนึ่งตัว เช่น A เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยเลข 5 $\therefore A = \{5\}$ เป็น Simple event แต่ถ้าเหตุการณ์นั้นประกอบด้วยสมาชิกตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป จะเรียกว่าเหตุการณ์นั้นเป็นเหตุการณ์ประกอบ (Compound event) เช่น B เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยเลข 1, 3, 5, 7,9 $\therefore B = \{1,3,5,7,9\}$ หรือโยนลูกเต๋า 2 ลูก ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าเหมือนกันหมด

$$\therefore C = \{(1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

ตัวอย่าง สมมติว่าในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลล์ 3 ใบ มีหมายเลข 1, 2, 3 กำกับไว้ ถ้าหากจะหยิบลูกบอลล์ออกมาหนึ่งใบ

$\therefore$ random trial นี้ มี Sample space = $\{1,2,3\}$

และเหตุการณ์ของ random trial นี้ ก็คือซับเซทของ Sample space ดังนั้นเหตุการณ์ที่จะเป็นไปได้จะมีถึง $2^3 = 8$ เหตุการณ์ดังนี้

$$
\begin{array}{llll}
E_1 = \{1\} & & E_5 = & \{1, 3\} \\
E_2 = \{2\} & & E_6 = & \{2, 3\} \\
E_3 = \{3\} & & E_7 = & \{1, 2, 3\} \\
E_4 = \{1, 2\} & & E_8 = & \emptyset
\end{array}
$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า

1. เซทที่ประกอบด้วย outcome เดียว คือ E_1, E_2 และ E_3 ก็ถือว่าเป็นเหตุการณ์ด้วย ซึ่งเป็นลักษณะของเหตุการณ์ที่เรียกว่าเหตุการณ์อย่างง่าย (Simple event)

2. เซทที่ประกอบด้วย outcome ทั้งหมดของ Sample space คือ E_7 ก็เป็นเหตุการณ์หนึ่งด้วยเหมือนกัน

3. เซท ที่ว่างเปล่า ($\emptyset$) ก็จัดเป็นเหตุการณ์หนึ่งด้วย เพราะเราถือว่า $\emptyset$ เป็นซับเซทของ Sample space ด้วย

4. จำนวนเหตุการณ์ที่จะสร้างขึ้นได้ จะมีมากกว่าจำนวนสมาชิกของ Sample space และสามารถหาจำนวนของเหตุการณ์ที่จะสร้างขึ้นได้โดยใช้สูตร

จำนวนเหตุการณ์ที่จะสร้าง ได้ทั้งหมด $= 2^m$

เมื่อ m คือจำนวนสมาชิกของ sample space

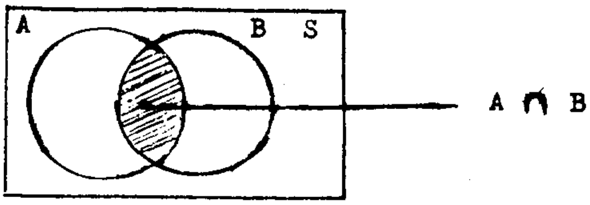
จากตัวอย่างนี้ จำนวนเหตุการณ์ที่จะสร้างขึ้นได้ $= 2^3 = 8$ เหตุการณ์

การรวมตัวของเหตุการณ์ (Event operation)

เนื่องจากเหตุการณ์เป็นเซท เพราะฉะนั้นการรวมตัวของเหตุการณ์จึงเหมือนกับการรวมตัวของเซท ซึ่งมีดังนี้

<u>เหตุการณ์ A และ B</u>

คือ เซทของ outcome ที่เป็นทั้ง outcome ของ A และในขณะเดียวกันก็เป็นสมาชิกของ B ด้วยพร้อม ๆ กัน และมักจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$



ภาพแสดงเซทของ outcome ที่เป็นของ A และ B ร่วมกัน

$A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ร่วมของ A และ B ดังนั้น ในการทดลองเชิงสุ่มนั้น $O_i \in A \cap B$ หมายความว่า $O_i \in A$ และในขณะเดียวกัน $O_i \in B$ ด้วย แสดงว่า A และ B เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน ในการทดลองนั้น ๆ

ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญ 3 เหรียญ

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ถ้าให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัว 2 หัว และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญแรกได้ก้อย

$$\therefore E_1 = \{HHT, HTH, HTH, THH\}$$

$$E_2 = \{THH, THT, TTH, TTT\}$$

จะได้ $E_1 \cap E_2 = \{THH\}$ เพราะว่า outcome THH เป็น outcome ร่วมของทั้ง E_1 และ E_2

$\therefore$ เมื่อการทดลองเชิงสุ่มนั้นมีผลลัพธ์เป็น THH ก็แสดงว่าเหตุการณ์ $E_1 \cap E_2$ เกิดขึ้นในการทดลองนั้น และขณะเดียวกัน E_1 และ E_2 ก็เกิดขึ้นด้วย

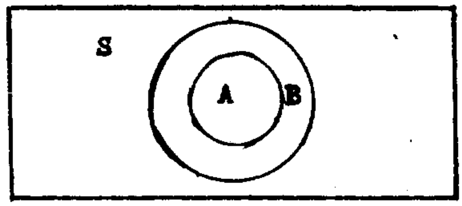
<u>เหตุการณ์ที่เป็นชุดย่อยของอีกเหตุการณ์หนึ่ง</u>

มีเหตุการณ์บางเหตุการณ์ที่เซทของ outcomes เป็นซับเซท (subset) หรือชุดย่อย ของอีกเหตุการณ์หนึ่ง คือ ถ้าหากมีเหตุการณ์ A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ

และ A เป็นซับเซทของ B แสดงว่า ทุก ๆ outcomes ที่อยู่ในเซท A ก็เป็น outcomes ของเซท B ด้วย ดังนั้น

$$A \cap B = A$$

และถ้าหากเหตุการณ์ A เกิดขึ้น ในการทดลองนี้ เหตุการณ์ B ก็ต้องเกิดขึ้นด้วย



ภาพแสดงให้เห็น A เป็นซับเซทของ B

ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 3 เหรียญ

ถ้าให้ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่โยนแล้วได้หัว 3 หัว

และ E_4 เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญแรกได้หัว

$\therefore \quad E_3 = \{HHH\}$

$\quad\quad E_4 = \{HHH, HH T, HTH, HTT\}$

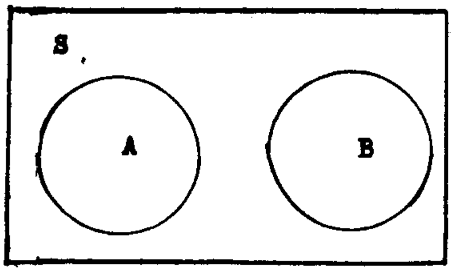
$\therefore \quad E_3 = \{HHH\},$ เป็น outcome ของ E_4

แสดงว่า ทุก ๆ outcome ใน E_3 เป็น outcome ของ E_4 ทั้งหมด ในกรณีที่

$E_3 \cap E_4 = E_3$

<u>เหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน</u> (Mutually exclusive or disjoint event)

ถ้าเหตุการณ์ A และ B ไม่มี outcome ร่วมกันเลย เราเรียกว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน ในกรณีนี้เราจะได้ว่า $A \cap B = \emptyset$ ซึ่งหมายความว่า ในการทดลองนี้ เหตุการณ์ A และ B จะเกิดขึ้นพร้อม ๆ กันไม่ได้



ภาพแสดง เหตุการณ์ A และ B แยกต่างหากจากกัน

จากตัวอย่าง การโยนเหรียญ 3 เหรียญ

ถ้าให้ E_6 = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญแรกได้หัว

E_7 = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญแรกได้ก้อย

$\therefore$ $E_6 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$E_7 = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore E_6 \cap E_7 = \emptyset$

<u>การเกิดร่วมกันของเหตุการณ์ มากกว่าสองเหตุการณ์</u>

จากการเกิดร่วมกันของสองเหตุการณ์ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เราสามารถขยายออกไปให้เป็นการเกิดร่วมกันของสามเหตุการณ์ สี่เหตุการณ์ ฯลฯ เช่น ถ้ามีเหตุการณ์สามเหตุการณ์ คือ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ

$\therefore A \cap B \cap C$ คือเซทของ **outcomes** ที่เป็นทั้งของเซท A เซท B และเซท C พร้อม ๆ กัน เราจึงเรียกว่า $A \cap B \cap C$ เป็นเหตุการณ์ร่วมของ A, B และ C

จากตัวอย่างการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ถ้าให้

A = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญได้ 3 หัว

B = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญครั้งแรกได้หัว

C = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญแล้วได้อย่างน้อย 1 หัว

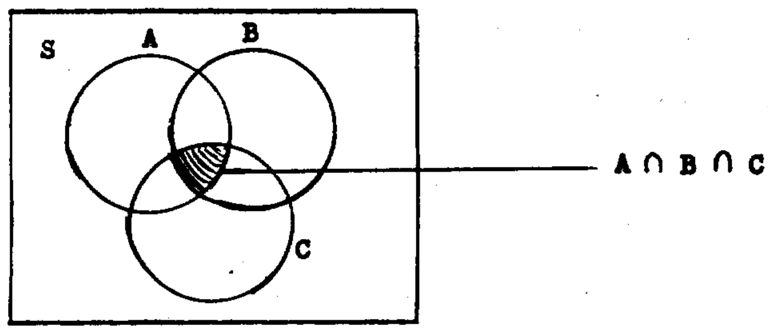
$\therefore A = \{HHH\}$

$B = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$C = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$

$\therefore A \cap B \cap C = \{HHH\}$

เพราะว่า outcome HHH เป็น outcome เดียวที่เป็นทั้งของ A, B และ C



ภาพแสดงเหตุการณ์ $A \cap B \cap C$

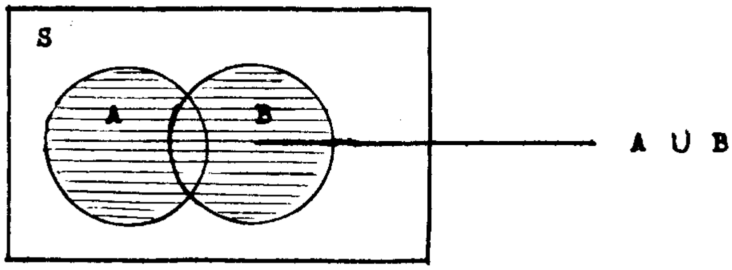
<u>เหตุการณ์ A และ/หรือ B</u>

ถ้าเราพิจารณา เหตุการณ์ A และ B ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ เซทของ outcome ที่เกิดจากการนำ outcomes ของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B มารวมกัน โดย outcome ใดที่ซ้ำกัน ก็จะนับรวมเพียงตัวเดียว เราเรียกเซทนั้นว่า ยูเนี่ยน (union) ระหว่างเหตุการณ์ A และ B เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $A \cup B$ ซึ่ง $A \cup B$ ก็เป็นเหตุการณ์หนึ่งของการทดลองเชิงสุ่มนั้น และเราเรียกเหตุการณ์ $A \cup B$ ว่า " เหตุการณ์ A และ/หรือ B " ทั้งนี้เพราะว่า เมื่อ $A \cup B$ เกิดขึ้นในการทดลองนั้น เราอาจสรุปได้ว่าผลลัพธ์จะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งดังนี้คือ

ก. A เกิดขึ้น

ข. B เกิดขึ้น และ

ค. ทั้ง A และ B เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน



ภาพแสดง A ∪ B

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{1, 7, 5, 9, 11, 13, 15\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15\}$

ซึ่งถ้าสังเกตดูแล้วจะเห็นว่า $A \cap B$ จะต้องเป็นซับเซทของ $A \cup B$ เสมอ นั่นคือ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

ในกรณีที่การทดลองเชิงสุ่มหนึ่งมีเหตุการณ์มากกว่าสองเหตุการณ์ขึ้นไป ก็มีความหมายเช่นเดียวกัน เช่น ถ้ามี 3 เหตุการณ์ A, B และ C

$A \cup B \cup C$ ก็คือเหตุการณ์ A และ/หรือ B และ/หรือ C

ซึ่งถ้า $A \cup B \cup C$ เกิดขึ้นในการทดลองนั้น เราอาจจะได้ผลลัพธ์เป็นกรณีใดกรณีหนึ่งดังนี้คือ

ก. A เกิดขึ้น

ข. B เกิดขึ้น

ค. C เกิดขึ้น

ง. A และ B เกิดขึ้น พร้อมกัน

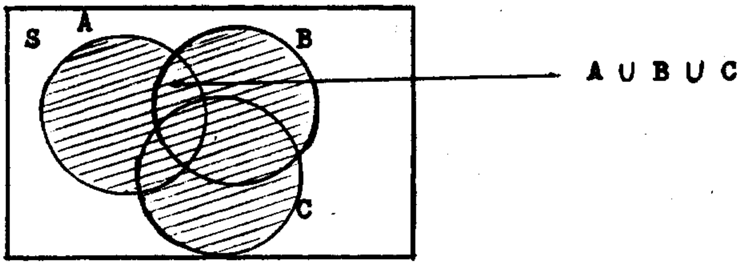
จ. A และ C เกิดขึ้น พร้อมกัน

ฉ. B และ C เกิดขึ้น พร้อมกัน

ช. A และ B และ C เกิดขึ้น พร้อม ๆ กัน

ตัวอย่างเช่น ถ้าให้

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



ภาพแสดง A U B U C

<u>เหตุการณ์ที่ไม่ใช่ A</u>

ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ เซทของ **outcome** ที่อยู่ใน **sample space** S ที่ไม่อยู่ในเซท A เรียกว่า คอมพลิเม้นท์ของ A เขียนสัญญลักษณ์แทนด้วย A' หรือ A^C

ดังนั้น A' ก็เป็นเหตุการณ์หนึ่งของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ด้วย เรียกเหตุการณ์นี้ว่า " เหตุการณ์ที่ไม่ใช่ A " ทั้งนี้เพราะว่า ถ้า A' เกิดเป็นผลลัพธ์ของการทดลองนั้น ก็หมายความว่า $o_i \in A'$ ซึ่งเมื่อเป็นเช่นนี้ก็แสดงว่า o_i จะไม่อยู่ในเซท A และ A จะไม่เกิดขึ้น ในการทดลองนี้ ตัวอย่างเช่น

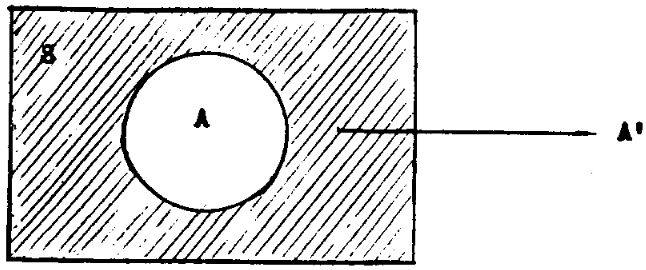
ถ้าให้ $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$\therefore A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

นอกจากนี้ เราจะได้ว่า

ก. $A \cap A' = \emptyset$

ข. $A \cup A' = S$

ค. $(A')' = A$



ภาพแสดง A'

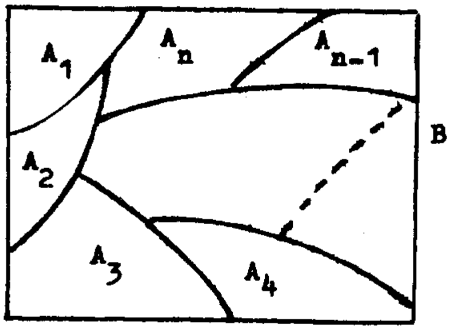
<u>ส่วนแบ่งของเหตุการณ์</u> (Partition of event)

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ จะประกอบเป็นส่วนแบ่งของเหตุการณ์ B ถ้าสอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ก. $A_i \subseteq B \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$
นั่นคือ A_i เป็นเหตุการณ์ที่มีผลการทดลองทั้งหมดอยู่ใน B

ข. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i = 1, 2, \ldots, n \;;\; j = 1, 2, \ldots, n \;;\; i \neq j)$
นั่นคือ A_i และ A_j ไม่มี outcome ร่วมกัน

ค. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = B$
นั่นคือ ผลรวมของเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ คือเหตุการณ์ B นั่นเอง



ภาพแสดง $A_1, A_2 \ldots, A_n$ เป็นส่วนแบ่งของเหตุการณ์ B

<u>ตัวอย่างเช่น</u> ในการศึกษารายได้ต่อเดือนของครอบครัว

ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ของครอบครัวทั้งหมดในชุมชนหนึ่ง

และให้ E_1 เป็นครอบครัวที่มีรายได้น้อยกว่า 1,000 บาท

E_2 เป็นครอบครัวที่มีรายได้ 1,000 - 2,999 บาท

E_3 เป็นครอบครัวที่มีรายได้ 3,000 - 4,999 บาท

E_4 เป็นครอบครัวที่มีรายได้อย่างน้อย 5,000 บาท

$\therefore \quad S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ และจะได้ว่า

1. $E_i \subseteq E \; ; \quad i = 1, 2, 3, 4$

2. $E_i \cap E_j = \emptyset \; ; \; i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4$
   $i \neq j$

3. $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = E$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ เป็นส่วนแบ่งของ S

<u>ฟังก์ชั่น</u> (Function)

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ A และ B เป็นเซทใด ๆ และกฎของการสมนัย (rule of correspondence) ที่กำหนด ความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซท A กับสมาชิกของเซท B ในลักษณะที่ว่า ทุก ๆ สมาชิก x ของเซท A จะมีสมาชิก y ตัวหนึ่ง (unique) เท่านั้น ของเซท B ที่สมนัยกับ x แล้วกฎนี้จะระบุเซทของลำดับคู่ (ordered pairs), f และเซท f นี้เรียกว่า ฟังก์ชั่นจาก A ไป B (function from A to B)

$\therefore$ ฟังก์ชั่น f เขียนได้ดังนี้

$$f = \{(x,y) / \; \forall \; x \in A \quad \text{จะมี } y \in B \text{ ตัวหนึ่งเท่านั้น}\}$$

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยามของฟังก์ชันจะได้ว่า

1. ฟังก์ชันเป็นเซท
2. ฟังก์ชันจะแทนด้วยอักษรโรมัน เช่น f, g, h, F, G เป็นต้น
3. สมาชิก y ในเซท B อาจเขียนเป็น f(x) ในเมื่อ x เป็นสมาชิกหนึ่งในเซท A $\therefore$ $y = f(x)$
4. ฟังก์ชันจาก A ไป B จะให้เซทของลำดับคู่ ในรูป (x, y) หรือ (x, f(n)) และฟังก์ชันจาก B ไป A จะให้เซทของลำดับคู่ในรูป (y, x)
5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วเซท A จะเรียกว่า โดเมน (domain) ของฟังก์ชัน และเซท B เรียกว่า พิสัย (Range) ของฟังก์ชัน และกระบวนการที่สร้างความสัมพันธ์ หรือลำดับคู่ เรียกว่า mapping เซท A ที่ map ไปยังเซท B จะเขียนแทนด้วย $A \rightarrow B$

ฟังก์ชันที่มีพิสัยเป็นเลขจำนวนจริง (Real numbers) เรียกว่า ฟังก์ชันค่าจริง (Real - valued function)

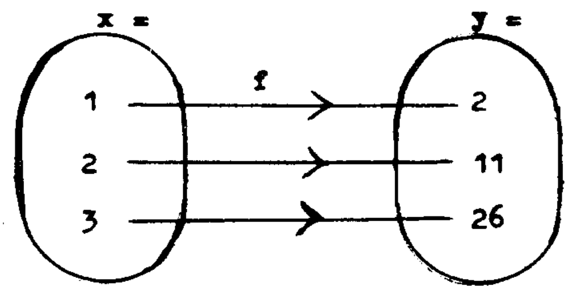
ถ้าเราคำนวณค่าฟังก์ชันจากจุด ๆ หนึ่งในโดเมน เราเรียกฟังก์ชันที่ได้ว่าเป็นฟังก์ชันของจุด (point function) ตัวอย่างเช่น

ถ้าให้ $y = f(x) = 3x^2 - 1$; $x = 1, 2, 3$

ค่าของ y ณ จุด $x = 1, 2, 3$ คือ $f(1), f(2), f(3)$ ตามลำดับ

$\therefore$ $y = 2, 11, 26$ ตามลำดับ

ซึ่งเขียนแสดงเป็นภาพได้ดังนี้



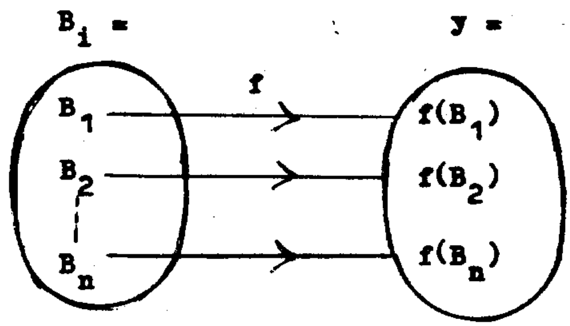
โดเมนของฟังก์ชัน พิสัยของฟังก์ชัน

ถ้าเราคำนวณค่าฟังก์ชั่นของเซทใด ๆ ที่เป็นซับเซทของโดเมนของฟังก์ชั่น แสดงว่า ฟังก์ชั่น f map จากซับเซทของโดเมนของฟังก์ชั่นไปยังจุด y ซึ่งเป็นเลขจำนวนจริง เช่น B_i ($i = 1,2,\ldots,n$) เป็นซับเซทของโดเมนของฟังก์ชั่น f

∴ ค่าของฟังก์ชั่นคือ

$$y = f(B_i) \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ซึ่งเขียนภาพแสดงได้ดังนี้



เราเรียกฟังก์ชั่นที่มีลักษณะเช่นนี้ว่า เซทฟังก์ชั่น (Set functions) ในเรื่องของทฤษฎีความน่าจะเป็น เราก็จะใช้ฟังก์ชั่นค่าจริง (Real-valued function) นี้ ซึ่งอาจจะเป็นลักษณะของ Real-valued point function หรือ ลักษณะของ Real-valued set function ซึ่งจะได้กล่าวถึงในนิยามของความน่าจะเป็น

ความหมายของความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น (probability) มีความหมายอยู่ 2 ประการ คือ

ก. ความน่าจะเป็น คือ ศาสตร์ หรือวิชาที่ใช้บรรยายความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากการทดลองเชิงสุ่ม (random trial) เช่น จำนวนรถที่เข้ามาซ่อมในอู่ตั้งแต่ 9.00 น. ถึง 12.00 น. การโยนลูกเต๋า การโยนเหรียญ การหยิบลูกบอลล์จากกล่อง เป็นต้น ซึ่งการใช้ความน่าจะเป็นมาบรรยายความไม่แน่นอนนี้ เรานำมาใช้ก่อนที่จะทำการทดลองเสร็จ เพราะเรายังไม่ทราบผลลัพธ์ (outcome) ของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ว่าจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร แต่ถ้าเราทราบ

ผลลัพธ์ของการทดลองแล้วว่าเป็นอย่างไร การนำความน่าจะเป็นมาใช้บรรยายการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ จะไม่มีความหมายเลย

ข. ความน่าจะเป็น คือตัวเลขที่ใช้เป็นมาตรการในการวัดโอกาสของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ จากการทดลองเชิงสุ่มที่สนใจ ว่าจะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด เช่น ความน่าจะเป็นที่จะโยนเหรียญ 2 เหรียญ แล้วได้หัว 2 หัว เท่ากับ 0.25 ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 25 ปี จะตายภายใน 1 ปี เท่ากับ 0.05 เป็นต้น

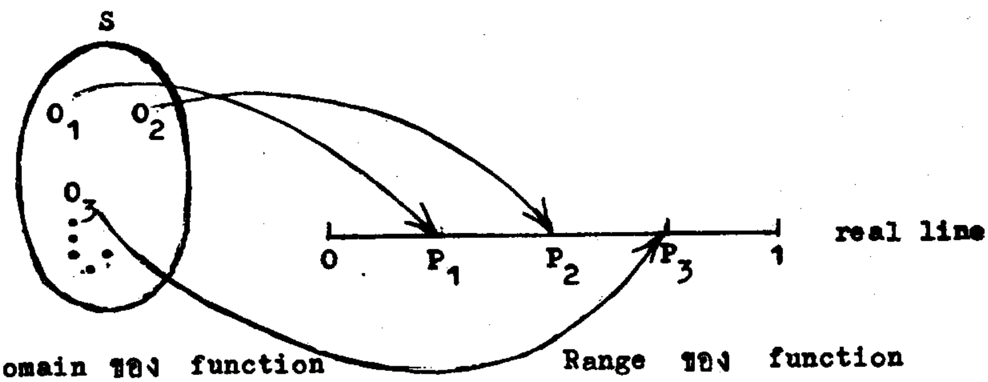
<u>นิยาม</u> <u>ความน่าจะเป็นของ outcome</u>

ความน่าจะเป็นของ outcome คือ ตัวเลขที่กำหนดให้แก่แต่ละ outcome O_i โดยแทนตัวเลขนี้ด้วย P_i เรียกตัวเลขนี้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์เป็น outcome O_i และ P_i จะต้องมีคุณสมบัติ ดังนี้

1. $0 \leq P_i \leq 1$ หมายความว่า ความน่าจะเป็นของ Outcome ใด ๆ จะอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1
2. $\sum_{all\ i} P_i = 1$ หมายความว่า ผลบวกของ P_i สำหรับทุก ๆ O_i ที่มีอยู่ใน sample space ของ random trial เท่ากับ 1
3. P_i เป็นตัวเลขที่ใช้วัดโอกาสที่จะเกิดผลลัพธ์เป็น outcome O_i ใน random trial ซึ่งถ้า P_i มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่า outcome O_i จะมีโอกาสเกิดขึ้นมาก และถ้า P_i มีค่าเข้าใกล้ 0 ก็แสดงว่า outcome O_i จะมีโอกาสเกิดขึ้นน้อย แต่ถ้า P_i มีค่าเท่ากับ 1 ก็แสดงว่า outcome O_i จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน ถ้า P_i มีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่า outcome O_i จะไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน

นอกจากนี้ยังสามารถนิยามความน่าจะเป็นของ outcome โดยใช้ real function ดังนี้

<u>นิยาม</u> ความน่าจะเป็นของ outcome (P_i) คือ real-valued point function ซึ่งนิยาม โดเมนที่เป็น sample space และมีพิสัยเป็นเลขจำนวนจริง (real number) ในพิสัยระหว่าง [0, 1] สำหรับแต่ละ outcome O_i function P_i จะกำหนดเลขจำนวนจริง P_i เพียงค่าหนึ่งค่าเดียวเท่านั้น ในระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งเขียนแสดงเป็นภาพได้ดังนี้



Domain ของ function
คือ Sample space

Range ของ function
คือเลขจำนวนจริงระหว่าง 0 ถึง 1

จากนิยาม ของความน่าจะเป็นของ outcome นั้น จะเห็นว่าการที่เราทราบความน่าจะเป็นของ outcome (P_i) ต่าง ๆ นั้น ไม่ได้หมายความว่าเราจะทำนายผลลัพธ์ ของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ได้ (นอกจากกรณีที่ P_i มีค่าเท่ากับ 1) เราเพียงแต่ทราบโอกาสที่จะเกิดผลลัพธ์นั้น ๆ ในสเกลการวัดระหว่าง 0 ถึง 1 เท่านั้น

<u>การกำหนดความน่าจะเป็นให้แก่แต่ละ Outcome</u>

การกำหนดตัวเลขที่แท้จริง ให้แก่แต่ละ P_i นั้น ทำได้ 2 วิธี คือ

ก. วิธีปรนัย (Objective View) วิธีวัดแบบนี้จะได้ความน่าจะเป็นเชิงปรนัย (Objective probability) ซึ่งแบ่งเป็น 2 วิธี ดังนี้

1. <u>Intrinsic model approach</u>

การกำหนดโดยวิธีนี้ เป็นการศึกษาตัวแบบทางกายภาพ และกลไกของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ แล้วจึงกำหนดค่า P_i ให้แก่แต่ละ Outcome โดยใช้สมมติฐานบางประการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> การโยนเหรียญ 1 เหรียญ

Sample space ของการทดลองเขียนได้ดังนี้

$S = \{$ หัว, ก้อย $\}$

ถ้าเหรียญที่โยนนั้นเป็นเหรียญที่เที่ยงตรง และกลไกของการโยนเหรียญนี้ก็ไม่ได้เจาะจงที่จะให้เป็นหัวหรือก้อย ซึ่งภายใต้สมมติฐานเหล่านี้ จะสรุปได้ว่า โอกาสที่จะได้หน้าหัวหรือก้อยจะต้องเท่ากัน เพราะฉะนั้นในกรณีนี้จะได้ว่า

$$P_1 = P_2 \qquad (1)$$

ถ้าให้ P_1 คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดหน้าหัว

P_2 คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดหน้าก้อย

แต่จากคุณสมบัติของ P_i ที่ว่า $\sum_{all_i} P_i = 1$

$$\therefore \quad P_1 + P_2 = 1 \qquad (2)$$

จาก 1 และ 2 จะได้ว่า

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> การหยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่หนึ่งสำรับ

Sample space ของการทดลองเชิงสุ่มนี้ เขียนได้ดังนี้

$$S = \{ \heartsuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2,$$
$$\clubsuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$
$$\diamondsuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$$
$$\spadesuit A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \}$$

ภายใต้สมมติที่ว่าไพ่สำรับนั้นเป็นสำรับที่ได้มาตรฐาน และการหยิบไพ่ออกมา 1 ใบ ก็ไม่ได้เจาะจงที่จะหยิบไพ่ใบใดใบหนึ่ง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า โอกาสที่จะหยิบไพ่ใบใดใบหนึ่ง จะต้องเท่ากัน

$\therefore\ P_1 = P_2 = \dots\dots\dots\dots = P_{52}$ ——(1)

และ $\because\ \sum_{all_i} P_i = 1$ ——(2)

จาก ~~1~~ และ 2 จะได้

$$P_1 = P_2 = \dots\dots = P_{52} = \frac{1}{52}$$

ตัวอย่างที่ 3 การโยนเหรียญหนึ่งอัน 3 ครั้ง

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

จะได้ว่า โอกาสที่จะ outcome ใด Outcome หนึ่งจะมีค่าเท่ากัน

$\therefore\ P_1 = P_2 = \dots\dots = P_8$

และ $\because\ \sum_{all_i} P_i = 1$

$\therefore\ P_1 = P_2 = \dots = \frac{1}{8}$

ตัวอย่างที่ 4 โยนลูกเต๋า 2 ลูก

$$
\begin{aligned}
S = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\
& (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\
& (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\
& (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\
& (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\
& (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า โอกาสที่จะเกิด outcome ใด outcome หนึ่ง มีค่าเท่ากัน

$\therefore\ P_1 = P_2 = \dots\dots, = P_{36}$

และ $\because\ \sum_{all_i} P_i = 1$

$\therefore\ P_1 = P_2 = \dots\dots, = P_{36} = \frac{1}{36}$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> หยิบลูกบอลล์จากกล่องที่มีลูกบอลล์ 100 ลูก และมีสีต่าง ๆ จำนวนดังนี้คือ สีเขียว 20 ลูก สีเหลือง 25 ลูก สีดำ 15 ลูก และที่เหลือเป็นสีขาว ถ้าจะสนใจดูสีของลูกบอลล์ที่หยิบขึ้นมาได้ ดังนั้น

$$S = \{\text{เขียว, เหลือง, ดำ, ขาว}\}$$

ถ้าสมมติว่า ลูกบอลล์แต่ละลูกมีโอกาสที่จะถูกหยิบขึ้นมาเท่า ๆ กัน เราสามารถคำนวณ P_i สำหรับแต่ละ outcome ได้ดังนี้

P_1 = ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีเขียว $= \frac{20}{100} = 0.20$

P_2 = ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีเหลือง $= \frac{25}{100} = 0.25$

P_3 = ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีดำ $= \frac{15}{100} = 0.15$

P_4 = ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีขาว $= \frac{40}{100} = 0.40$

โดยที่ $\sum_{all_i} P_i = 1$ คือ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$

2. **<u>Empirical approach</u>** เป็นการกำหนดค่า P_i โดยอาศัยข้อมูลจากการทดลอง

ในกรณีที่เราไม่มีข้อเท็จจริงที่เพียงพอเกี่ยวกับตัวแบบทางกายภาพของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง เราไม่สามารถที่จะกำหนดค่า P_i โดยวิธีที่ 1 ให้กับแต่ละ outcome ได้ ดังเช่นตัวอย่างที่ 5 ข้างต้น ถ้าเราไม่ทราบว่า ลูกบอลล์แต่ละสีมีจำนวนเท่าใด เราก็ไม่สามารถกำหนดค่า P_i ให้แก่แต่ละ outcome ได้ จึงต้องใช้วิธีที่ 2 กำหนดค่า P_i ให้แก่แต่ละ outcome แทน

การที่จะกำหนดค่า P_i ให้แก่แต่ละ outcome โดยวิธี Empirical approach นี้ เราต้องสามารถทำการทดลองกับการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ซ้ำกันได้หลาย ๆ ครั้งภายใต้สภาวะการณ์เดียวกัน และแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระต่อกัน

สมมติว่า ถ้าเราทำการทดลองทั้งหมด n ครั้ง และมีอยู่ n_i ครั้ง ที่ได้ผลลัพธ์เป็น Outcome ที่ i

$\therefore$ อัตราส่วนระหว่าง $\frac{n_i}{n}$ จึงเป็นความถี่สัมพัทธ์ของการเกิด Outcome ที่ i ซึ่งถ้า n มีค่าใหญ่เพียงพอ การกำหนดค่า P_i ให้แก่แต่ละ outcome

โดยวิธี **Empirical approach** นี้ จะกำหนดให้ $P_i = \frac{n_i}{n}$
โดยที่ P_i จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้ คือ

1. $0 \leq P_i \leq 1$
2. $\sum_{all_i} P_i = 1$

ตัวอย่างเช่น ถ้ามีลูกปัดอยู่ 100 ลูก 4 สี คือ สีเขียว, เหลือง, ดำ และสีขาว

สมมติว่า ทำการทดลองหยิบลูกปัดทั้งหมด 1,000 ครั้ง ($n = 1,000$) โดยทำการทดลองภายใต้สภาวะการณ์เดียวกัน ทุกครั้ง และแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน ถ้าในการทดลอง 1,000 ครั้ง ได้ผลลัพธ์ออกมาดังนี้คือ

หยิบได้ลูกปัดสีเขียว 250 ครั้ง $\therefore \; n_1 = 250$
หยิบได้ลูกปัดสีเหลือง 300 ครั้ง $\therefore \; n_2 = 300$
หยิบได้ลูกปัดสีดำ 280 ครั้ง $\therefore \; n_3 = 280$
หยิบได้ลูกปัดสีขาว 170 ครั้ง $\therefore \; n_4 = 170$

$\therefore$ จาก $P_i = \frac{n_i}{n}$ จะได้

$$P_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{250}{1000} = 0.25$$

$$P_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{300}{1000} = 0.30$$

$$P_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{280}{1000} = 0.28$$

$$P_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{170}{1000} = 0.17$$

การกำหนดค่า P_i ทั้ง 2 วิธีนี้ เรากำหนดได้แต่เพียงค่าประมาณอย่างคร่าว ๆ เท่านั้น ซึ่งเราอาจจะหาให้ได้ใกล้เคียงค่า P_i ที่แท้จริงมากเท่าใดก็ได้ โดยใช้วิธี **Empirical approach** ด้วยวิธีการเพิ่มค่า n คือจำนวนครั้งที่ทำการทดลองซ้ำนั่นเอง ซึ่งค่า P_i ที่ได้จะเข้าใกล้ค่า P_i ที่แท้จริง เมื่อ $n \rightarrow \infty$

2. <u>วิธีอัตนัย</u> (Subjective View) **วิธีวัด**แบบนี้จะได้ความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัย (Subjective Probability) วิธีวัดความน่าจะเป็นแบบนี้ ยึดตัวบุคคลเป็นหลัก และใช้ระดับความเชื่ออย่างมีเหตุผล เป็นประโยชน์ในการกำหนดความน่าจะเป็น มีการทดลองเชิงสุ่มบางประเภทเราไม่สามารถที่จะวัดความน่าจะเป็นแบบวิธีปรนัย โดยวิธีใดวิธีหนึ่งได้ใน 2 วิธีที่กล่าวมาแล้ว เนื่องจากการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ เราไม่ทราบข้อเท็จจริงเกี่ยวกับตัวแบบหรือกลไกที่ทำให้เกิดการทดลองเชิงสุ่มนั้น และในขณะเดียวกัน ก็ไม่สามารถที่จะทำการทดลองกับการทดลองเชิงสุ่มเหล่านั้นซ้ำกันหลาย ๆ ครั้งภายใต้สภาวะการณ์เดียวกันได้ เราจึงวัดความน่าจะเป็นแบบวิธีปรนัยไม่ได้ ดังนั้น วิธีที่เราจะวัดความน่าจะเป็นได้ก็คือ ใช้วิธีประมาณค่า P_i โดยการชั่งใจของเราเองโดยวิธีอัตนัย ซึ่งการกำหนดความน่าจะเป็นแบบนี้เป็นการกำหนดเชิงจิตวิสัย คือใช้ความรู้สึกของตนเองเป็นเครื่องกำหนด การกำหนดแบบนี้จะถูกต้องตามความน่าจะเป็นที่แท้จริง หรือใกล้เคียงความน่าจะเป็นที่แท้จริงเท่าใดนั้นก็ไม่สามารถพิสูจน์ได้ ในเฉพาะกรณี แต่จากประสบการณ์ที่ผ่านมา แสดงให้เห็นว่า การใช้ความน่าจะเป็นเชิงจิตวิสัยมาช่วยประกอบในการตัดสินใจ จะได้ผลประโยชน์บ้าง ดีกว่าที่จะไม่ใช้ความน่าจะเป็นเสียเลย

ตัวอย่างเช่น นักศึกษาที่จะเรียนวิชา ST 205 การสอบของนักศึกษาแต่ละคนเป็นการทดลองเชิงสุ่ม ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการสอบ อาจจะเป็น G, P หรือ F นักศึกษาแต่ละคนสามารถที่จะประมาณความน่าจะเป็นที่จะสอบได้เกรดใด ๆ ได้จากการประมาณสติปัญญาความสามารถของตนเอง การมาเรียนโดยสม่ำเสมอ เป็นต้น เช่นถ้านักศึกษาที่เรียนอยู่ในระดับปานกลาง ก็อาจจะประมาณความน่าจะเป็นที่จะสอบได้เกรดต่าง ๆ ของตัวเองได้ดังนี้

$$P\ (\text{ได้เกรด } G) = 0.1$$
$$P\ (\text{ได้เกรด } P) = 0.5$$
$$P\ (\text{ได้เกรด } F) = 0.4$$

<u>ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์</u> (Event)

ให้ A เป็นเหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่ม ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(A) ซึ่ง P(A) นี้ คือความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์จากการทดลองเชิงสุ่ม จะเป็นสมาชิกของ A ในเมื่อเหตุการณ์ A ก็คือเซทใด ๆ ของผลลัพธ์ซึ่งเป็นซับเซทของ Sample space และค่าของ P(A) นี้เป็นตัวเลขที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ซึ่งเราอาจกล่าวได้ว่า P เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซทของทุก ๆ ซับเซทของ Sample space และมีพิสัยเป็นเลขจำนวนจริงระหว่าง 0 กับ 1

<u>นิยาม</u> ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ในเชิงของเซทฟังก์ชันความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ คือ เซทฟังก์ชัน P ซึ่งกำหนดให้แก่แต่ละเหตุการณ์ A ในกลุ่มผลการทดลอง S และ P(A) จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ สำหรับทุก ๆ A ที่อยู่ใน S
2. ถ้า $A_1, A_2 \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events) นั่นคือ

   $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$ แล้ว

   $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

หรืออาจเขียนได้ว่า

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{เมื่อ } A_i \cap A_j = \emptyset \;;\; i \neq j$$

3. $P(S) = 1$

P(A) คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และเรียกคู่ (S,P) ว่าเป็นตัวแบบน่าจะเป็น (Probability Model or Space)

ถ้าในการทดลองเชิงสุ่ม ซึ่ง Sample space มีจำนวนผลลัพธ์ของการทดลองที่ไม่เป็นอนันต์ (finite) หรือมีจำนวนผลลัพธ์ของการทดลองที่เป็นจำนวนอนันต์แต่นับได้ (Countable infinite) เราสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ได้

จากความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลอง จากสูตรต่อไปนี้

$$P(A) = \sum_{O_i \in A} P_i$$

นั่นคือ ถ้าเราต้องการจะหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เราก็นำเอาความน่าจะเป็นของทุก ๆ ผลลัพธ์การทดลองที่อยู่ในเหตุการณ์ A มาบวกกัน ทั้งนี้เพราะว่าจากนิยาม เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นเมื่อผลลัพธ์ของการทดลองเป็นผลลัพธ์ใดก็ได้ที่อยู่ใน A ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ก็ควรจะเป็นผลรวมของความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ที่อยู่ใน A หรือจากการกำหนดความน่าจะเป็นโดยวิธี Empirical approach ถ้าเราต้องการจะหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ก็อาจจะทำการทดลองกับการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง ภายใต้สภาวะการณ์เดียวกัน และแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน จากนั้นก็นับดูว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นกี่ครั้ง จากจำนวนครั้งที่ทำการทดลองทั้งหมด เช่น สมมติว่าให้

n = จำนวนครั้งที่ทำการทดลอง $n \rightarrow \infty$

n_A = จำนวนครั้งที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้น

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n_A}{n}$$

แต่เนื่องจากเหตุการณ์ A เกิดขึ้นได้ เมื่อ $O_i \in A$

ถ้าให้ n_i เป็นจำนวนครั้งที่ O_i เกิดขึ้นในการทดลอง

$$\therefore \quad n_A = \sum_{O_i \in A} n_i$$

และ $P(A) = \frac{n_A}{n}$

แทนค่า n_A จะได้

$$P(A) = \frac{\sum_{O_i \in A} n_i}{n} = \sum_{O_i \in A} P_i \qquad (\because P_i = \frac{n_i}{n})$$

ดังนั้น จะเห็นว่า ถ้าเราพิจารณาจากการกำหนดค่าความน่าจะเป็นโดยวิธี Empirical approach เราก็จะสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ได้โดยการนำเอาความน่าจะเป็นของทุก ๆ ผลลัพธ์การทดลองที่อยู่ในเหตุการณ์ A มาบวกกัน

<u>ตัวอย่าง</u> โยนลูกเต๋า ที่ได้มาตรฐานหนึ่งลูก และสังเกตหน้าของลูกเต๋าที่ปรากฏขึ้น ซึ่ง $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และฟังก์ชั่น P ซึ่งมี $P_i = \frac{1}{6}$ จงแสดงว่า P เป็นเรทฟังก์ชั่นน่าจะเป็น และคู่ (S, P) เป็นตัวแบบน่าจะเป็น

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ ดังนั้น

$$P(A) = P(1) + (2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ถ้าให้ $A = \{2, 4, 6\}$

ดังนั้น $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

ถ้าให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ดังนั้น $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = P(S)$$

แสดงว่า

$0 \leq P(A) \leq 1$ สำหรับทุก ๆ เหตุการณ์ A ที่อยู่ใน S

และ $P(S) = 1$

ถ้ากำหนด $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3\}$

$A_1 \cup A_2 = \{1, 3\}$ และ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\therefore\ P(A_1 \cup A_2) = P(\{1, 3\}) = P(\{1\}) + P(\{3\})$$

$$= P(A_1) + P(A_2)$$

ดังนั้นแสดงว่า P เป็นฟังก์ชั่นน่าจะเป็น และคู่ (S, P) เป็นตัวแบบน่าจะเป็น

(**Probability Model or Space**)

ทฤษฎีเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

ทฤษฎีที่ 1

ถ้า A และ B เป็นสองเหตุการณ์ใด ๆ ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events) จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

พิสูจน์

$$\therefore P(A \cup B) = \sum_{O_i \in A \cup B} P_i$$

$$= \sum_{O_i \in A} P_i + \sum_{O_i \in B} P_i$$ ($\because$ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน)

$$= P(A) + P(B)$$

ช.ต.พ.

บทแทรกทฤษฎีที่

ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events) จะได้ว่า

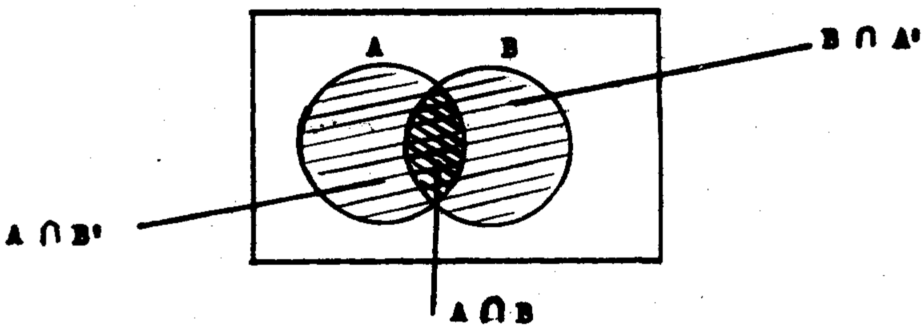
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

หรือ $$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ทฤษฎีที่ 2 ถ้า A และ B เป็นสองเหตุการณ์ใด ๆ จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์ เราสามารถเขียน Venn diagram แสดง $A \cup B$ เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ดังนี้



<u>จากรูป</u> $\because$ $A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$

$\therefore P(A) = P\left[A \cap B') \cup (A \cap B)\right]$

แต่ $\because$ เหตุการณ์ $(A \cap B')$ และ $(A \cap B)$ เป็น Mutually exclusive events

$\therefore P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$ ——— (1)

และ $\because$ $B = (A \cap B) \cup (B \cap A')$

$\therefore P(B) = P\left[(A \cap B) \cup (B \cap A')\right]$

แต่ $\because$ เหตุการณ์ $(A \cap B)$ และ $(B \cap A')$ เป็น Mutually exclusive events $\therefore P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A')$ ——— (2)

(1)+ (2) จะได้

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B \cap A')$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(B \cap A') = P(A \cup B)$$

นั่นคือ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

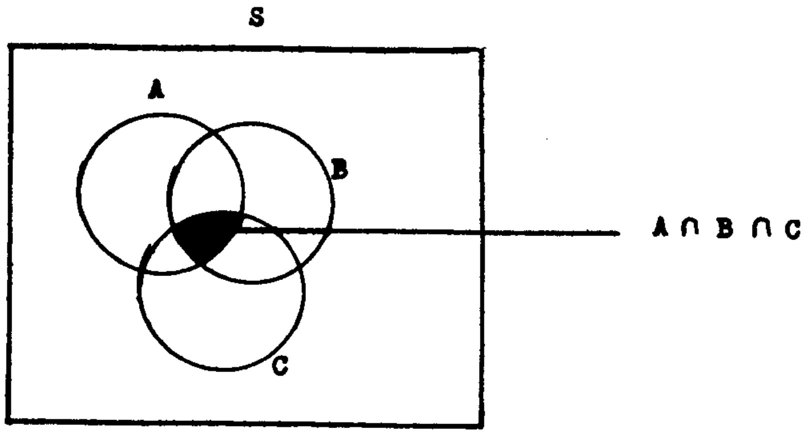
<u>ช.ต.พ.</u>

<u>บทแทรกที่ 1 ของทฤษฎีที่ 2</u>

ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของ random trial หนึ่ง

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

พิสูจน์



$$\because \quad P(A \cup B \cup C) = P\left[(A \cup B) \cup C\right]$$

$$= P(A \cup B) + P(C) - P\left[(A \cup B) \cap C\right]$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right]$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\therefore \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$
$$+ P(A \cap B \cap C)$$

ว.ท.พ.

บทแทรกที่ 2 ของทฤษฎีที่ 2

ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของ random trial หนึ่ง

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \left[\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\right] - \sum_{\text{all } i \neq j} P(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{\text{all } i \neq j \neq l} P(A_i \cap A_j \cap A_l)$$
$$- \sum_{\text{all } i \neq j \neq l \neq m} P(A_i \cap A_j \cap A_l \cap A_m)$$
$$- \ldots \pm P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

ทฤษฎีที่ 3

ถ้า ϕ เป็นเซทที่ว่างเปล่า (Empty set) จะได้ว่า

$$P(\emptyset) = 0$$

พิสูจน์ $\because A \cup \emptyset = A$

$\therefore P(A \cup \emptyset) = P(A)$

แต่เหตุการณ์ A และ ϕ เป็น Mutually exclusive events

$\therefore P(A) = P(A) + P(\emptyset)$

$\therefore P(\emptyset) = P(A) - P(A) = 0$

ซ.ต.พ.

ทฤษฎีที่ 4

ถ้า A' เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ใช่ A (Complement of event A) จะได้ว่า

$$P(A) = 1 - P(A')$$

พิสูจน์ $\because A \cup A' = S$

$\therefore P(A \cup A') = P(S) = 1$

และ $\because$ เหตุการณ์ A และ A' เป็น Mutually exclusive events

$\therefore P(A) + P(A') = 1$

$\therefore P(A) = 1 - P(A')$

ซ.ต.พ.

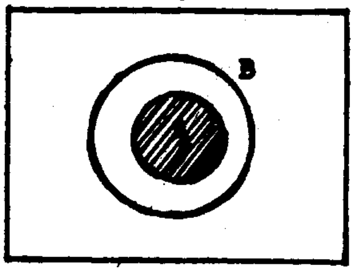
ทฤษฎีที่ 5

ถ้า A และ B เป็นซับเซทของ S โดยที่ $A \subseteq B$ แล้วจะได้ว่า

$P(A) \leq P(B)$

พิสูจน์

S



จากรูป $\because$ $B = A \cup (B \cap A')$

$\therefore P(B) = P[A \cup (B \cap A')]$

แต่ $\because$ เหตุการณ์ A และ $(B \cap A')$ เป็น Mutually exclusive events

$\therefore \quad P(B) = P(A) + P(B \cap A')$

$\therefore \quad P(A) \leq P(B)$

ซ.ต.พ.

ตัวอย่างที่ 1

แพทย์ผู้เชี่ยวชาญทางด้านมะเร็งได้เก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับคนไข้ไว้ดังนี้คือ

ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็ง และจากการตรวจก็พบว่าเป็นจริง	5%
ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็งแต่จากการตรวจก็ไม่พบ	45%
ผู้ป่วยไม่รู้สึกว่าเป็นมะเร็งแต่จากการตรวจพบว่าเป็น	10%
ผู้ป่วยไม่รู้สึกว่าเป็นมะเร็ง และจากการตรวจก็ไม่พบว่าเป็น	40%

จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็ง

ข. แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง

ค. แพทย์ตรวจว่าเป็นมะเร็งหรือผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็น

วิธีทำ

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็ง

และ B เป็นเหตุการณ์ที่แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง

จากโจทย์กำหนดให้ นำมาเขียนใส่ตารางได้ดังนี้

	A	A'
B	.05	.10
B'	.45	.40

ซึ่งจะได้ว่า

$P(A \cap B) = .05$

$P(A \cap B') = .45$

$P(B \cap A') = .10$

$P(A' \cap B') = .40$

ก. ความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็นมะเร็ง $= P(A)$

$\therefore P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$= .05 + .45 = .50$

ข. ความน่าจะเป็นที่แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง $= P(B)$

$\therefore P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$= .05 + .10 = .15$

ค. ความน่าจะเป็นที่แพทย์ตรวจพบว่าเป็นมะเร็ง หรือผู้ป่วยรู้สึกว่าเป็น $= P(A \cup B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= .50 + .15 - .05$

$= .60$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

ในการแข่งม้า 3 ตัว คือ A, B และ C ม้า A จะแข่งชนะได้เป็น 2 เท่าของ B และ B จะแข่งชนะได้เป็น 2 เท่าของ C จงหาความน่าจะเป็นที่จะชนะ คือ P(A), P(B) และ P(C)

<u>วิธีทำ</u> ให้ $P(C) = P$

$\because$ B ชนะเป็น 2 เท่าของ C $\therefore P(B) = 2P$

และ $\because$ A ชนะเป็น 2 เท่าของ B $\therefore P(A) = 2P(B)$

$= 2 \times 2P = 4P$

จากคุณสมบัติของ probabilities จะได้

$$P + 2P + 4P = 1$$

$$\therefore P = \frac{1}{7}$$

$$\therefore P(A) = 4P = \frac{4}{7}$$

$$P(B) = 2P = \frac{2}{7}$$

$$P(C) = P = \frac{1}{7}$$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>

เลือกสิ่งของมา 2 สิ่งอย่างสุ่ม ๆ จากกล่องใบหนึ่งที่มีของทั้งหมด 12 สิ่ง ซึ่งมี 4 สิ่งที่เป็นของเสีย ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ของเสียทั้งหมด และ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ของดีทั้งหมด

จงหา ก. $P(A)$ และ $P(B)$

ข. ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ของเสียอย่างน้อย 1 สิ่ง ถ้าให้ C เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ของเสียอย่างน้อย 1 สิ่ง

<u>วิธีทำ</u> Sample space จะประกอบด้วย $\binom{12}{2} = 66$ วิธี

ก. เหตุการณ์ A เกิดขึ้นได้ $= \binom{4}{2} = 6$ วิธี

เหตุการณ์ B เกิดขึ้นได้ $= \binom{8}{2} = 28$ วิธี

$\therefore \quad P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$ **ตอบ**

$P(B) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$ **ตอบ**

ข. $\therefore \quad C = B'$

$P(C) = P(B') = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 ปัญหาเกี่ยวกับวันเกิด (**Classical Birthday problem**)

คนกลุ่มหนึ่งมีจำนวน n คน โอกาสที่คนกลุ่มนั้นอย่างน้อย 2 คน จะมีวันเกิดตรงกันจะเป็นเท่าใด สมมติว่า 1 ปี มี 365 วัน

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่คนกลุ่มนั้นอย่างน้อย 2 คน มีวันเกิดร่วมกัน

A' เป็นเหตุการณ์ที่คนกลุ่มนั้นไม่มีวันเกิดร่วมกัน

Sample space ของคนกลุ่มหนึ่งที่มี n คนจะเกิดใน 365 วัน

จะเท่ากับ $\underbrace{365 \times 365 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 365}_{n \text{ ครั้ง}} = (365)^n$ วิธี

และจำนวนวิธีที่คนกลุ่มนี้จำนวน n คน จะไม่มีวันเกิดร่วมกัน จะเท่ากับ

$365 \times 364 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times [365 - (n-1)] = {}^{365}P_n$ วิธี

$\therefore \quad P(A') = \frac{{}^{365}P_n}{(365)^n}$

$\therefore \quad P(A) = 1 - p(A') = 1 - \frac{{}^{365}P_n}{(365)^n}$

ซึ่ง $P(A') = \frac{{}^{365}P_n}{(365)^n}$

$$= \frac{365.364.363...(365 - n + 1)}{(365)^n}$$

$$= \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times ... \times \frac{(365 - n + 1)}{365}$$

$$\therefore \; P(A) = 1 - \left[\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times ... \times \frac{(365 - n + 1)}{365}\right]$$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> เป็นที่น่าสังเกตว่า 80% ของคนไทยชอบไปเที่ยวฮ่องกง 70% ชอบไปเที่ยวสิงคโปร์ และ 60% ชอบไปเที่ยวฮ่องกงและสิงคโปร์ จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่คนไทยชอบไปเที่ยวฮ่องกงหรือสิงคโปร์ หรือทั้งฮ่องกงและสิงคโปร์

ข. ความน่าจะเป็นที่คนไทยไม่ชอบไปเที่ยวทั้งฮ่องกงและสิงคโปร์

<u>วิธีทำ</u>

ให้	H	เป็นเหตุการณ์ที่คนไทยชอบไปเที่ยวฮ่องกง
	G	เป็นเหตุการณ์ที่คนไทยชอบไปเที่ยวสิงคโปร์
	$H \cup G$	เป็นเหตุการณ์ที่คนไทยชอบไปเที่ยวฮ่องกงหรือสิงคโปร์ หรือทั้งฮ่องกงและสิงคโปร์
	$(H \cup G)'$	เป็นเหตุการณ์ที่คนไทยไม่ชอบไปเที่ยวทั้งฮ่องกงหรือสิงคโปร์ หรือทั้ง 2 ประเทศ
	$H \cap G$	เป็นเหตุการณ์ที่คนไทยชอบไปเที่ยวทั้งฮ่องกงและสิงคโปร์

ดังนั้น จากโจทย์จะได้

$P(H) = .80$

$P(G) = .70$

$P(H \cap G) = .60$

ก. $P(H \cup G) = P(H) + P(G) - P(H \cap G)$

$= .80 + .70 - .60$

$= .90$

ตอบ

ข. $P(H \cup G)' = 1 - P(H \cup G)$

$= 1 - .90$

$= .10$

ตอบ

ความน่าจะเป็นร่วมและความน่าจะเป็นทางเดียว (Joint and Marginal probability)

ถ้า Sample space S ประกอบด้วยผลลัพธ์การทดลอง n และแต่ละผลลัพธ์การทดลองมีความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{n}$ และถ้ามีเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ประกอบเป็นส่วนแบ่งของ S และเหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ก็เป็นส่วนแบ่งของ S อีกแล้วเราสามารถสร้าง Sample space เป็นตาราง 2 ทาง (Two-way table) ดังนี้

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	....	B_n	Total
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1n}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2n}	$n_{2.}$
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3n}	$n_{3.}$
:	:			....	:	:
A_m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	....	n_{mn}	$n_{m.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$	....	$n_{.1}$	n

เมื่อ n_{ij} = จำนวนจุดใน n จุด ที่มีทั้งลักษณะของ A_i และ B_j

สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$

$$\sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} n_{ij} = n$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A_i และ B_j คือ $P(A_i \cap B_j)$ จะเท่ากับ $\frac{n_{ij}}{n}$ และเรียก $P(A_i \cap B_j)$ ว่าเป็นความน่าจะเป็นร่วม (Joint probability) ของเหตุการณ์ A_i และ B_j

แต่ถ้าเราสนใจเพียงลักษณะเดียว เช่น A (โดยไม่สนใจในลักษณะ B) ความน่าจะเป็นของ A_2 ซึ่งเป็นลักษณะหนึ่งของ A จะหาได้จากสูตร

$$P(A_2) = \frac{n_{21} + n_{22} + n_{23} + \cdots + n_{2n}}{n}$$

$$= \frac{\sum_{j}^{n} n_{2j}}{n}$$

และเรียก $P(A_2)$ ว่าเป็นความน่าจะเป็นทางเดียว (Marginal probability) ซึ่งถ้าเขียนในรูปทั่วไปจะได้

$$P(A_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} n_{ij}}{n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(A_i \cap B_j)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราสนใจเพียงลักษณะของ B โดยไม่สนใจลักษณะ A ความน่าจะเป็นทางเดียวของ B_j คือ

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \cap B_j)$$

<u>ตัวอย่าง</u> ในการสำรวจผู้ที่เป็นเจ้าของโทรทัศน์ และรถยนต์ โดยใช้ตัวอย่าง 1,000 ครอบครัว ในชุมชนแห่งหนึ่ง ได้ผลดังนี้

	เป็นเจ้าของโทรทัศน์	ไม่ได้เป็นเจ้าของโทรทัศน์
เป็นเจ้าของรถยนต์	115	245
ไม่ได้เป็นเจ้าของรถยนต์	380	260

ให้ A_1, A_2 เป็นครอบครัวที่เป็นเจ้าของรถยนต์และไม่ได้เป็นเจ้าของรถยนต์ ตามลำดับ

B_1, B_2 เป็นครอบครัวที่เป็นเจ้าของโทรทัศน์ และไม่ได้เป็นเจ้าของโทรทัศน์ ตามลำดับ

จากผลที่ได้ในตาราง เราสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$P(A_1 \cap B_1) = \frac{115}{1000} = 0.115$$

$$P(A_2 \cap B_1) = \frac{380}{1000} = 0.380$$

$$P(A_1 \cap B_2) = \frac{245}{1000} = 0.245$$

$$A(A_2 \cap B_2) = \frac{260}{1,000} = 0.260$$

$$P(A_1) = \frac{115 + 245}{1000} = \frac{460}{1000} = 0.460$$

$$P(A_2) = \frac{380 + 260}{1000} = \frac{640}{1000} = 0.640$$

$$P(B_1) = \frac{115 + 380}{1000} = \frac{495}{1000} = 0.495$$

$$P(B_2) = \frac{245 + 260}{1000} = \frac{505}{1000} = 0.505$$

ตอบ

<u>ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข</u> (Conditional probability)

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ดังกล่าวมาแล้วข้างต้นนั้น เราหาได้โดยนำเอาเหตุการณ์นั้นไปเทียบกับ Sample space ของการทดลองนั้น ๆ ซึ่งความน่าจะเป็นที่กำหนดโดยการนำไปเทียบกับ Sample space นี้ บางครั้งเรียกกันว่า ความน่าจะเป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional probability) แต่ถ้าเราต้องการจะนำเหตุการณ์ที่เราสนใจไปเทียบกับเหตุการณ์อื่น ๆ เราเรียกความน่าจะเป็นนั้นว่า ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability) ซึ่งเหตุการอื่น ๆ นี้จะมีผลทำให้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราสนใจ เปลี่ยนแปลงไปจากความน่าจะเป็นเดิม คือ ความน่าจะเป็นที่เราเทียบกับ Sample space และเหตุการณ์อื่น ๆ ที่เรานำมาเปรียบเทียบนี้ จะทำหน้าที่เหมือน Sample space ซึ่งเรียกว่า กลุ่มผลการทดลองทดแทน (Reduced sample space)

<u>นิยาม</u> (ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข)

สมมติว่า มีการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ซึ่งมีกลุ่มผลการทดลอง (Sample space) S ถ้าให้ A และ B เป็นสองเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ และเป็นที่ทราบอยู่ก่อนแล้วว่า เหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว (หมายความว่า outcome O_i อยู่ใน B) แต่ยังไม่ทราบว่า A เกิดขึ้นแล้วหรือยัง จากการที่ทราบว่า B ได้เกิดขึ้นแล้ว ทำให้ความน่าจะเป็นของ A เปลี่ยนแปลงไปจากความน่าจะเป็นเดิมของ A ได้ความน่าจะเป็นใหม่ของเหตุการณ์ A ภายใต้เงื่อนไขการเกิดของ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A \mid B)$ อ่านว่า ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ A เมื่อกำหนดว่า B ได้เกิดขึ้นแล้ว (Conditional probability of A given B)

<u>ตัวอย่าง</u> จากตารางต่อไปนี้ ถ้าเลือกคนมาหนึ่งคน ปรากฏว่าได้เป็นคนตาบอดสี จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ นั้นจะเป็นผู้ชาย คือหา P (ผู้ชาย| ตาบอดสี)

	ตาบอดสี (C)	ตาไม่บอดสี (N)	รวม
ผู้ชาย (M)	25	475	500
ผู้หญิง (F)	5	495	500
รวม	30	970	1,000

$$P(\text{ผู้ชาย}|\text{ตาบอดสี}) = P(M|C) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 0.83$$

<u>ตอบ</u>

ซึ่ง $\frac{25}{30}$ ก็เหมือนกับ $\dfrac{\frac{25}{1000}}{\frac{30}{1000}} = \dfrac{0.025}{0.030} = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)}$

$\therefore$ จะได้ $P(M|C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าจะหา $P(F|C)$ ก็จะได้เท่ากับ

$$P(F \mid C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{0.005}{0.030} = \frac{1}{6}$$

<u>นิยาม</u>

ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดเหตุการณ์ B เขียนแทนด้วย $P(A|B)$ และเขียนได้ดังนี้

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

เมื่อ A, B และ $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ใน Sample space S และ $P(B) \neq 0$

ความน่าจะเป็นเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว จะสอดคล้องกับคุณสมบัติของความน่าจะเป็นด้วยดังนี้คือ

1. $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$
2. $P(S \mid B) = 1$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \mid B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i \mid B)$ ถ้า $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาความน่าจะเป็นเงื่อนไขของ B เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้วได้จากสูตรดังนี้

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \; P(A) \neq 0$$

จากสูตรความน่าจะเป็นเงื่อนไข $P(A \mid B)$ และ $P(B \mid A)$ เราจะได้กฎการคูณของความน่าจะเป็นดังนี้

1. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \; P(B) \neq 0$

   $P(A \cap B) = P(B) . P(A \mid B)$

2. $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \; P(A) \neq 0$

   $P(A \cap B) = P(A) . P(B \mid A)$

จากกฎการคูณ และกฎของการบวกเราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้ได้ดังนี้

ทฤษฎีที่ 1

ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง

$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$

พิสูจน์

$$\because P(A \cup B \mid C) = \frac{P\left[(A \cup B) \cap C)\right]}{P(C)}$$

$$= \frac{P\left[(A \cap C) \cup (B \cap C)\right]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C) + (B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$$

ช.ก.ท.

ทฤษฎีที่ 2

ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) . P(B \mid C) . P(C)$$

หรือ $= P(A) . P(B \mid A) . P(C \mid A \cap B)$

$$\therefore P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) . P(B \cap C)$$

$$= P(A \mid B \cap C) . P(B \mid C) . P(C)$$

ช.ก.ท.

บทแทรกทฤษฎีที่ 2

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) . P(A_2 \mid A_1) . P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots . P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

ตัวอย่างที่ 1

กล่องใบหนึ่งมีสิ่งของอยู่ 12 สิ่ง เป็นของเสีย 4 สิ่ง หยิบสิ่งของมาอย่างสุ่มจากกล่อง 3 สิ่ง (โดยหยิบทีละสิ่งจนครบ 3 สิ่ง) จงหาความน่าจะเป็น P ที่หยิบสิ่งของ 3 สิ่ง ได้เป็นของดีทั้งหมด

วิธีทำ ความน่าจะเป็นที่หยิบครั้งที่ 1 ได้ของดี $= \frac{8}{12}$ เพราะว่ามีของดีอยู่ 8 สิ่ง ใน 12 สิ่ง $\therefore$ ถ้าหยิบครั้งแรก ได้เป็นของดี ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งต่อไปให้เป็นของดีอีก ก็จะเท่ากับ $\frac{7}{11}$ เพราะว่าเหลือของดีอยู่ 7 สิ่งใน 11 สิ่ง และถ้าหยิบ 2 ครั้งแรกเป็นของดี ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งสุดท้ายได้เป็นของดีจะเท่ากับ $\frac{6}{10}$ เพราะว่าเหลือสิ่งของดีอยู่เพียง 6 สิ่ง จากทั้งหมด 10 สิ่ง

$\therefore$ โดยกฎการคูณของความน่าจะเป็นจะหา P ได้ดังนี้

$$P = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

ตัวอย่างที่ 2

ครอบครัวหนึ่งมีลูก 3 คน เป็นที่ทราบกันว่า ครอบครัวนี้มีลูกคนแรกเป็นผู้ชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกชาย 2 คน

วิธีทำ

$S = \{$ชชช ชชญ, ชญช, ชญญ, ญชช, ญชญ ญญช, ญญญ$\}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ครอบครัวนี้มีลูกชาย 2 คน

และ F เป็นเหตุการณ์ที่ครอบครัวนี้มีลูกคนแรกเป็นผู้ชาย

$\therefore$ $E = \{$ชชญ, ชญช, ญชช$\}$

$F = \{$ชชช, ชชญ, ชญช, ชญญ$\}$

$E \cap F = \{$ชชญ, ชญช$\}$

$\therefore$ P (มีลูกชาย 2 คน | มีลูกคนแรกเป็นผู้ชาย) $= P(E \mid F)$

$$= \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$\therefore \quad P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad P(E \mid F) = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

<u>ตอบ</u>

<u>ทฤษฎีเกี่ยวกับ Partition และทฤษฎีของเบยส์</u> (Bayes' Theorem)

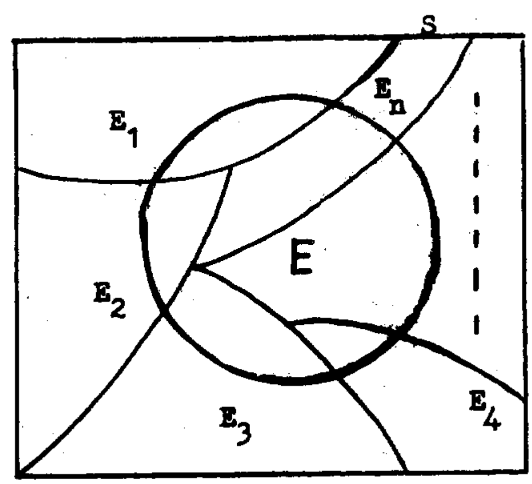
<u>ทฤษฎีที่ 1</u>

ให้ $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ เป็น partition ของกลุ่มผลทดลอง S และสมมติว่าความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ไม่เป็นศูนย์ ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะได้

$$P(E) = P(E_1).P(E \mid E_1) + P(E_2) . P(E \mid E_2) + \ldots + P(E_n).P(E \mid E_n)$$

หรือ $P(E) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(E \mid E_j)$

<u>พิสูจน์</u>



<u>จากรูป</u> จะเห็นได้ว่า

$(E \cap E_1), (E \cap E_2), \ldots, (E \cap E_n)$ เป็น partition ของ E

$\therefore$ จากคุณสมบัติของ partition จะได้ว่า

$$E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2) \cup \ldots \cup (E \cap E_n)$$

และเหตุการณ์ $(E \cap E_1), (E \cap E_2), \ldots, (E \cap E_n)$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events)

$$\therefore P(E) = P\left[(E \cap E_1) \cup (E \cap E_2) \cup \ldots \cup (E \cap E_n)\right]$$

$$= P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + P(E \cap E_3) + \ldots + P(E \cap E_n)$$

โดยกฎการคูณของความน่าจะเป็น จะได้

$$P(E) = P(E_1).P(E \mid E_1) + P(E_2).P(E \mid E_2) + \ldots + P(E_n).P(E \mid E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(E \mid E_j)$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ม.ก.พ.

มีกล่องอยู่ 3 ใบ บรรจุหลอดไฟ ไว้ดังนี้

กล่องที่ 1 มีหลอดไฟ 10 หลอด เป็นของเสีย 4 หลอด

กล่องที่ 2 มีหลอดไฟ 6 หลอด เป็นของเสีย 1 หลอด

กล่องที่ 3 มีหลอดไฟ 8 หลอด เป็นของเสีย 3 หลอด

ถ้าเราเลือกกล่องมา 1 กล่อง อย่างสุ่ม แล้วหยิบหลอดไฟขึ้นมา 1 หลอดอย่างสุ่ม ๆ จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟนั้นจะเป็นหลอดเสีย

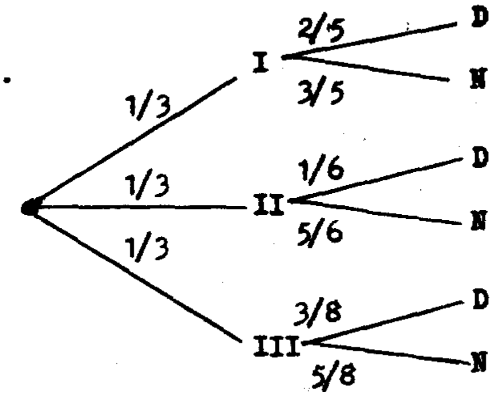
<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ จะเห็นว่าการทดลองประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นแรก เลือกกล่องมา 1 กล่อง จากกล่องทั้งหมด 3 กล่อง

ขั้นที่สอง เลือกหลอดไฟมา 1 หลอด ซึ่งอาจจะเลือกได้หลอดเสีย (D) หรือได้หลอดดี (N)

$\therefore$ เราสามารถเขียน tree diagram แสดงกระบวนการ และกำหนดความน่าจะเป็น

ให้กับแต่ละกิ่งก้านสาขาของต้นไม้ ได้ดังนี้



ถ้าให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดไฟเสีย

$$\therefore \quad P(D) = P(I).P(D|I) + P(II).P(D|II) + P(III).P(D|III)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{3} \times \left[\frac{48 + 20 + 45}{120}\right]$$

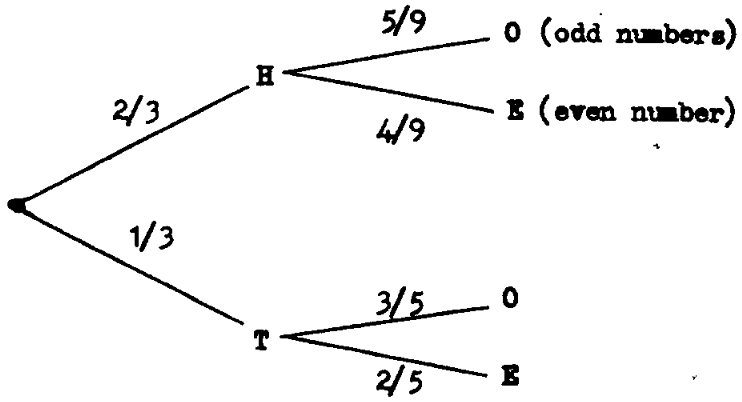
$$= \frac{1}{3} \times \frac{113}{120} = \frac{113}{360}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2

เหรียญอันหนึ่งได้ถ่วงน้ำหนักแล้วปรากฏว่ามี $P(H) = \frac{2}{3}$ และ $P(T) = \frac{1}{3}$ ถูกทอด ถ้าปรากฏว่าได้หน้าหัว จะเลือกเลขหนึ่งตัวอย่างสุ่ม ๆ จากเลข 1, 2, 3,...,9 แต่ถ้าปรากฏว่าได้หน้าก้อย จะเลือกเลขหนึ่งตัว อย่างสุ่ม ๆ จากเลข 1, 2, 3, 4, 5 จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้เลขคู่

วิธีทำ

จากโจทย์ สามารถเขียนเป็น tree diagram แสดงได้ดังนี้



ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เลือกได้เลขคู่

$$\therefore \quad P(E) = P(H).P(E|H) + P(T).P(E|T)$$

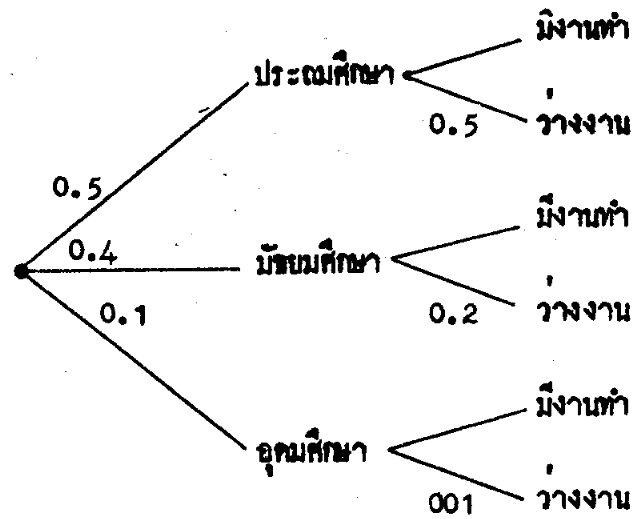
$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{8}{27} + \frac{2}{15} = \frac{58}{135}$$ <u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ในการสำรวจแรงงาน พบว่าคนที่อยู่ในวัยทำงานมีระดับการศึกษาคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ ดังนี้ ประถมศึกษา 50% มัธยมศึกษา 40% และอุดมศึกษา 10% และพบว่าเปอร์เซ็นต์ของคนในวัยทำงานที่มีระดับการศึกษาต่าง ๆ จะว่างงานดังนี้ คือ ประถมศึกษาว่างงาน 5% มัธยมศึกษาว่างงาน 2% และอุดมศึกษาว่างงาน 0.1% จงหาความน่าจะเป็นของคนว่างงานทั้งหมด

<u>วิธีทำ</u>

จากโจทย์ เขียน tree diagram แสดงได้ดังนี้



∴ ความน่าจะเป็นของคนว่างงานทั้งหมด $= (0.5)(.05) + (0.4)(.02) + (0.1)(.001)$

$= .025 + .008 + .0001$

$= 0.0331$

ตอบ

หฤษฎีของเบย์ (Bayes' Theorem)

หฤษฎีของเบย์นี้ ในปี ค.ศ.1702 ถึง 1761 นาย Thomas Bayes ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ และนักปรัชญา ชาวอังกฤษ ได้นำเอาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขมาประยุกต์ใช้ หฤษฎีของเบย์นี้ ในปัจจุบันเป็นหฤษฎีที่นำมาใช้กันแพร่หลายมาก ในเรื่องหฤษฎีการตัดสินใจ (Decision Theory) ซึ่งข้อเสนอเริ่มแรกของเขาเป็นสมการดังนี้

$$P(A \mid E) = \frac{P(E \mid A).\ P(A)}{P(E)}$$

หฤษฎีของเบย์ (Bayes' Theorem) มีดังนี้ คือ

ถ้าเหตุการณ์ E เกิดขึ้น เมื่อเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบเป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง S เกิดขึ้น ถ้าทราบความน่าจะเป็นก่อนทดลอง

(Prior probabilities) ของเหตุการณ์ A_i โดยที่ไม่ทราบเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ E และถ้าความน่าจะเป็นเงื่อนไขของเหตุการณ์ E ที่จะเกิดขึ้น เมื่อทราบว่า A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ เกิดขึ้นเป็น $P(E | A_i)$ แล้ว ความน่าจะเป็นหลังทดลอง (Posterior probabilities) ของ A_i เมื่อทราบว่า E เกิดขึ้นแล้ว คือ $P(A_i | E)$ กำหนดไว้ดังนี้

$$P(A_i | E) = \frac{P(E \cap A_i)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A_i).P(E | A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j)P(E | A_j)} \; ; \; 1 \leq i \leq m$$

ซึ่งสำหรับเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ นั้นได้ชื่อว่าสมมติฐาน หรือเหตุ (Hypothesis or Causes) และความน่าจะเป็นที่กำหนดให้แก่สมมติฐานนี้ เรียกว่า ความน่าจะเป็นก่อนการทดลอง (Prior probabilities) นั่นคือ เหตุการณ์เหล่านี้ได้รับการกำหนดความน่าจะเป็นก่อนที่ข้อมูลข่าวสารใดจะได้รับจากการทดลอง ความน่าจะเป็นนี้ จะกำหนดโดยยึดถือข้อมูลข่าวสาร เชิงปรนัย หรือประสบการณ์ส่วนตัว ที่บอกถึงดีกรีของความเชื่อในสมมติฐานนั้น ซึ่งเป็นข้อมูลข่าวสารเชิงจิตวิสัย นั่นเอง

และเมื่อได้ทำการทดลอง หรือหาข้อมูลข่าวสารตัวอย่างใหม่ ซึ่งจะได้ว่าเหตุการณ์ E เกิดขึ้นแล้ว เราก็พิจารณาว่า ความน่าจะเป็นที่กำหนดให้แก่สมมติฐานนั้นได้เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร อันเนื่องมาจาก ความจริง ที่ว่าเหตุการณ์ E ได้เกิดขึ้นแล้วจากข้อมูลข่าวสารที่ได้มาใหม่ เราจึงทำการปรับปรุงความน่าจะเป็นก่อนการทดลอง แล้วเราก็จะได้ความน่าจะเป็นหลังการทดลอง นั่นคือ เราวางแผนที่จะปรับปรุง ความน่าจะเป็นเดิม $P(A_i)$ จากข้อมูลข่าวสารตัวอย่างใหม่ (new sample information) เพื่อที่จะให้ได้ความน่าจะเป็นหลังการทดลอง หรือความน่าจะเป็นที่ปรับปรุง (Posterior or Revised probabilities) $P(A_i | E)$ นั่นเอง โดยที่