

บทที่ 2

เทคนิคเกี่ยวกับการนับ (Counting Techniques)

ในบทที่ 1 ไปแล้วจะเป็นเรื่องเกี่ยวกับการนับจำนวนสماชิกของเชห ที่มีจำนวนสماชิกเป็นจำนวนมากจนเราไม่สามารถจะเขียนแสดงสماชิกหาก ๆ ตัวของเชห นั้นได้ เช่น หิบไฟ 2 ในจากไฟส่านรันหนึ่งที่มี 52 ใน เราสามารถหิบไฟถึง 1,326 วิธีที่แตกต่างกัน จะเห็นว่า จำนวนวิธีที่จะหิบไฟ 2 ใน จากไฟหั้งหมก 52 ใน นั้นมีมาก ทำให้เราเขียนสماชิกที่ได้ล้าบกมาก หรือเขียนได้ แต่อาจจะไม่ครบถ้วนจำนวน จึงมีวิธีการ ที่จะคำนวณหาหนทางที่เกิดขึ้นหั้งหมกของการทดลองนั้น ๆ โดยใช้เทคนิคเกี่ยวกับการนับ ซึ่งเทคนิคในการนับเราจะอาศัยหลักเบื้องต้นของการนับจำนวน การจัดหมู่ และการจัดคำคบ และเทคนิคในการนับนี้จะเป็นประโยชน์ในการที่เราจะศึกษาหาดูถูกวิธีความน่าจะเป็นท่อไปใน บทที่ 3 เนื่องจากในภาควิชาเกี่ยวกับความน่าจะเป็น สิ่งแรกที่จะห้องทราบก็คือ การ ทดลองเชิงสุ่ม และกลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ซึ่งเป็นเซทของผลลัพธ์ที่จะ เป็นไปได้หั้งหมกของการทดลองเชิงสุ่มนั้น และจุดมุ่งหมายก็คือห้องการที่จะคำนวณหา ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้น ๆ ที่เกิดขึ้น ซึ่งเหตุการณ์นั้นเป็นข้อเขหของกลุ่มผลการ ทดลองนั้น ๆ ความน่าจะเป็นนี้เราจะคำนวณให้ก็ต่อเมื่อเราสามารถนับจำนวนผลลัพธ์ ที่จะเป็นไปได้หั้งหมกของการทดลองเชิงสุ่มนั้น และนับจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่เรา สนใจ ที่จะคำนวณหาความน่าจะเป็น ถ้าการทดลองเชิงสุ่มนั้นเป็นการทดลองแบบง่าย ๆ ที่มีผลลัพธ์ การทดลองไม่มากนัก และเราเขียนผลลัพธ์ลงให้เห็นได้ง่าย ๆ เช่น ในกรณีที่ผลลัพธ์ของการทดลองมี 5 - 6 หนทาง เราจะสามารถเขียนแสดงผลลัพธ์ที่จะเป็น ไปได้ ของกลุ่มผลการทดลองเชิงสุ่มนั้นได้ หรือ อาจจะหาผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นได้ของ การ ทดลองโดยใช้ Tree-diagram และก็ได้ ในกรณีที่ผลลัพธ์ของการทดลองมีไม่มากนัก แต่ถ้าการทดลองเชิงสุ่มนั้นยุ่งยากและสับสนซับซ้อนมาก การที่จะหาผลลัพธ์ของการทดลอง หั้งหมก เราจะห้องอาศัยเทคนิคในการนับ เพราะเราไม่สามารถที่จะเขียนแสดงผลลัพธ์

ของการทดลองหั้งหมกໄດ້ ຄັງນີ້ ໃນການສຶກໝາເກື່ອງກັນເຫັນວ່າມີກຳນົດໃນການນີ້ ຈຶ່ງເປັນລົງຈໍາເມັນນາກ
ໃນການທີ່ຈະສຶກໝາເກື່ອງກັນທຸກໆວິຊາວ່າຈະເປັນ ຂຶ່ງຈະພູດດິງໃນນີ້ທີ່ 3

ທຸກໆເກື່ອງກັນການນີ້ (Counting Theorem)

ເປັນທຸກໆເນື້ອງກັນ ເກື່ອງກັນການນີ້ຂຶ່ງນີ້ຄັ້ງນີ້

ທຸກໆທີ່ 1 ທຸກໆວິຊາການນີ້ມູດຊານ (Fundamental Counting Theorem) ກລາວວາ

ດ້າການທຸກລອງໄດ້ ຖ້າສາມາດແນກກາຮະທ່າອອກໄດ້ເປັນ 2 ຊັ້ນກອນ ໃນຫັ້ນແຮກມີ
ໜ້າທາງທີ່ຈະເກີກຂຶ່ນໄດ້ θ_1 ວິທີທີ່ແກກຕ່າງກັນ ແລະ ໃນຫັ້ນທີ່ສ່ອງມີໜ້າທາງທີ່ຈະເກີກຂຶ່ນໄດ້ θ_2 ວິທີ
ທີ່ແກກຕ່າງກັນ ຈໍານວນໜ້າທາງໜັງໜັງທີ່ຈະທ່າກັນ $\theta_1 \times \theta_2$ ວິທີ

ກວດຍ່າງທີ່ 1.1 ຂ້າຍຄົນໜີ້ທີ່ຕ້ອງກາຮັກກ່ຽວ ຂຶ່ງໃນກາຮັກກ່ຽວແມ່ງອອກເປັນ 2 ຊັ້ນກອນ ຕີ້ອ
ໄສເສື່ອ ແລະ ໄສ່ກາງເກັງ ຄ້າຂ້າຍຄົນໜີ້ເສື່ອ 6 ກ້ວ ມີກາງເກັງ 5 ກ້ວ ຈຶ່ງທ່ານວ່າ
ທີ່ເຂົາຈະເລືອກແກ່ກ້ວ

ໜັ້ນກອນທີ່ 1 ຕີ້ອໄສເສື່ອ

ຂ້າຍຄົນໜີ້ເສື່ອອູ້ 6 ກ້ວ

$$\therefore \text{ຈໍານວນໜ້າທາງທີ່ຈະເລືອກໄສເສື່ອ} = 6 \text{ ໜ້າທາງ}$$

ໜັ້ນກອນທີ່ 2 ຕີ້ອໄສກາງເກັງ

ຂ້າຍຄົນໜີ້ ມີກາງເກັງອູ້ 5 ກ້ວ

$$\therefore \text{ຈໍານວນໜ້າທາງທີ່ຈະເລືອກໄສກາງເກັງ} = 5 \text{ ໜ້າທາງ}$$

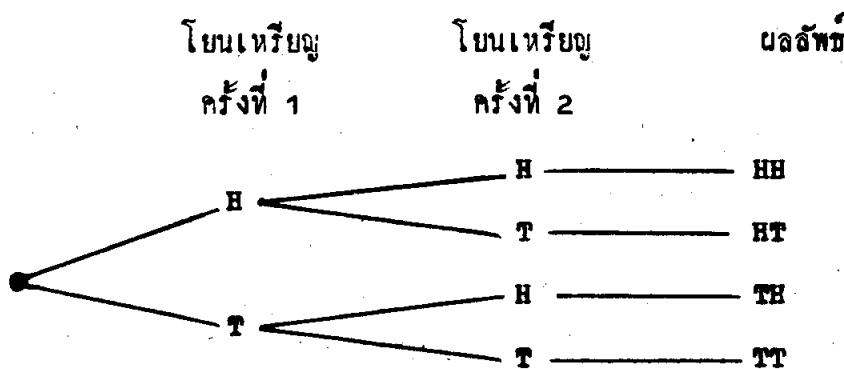
$$\therefore \text{ຈໍານວນໜ້າທາງທີ່ຂ້າຍຄົນໜີ້ຈະເລືອກແກ່ກ້ວ} = 6 \times 5 \text{ ໜ້າທາງ} \\ = 30 \text{ ໜ້າທາງ}$$

ກວດຍ່າງທີ່ 1.2 ໃນການທຸກລອງໂບນເໜີຍໝູ 2 ກຽ້ງ ຈຶ່ງທ່ານວ່າ
ການໂບນເໜີຍໝູ 2 ກຽ້ງ ນີ້ ເປົ້າມແນ້ອງການທຸກລອງແມ່ງອອກເປັນ 2 ຊັ້ນກອນ ຕີ້ອ

ໜັ້ນກອນທີ່ 1 ເປັນການໂບນເໜີຍໝູກຽ້ງທີ່ໜີ້ ຂຶ່ງໜ້າທາງທີ່ຈະເກີກຂຶ່ນ ມີ 2 ໜ້າທາງ
ຕີ້ອ ໄກ້ນ້າຫວ້າ ສີ່ອໄກ້ນ້າກ້ອຍ

$$\therefore \text{ຈໍານວນໜ້າທາງທີ່ໄດ້ໃນການໂບນເໜີຍໝູກຽ້ງທີ່ໜີ້} = 2 \text{ ວິທີ}$$

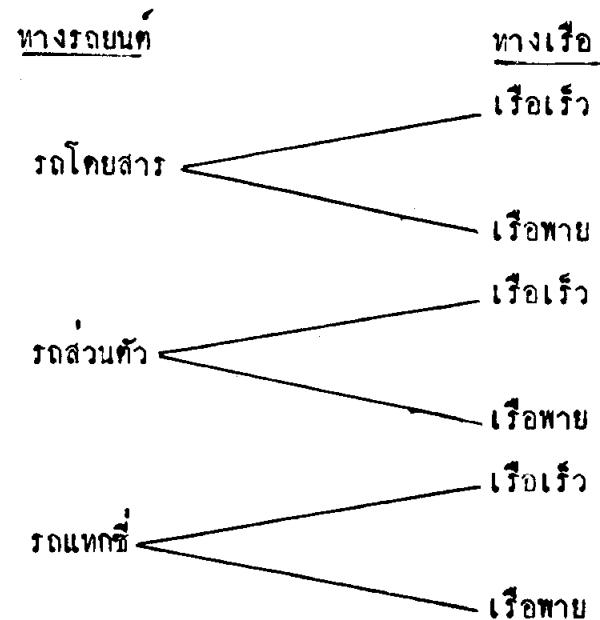
ขั้นตอนที่ 2 เป็นการโยนเหรียญครั้งที่สอง ซึ่งหนทางที่จะเกิดขึ้นมี 2 หนทาง คือได้หน้าหรือ หรือได้หน้าก้อย
 \therefore จำนวนหนทางที่ได้ในการโยนเหรียญครั้งที่ 2 = 2 วิธี
 ดังนั้น จำนวนหนทางที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญ 2 ครั้ง = $2 \times 2 = 4$ วิธี ตอบ
 ซึ่งเขียนแสดงໄก้ดังนี้



ทวารย่างที่ 1.3

นายคำรัง ท้องการเดินทางไปบ้านนายคำวิ ซึ่งการเดินทางครั้งนี้ นายคำรัง จะต้องไปทางรถบันทึกแล้วไปนั่งเรือคู่ จึงจะถึงบ้านนายคำวิ ถ้าทางรถบันทึกที่จะไปนั้น มีรถโดยสาร รถส่วนตัว และรถแท็กซี่ ส่วนทางเรือนั้น มีเรือเร็วสีขาว อย่างหนาแน่นว่า นายคำรังจะเลือกเดินทางไปบ้านนายคำวิໄก้กี่วิธี

การเดินทางรถบันทึก มีทางเลือกได้ $= 3$ วิธี
 การเดินทางเรือ มีทางเลือกได้ $= 2$ วิธี
 \therefore นายคำรังจะเลือกเดินทางไปบ้านนายคำวิได้ $= 3 \times 2 = 6$ วิธี ตอบ
 ซึ่งเขียนแสดงໄก้ดังนี้



เช่น นายค่ารังอาจจะขึ้นรถส่วนตัวไป แล้วไปท่อเรือเร็ว หรืออาจจะนั่งแท็กซี่ แล้วไปท่อเรือเร็ว เป็นต้น

ในการพิจารณาทางเดิน แม้จะออกมีน้อย ๆ ขั้นตอน การหาจำนวนหนทาง ห้ามคนนั้น อาศัยบทหารของทฤษฎีที่ 1 ดังนี้

บทหารของทฤษฎีที่ 1

ถ้าในการทางเดิน กท สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น n_1 ขั้นตอน ขั้นตอนแรก มีหนทางที่จะเกิดขึ้นได้ m_1 หนทางที่แยกกัน ขั้นตอนที่สองมีหนทางที่จะเกิดขึ้นได้ m_2 หนทางที่แยกกันไป จนถึงขั้นที่ n มีหนทางที่จะเกิดขึ้นได้ m_n หนทางที่แยกกัน จำนวนหนทางห้ามก็จะทำการทางเดินนี้ จะเท่ากับ

$$m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n \quad \text{หนทาง หรือเรียบแทนด้วย}$$

$$\prod_{i=1}^{i=k} m_i \quad \text{หนทาง}$$

ตัวอย่างที่ 1.4 โดยเนรีบุญ ครัง จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

การโดยนเรียบ 5 ครั้ง เปรียบเสมือน การทดลองนี้จะเป็น 5 ขั้นตอน
ซึ่งในแต่ละขั้นตอนนั้นจะมีหนทางที่เกิดขึ้น 2 หนทาง ดัง โภนแล้วง่ายเป็นหน้าหัว (H)
หรือโภนแล้วง่ายเป็นหน้าก้อย (T)

ขั้นที่ 1	มีหนทางเกิดขึ้นได้	=	2	หนทาง
ขั้นที่ 2	มีหนทางเกิดขึ้นได้	=	2	หนทาง
ขั้นที่ 3	มีหนทางเกิดขึ้นได้	=	2	หนทาง
ขั้นที่ 3	มีหนทางเกิดขึ้นได้	=	2	หนทาง
ขั้นที่ 4	มีหนทางเกิดขึ้นได้	=	2	หนทาง
ขั้นที่ 5	มีหนทางเกิดขึ้นได้	=	2	หนทาง

$$\therefore \text{จำนวนหนทางทั้งหมด} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \text{ หนทาง}$$

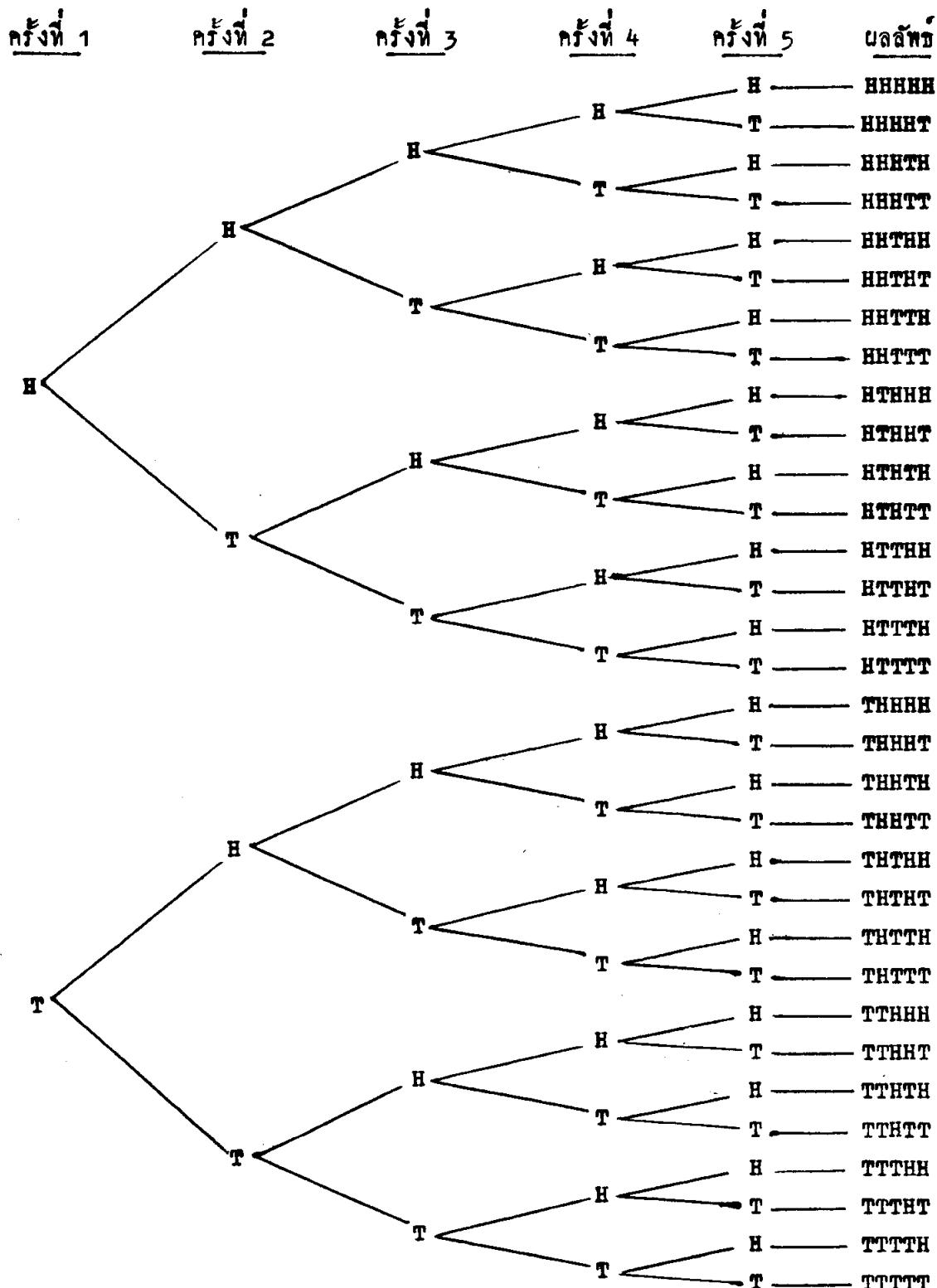
$$\text{หรือ } = 2^5 \text{ หนทาง} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ซึ่งในการทดลองแบบนี้ จำนวนหนทางทั้งหมดจะมาจากผลคคำนวณหาได้โดยง่าย
คือถ้าในแต่ละครั้งมีหนทางที่จะเกิดขึ้นเท่าไก แล้วทำการทดลองแบบนั้นกี่ครั้ง
จำนวนหนทางที่ได้จะเท่ากับ จำนวนหนทาง
ที่เกิดขึ้นในแต่ละครั้ง ยกกำลังกับจำนวนครั้งที่ทำการทดลอง เช่น โดยนเรียบ 20 ครั้ง
แต่ละครั้งมีหนทางที่เกิดเท่ากัน 2

$\therefore \text{จำนวนหนทางทั้งหมด} = (2)^{20} \text{ หนทาง}$
หรือการโดยลูกเต๋าซึ่งมี 6 หน้า 4 ครั้ง จะเห็นว่าจำนวนหนทางที่เกิดในการโดยลูกเต๋า
แต่ละครั้งจะเท่ากับ 6 หนทาง

$$\therefore \text{จำนวนหนทางทั้งหมด} = (6)^4 \text{ หนทาง}$$

จากผลลัพธ์ในการโดยนเรียบ 5 ครั้ง เรียนแผนภาพแสดงให้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1.5 มีกล่องชุด 6 กล่อง แยกกล่องบรรจุภัณฑ์มาสี่ต่อ ๆ กัน ดังนี้
 กล่องที่ 1 มีถุงมักเสียง 10 ถุง กล่องที่ 2 มีถุงมักเสียว 5 ถุง กล่องที่ 3 มีถุงมักเสียว
 7 ถุง กล่องที่ 4 มีถุงมักเส้นเขียว 9 ถุง กล่องที่ 5 มีถุงมักเส้นทอง 4 ถุง กล่องที่ 6
 มีถุงมักเส่า 6 ถุง ด้านในถุงมักจากแหล่งมากกล่องละ 1 ถุง จะมีหนทางในการนับ
 ถุงมักกี่หนทาง

การนับถุงมักจากแหล่งกล่องเป็นการทดลองที่เราแบ่งໄກเป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1	นับถุงมัก 1 ถุง จากกล่องที่ 1 มีหนทาง	=	10 หนทาง
ขั้นตอนที่ 2	นับถุงมัก 1 ถุง จากกล่องที่ 2 มีหนทาง	=	5 หนทาง
ขั้นตอนที่ 3	นับถุงมัก 1 ถุง จากกล่องที่ 3 มีหนทาง	=	7 หนทาง
ขั้นตอนที่ 4	นับถุงมัก 1 ถุง จากกล่องที่ 4 มีหนทาง	=	9 หนทาง
ขั้นตอนที่ 5	นับถุงมัก 1 ถุง จากกล่องที่ 5 มีหนทาง	=	4 หนทาง
ขั้นตอนที่ 6	นับถุงมัก 1 ถุง จากกล่องที่ 6 มีหนทาง	=	6 หนทาง

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะนับถุงมักจากกล่อง} = 10 \times 5 \times 7 \times 9 \times 4 \times 6 \\ = 75,600 \quad \text{หนทาง} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ทฤษฎีที่ 2 ถ้าในการทดลองให้ฯ สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น 2 ขั้นตอน
 ในขั้นแรกเลือกทำໄก์ π_1 หนทาง และใน步果 π_1 หนทางนี้ ยังแยกการกระทำ
 ออกเป็น 2 แบบ โดยที่แบบแรกเลือกทำໄก์ π_{11} หนทาง แบบหลังทำໄก์ π_{12} หนทาง
 ในขั้นที่สอง เลือกทำໄก์ π_2 หนทาง และใน步果 π_2 หนทางนี้ ยังแยกการกระทำ
 ออกเป็น 2 แบบ แต่คงอยู่ภายในได้เงื่อนไขของขั้นแรก ดังนี้คือ ถ้า ขั้นแรกเป็นแบบแรก
 ขั้นที่ 2 จะเลือกทำໄก์ π_{21} หนทาง ถ้าขั้นแรกเป็นแบบหลัง ขั้นที่ 2 จะเลือกทำໄก์
 π_{22} หนทาง จำนวนหนทางที่จะทำการทดลองนี้ จะเท่ากับ $(\pi_{11} \times \pi_{21}) + (\pi_{12} \times \pi_{22})$ หนทาง

หมายเหตุ.- 1. $\pi_{11} + \pi_{12} = \pi_1$

2. $\pi_{21} + \pi_{22} \leq \pi_2$

ทัวร์ย่าง 2.1 มีเลขโภคถุ 10 ตัว คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
โยนเหรียญ 2 เหรียญ ถ้าโยนแล้วได้ หน้าหน้า 1 หัว จะนับเลขคี่หนึ่งตัว แต่ถ้าโยน
แล้วได้หน้าเหมือนกันหมด จะนับเลขคู่หนึ่งตัว จงหาจำนวนหนทางทั้งหมด

จากโจทย์ เราแยกการกระทำออกเป็น 2 ชั้นตอน คือ

ชั้นแรกโยนเหรียญ 2 เหรียญ

ชั้นที่ 2 นับเลขโภคมา 1 ตัว

∴ ชั้นแรก การโยนเหรียญ 2 เหรียญ ผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี 4 หนทาง

$$\therefore n_1 = 4 \text{ หนทาง คือ}$$

$$(H,H), (H,T), (T,H), (TT)$$

ซึ่งเราแบ่งการกระทำในชั้นแรกนี้เป็น 2 แบบ คือ

แบบแรก โยนเหรียญ 2 เหรียญ แล้วได้หัว 1 หัว

นั่นคือ แบบแรก ทำได้ 2 หนทาง เพราะว่าผลการทดลองที่จะได้

หัว 1 หัว คือ (H,T) กับ (T,H) ∴ $n_{11} = 2$ หนทาง

แบบหลัง โยนเหรียญ 2 เหรียญ แล้วได้หน้าเหมือนกันหมด

นั่นคือ แบบหลังทำได้ 2 หนทาง เพราะว่าผลการทดลองที่จะได้

หน้าเหมือนกัน คือ (H,H) กับ (T,T) ∴ $n_{12} = 2$ หนทาง

ชั้นที่ 2 นับเลขโภค 1 ตัว ในมรรคา 10 ตัว ($\therefore n_2 = 10$)

โดยมีเงื่อนไขดังนี้

ถ้าชั้นแรกเป็นแบบแรก คือโยนเหรียญ 2 เหรียญแล้วได้หัว 1 หัว

ชั้นที่ 2 จะนับเลขโภคที่เป็นเลขคี่ 1 ตัว จากเลขคี่ 5 ตัว

$$\therefore n_{21} = 5 \text{ หนทาง}$$

ถ้าชั้นแรกเป็นแบบหลัง คือโยนเหรียญ 2 เหรียญแล้วได้ก้อย

ชั้นที่ 2 จะนับเลขโภคที่เป็นเลขคู่ 1 ตัว จากเลขโภค 5 ตัว

$$\therefore n_{22} = 5 \text{ หนทาง}$$

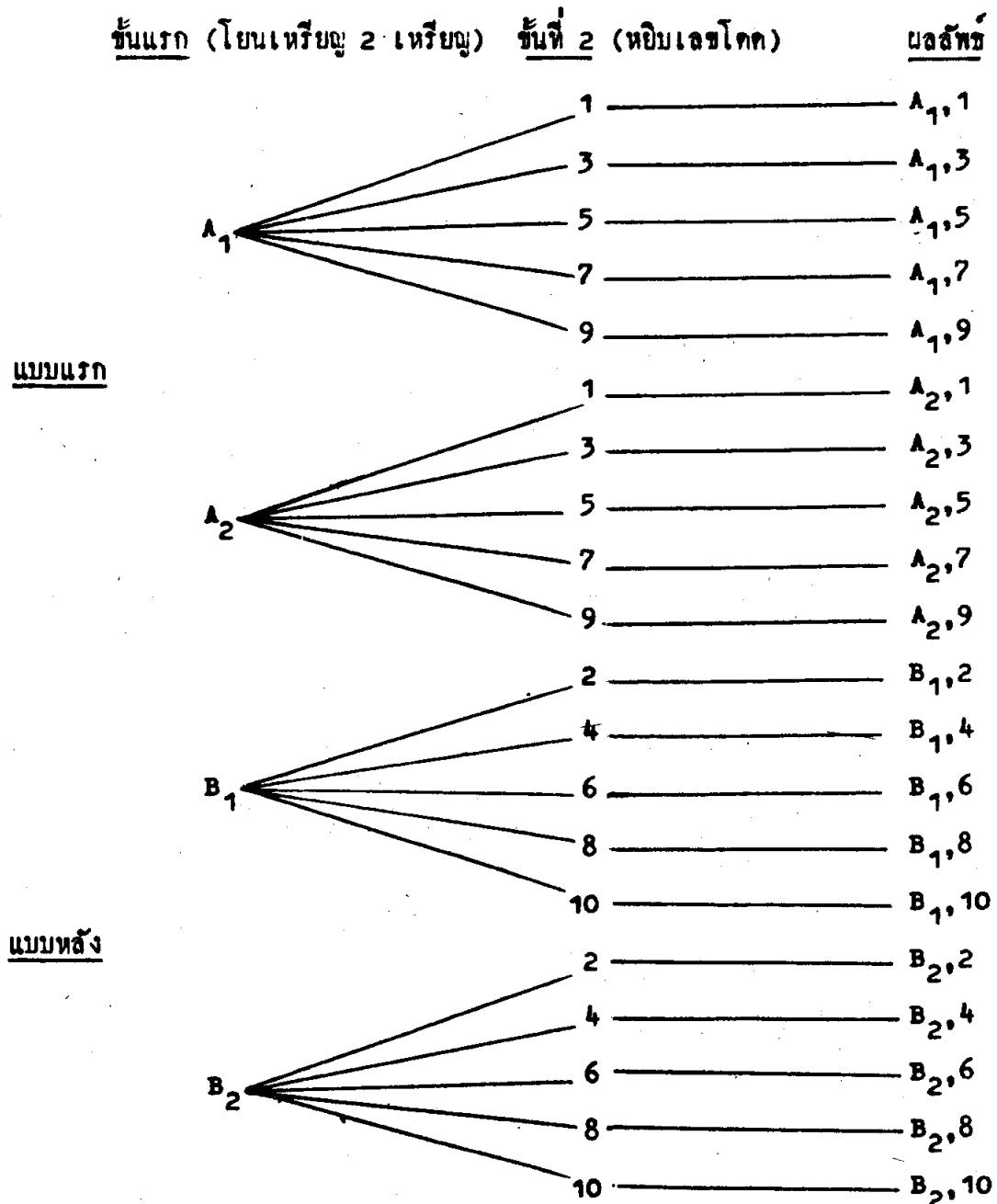
$$\therefore \text{จำนวนหนทางทั้งหมด} = (2 \times 5) + (2 \times 5) \quad \text{หนทาง}$$

$$= 10 + 10 = 20 \quad \text{หนทาง} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

ถ้าให้ A_1 แทน (H, T) , A_2 แทน (T, H)

และให้ B_1 แทน (H, H) , B_2 แทน (T, T)

การทดลองนี้สามารถเขียนแสดงด้วย Tree - diagram ดังนี้



ดังนั้น จำนวนหนทางที่จะเกิดขึ้นหั่งมด เท่ากับ 20 หนทาง

บทແທຣກຂອງທຸນກີ່ມື້ 2

ດ້ານໃນກາຮັດລອງໄກ ຈະສາມາດແຍກກາຮັດຫ່າຍອກໄກເປັນ 2 ຂັ້ນຄອນ
ຂັ້ນແຮກເລືອກທ່າໄກ n_1 ແນໜາງ ໂຄຍແຍກເປັນ k ແນນ ແກ່ລະແນນເລືອກທ່າໄກ
 $n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1k}$ ດາວລ່າຄົມ ໂຄຍທີ $n_{11} + n_{12} + \dots + n_{1k} = n$
ແລະກາຍໃກເປົ່ອນໃຊ້ຂອງກາຮັດຫ່າຍແນນກ່າງ ຈະໃຫ້ແຮກສາມາດແຍກອອກເປັນກາຮັດຫ່າ
ໃນຂັ້ນທີ 2 ໄກ $n_{21}, n_{22}, \dots, n_{2k}$ ດາວລ່າຄົມ ຈຳນວນໜາງທີ່ເປັນໄປ. ກ່າກກາຮ
ຫວລອງນີ້ ຈະເຫັກນີ້

$$(n_{11} \times n_{21}) + (n_{12} \times n_{22}) + \dots + (n_{1k} \times n_{2k}) \quad \text{ໜາງ}$$

ຕົວຢ່າງ 2.2 ມີອັກຍົບຍູ່ 10 ຕົວ ຕື່ອ A, B, C, D, E, F, G, H, I ແລະ J
ໂຢນລູກເທົ່າ 1 ລູກ ດ້າໂຢນແລ້ວໄກ້ເລີ່ມທີ່ປ່ຽກງູນໜ້າຂອງລູກເທົ່າເປັນ 1 ພຶກ 3
ຈະໝົນອັກຍົບ A ພຶກ B ພຶກ E ດ້າໂຢນແລ້ວໄກ້ເລີ່ມທີ່ປ່ຽກງູນໜ້າຂອງລູກເທົ່າເປັນ 2
4 ພຶກ C ພຶກ G ພຶກ H ພຶກ J. ແກ້ດ້າໂຢນແລ້ວໄກ້ເລີ່ມທີ່ປ່ຽກງູນໜ້າຂອງລູກເທົ່າເປັນ 5
ຈະໝົນອັກຍົບກ້າວໄກໍໄດ້ໃນອັກຍົບ 10 ຕົວ ຈຳນວນໜາງທີ່ໜັກ

ຈາກໂຈ່ຍ໌ ເຮັດແຍກກາຮັດຫ່າຍອກເປັນ 2 ຂັ້ນຄອນ ຕື່ອ

ຂັ້ນແຮກ ໂຢນລູກເທົ່າ 1 ລູກ

ຂັ້ນທີ 2 ແມ່ນອັກຍົມາ 1 ຕົວ

ຂັ້ນແຮກ ກາຮໂຢນລູກເທົ່າ 1 ລູກ ພລກາຮັດລອງທີ່ເປັນໄປໄກ້ທັງໝົດ ມີ 6 ໜາງ

$\therefore n_1 = 6$ ໜາງ ຕື່ອ 1, 2, 3, 4, 5 ແລະ 6 ຊຶ່ງເຮັດແມ່ນກາຮັດຫ່າຍ
ໃນຂັ້ນແຮກນີ້ເປັນ 3 ແນນ ຕື່ອ

ແນນແຮກ ໂຢນລູກເທົ່າ ແລ້ວໄກ້ໜ້າ 1 ພຶກ 3

ນັ້ນຕື່ອ ແນນແຮກ ຫ່າໄກ້ 2 ໜາງ $\therefore n_{11} = 2$ ໜາງ

ແນນທີ 2 ໂຢນລູກເທົ່າ ແລ້ວໄກ້ໜ້າ 2 ພຶກ 4 ພຶກ 6

ນັ້ນຕື່ອ ແນນທີ 2 ຫ່າໄກ້ 3 ໜາງ $\therefore n_{12} = 3$ ໜາງ

ແນນທີ 3 ໂຢນລູກເທົ່າ ແລ້ວໄກ້ໜ້າ 5

ນັ້ນຕື່ອ ແນນທີ 3 ຫ່າໄກ້ 1 ໜາງ $\therefore n_{13} = 1$ ໜາງ

ขั้นที่ 2 หิยมอักษร 1 ตัว ในบรรกาอักษรทั้งหมด 10 ตัว

$$\therefore n_2 = 10 \text{ หนทาง } \text{โดยมีเงื่อนไขดังนี้}$$

ถ้าขั้นแรก เป็นแบบแรก หรือ โดยสูญเสียแล้วไก่หน้า 1 หรือ 3

ขั้นที่ 2 จะหิยมอักษร A หรือ B หรือ C \therefore n_{21} = 3 \text{ หนทาง}

ถ้าขั้นแรก เป็นแบบที่ 2 หรือโดยสูญเสียแล้วไก่หน้า 2 หรือ 4 หรือ 6

ขั้นที่ 2 จะหิยมอักษร C หรือ E หรือ J

$$\therefore n_{22} = 4 \text{ หนทาง}$$

ถ้าขั้นแรก เป็นแบบที่ 3 หรือโดยสูญเสียแล้วไก่หน้า 5

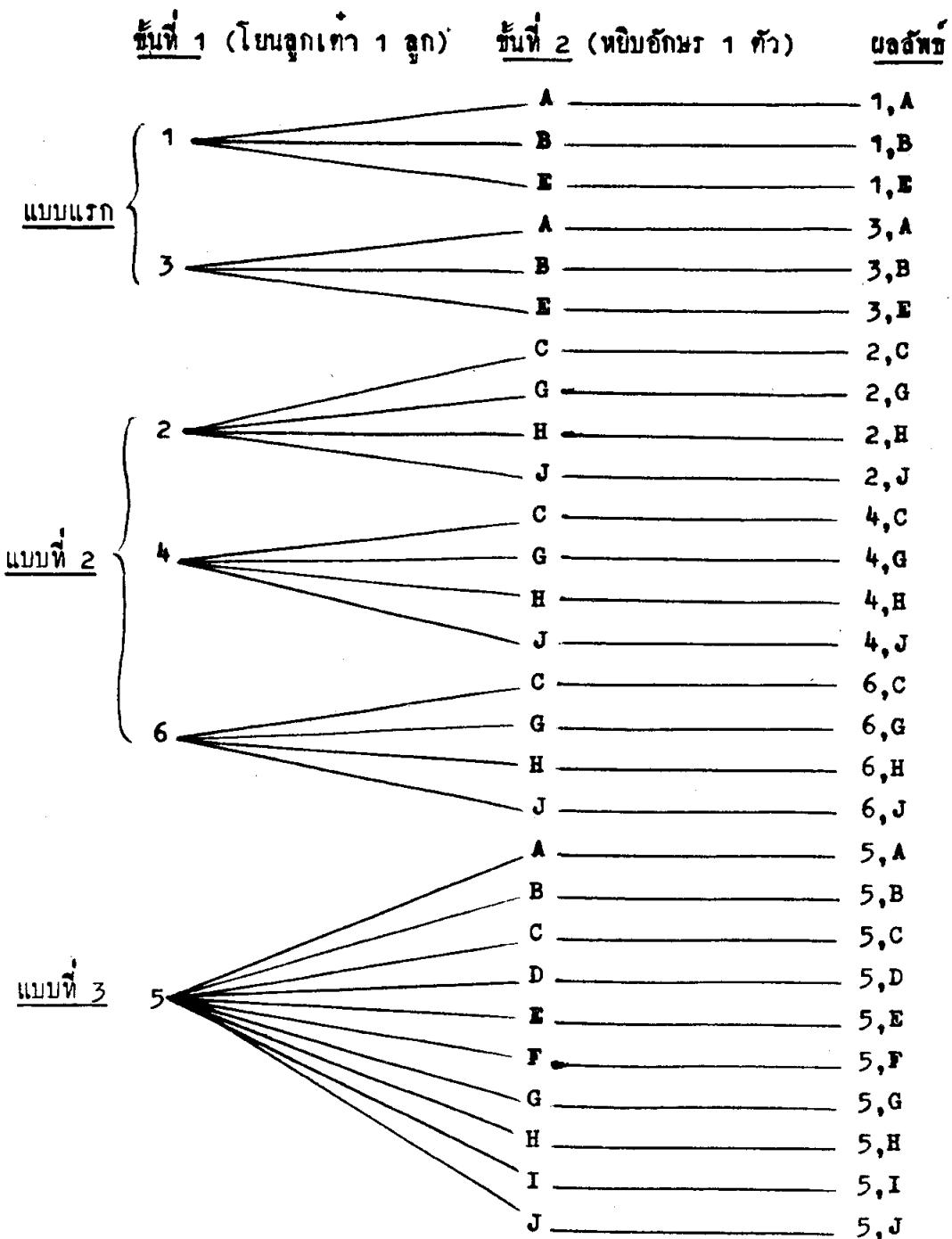
ขั้นที่ 2 จะหิยมอักษร ตัวไก่ก็ได้ ในบรรกาอักษรทั้งหมด 10 ตัว

$$\therefore n_{23} = 10 \text{ หนทาง}$$

$$\therefore \text{จำนวนหนทางทั้งหมด} = (2 \times 3) + (3 \times 4) + (1 \times 10) \text{ หนทาง}$$

$$= 6 + 12 + 10 = 28 \text{ หนทาง } \underline{\text{ตอบ}}$$

การทดลองนี้สามารถเขียนแสดงด้วย tree-diagram กันนี้



คั่งน้ำในจำนวนหนทางที่เกิดขึ้นทั้งหมด เท่ากับ 28 หนทาง

การจัดลำดับ (Permutation)

นิยาม การจัดลำดับของสิ่งของทั่ง ๆ คือ การนำสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกันมาจัดเรียงกัน โดยถือลำดับที่เป็นล่วงสำคัญ และการเรียงลำดับในแต่ละแบบที่จัดให้ เราเรียกว่า "หนึ่งลำดับ"

ในการจัดเรียงลำดับสิ่งของทั่ง ๆ นี้ อาจจะเอาสิ่งของทั้งหมดมาจัดเรียงกัน หรือ อาจจะนำมาเพียงส่วนที่ต้องการมาจัดเรียงกันก็ได้ เช่น

มีอักษรอยู่ 3 ตัว คือ A, B และ C

ก) นำอักษรทั้ง 3 ตัวนี้มาจัดเรียงทีละ 3 ตัว จะทำได้กี่ครั้งนี่คือ ABC, ACB,

BAC, CAB, CBA

$$\therefore \text{จำนวนวิธีที่จัดเรียงลำดับได้} = 6 \text{ วิธี}$$

แต่ละแบบที่เรียงได้ เราเรียกว่า เป็นหนึ่งลำดับ ดังนั้น ในกรณีนี้ จะมีหนทางที่จัดลำดับได้ เท่ากับ 6 ลำดับ

ข) นำอักษรทั้ง 3 ตัวนี้ มาจัดเรียงทีละ 2 ตัว (นำมาเพียงส่วนที่เราต้องการ คือ 2 ตัว) จะทำได้กี่ครั้งนี่คือ

AB, AC, BA, BC, CA, CB

$$\therefore \text{จำนวนลำดับที่จัดได้} = 6 \text{ ลำดับ}$$

ทฤษฎีวิวัฒนาการจัดลำดับ (Permutation Theorem)

ทฤษฎีที่ 1 (การนำสิ่งของ n สิ่ง มาจัดเรียงลำดับทีละ n สิ่ง)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกัน จำนวนหนทางที่จะนำสิ่งของเหล่านี้ มาจัดเรียงลำดับครั้งละ n สิ่ง จะเท่ากับ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ หนทาง และเรียบสัญลักษณ์ แทนด้วย ${}^n P_n$

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับการนับมูลฐานเข้าช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งจะได้ว่า การจัดลำดับของ n สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกัน คือ การทดลองที่แยกการกระทำออกเป็น n ขั้นตอน นั่นเอง ดังนี้

- ขั้นแรก นำของ n สิ่งม่าวางไว้ในลำดับแรก มีทางเลือกให้ n หนทาง
 ขั้นที่ 2 นำของ $n-1$ สิ่ง ม่าวางไว้ในลำดับที่ 2 มีทางเลือกให้ $n-1$ หนทาง
 ขั้นที่ 3 นำของ $n-2$ สิ่ง ม่าวางไว้ในลำดับที่ 3 มีทางเลือกให้ $n-2$ หนทาง

ขั้นที่ $n-1$ มีทางเลือกให้ 2 หนทาง (เพราะมีของเหลืออยู่เพียง 2 สิ่ง)

ขั้นที่ n มีทางเลือกให้ 1 หนทาง (เพราะมีของเหลืออยู่เพียง 1 สิ่ง)

\therefore จำนวนหนทางทั้งหมดที่จะจัดลำดับให้ เท่ากับ

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 \quad \text{หนทาง}$$

ค.ถ.พ.

ทฤษฎีที่ 2 (การนำสิ่งของ n สิ่ง มาจัดเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง
 โดยที่ $r < n$)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกัน จำนวนหนทางที่จะนำสิ่งของเหล่านี้
 มาจัดเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง จะเท่ากับ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$ หนทาง
 และเรียบสัญลักษณ์ แทนด้วย ${}^n P_r$

พิสูจน์ ใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับการนับมูลฐานเข้าช่วยในการพิสูจน์ เช่นเดียวกับทฤษฎีแรก
 ซึ่งจะไก้ว่า การจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่ง ก็คือการทดลองที่แยก
 การกระทำออกเป็น n ขั้นตอน นั่นเอง ดังนี้

- ขั้นที่ 1 นำของ n สิ่ง ม่าวางไว้ในตำแหน่งแรกของลำดับ มีทางเลือก n หนทาง
 ขั้นที่ 2 นำของ $n-1$ สิ่ง ม่าวางไว้ในตำแหน่งที่ 2 ของลำดับ มีทางเลือก $n-1$ หนทาง
 ขั้นที่ 3 นำของ $n-2$ สิ่ง ม่าวางไว้ในตำแหน่งที่ 3 ของลำดับ มีทางเลือก $n-2$ หนทาง

ขั้นที่ r นำของ $n-(r-1)$ สิ่ง ม่าวางไว้ในตำแหน่งที่ r มีทางเลือก $n-(r-1)$ หนทาง

\therefore จำนวนหนทางที่จะจัดลำดับให้ เท่ากับ

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times n - (r - 1) \quad \text{หรือเท่ากับ}$$

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) \quad \text{หนทาง} \quad \underline{\text{ค.ถ.พ.}}$$

ทัวร์ย่างที่ 1 จะจัดล่าคับความนิยมของผู้ใช้แป้งเกล็กซึ่งมีห้องหนัก 6 บ้าน ศือ เปาโล พรรษางาน จอนน์สัน เช็นลูกชิ้น ไอล์ฟบอย และหอกด้ ไก่กี่เม็ด

$$\therefore \text{ การจัดล่าคับความนิยมของผู้ใช้แป้งเกล็กจะจัดให้ } = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \text{ เม็ด} \\ = 720 \text{ เม็ด}$$

ตอบ

ทัวร์ย่างที่ 2 จงหาจำนวนวิธีเรียงล่าคับของหนังสือ 7 เล่ม ในชั้นกันเลย โดยนำมาจัดเรียงคราวละ 3 เล่ม

$$\therefore \text{ จำนวนวิธีเรียงล่าคับ } = 7 \times 6 \times 5 \\ = 210$$

ตอบ

นิยามและสูตรลักษณะของแฟกทอเรียล

n แฟกทอเรียล (n factorial)

คือ ผลคูณของเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ n ลงไปจนถึง 1 และเชื่อมสัญลักษณ์
แทนค่วย ณ ที่ว่า !

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

เช่นจะได้ว่า

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2 \times 1! = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 2! = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3! = 24$$

ถ้าเขียนค่อไปเรื่อย ๆ โดยวิธีเดียวกันนี้ ก็จะสามารถทำเป็นตาราง ณ
ไก่ตังตาราง 2.1 (ตารางที่แสดงนี้ $n = 1, 2, \dots, 10$ เท่านั้น)

ตาราง 2.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	2	6	24	120	720	5,040	40,320	362,880	3,628,800

ข้อสังเกต

$$20! = 20 \times 19!$$

$$100! = 100 \times 99!$$

$$(n + 1)! = (n + 1) \times n!$$

$$\text{เราอาจเขียน } n! = n \times (n - 1)!$$

$$\text{หรือ } n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)(n - r)!$$

ถ้า r เป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 1 กับ n และถ้าหารทั้ง 2 ข้างด้วย $(n - r)!$
จะได้

$$\frac{n!}{(n - r)!} = \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) \times (n - r)!}{(n - r)!}$$

$$\therefore \frac{n!}{(n - r)!} = \frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)}{(n - r)!}$$

$$\text{จาก } \frac{n!}{n!} = \frac{n \times (n - 1)!}{n \times (n - 1)!} \quad \text{ถ้า } n \neq 1$$

$$\text{จะได้ } 1! = 1 \times (1 - 1)!$$

$$1 = 1 \times 0!$$

$$\therefore 0! = 1$$

จากนิยามและสัญลักษณ์ของแฟกทอเรียลข้างบนนี้ จะได้ว่า

$$1. \quad {}^n P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

$$2. \quad {}^n P_r = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

ข้อสังเกต

$$1. {}^n P_0 = \frac{n!}{(n - 0)!} = 1$$

หมายความว่า มีลิ่งของอยู่ n ลิ่ง และไม่จัดเรียง (คือจัดเรียงกราวจะ 0 ลิ่ง) จึงจัดเรียงได้ 1 วิธี เท่านั้น

$$2. {}^n P_1 = \frac{n!}{(n - 1)!} = \frac{n \times (n - 1)!}{(n - 1)!} = n$$

หมายความว่า มีลิ่งของอยู่ n ลิ่ง นำมาจัดเรียงกราวจะ 1 ลิ่ง ก็ันนั้น สามารถจัดเรียงได้ n วิธี

ทวอย่างที่ 1 มีอักษรอยู่ 4 ตัว คือ a, b, c และ d ท้องการนำอักษรทั้ง 4 ตัวนี้ มาจัดลำดับอักษร กราวจะ 2 ตัว จงหาจำนวนลำดับที่จะจัดให้

$$\text{จาก } {}^n P_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

จากทวอย่าง $n = 4$, $r = 2$ แทนค่าจะได้

$${}^4 P_2 = \frac{4!}{(4 - 2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12 \text{ ลำดับ } \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

ซึ่งเรียนแสดงลำดับของอักษร 2 ตัว จากอักษร 4 ตัว ได้ดังนี้

ab ba ac ca ad da

bc cb db bd cd dc

จำนวนลำดับที่จัดให้ เท่ากับ 12 หนทาง

ทวอย่างที่ 2 คณะวิทยาศาสตร์ มีหุนการศึกษาที่จะมอบให้นักศึกษาที่เรียนดีแทร็คสน ทางค้านการเงิน อยู่ห้องหมก 5 ประเกห ซึ่งจะมอบให้กับนักศึกษาที่มีคุณสมบัติคั่งกล่าว 5 คน ถ้ามีนักศึกษามากมายกว่า 15 คน จงหาจำนวนหนทางที่จะมอบหุนเหล่านี้

จากโจทย์ $n = 15, r = 5$

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะน้อมทุน} = {}^{15}P_5 = \frac{15!}{(15 - 5)!} \quad \begin{matrix} \text{หนทาง} \\ \text{หนทาง} \\ \text{หนทาง} \\ \text{หนทาง} \end{matrix}$$

$$= 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \quad \begin{matrix} \text{หนทาง} \\ \text{หนทาง} \end{matrix}$$

$$= 360,360 \quad \underline{\text{กอน}}$$

ทัวอย่างที่ 3 จงหาจำนวนหนทางที่จะจัดคนเข้ารับตำแหน่งประธาน รองประธาน และเลขานุการ ของกรรมการศูนย์นั่ง โดยถือว่า คนที่ได้รับตำแหน่งสูงสุดจะได้เป็นประธาน ตำแหน่งล่างที่ 2 จะได้เป็นรองประธาน ถ้ามีบุคคลมากกว่า 6 คน

จากโจทย์ จะได้ $n = 6, r = 3$

\therefore จำนวนหนทางที่จะจัดคน 6 คน ให้เข้ารับตำแหน่งที่มีอยู่ 3 ตำแหน่ง

$$\begin{matrix} \text{ให้} = {}^6P_3 & \text{หนทาง} \\ = \frac{6!}{(6 - 3)!} & \text{หนทาง} \\ = 6 \times 5 \times 4 & \text{หนทาง} \end{matrix}$$

$$= \frac{6!}{3!} = 120 \quad \underline{\text{กอน}}$$

จากทัวอย่าง จะพบว่า ตำแหน่งประธาน สามารถจัดคนเข้ารับตำแหน่งได้ 6 วิธี ตำแหน่งรองประธานสามารถจัดคนเข้ารับตำแหน่งได้ 5 วิธี เผราระเบี้ยนเพียง 5 คน เท่านั้น จากการเสือกตำแหน่งประธานไปแล้ว 1 คน และตำแหน่งสูงท้าย ก็อ ตำแหน่ง เลขานุการ สามารถจัดคนเข้ารับตำแหน่งได้ 4 วิธี เผราระเบี้ยนเพียง 4 คนเท่านั้น จากการเสือกตำแหน่งประธาน และรองประธานไปแล้ว 2 คน

$$\text{ทั้งนี้ จำนวนหนทางทั้งหมด} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \quad \text{หนทาง}$$

การจัดลำดับ เป็นวงกลม

การจัดลำดับ เป็นวงกลมนั้น แยก开来 ไปจากการจัดลำดับในแนวตรง เพราะเราที่ทราบแต่เพียงว่า ของสิ่งหนึ่งอยู่ในตำแหน่งใดของลำดับ ไม่ได้ทราบว่าจะอยู่ใกล้เคียงของสิ่งไหนบ้าง แต่ในการจัดลำดับ เป็นวงกลมนั้น เราที่ทราบการจัดครบรอบ ในทิศทางเดียว กัน และสิ่งที่อยู่ในตำแหน่งข้างเคียงว่า มีของสิ่งใด ตามก้าวยกระไวบ้าง โดยไม่สนใจว่า จุดเริ่มต้นจะอยู่ที่ใดของวงกลม

กังนั้น การจัดลำดับ เป็นวงกลม เราจะถ้องว่า กำหนดให้ตำแหน่งหนึ่งคงที่ไว้ แน่นอน ส่วนตำแหน่งอื่น ๆ สามารถจัดสิ่งของลงให้โดยจะสับเปลี่ยนอย่างไรก็ได้

ถ้ามีตำแหน่งอยู่ α ตำแหน่ง มีสิ่งของอยู่ β สิ่ง ตำแหน่งที่หนึ่ง ซึ่งจะเป็นตำแหน่งให้ก็ ถ้องนี่คือห้องที่ไว้ กังนั้น จะเหลือกำหนดอยู่เที่ยง ($n - 1$) ตำแหน่ง สำหรับสิ่งของ ($n - 1$) สิ่ง ซึ่งจำนวนวิธีที่จะจัดสิ่งของ ($n - 1$) สิ่ง เรียงในตำแหน่งที่มีอยู่ ($n - 1$) ตำแหน่ง ให้เท่ากับ $(n-1)P_{(n-1)} = (n-1)$ วิธี

นั่นก็อ ถ้ามีของอยู่ α สิ่ง นำมารักเรียงเป็นวงกลมจะจัดให้เท่ากับ ($n - 1$)! วิธี

ทฤษฎีว่าทุกการจัดลำดับ เป็นวงกลม

ทฤษฎีที่ 1 นำของ n สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกัน มาจัดลำดับ เป็นวงกลม จำนวนลำดับ ที่จัดให้ จะเท่ากับ ($n - 1$)!

พิสูจน์

มีของอยู่ α สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกัน ถ้านำมาจัดเรียงลำดับในแนวตรง จะได้จำนวนวิธีเรียงลำดับ เท่ากับ $P_n = n!$ วิธี แต่ถ้านำสิ่งของ α สิ่งนี้มาเรียงลำดับ เป็นวงกลม แค่ α วิธี ในแนวตรง จะนั้นเป็นเที่ยงวิธีเดียว

$$\therefore \text{จำนวนเรียงลำดับ เป็นวงกลม} = \frac{n!}{n} \quad \text{วิธี}$$

$$= (n - 1)! \quad \text{วิธี} \quad \underline{\underline{\text{ข.ก.ก.}}}$$

กฎที่ 2

นำสิ่งของ x สิ่ง จากสิ่งของที่มีสักមะแตกทั้งกัน ไป สิ่ง ($x < n$)
มาจัดลำดับเป็นวงกลม จำนวนหนทางที่จะจัดลำดับให้เข้าท่ากัน $\frac{n!}{(n - x)!x!}$

กฎที่ 3

นิสิ่งของที่มีสักมะแตกทั้งกัน ไป สิ่ง ถ้านำมาจัดเรียงลำดับในแนววงกรวยละ
 x สิ่ง ($x < n$) จำนวนวิธีเรียงลำดับเท่ากับ ${}^nP_x = \frac{n!}{(n - x)!}$ วิธี
แยกถ้านำสิ่งของ x สิ่งนี้มาเรียงลำดับเป็นวงกลม แยกละ x วิธี ในแนววง จะนับเป็น
เพียงวิธีเดียว

$$\begin{aligned} \therefore \text{จำนวนเรียงลำดับเป็นวงกลม} &= \frac{{}^nP_x}{x} \quad \text{วิธี} \\ &= \frac{n!}{(n - x)!x!} \quad \text{วิธี} \end{aligned}$$

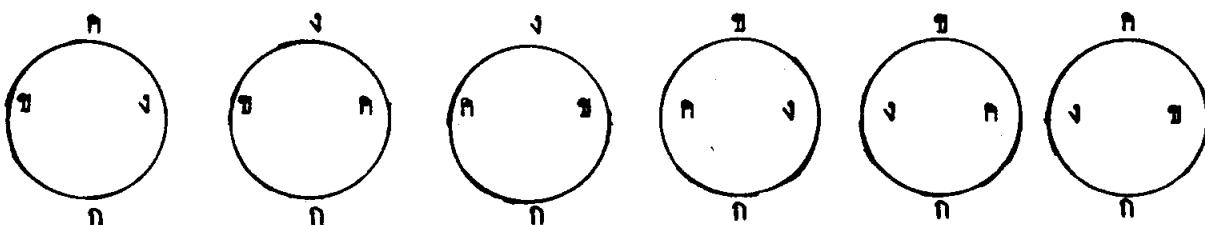
ต. ก. ก.

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้ราย 4 คน คือ นาย ก, ข, ค และ อ นั่งล้อมวง^{ล้อมวง} เล่นไพ่กัน

$$\begin{aligned} \text{จำนวนวิธีที่จะจัดให้ราย 4 คน} &= (4 - 1)! = 3! \text{ วิธี} \\ &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตอบ

ริ่งเรียนภาษาและคงให้กันนี้



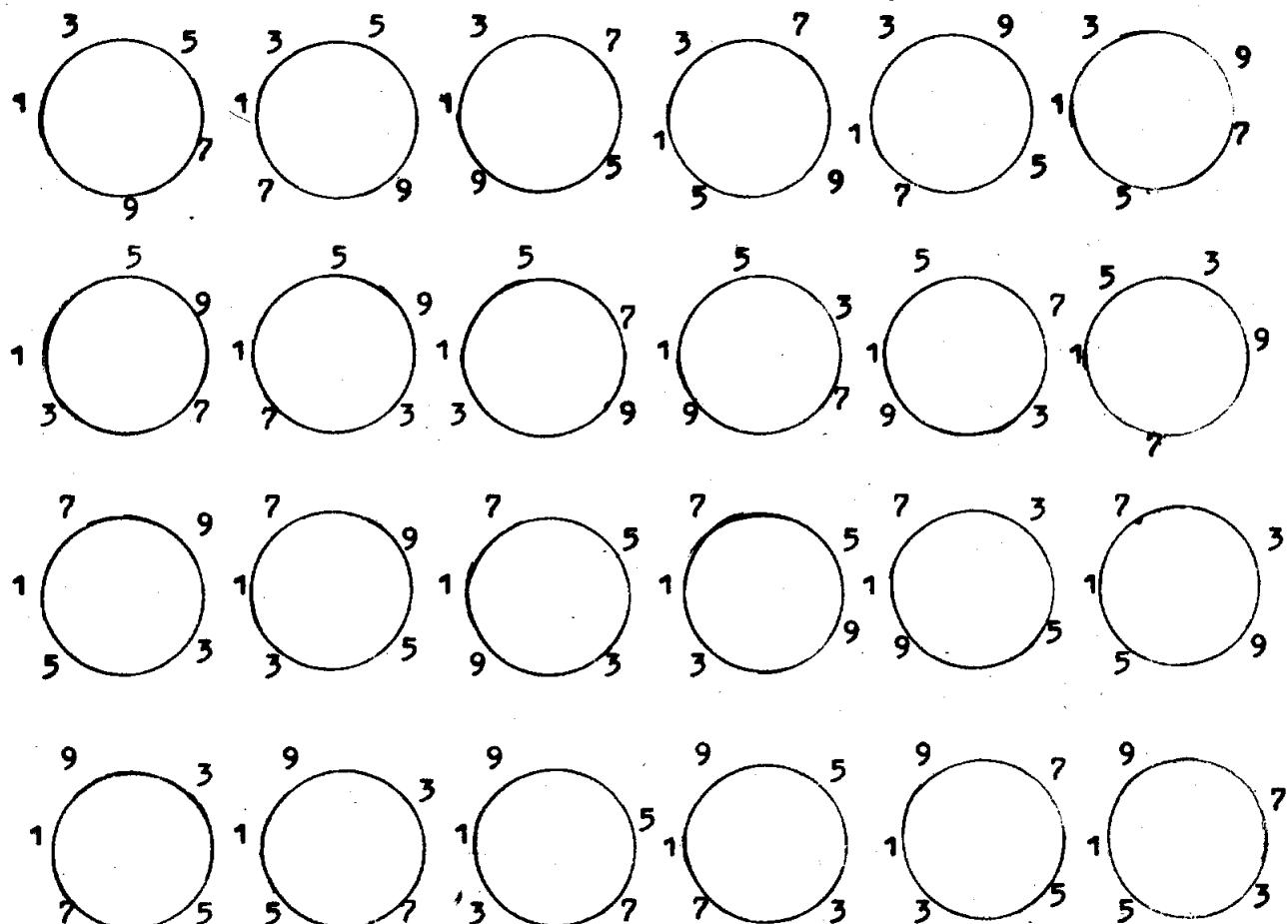
ริ่งให้แก่ ก ข ค ง ช และ อ ง ค ช

ทัวร์ย่างที่ 2 มีเลขอยู่ 5 ตัว คือ 1, 3, 5, 7 และ 9 นำเลขเหล่านี้มาจัดเรียงเป็นวงกลม จะมีหนทางจัดให้กี่วิธี

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะจัดให้} = (5 - 1)! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ วิธี}$$

ตอบ

ริ่งเขียนภาพแสดงให้ดังนี้



ทัวอย่างที่ 3

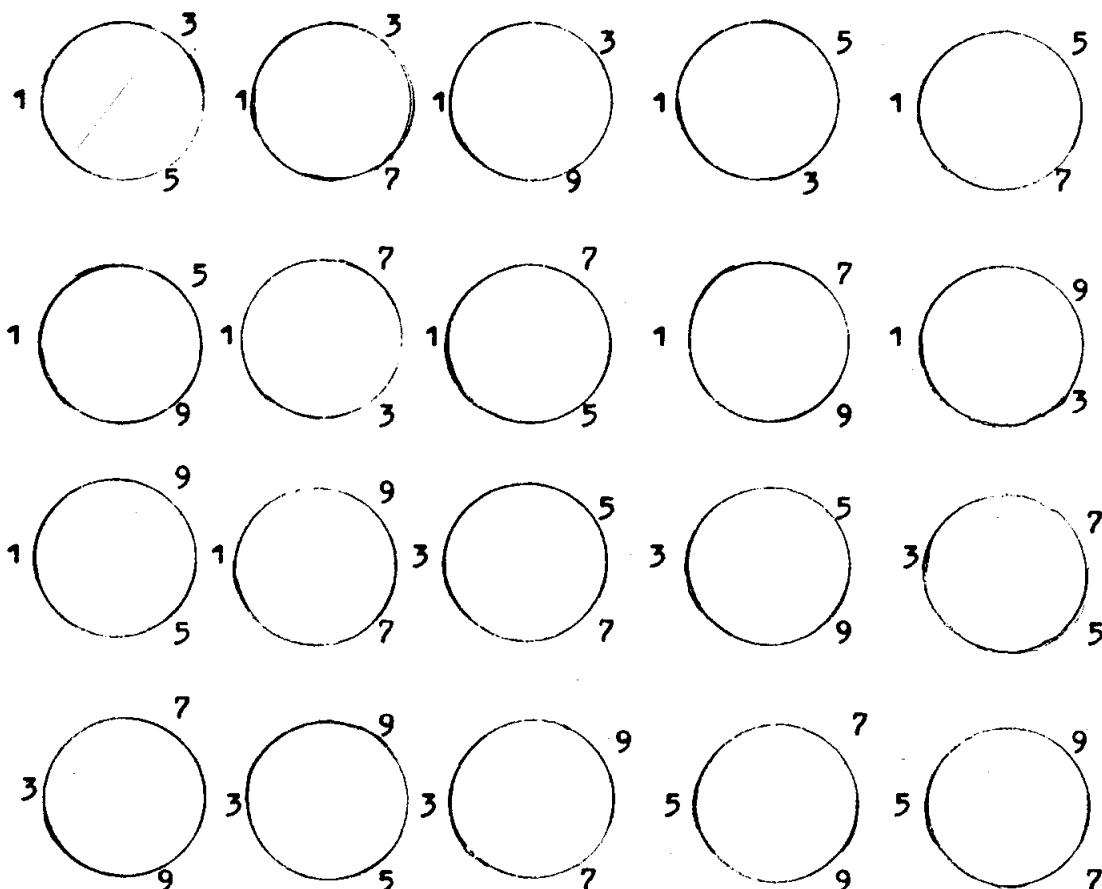
จากทัวอย่างที่ 2 ถ้านำเลขเหล่านั้น มาจัดเรียงซ้ำกับเป็นวงกลม คร่าวๆ 3 ทัว
จะมีหนทางจัดให้กี่หนทาง

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะจัดได้} = \frac{5P_3}{3} = \frac{5!}{(5-3)13} \quad \text{วิธี}$$

$$= \frac{5!}{21 \times 3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3} = 20 \quad \text{วิธี}$$

ทั้งหมด

รังเรียนภาพแสดงไก่คันนี้



គោលបារែងទី 4

មិកណែនភរៀវាន្វាតមួយ 20 ពីំ ដោលប្រកូរខែសម្រួលប្រចាំថ្ងៃ ទៅមិនអាចធិះ
ទុកប្រុកតាក់វិជ្ជ នៅតាមមាត្រាប្រុកដើម 10 ពីំ ហេតុនេះ ទៅមិនអាចធិះទុកប្រុកតាក់វិជ្ជ

$$\text{បំនានភរៀវាន្វាត 20 ពីំ ប្រកូរខែសម្រួលប្រចាំថ្ងៃ} = (20 - 1) : \frac{1}{10} \\ = 19 : \frac{1}{10}$$

$$\text{បំនានមាត្រាប្រុកដើម 10 ពីំ ទៅមិនអាចធិះទុកតាក់} \\ = \frac{20}{(20-10)} : \frac{1}{10} \\ = \frac{20}{10} : \frac{1}{10}$$

ករណី

ការទុកចាកំនៃការអិះទូទៅនាយកដែលបានបង្ហាញ

យើងទុកចាកំនៃការអិះទូទៅនាយកដែលបានបង្ហាញ 4 ពីំ តីម 3332
ក្នុងមិនមាយលេខ 3 ចម្លើចាន់ 3 ពីំ និងមិនមាយលេខ 2 ចម្លើ 1 ពីំ ដូច្នេះ យើងទុកចាកំ
តាក់ 4 ចាកំ កងកែវិញ

3332 3323 3233 2333

នៃពេលទុកចាកំតាក់វិជ្ជ យើងទុកចាកំ 3 ដីមួយ 3 ពីំ និង 3 ពីំ និង 3 ពីំ
ពេលទុកចាកំ ក្នុងមិនមាយលេខ 3₁, 3₂ និង 3₃ ការទុកចាកំមិនមាយលេខ 3₁, 3₂, 3₃
និង 2 ទៅមិនអាចធិះទុកតាក់ 4! បន្ទាន់ កងកែវិញ

2 3₁ 3₂ 3₃ 2 3₁ 3₃ 3₂ 2 3₂ 3₃ 3₁ 2 3₂ 3₁ 3₃

2 3₃ 3₁ 3₂ 2 3₃ 3₂ 3₁ 3₁ 2 3₂ 3₃ 3₁ 2 3₃ 3₂

3₂ 2 3₁ 3₃ 3₂ 2 3₃ 3₁ 3₂ 2 3₁ 3₂ 3₃ 2 3₂ 3₁

3₁ 3₂ 2 3₂ 3₂ 3₁ 2 3₂ 3₁ 3₃ 2 3₂ 3₃ 3₁ 2 3₂

3₃ 3₃ 2 3₁ 3₃ 3₂ 2 3₁ 3₁ 3₂ 3₃ 2 3₁ 3₃ 3₂ 2

3₂ 3₃ 3₁ 2 3₂ 3₁ 3₃ 2 3₃ 3₁ 3₂ 2 3₃ 3₂ 3₁ 2

จะໄດ້ຕິດ 24 ວິທີ ດ້າວກເຮັດນ *subscript* ອອກຈາກ 3_1 , 3_2 ແລະ 3_3
ຈະເຫັນວ່າ ກາຮັກສໍາຄັນຂອງ

$2 \ 3_1 \ 3_2 \ 3_3$ $2 \ 3_1 \ 3_3 \ 3_2$, $2 \ 3_2 \ 3_3 \ 3_1$ $2 \ 3_3 \ 3_1 \ 3_2$
 $2 \ 3_3 \ 3_1 \ 3_2$ ແລະ $2 \ 3_3 \ 3_2 \ 3_1$ ຈະໄມ້ແທກກາງກັນເລືຍ ຂຶ້ງຈະເສື່ອເປັນລໍາຄັນເຖິງກີ່ອ
 $2 \ 3 \ 3 \ 3$ ເຊັ່ນເຖິງກັນ ກາຮັກສໍາຄັນຂອງ $3_1 \ 2 \ 3_2 \ 3_3$ $3_1 \ 2 \ 3_3 \ 3_2$ $3_2 \ 2 \ 3_1 \ 3_3$
 $3_2 \ 2 \ 3_3 \ 3_1$ $3_3 \ 2 \ 3_1 \ 3_2$ $3_3 \ 2 \ 3_2 \ 3_1$ ກີ່ອ $3 \ 2 \ 3 \ 3$ ເປັນກັນ ຕັ້ງນັ້ນ ຈະເຫັນວ່າ
ດ້າວກເຮັດນ *subscript* ອອກຈາກ 3_1 , 3_2 ແລະ 3_3 ແລ້ວ ຈໍານວນກາຮັກສໍາຄັນຈະອຸປະກອງ
ຈາກ 24 ສໍາຄັນ ແລ້ວເພີ່ມ 4 ສໍາຄັນ ໜ້ານັ້ນ ທີ່ແທກກາງກັນ

ຕັ້ງນັ້ນ ກາຮັກສໍາຄັນເຫຼັກນີ້ ກີ່ເໝືອນກັນກາຮັກສໍາຄັນຂອງລົ່ງຂອງທີ່ມີ 2 ກຸ່ມ ສຶກຊຸມ
ຂອງໜາຍເລື່ອ 2 ຂຶ້ງມີ 1 ກົວ ແລະກຸ່ມຂອງໜາຍເລື່ອ 3 ຂຶ້ງມີອູ້ 3 ກົວ ຂຶ້ງເຮົາສາມາດນໍາມາ
ຮັກສໍາຄັນໄກ້ເຫັກນີ້ 11×31 ສໍາຄັນ

ແທກ້າເຮົາມາທີ່ຈາກກາຮັກສໍາຄັນໂຄຍດືອເສົມອນວ່າກົວເລື່ອທັງ 4 ກົວນີ້ແທກກ່າວງກັນນັກ
ເຮົາຈະຈັກໄກ້ເຫັກນີ້ $41 = 24$ ສໍາຄັນ ໃນເນື່ອກາຮັກສໍາຄັນຂອງໜາຍເລື່ອທັງ 4 ກົວ
ເຮົາສາມາດຈັກໄກ້ເຫັກນີ້ 4 ສໍາຄັນ ຕັ້ງນັ້ນເນື່ອກໍາໜາວ່າແທ່ລະໜາຍເລື່ອແທກກ່າວງກັນແລ້ວ
ສາມາດນໍາແທ່ລະສໍາຄັນມາຈັກໄກ້ເຫັກນີ້ 11×31 ສໍາຄັນ

ເຮົາຈຶ່ງກ່າວໄກ້ວ່າ

ຈໍານວນສໍາຄັນຂອງໜາຍເລື່ອ 4 ກົວທີ່ແທກກ່າວງກັນ $= 4 \times 11 \times 31 = 24$ ສໍາຄັນ
ຂຶ້ງຕຽບກັນທີ່ໄກ້ກ່າວນວ່າໄກ້ກີ່ອ 41

$$\therefore \text{ຈໍານວນສໍາຄັນຂອງໜາຍເລື່ອ 2, 3, 3, 3 = \frac{41}{11 \times 31} = 4 \quad \text{ສໍາຄັນ}$$

ທຸກໆ ມີອອງອູ້ ແລ້ວ ຂຶ້ງແບ່ງອອກເປັນລອງພວກ ແກ່ລະພວກນີ້ສັກຍະແໜ້ອນກັນທຸກປະກາດ
ພວກແຮກນີ້ຈໍານວນ n_1 ສິ່ງ ແລະພວກທີ່ສອງນີ້ຈໍານວນ n_2 ສິ່ງ ($n_1 + n_2 = n$)
ດ້າເອຂອງ $\frac{n!}{n_1! \ n_2!}$ ລົ່ງນີ້ມາຮັກສໍາຄັນ ຈະມີຫັນຫາງຈັກໄກ້ ໜ້າກັນ $\frac{n!}{n_1! \ n_2!}$ ສໍາຄັນ

ກີ່ສຸດໃນ

ນໍາສໍາຄັນໄກ້ສໍາຄັນນີ້ໃນນຽກສໍາຄັນທີ່ເປັນໄປໄກ້ ມາພິຈາລະນາກາຮັກສໍາຄັນເສີຍໃໝ່

โดยการนับในพวกรากเป็น n_1 สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกัน และพวกรากที่สอง เป็น n_2 สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกัน

การจัดลำดับพวกรากที่มีลักษณะแตกต่างกัน n_1 สิ่งจะจัดให้ $n_1!$ หนทาง ในแต่ละหนทางที่จัดพวกรากไปแล้ว มาจัดลำดับพวกรากที่สองที่มีลักษณะแตกต่างกัน n_2 สิ่ง จะมีทางจัดให้เท่ากับ $n_2!$ หนทาง

ในที่สิ่งลำดับของสิ่งที่มีลักษณะเหมือนกัน นำมารักเป็นลำดับของสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกันให้ เท่ากับ $n_1! \times n_2!$ หนทาง ถ้าในจำนวนการจัดลำดับของสิ่งของที่เหมือนกันของสองพวกรากนี้ $= x$ ลักษณะ

\therefore จำนวนลำดับของสิ่งของที่ลักษณะแตกต่างกัน $= x \times n_1! \times n_2!$ ลักษณะ
มากจำนวนลำดับของสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน $= n!$ ลักษณะ

$$\therefore x \times n_1! \times n_2! = n!$$

$$\text{กัณณ์ } x = \frac{n!}{n_1! \times n_2!}$$

นั่นคือ จำนวนลำดับของสิ่งของ n สิ่งที่ແມ່ນສອງພວກຕາມลักษณะที่เหมือนกัน เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2!} \text{ ลักษณะ}$$

ข. ก. พ.

สำหรับลัญญาลักษณะที่เราใช้แทนการจัดลำดับของสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งแบ่งเป็น 2 พวกรากและพวกรากที่มีลักษณะเหมือนกัน และมีจำนวน n_1 และ n_2 ตามลำดับนั้น เราใช้ ${}^n P_{(n_1, n_2)}$

$$\therefore {}^n P_{(n_1, n_2)} = \frac{n!}{n_1! \times n_2!}$$

บทแทรก

เมื่อของอยู่ n สิ่ง ซึ่งแบ่งออกเป็น k ช่วงพวกราก ($k \geq 2$) แยกละพวกรากที่มีลักษณะเหมือนกัน และมีจำนวน $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ ตามลำดับ ($n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$)
น้ำของ n สิ่งนี้มาจัดลำดับ จะมีหนทางจัดให้เท่ากับ

$${}^n P_{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

ทวิภาคที่ 1 เข้ามาร์คในคำ "ASSESS" มาร์คลักษณะนี้มีหนทางซักไก้กี่แบบ

$$\text{จากโจทย์ } n = 6, n_1 = 1, n_2 = 4, n_3 = 1$$

$$\therefore \text{จำนวนลักษณะที่ซักไก้ } = \frac{6!}{1! \times 4! \times 1!} = 6 \times 5 = 30 \text{ หนทาง}$$

ตอบ

ทวิภาคที่ 2

หากต้องการเรียงลักษณะอักษร **aaaa bb cccc d** ดังน้ำด้านวนหนทางที่จะเรียงลักษณะให้

$$\text{จากโจทย์ } n = 10, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = 1$$

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะเรียงลักษณะให้ } = {}^{10}P_{(3,2,4,1)} \text{ หนทาง}$$

$$= \frac{10!}{3! 2! 4! 1!} \text{ หนทาง}$$

$$= 12,600 \text{ หนทาง}$$

ทวิภาคที่ 3 กล่องใบหนึ่งบรรจุถุงมือที่มีชนาคเท่ากัน แก้วทั้งหมด 12 ถุง นำถุงมือเหล่านี้มาจัดเรียงลักษณะเป็นแบบ

ก) ถ้าถุงมือเป็นสีดำ 5 ถุง และสีแดง 7 ถุง จะจัดเรียงลักษณะให้เท่าไหร่

ข) ถ้าถุงมือเป็นสีดำ 5 ถุง สีน้ำเงิน 3 ถุง สีแดง 2 ถุง และสีขาว 2 ถุง จะจัดเรียงลักษณะให้เท่าไหร่

$$\text{ก) จากโจทย์ } n = 12, n_1 = 5, n_2 = 7$$

$$\therefore \text{จะจัดเรียงลักษณะให้ } = \frac{12!}{5! 7!} \text{ ลักษณะ}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \text{ ลักษณะ}$$

$$= 11 \times 9 \times 8 = 792 \text{ ลักษณะ}$$

ตอบ

ช) จากโจทย์ $n = 12, n_1 = 5, n_2 = 3, n_3 = 2, n_4 = 2$

$$\therefore \text{จำนวนที่จะเลือก} = \frac{12!}{5! 3! 2! 2!} \quad \text{ลักษณะ} \\ = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 7 \times 2 \quad \text{ลักษณะ} \\ = 166,320 \quad \text{ลักษณะ}$$

ตอบ

ท้าว่างที่ 4 มีอักษร aab bba ccc d ต้องการนำมาระเบียงลักษณะ จะมีจำนวนหนทาง
ที่จะนำมาเรียงลักษณะเท่าไหร่

จากโจทย์ $n = 9, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 1$
 \therefore จำนวนหนทางที่จะเลือก

$$= {}^9P(3, 2, 3, 1) \quad \text{หนทาง} \\ = \frac{9!}{3! 2! 3! 1!} \quad \text{หนทาง} \\ = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{x \times 3 \times 1} \quad \text{หนทาง} \\ = 5,040 \quad \text{หนทาง}$$

การจัดกลุ่ม (Combination)

นิยาม การจัดกลุ่ม หมายถึง การนำสิ่งของที่มีลักษณะเดียวกันทั้งหมดหรือเพียงบางส่วน
มาจัดกลุ่ม โดยไม่คำนึงถึงลักษณะการเลือกก่อนหรือหลัง แต่จะแบบที่เลือกได้ เราเรียกว่า
" หนึ่งกลุ่ม " เช่น มีลูกบล็อก 5 ลูก ซึ่งมีหมายเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 กำกับไว้

กองการน่าอุบัติของเหล่าน้ำจักกลุ่มที่ละ 2 ลูก อาจจะจัดไว้หลาย ๆ แบบ ดังนี้

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| (1 2) | (1 3) | (1 4) | (1 5) |
| (2 3) | (2 4) | (2 5) | (3 4) |
| (3 5) | (4 5) | | |

จำนวนหนึ่งที่จัดไว้ในแบบทั่ว ๆ กันมีอยู่ 10 แบบ

ซึ่งถ้าเราจะเปรียบเทียบ การจัดกลุ่มของอุบัติของ 10 ลูก โดยนำมาน้ำจักกลุ่มครึ่งละ 2 ลูก กับการเรียงลำดับของอุบัติของ 10 ลูก โดยนำมาระเบียงลำดับกราวละ 2 ลูก จะเห็นว่า เราสามารถจัดเรียงได้ $5!$ ลำดับ และในแต่ละแบบของการจัดกลุ่ม เราสามารถจัดเรียงลำดับให้ถึง $2! = 2$ ลำดับ เช่น ในหนึ่งกลุ่มของการจัดหมู่ คือ (1 2) นำมาน้ำจักลำดับให้ $2! = 2$ ลำดับ ดังนี้

- | | |
|-------|-------|
| (1 2) | (2 1) |
|-------|-------|

กลุ่มอื่น ๆ ก็เช่นเดียวกัน แสดงว่า ในแท่ละกลุ่มนี้อย่างหนึ่งของการจัดกลุ่มอุบัติของ 2 ลูก จากอุบัติของ 5 ลูก ก็คือ $2!$ หรือ 2 ลำดับ ซึ่งก็หมายความว่าการจัดลำดับอุบัติของ 2 ลูก นั้นเอง

ดังนั้นจะเห็นว่า

$$2! \times \text{จำนวนกลุ่มของการจัดกลุ่ม} = \text{จำนวนลำดับของการจัดลำดับ}$$

หดหู่วิธีการจัดหมู่

หากมีลิ่งของอยู่ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกัน นำมาจัดกลุ่มที่มีจำนวน r สิ่ง จำนวนหนทางที่จะจัดให้จะเท่ากับ $\frac{n!}{(n - r)! r!}$ ซึ่งเรามักแทนจำนวนนี้ว่าสัญลักษณ์ ${}^n C_r = \frac{n!}{(n - r)! r!}$ หรือบางครั้งอาจใช้สัญลักษณ์ $(\frac{n}{r})$ และ $\frac{n!}{(n - r)! r!}$

ตัวอย่าง

เนื่องจากในแท่ละกลุ่มของการจัดกลุ่มลิ่งของ r สิ่ง เสือกจากลิ่งของ n สิ่ง สามารถจัดเป็นลำดับให้ $r!$ ลำดับ ดังนั้นจะได้ว่า

จำนวนแบบในการจัดลำกิม = $r!$ \times จำนวนกุ่มของการจัดกุ่ม

\therefore การจัดลำกิมของ r สิ่ง เลือกมาจากสิ่งของ n สิ่ง ที่แยกทางกัน

$$\text{เท่ากับ } {}^n P_r = \frac{n!}{(n - r)!} \quad \text{ลำกิม}$$

$$\therefore r! \times \text{จำนวนกุ่มของการจัดกุ่ม} = \frac{n!}{(n - r)!}$$

$$\therefore \text{จำนวนกุ่มของการจัดกุ่ม} = \frac{n!}{(n - r)! \times r!}$$

นั่นคือ เราได้ว่า

$${}^n C_r = \frac{n!}{(n - r)! \cdot r!}$$

ค. ก. ก.

ทัวอย่างที่ 1 มีคนอยู่ 4 คน คือ นาย ก นาย ช นาย ท และนาย อ ห้องการจะสร้าง
ทีมเล่นเทนนิส ซึ่งมีทีมละ 2 คน จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกทีมเทนนิส

จากโจทย์ $n = 4$, $r = 2$

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะเลือกทีมໄດ້} = {}^4 C_2 = \frac{4!}{2! 2!} \quad \text{หนทาง}$$

$$= 6 \quad \text{หนทาง}$$

ตอบ

ซึ่งทีมทั้ง ๗ เรียงໄກ็คังนี้คือ

นาย ก	กูกิม	นาย ช
นาย ช	กูกิม	นาย ก
นาย ก	กูกิม	นาย อ
นาย ช	กูกิม	นาย ท
นาย ช	กูกิม	นาย อ
นาย ท	กูกิม	นาย อ

ทวีปัจจัยที่ 2 ในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง มีทัวแทนของหมู่บ้านอยู่ 10 คน ต้องการพบนายอ่าเภอ เพื่อเรียกร้องสิ่งที่ประชาชนในหมู่บ้านของตนต้องการ แทนนายอ่าเภออนุญาตให้เข้าพบเพียง 3 คน อย่างหนาแน่นว่า ทัวแทนหมู่บ้านทั้ง 10 คนนั้น จะต้องเสือก ทัวแทน 3 คน เข้าพบ นายอ่าเภอได้กี่วิธี

$$\text{จากโจทย์ } n = 10, r = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จะสามารถตัดเสือกทัวแทนได้ } &= {}^{10}C_3 \quad \text{วิธี} \\ &= \frac{10!}{(10 - 3)!3!} \quad \text{วิธี} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{8 \times 2} \quad \text{วิธี} \\ &= 10 \times 3 \times 4 = 120 \quad \text{วิธี} \end{aligned}$$

ทวีปัจจัยที่ 3 ห้ายิ่งไฟ 5 ในจากไฟหนึ่งสาร์บ จะมีจำนวนหนทางที่จะห้ายิ่งไฟ เท่าใด

จากโจทย์ ไฟหนึ่งสาร์บ มี 52 ใบ

$$n = 52, r = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{จำนวนหนทางที่จะห้ายิ่งไฟ } &= {}^{52}C_5 \quad \text{หนทาง} \\ &= \frac{52!}{(52 - 5)!5!} \quad \text{หนทาง} \\ &= \frac{52!}{47! \cdot 5!} \quad \text{หนทาง} \\ &= \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \quad \text{หนทาง} \\ &= 52 \times 51 \times 49 \times 10 \times 2 \quad \text{หนทาง} \\ &= 2,598,960 \quad \text{หนทาง} \end{aligned}$$

ตอบ

จากหน่วยของการจัดหมุนของสิ่งของ r สิ่ง เสือกมาจากการสิ่งของ n สิ่ง ที่แทรกทั่วไปนั้น เราให้ $\frac{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ ซึ่งมีค่าเท่ากันจำนวนแบบหรือลำดับของการจัดลำดับ สิ่งของ n สิ่ง นี้แบ่งออกเป็นสองพวกตามลักษณะที่เหมือนกัน คือ พากแกรกมีจำนวนเท่ากัน r สิ่ง และพากที่สองมีจำนวนเท่ากัน $(n-r)$ สิ่ง จะแทรกทั่วไปนั้นทว่า ในการจัดหมุนของห้อง n สิ่ง มีลักษณะแทรกทั่วไปนั้นมาก และเราสามารถกลุ่มครั้งละ r สิ่งเท่านั้น แทรกในการจัดลำดับ สิ่งของห้อง n สิ่งนั้น ในไกแทรกทั่วไปนั้น นับทางสิ่งที่เหมือนกัน โดยจัดพากที่เหมือนกันเข้าไว้ด้วยกัน เป็นสองพวก คือพากแกรกมีจำนวนที่เหมือนกันเท่ากัน r สิ่ง และพากที่สองมีจำนวนที่เหมือนกันเท่ากัน $(n-r)$ สิ่ง นอกจากนี้ ในการจัดกลุ่ม ก็ไม่ค่านึงถึงลำดับที่ว่าของสิ่งในจะมาก่อนหรือมาหลัง แทรกในการจัดลำดับ ค่านึงถึงลำดับของ แหล่งพากความ

การจัดหมุนกรณีที่สิ่งของ n สิ่ง แยกได้เป็นหลาย ๆ ประเภท

ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง สามารถแบ่งออกได้เป็น k ประเภท แต่ละประเภทมีสิ่งของ ที่แทรกทั่วไปนั้น และมีจำนวนเท่ากัน $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ การลากด้วย ถ้าเลือกของ มาจากแต่ละประเภทเป็นจำนวนเท่ากัน $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ การลากด้วย โดยที่ $r = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k$ มาจัดเป็นกลุ่ม เช่น มีกลุ่ม 5 กลุ่ม เป็นสีขาว 3 กลุ่ม เป็นสีดำ 2 กลุ่ม ถ้าให้สีขาว 3 กลุ่มนั้น เป็น W_1, W_2 และ W_3 และสีดำ 2 กลุ่มนั้น เป็น B_1 และ B_2 ถ้าจะหยิบกลุ่มละ 3 กลุ่ม มาจัดหมุน โดยให้มีสีขาว 2 กลุ่ม และสีดำ 1 กลุ่ม จะมีวิธีการจัดหมุนอย่างไร

ในที่นี้ $n = 5$ แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ กลุ่มอลล์สีขาว และกลุ่มอลล์สีดำ $n_1=3, n_2 = 2$ ต้องการนำกลุ่มอลล์มาจัดหมุนราวกับ 3 กลุ่ม โดยให้มีกลุ่มอลล์สีขาว 2 กลุ่ม และกลุ่มอลล์สีดำ 1 กลุ่ม $r_1 = 2, r_2 = 1$
เราสามารถจัดกลุ่มได้ดังนี้

$$\begin{array}{cccc} W_1 W_2 B_1 & W_1 W_2 B_2 & W_1 W_3 B_1 & W_1 W_3 B_2 \\ W_2 W_3 B_1 & W_2 W_3 B_2 \end{array}$$

จำนวนหมู่ที่จัดให้ เท่ากับ 6 วิธี ซึ่งเปรียบเสมือนว่า เราแบ่งการจัดหมู่เป็นสองพวก คือ พากลุ่มผลลัพธ์สีขาว (A) และพากลุ่มผลลัพธ์สีดำ (B)

การจัดหมู่พากลุ่มผลลัพธ์สีขาว (A) 2 ถูก จากกลุ่มผลลัพธ์สีขาวทั้งหมด 3 ถูก สามารถจัดให้เท่ากับ 3C_2 วิธี และในแต่ละวิธีที่จัดกลุ่มผลลัพธ์สีขาวไปแล้ว สามารถจัดกลุ่มผลลัพธ์สีดำ (B) 1 ถูก จากกลุ่มผลลัพธ์สีดำ 2 ถูก ให้เท่ากับ 2C_1 วิธี

$$\therefore \text{จำนวนวิธีการจัดหมู่} = {}^3C_2 \times {}^2C_1 \quad \text{วิธี}$$

$$= \frac{3!}{(3-2)!2!} \times \frac{2!}{(2-1)!1!} \quad \text{วิธี}$$

$$= 3 \times 2 = 6 \quad \text{วิธี}$$

หรืออีกทั้งอย่าง ถ้าเราไม่มีกลุ่มผลลัพธ์ 6 ถูก มีสีขาว 2 ถูก สีดำ 2 ถูก และสีแดง 2 ถูก หยินดูกลุ่มผลลัพธ์มา 3 ถูก มาจัดเป็นหมู่ โดยในมีกลุ่มผลลัพธ์สีขาว 1 ถูก สีดำ 1 ถูก และสีแดง 1 ถูก จะมีวิธีการจัดหมู่อย่างไร

ถ้าให้ W_1, W_2 แทนกลุ่มผลลัพธ์สีขาว 2 ถูก

B_1, B_2 แทนกลุ่มผลลัพธ์สีดำ 2 ถูก

R_1, R_2 แทนกลุ่มผลลัพธ์สีแดง 2 ถูก

จะสามารถจัดหมู่ได้ดังนี้ (ในที่นี่ $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $r_1 = 1$, $r_3 = 1$)

$W_1 B_1 R_1 \quad W_1 B_1 R_2 \quad W_1 B_2 R_1 \quad W_1 B_2 R_2$

$W_2 B_1 R_1 \quad W_2 B_1 R_2 \quad W_2 B_2 R_1 \quad W_2 B_2 R_2$

จำนวนหมู่ที่จัดให้จะเท่ากับ 8 หมู่ คือ กัน ซึ่งเปรียบเสมือนว่า เราแยกการจัดหมู่ของ แต่ละพากตามจำนวนที่กำหนดไว้ และจะจัดพากในก่อนหรือหลังก็ได้ ในที่นี่จะเริ่มจัด พากกลุ่มผลลัพธ์สีขาวก่อน ซึ่งจัดให้เท่ากับ 2C_1 วิธี และในแต่ละหนทางที่จัดกลุ่มผลลัพธ์สีขาว ไปแล้ว สามารถจัดพากกลุ่มผลลัพธ์สีดำให้เท่ากับ 2C_1 วิธี และในแต่ละหนทางที่ได้จัด กลุ่มผลลัพธ์สีขาว และสีดำไปแล้ว สามารถจัดกลุ่มผลลัพธ์สีแดงให้อีก 2C_1 วิธี ดังนั้น

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะจัดหมู่กลุ่มผลลัพธ์ } 5 \text{ ถูก} = {}^2C_1 \times {}^2C_1 \times {}^2C_1 \quad \text{วิธี}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \text{วิธี}$$

หกหก (การจัดหมู่ในกรณีที่สิ่งของ n สิ่ง แบ่งให้เป็น 2 ประเภท)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง ซึ่งแบ่งให้เป็น 2 ประเภท แต่ละประเภทมีสิ่งของที่แยกต่างกัน และมีจำนวนเท่ากับ n_1, n_2 ตามลำดับ เสือกของมา r สิ่ง ให้เป็นประเภทที่หนึ่ง r_1 สิ่ง และประเภทที่สอง r_2 สิ่ง มาจัดเป็นหมู่ จำนวนหมู่ที่จะจัดให้จะเท่ากับ

$$n_1 c_{r_1} \times n_2 c_{r_2} \quad \text{หรือ} \quad \left(\frac{n_1}{r_1} \right) \left(\frac{n_2}{r_2} \right)$$

หกสูบ

เราเบริญเที่ยนการจัดหมู่ เมื่อมันมีการกระทำที่แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นแรก เสือกของมา r_1 สิ่ง จากสิ่งของที่แยกต่างกัน n_1 สิ่ง มาจัดเป็นหมู่

$$\therefore \text{จำนวนหมู่ที่จัดได้} = n_1 c_{r_1} \quad \text{หนทาง}$$

ในแต่ละหนทางที่ทำขั้นแรกแล้ว เสือกทำในขั้นที่สองให้อีก ดังนี้

ขั้นที่สอง เสือกของ r_2 สิ่ง จากสิ่งของที่มีลักษณะแยกต่างกัน n_2 สิ่ง มาจัดเป็นหมู่

$$\therefore \text{จำนวนหมู่ที่จัดได้} = n_2 c_{r_2} \quad \text{หนทาง}$$

$$\therefore \text{จำนวนหมู่ที่จะจัดของสองประเภทนี้} = n_1 c_{r_1} \times n_2 c_{r_2} \quad \text{หนทาง}$$

$$\text{หรือ} = \left(\frac{n_1}{r_1} \right) \times \left(\frac{n_2}{r_2} \right) \quad \text{หนทาง}$$

ข. ก. ก.

บทที่หก

ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง ซึ่งแบ่งออกได้เป็น k ประเภท แต่ละประเภทมีขนาด n_1, n_2, \dots, n_k ตามลำดับ และมีลักษณะแยกต่างกัน ถ้าเสือกของมา r สิ่ง จากของ แต่ละประเภท เท่ากับ r_1, r_2, \dots, r_k ตามลำดับ โดยที่ $r = r_1 + r_2 + \dots + r_k$ มาจัดเป็นหมู่ จำนวนหนทางที่จะจัดหมู่ให้จะเท่ากับ

$$n_1 c_{r_1} \times n_2 c_{r_2} \times \dots \times n_k c_{r_k} \quad \text{หรือ}$$

$$\left(\frac{n_1}{r_1} \right) \cdot \left(\frac{n_2}{r_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n_k}{r_k} \right)$$

ทัวอย่างที่ 1 ในสำนักงานหนึ่งมีพนักงานประจำสำนักงานเป็นชาย 6 คน และหญิง 3 คน ท้องการเลือกพนักงานเหล่านี้มา 3 คน โดย

ก) ให้เป็นชาย 2 คน และหญิง 1 คน

ข) ให้เป็นชาย 1 คน และหญิง 2 คน

จะมีหนทางเลือกไก่กี่หนทาง

$$\text{ก) จากโจทย์ } n = 9, n_1 = 6, n_2 = 3$$

$$\text{และ } r = 3, r_1 = 2, r_2 = 1$$

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะเลือกไก่ } = {}^6C_2 \times {}^3C_1 \quad \text{หนทาง}$$

$$= \frac{6}{(6-2)12!} \times \frac{3}{(3-1)1!} \quad \text{หนทาง}$$

$$= \frac{6 \times 5}{2} \times 3 = 3 \times 5 \times 3 \quad \text{หนทาง}$$

$$= 45 \quad \text{หนทาง}$$

$$\text{ข) } n = 9, n_1 = 6, n_2 = 3$$

$$\text{และ } r = 3, r_1 = 1, r_2 = 2$$

$$\therefore \text{จำนวนหนทางที่จะเลือกไก่ } = {}^6C_1 \times {}^3C_2 \quad \text{หนทาง}$$

$$= \frac{6!}{(6-1)1!} \times \frac{3!}{(3-2)1!} \quad \text{หนทาง}$$

$$= 6 \times 3 = 18 \quad \text{หนทาง}$$

ทัวอย่างที่ 2 หยิบไป 5 ในจากไปหนึ่งสำรับ ให้มีไป 2 ใน โภคเงา 1 ใน ข้าวหลามตัด 1 ใน และถอกจิก 1 ใน จะมีหนทางที่จะหยิบไก่เท่าไก

ในที่นี่ ให้หนึ่งสำรับมีเท่ากับ 52 ใน แบ่งเป็น 4 ชุด หรือ ชุดของโภคเงา ชุดของข้าวหลามตัด และชุดของถอกจิก แต่ละชุดจะมีไปอยู่ 13 ใน

$n = 52$	n_1	(ໄປກ່າ)	=	13
	n_2	(ໄປແກງ)	=	13
	n_3	(ຂ້າວຄາມກັກ)	=	13
	n_4	(ກອກຈິກ)	=	13
ແຕະ	$r = 5$	r_1	(ໄປກ່າ)	= 1
		r_2	(ໄປແກງ)	= 1
		r_3	(ຂ້າວຄາມກັກ)	= 1
		r_4	(ກອກຈິກ)	= 1

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{จำนวนหนทางที่จะหยิบໄກ} &= {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \times {}^{13}C_1 \quad \text{หนทาง} \\
 &= \frac{13!}{11! 2!} \times \frac{13!}{12! \times 1!} \times \frac{13!}{12! \times 1!} \times \frac{13!}{12! \times 1!} \quad \text{หนทาง} \\
 &= \frac{13 \times 12}{2} \times 13 \times 13 \times 13 \quad \text{หนทาง} \\
 &= 13 \times 6 \times 13 \times 13 \times 13 \quad \text{หนทาง} \\
 &= 171,366 \quad \text{หนทาง}
 \end{aligned}$$

ตอบ

ຫົວຍ່າງທີ 3 ເລື່ອກ້າເລົ້າໃນເລີ່ມຈຳນວນໜຶ່ງ ສຶບ " 359 335 3593 " ນາຮັກເນື້ນໝູ້
ຄຣາວະ 4 ຕົວ ໂກຍໃຫ້ເປັນຫົວເລົ້າເຖິງກັນ 3 ຕົວ ທີ່ແລື້ອເປັນຫົວເລົ້າຢືນ ຈະນີ້ໜາທາງ
ໄກກີ່ແນບ

ກລຸ່ມຫົວເລົ້າທີ່ເນື້ນກັນທັງ 3 ຕົວ ສຶບ ເລີ່ມ 3 ກົມເລົ້າ 5 ແລະ ໃຫ້ເປັນ n_1 $n_1 = 2$

$$\begin{aligned}
 n_2 &= 2, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 1 \\
 \therefore \text{จำนวนໝູ້ທີ່ຈະຮັກໄກ} &= {}^2C_1 \times {}^2C_1 \quad \text{หนทาง}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2!}{(2-1)! \cdot 1!} \times \frac{2!}{(2-1)! \cdot 1!} \quad \text{หนทาง}$$

$$= 2 \times 2 = 4 \quad \text{หนทาง}$$

ช่องเรียนແສກໄກ້ ກົງນີ້ເກີອ

3339 3335 5559 5553

ກອບ

ຕົວຢ່າງທີ 4 ເລືອກອັກຊາຮອດຄມາ 3 ຕົວ ຈາກຄໍາວ່າ "STATISTICS" ມາຈັກເປັນໜຸ້ມ
ໂຄຍໃໝ່ອັກຊາເໝືອນກັນໜຶ່ງຄູ່ ຈະນີ້ໜ້າງຈັກໄກ້ໜ້າງ

ໃນການຈັກໜຸ້ອັກຊາ 3 ຕົວ ໂຄຍໃໝ່ອັກຊາເໝືອນກັນໜຶ່ງຄູ້ນັ້ນ ເປົ້າຍນເສີມອາກາະຈັກໜຸ້ມ
ຂອງລົງຂອງ 2 ປະເທດ ສື່ອ ປະເທດແກຣມີ 3 ລົ່ງ ໃຫ້ = n_1 ສື່ອ S, T ແລະ I
ເລືອກມາ 1 ລົ່ງ ໃຫ້ = x_1 (ຈັກເປັນຄູ່) ປະເທດທີ່ສອງນີ້ 4 ລົ່ງ ໃຫ້ = n_2 ສື່ອ
 A, I, C, S ແລະ/ຫຼືອ T ເລືອກມາ 4 ລົ່ງ ໃຫ້ = x_2 (ຈັກເປັນກຳທີ 3)

$$\therefore \text{ຈຳນວນໜ້າງທີ່ຈະຈັກໄກ້} = {}^3C_1 \times {}^4C_1 \quad \text{ໜ້າງ}$$

$$= \frac{3!}{(3-1)!1!} \times \frac{4!}{(4-1)!1!} \quad \text{ໜ້າງ}$$

$$= 3 \times 4 = 12 \quad \text{ໜ້າງ}$$

ເຮືອນແສກໄກ້ກົງນີ້ເກີອ

SSA	SSI	SSC	SST
TTA	TTI	TTC	TTS
IIA	IIC	IIS	IIT

แบบฝึกหัด

1. มีเลขโถกอยู่ 3 ตัว ที่อ 1, 2 และ 3 และตัวอักษร อ, บ, ค เอาเลขและตัวอักษร เนื่องนี้มาสร้างรหัส โดยให้ขึ้นทันท้ายตัวเลขแล้วตามตัวย่อตัวอักษร จะสร้างໄก็ตัวนำ
2. ชายผู้หนึ่งท้องการเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปยังสวรรค์โลก ถ้าการเดินทางมีสองชั้นตอน กือ เดินทางโดยทางรถไฟ แล้วก่อค้ายารถยนต์ ถ้าในวันหนึ่ง ๆ มีรถไฟวิ่ง 3 ชั่วโมง จากรถกรุงเทพฯ ถึงพิษณุโลก เป็นการเดินทางไปถึงพิษณุโลกท่องเที่ยวรถยนต์ ชั่วโมง 2 ประเภท กือ รถแท็กซี่ กับรถเมล์ เขาจะเดินทางໄก็ตัวนำ
3. โดยเหตุใด 10 ครั้ง จะมีหนทางเกิดขึ้นໄก็ตัวนำ
4. โดยฉุกเฉียว 6 ครั้ง จะมีหนทางเกิดขึ้นໄก็ตัวนำ
5. ในการผลิตอาหารสำเร็จรูปชนิดหนึ่ง มีขั้นตอนในการผลิต 3 ชั้นตอน กือขั้นแรก เป็นการประกอบส่วนผสม ขั้นที่สอง เป็นการหุงกุ้ม และขั้นที่สาม เป็นการบรรจุภัณฑ์ ถ้าโรงงานแห่งนี้มีเครื่องจักร ที่ใช้ในการประกอบส่วนผสมอยู่ 6 เครื่อง ใช้ในการหุงกุ้มอยู่ 5 เครื่อง และใช้ในการบรรจุภัณฑ์อยู่ 3 เครื่อง อยากรู้ว่า ในการผลิตแต่ละครั้ง จะต้องใช้เครื่องจักรต่าง ๆ ทำงานໄก็ตัวนำ
6. นายแสงชัย ห้องเดินทางจากบ้านชั่งอยู่บังขบูรีมาลงที่สนามหลวง เพื่อเดินทางท่องไปบังมหาวิทยาลัยรามคำแหง ถ้าบ้านชั่งของเขามาบังสนามหลวง มีรถเมล์สาย 2, 3 และ 5 และจากสนามหลวงบ้านมหาวิทยาลัยรามคำแหง มีรถเมล์สาย 1, 12, 60 และ 58 จงหาวิธีการเดินทางจากบ้านชั่งของเขามาบังมหาวิทยาลัยรามคำแหง พร้อมทั้งใช้แผนภาพประกอบ
7. ในร้านอาหารแห่งหนึ่ง ลูกค้าแต่ละคนมีสิทธิ์จะเลือกรับประทานอาหารคาวໄก์ 1 ชนิด ใน 4 ชนิด กือ ข้าวราดแกง กวยเตี๋ยวลูกชิ้น กวยเตี๋ยวหมู ข้าวเจ็นน้ำยา และมีสิทธิ์เลือกขนมໄก์ 1 ชนิดใน 3 ชนิด กือ ขนมกล้วยยาวชี ข้าวเหนียวถั่วค้า สาหร่ายเผาห้อง และมีสิทธิ์เลือกเครื่องเคียงที่มีໄก์ 1 ชนิดใน 2 ชนิด กือ โอลีฟ ส้มหัน จงหาจำนวนรายการอาหารที่ลูกค้าจะเลือกໄก์

8. ถ้าท้องการเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B และจากจุด B เดินทางกลับไปยังจุด C และเป็นที่ทราบกันว่า จากจุด A ไปยังจุด B มีรถผ่านอยู่ 2 สาย หรือสาย 10 และสาย 15 และจากจุด B ไปยังจุด C มีรถผ่านอยู่ 3 สาย หรือสาย 20, สาย 25 และสาย 30 จงหาจำนวนหนทางทั้งหมดที่จะเดินทางโดยรถจากจุด A ไปยังจุด C (นั่งรถ 2 ท่อ)
9. ในการเดินทางระหว่างกรุงเทพฯ - แบกवัว นั้น มีรถประจำทางที่วิ่งติดกันอยู่ 3 สาย หรือสาย 1 สาย 2 และสาย 3 ถ้านายวิชิตต้องการเดินทางค้ายรรถประจำทาง กังกล่าวจากกรุงเทพฯ เพื่อไปเยี่ยมญาติที่อยู่แบกवัว และเมื่อเยี่ยมญาติเสร็จแล้ว ก็จะเดินทางกลับกรุงเทพฯ ค้ายรรถประจำทางเร่นเดิน
 - ก) อยากทราบว่า นายวิชิต สามารถเลือกรถเมล์ เพื่อเดินทางไปกลับได้กี่วิธี
 - ข) ถ้านายวิชิต ไม่เดินทางกลับค้ายรรถเมล์สายเดิม อยากทราบว่า นายวิชิต จะเลือกรถเมล์เพื่อเดินทางไปกลับได้กี่วิธี
10. นักศึกษาที่ลงทะเบียนวิชาปีที่หนึ่ง จะต้องลงทะเบียนเรียนวิชาบังคับ 3 วิชา คือ วิชา EN 101 ซึ่งมีอยู่ 4 section วิชา TH 101 ซึ่งมีอยู่ 3 section และ วิชา SO 103 ซึ่งมีอยู่ 5 section จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกเรียนวิชาบังคับ ทั้ง 3 วิชานี้
11. มีลูกบุณล้ออยู่ 10 ลูก เป็นล้อขาว 4 ลูก นอกจากเป็นล้อแคง โภนลูกเท่า 1 ลูก ถ้าไถ่แคม หมายเลข 1 หรือ 2 ให้หันยิบลูกบุณล้อล้อล้อสีขาว 1 ลูก แฟล์ก้าโภนแล้วไถ่ หมายเลขอื่น ๆ ให้หันยิบลูกบุณล้อล้อล้อสีแคงมา 1 ลูก จงคำนวณผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด พิร้อนหังเชียนภาคประกอบ
12. ในการทำรายงานวิชาสถิติ แยกกำลังของเป็นสองหมวด หมวดแรกมีปัญหาอยู่ 5 ข้อ ให้เลือกทำ 1 ข้อ หมวดที่สองมีปัญหาอยู่ 3 ข้อ ให้เลือกทำ 1 ข้อ เช่นเดียวกัน แก้มีเงื่อนไขว่า ถ้าทำปัญหาให้หมวดแรก ข้อ 1 หรือข้อ 2 หรือข้อ 3 ให้เลือกปัญหา ในหมวดที่สอง เชนหากข้อ 1 หรือข้อ 2 แก้ถ้าหมวดแรกทำข้อ 4 หรือข้อ 5 จะเลือกปัญหาในหมวดที่สองข้อใดก็ได้ จะมีวิธีทำรายงานไก่แบบ

13. ในการเขียนหมวดรายการสินค้า โดยใช้พยัญชนะเป็นตัวแรก ตามท้ายตัวเลขนี่ตัวถ้าพยัญชนะที่ใช้มี ก, ช, ก, ง และ อ ตัวเลขมี 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 การเขียนหมวดรายการสินค้า แบบเป็น 3 กลุ่ม ตั้งนี้ กลุ่มแรกใช้พยัญชนะ ก หรือ ช แล้วตามท้ายเลข 1 หรือ 2 หรือ 3 กลุ่มนี้สองใช้พยัญชนะ ก หรือ อ แล้วตามท้าย ตัวเลข 1 หรือ 3 หรือ 5 หรือ 7 ส่วนกลุ่มที่สามใช้พยัญชนะ อ ตามท้ายตัวเลข ตัวใดก็ได้ใน 7 ตัวนี้ จะมีทางเขียนหมวดรายการสินค้าໄก้กิ่รารายการ
14. เอาพยัญชนะ ก ช ก และ อ มาใช้ในการเรียนรหัส จะมีจำนวนรหัสเท่าไหร่ ถ้า
 ก. ใช้พยัญชนะหิ้ง 4 ตัว
 ข. ใช้พยัญชนะเพียง 2 ตัว
 ค. ใช้พยัญชนะ 1 ตัว, 2 ตัว, 3 ตัว หรือ 4 ตัว
15. ในปัญหาโจทย์ประเพณี ถูก - บิก ซึ่งมีอยู่ 10 ข้อ
 ก. จะมีหนทางก่อนปัญหานี้ໄก้กิ่นหนทาง
 ข. จำนวนหนทางที่จะก่อนว่าถูก ใน 3 ข้อแรก มิภัยหนทาง
 ค. จำนวนหนทางที่จะก่อน ถูก และ บิก สลับกันໄก้กิ่นหนทาง
16. มีเก็งชาย 5 คน และเก็งหญิง 5 คน หากจัดให้นั่งสลับกันเป็น隊 โดยให้เก็งชาย นั่งทั้ง隊เสมอ จะมีทางจัดໄก้กิ่นหนทาง และถ้าหากจัดให้เก็งชายนี่นั่งคิคกิมเก็งหญิงสี่ เสมอ จะมีหนทางจัดໄก้กิ่นหนทาง
17. เอาตัวเลข 1, 2, 3 และ 4 มาสร้างเลข 4 หลัก โดยแต่ละหลักจะต้องไม่มีตัวเลข ซ้ำกัน จะสร้างໄก้กิ่นจำนวน
18. นำอักษรมา 4 บัญชี หือ ก ช ก และ อ หากจะจัดลำดับกับนำอักษรตามความนิยม ของผู้บุกรุก จะจัดໄก้กิ่นแบบ และถ้าบัญชีหือ ช มีผู้นิยมสูงสุดจะจัดลำดับนำอักษรตามความนิยมของผู้บุกรุกໄก้กิ่นแบบ
19. ในการทำข้อสอบแบบจับคู่ มีคำถ้า และคำก่อนอย่างละ 20 ข้อ จะมีทางทำข้อสอบ ໄก้กิ่นหนทาง ถ้า

- ก. ในรูปค่าคอมพิวเตอร์ที่ให้มา
- ข. รูปค่าคอมพิวเตอร์ที่ให้มา 5 ชื่อ คือ ชื่อ 2, 3, 5, 7 และชื่อ 15
- ค. รูปค่าคอมพิวเตอร์ที่ให้มา 10 ชื่อ คือชื่อ 1 ถึงชื่อ 10
20. มีหัวเทียนรถยก 4 หัว ท่านจะสามารถจัดหัวเทียนเหล่านี้ได้ในที่สี่หัวเทียน
ในเสื้อสูบ 4 แห่ง ให้กี่วิธี
21. มีเลขอยู่ 4 ตัว คือ 9, 5, 3 และ 1 จะนำมารวบเป็นเลขหลัก 10 ให้กี่วิธี
22. มีเก้าอี้รับแขกอยู่ 7 ตัว และมีแขกมาเยี่ยมเยิน 7 คน จะจัดที่ให้แขกนั่งเก้าอี้
ที่มีอยู่ให้กี่วิธี
23. มีหนังสืออยู่ 3 เล่ม จะจัดหนังสือเข้าชั้นให้กี่วิธี
24. จงแก้สมการหาค่า n ของสมการท่อไปนี้
- ก. ${}^n P_5 = 20 \cdot {}^n P_3$
- ข. ${}^n P_2 = 72$
- ค. $2 \cdot {}^n P_2 + 50 = {}^{2n} P_2$
25. จงหาค่าของ ${}^4 P_1 + {}^4 P_2 + {}^4 P_3 + {}^4 P_4$
26. บริษัทสนใจ ให้จัดส่งรถยกที่รุนลาสุก ให้กับแทนป่ายชาญ 10 คน สีแดงกำกัน
ถ้ากัวแทนป่ายชาญมีห้องโถว์รถซึ่งจัดให้เที่ยง 6 ศัมภ์ เช่าจะจัดลำกับรถที่โถว์
ให้กี่แบบ
27. ผู้รับเหมา ก่อสร้าง ห้องการสร้างบ้าน 5 หลัง ในแบบทั่วไป กัน บนพื้นที่ 3 แปลง
ริมถนน และบันทึกน้ำอีก 2 แปลงริมถนนด้านตรงข้าม เช่าจะมีทางเดินให้กันทาง
28. นายชนิษ มีรายงานที่จะท้องท่า 5 ชั้น และเขามีช่วงเวลาที่จะใช้ทำงานนี้ 10 ช่วง
กัวยกัน เช่าจะใช้ช่วงเวลาเหล่านี้จัดโปรแกรมในการเชิญรายงานให้กันทาง
29. ในการแข่งขันเดินมาราธอนรอบสนามชุมปวงกลม มีผู้เข้าแข่งขัน 10 คน จะมีลำดับ
การเดินกันทาง

30. ในการทั้งค่ายพักแรมกลางป่า ให้จัดตั้งแคมป์เป็นรูปปางกอบ และจัดให้มีเวรยานโดยรอบ
 ก. ถ้าจัดให้มีเวรยานเพียง 8 คน จะมีจำนวนหนทางที่จะต้องให้เท่าไก่
 ข. ถ้าจัดให้มีเวรยานเพียง 5 คน เสือกมาจาก 8 คน จะมีจำนวนหนทางที่จะต้อง
 ให้เท่าไก่
31. ชาย 4 คน นั่งล้อมวงสนธนากัน คือ นาย ก, นาย ข, นาย ค และ นาย ง
 จะจัดที่นั่งให้คนหั้ง 4 ให้ก็วิธี และถ้าหากว่า นาย ก และ นาย ช จะต้องนั่งติดกันเสมอ
 จะจัดให้ก็วิธี
32. มีกองมะลิอยู่ 20 กอก ถุงละ 9 กอก อยากรู้ว่า จะนำมาร้อยเป็นมาลัย
 ล้วนๆ ให้ก็วิธี
33. มีลูกปั๊กอยู่ 7 ลูก จะนำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือก็วิธีค้าง ๆ กัน ให้ก็วิธี
34. ถ้านำอักษรของคำว่า " digit " มาจัดเรียงลำดับอักษรใหม่ จะจัดให้ก็วิธี
35. คำว่า " probability " ถ้านำมาเรียงกันเป็นคำใหม่ จะให้หันหมกก็ค่า
36. โยนลูกเต๋า 10 ครั้ง รู้ว่า
 ก) ออกหมายเลข 2 สักครั้ง หมายเลข 5 สามครั้ง และหมายเลข 6 สามครั้ง
 ข) ออกหมายเลข 1 สามครั้ง หมายเลข 3 สองครั้ง หมายเลข 4 หันครั้ง
 หมายเลข 5 สองครั้ง และ หมายเลข 6 สองครั้ง
 อยากรู้ว่าลักษณะการออกหมายเลขเหล่านี้จะมีกี่แบบ
37. มีอักษร A 2 ตัว และ B 2 ตัว นำอักษรเหล่านี้มาเรียงลำดับในแนวตรง จะมีหนทาง
 ที่จะเรียงลำดับให้เท่าไก่ และถ้าหากว่า ใน การเรียงลำดับทุกครั้ง ให้ขึ้นกันทวย
 อักษร A เสมอ จะจัดลำดับให้ก็ลำดับ
38. ข้อสอบวิชา ST 205 มีห้องน้ำ 15 ห้อง ในสี่ห้อง เสือกทำ 10 ห้อง จะมีทางเสือกทำให้กี่แบบ
39. เก้าหยิ่งแสงจันทร์ มีถุงเท้าอยู่ 3 ถุง เก็บไว้ในลิ้นชักเก็บไว้กัน ถ้าเก็บหยิ่งแสงจันทร์
 หิบถุงเท้าเพื่อใส่ไปโรงเรียน โดยไม่รู้ว่าซ้ายในถุงกันน้ำ จะมีทางเสือกให้กี่แบบ

40. กำหนดคุณ 10 ถูก บนเส้นร้อมวงของวงกลมวงหนึ่ง
 ก. จงหาจำนวนครอร์คที่เชื่อมระหว่างจุดเหล่านี้
 ข. จงหาจำนวนสามเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด
 ค. จงหาจำนวนรูปหกเหลี่ยมที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด
41. นักศึกษาวิชาเอกสถิติกันนั่ง ໄก้เลือกเรียนวิชาคอมพิวเตอร์เป็นวิชาโท โดยทางภาค
 กำหนดไว้ว่า จะต้องเรียนวิชาโท 18 หน่วยกิต หรือเท่ากับ 6 วิชานั่นเอง
 ก. ถ้ามีวิชาคอมพิวเตอร์เปิดสอน 13 วิชา จำนวนหนทางที่นักศึกษาคนนี้จะเลือก
 เรียนໄก้ จะเท่ากับเท่าไหร
 ข. ถ้ากำหนดค่าวัยที่เรียนวิชาคอมพิวเตอร์ ต้องเรียนวิชา CS 200 เป็นวิชาแรก
 แล้วเลือกที่เหลืออีก 5 วิชา จากวิชาคอมพิวเตอร์ที่เปิดสอน 12 วิชา
 จงหาจำนวนหนทางที่นักศึกษาคนนี้จะเลือกเรียนໄก้
42. สำนักงานแห่งหนึ่ง เปิร์บสมัครพนักงานเข้าบรรจุทำงานทำหนังสือราชการทั่วไป
 5 ตำแหน่ง ปรากฏว่ามีผู้มาสมัคร 20 คน เขาจะมีหนทางที่จะเลือกໄก้กี่หนทาง
43. มีหลอดไฟอยู่ 10 หลอด เป็นหลอดที่ชำรุด 2 หลอด ถ้าหันยับหลอดไฟมาท่อสูบ
 4 หลอด รู้ว่าเป็นหลอดดี 3 หลอด และหลอดเสีย 1 หลอด จะมีทางหันมาท่อสูบ
 ໄก้กี่หนทาง
44. เลือกโทรทัศน์มา 3 เครื่อง จากโทรทัศน์ 10 เครื่อง ซึ่งมีเครื่องเสียงอยู่ 2 เครื่อง
 ให้เป็นเครื่องดี 2 เครื่อง และเครื่องเสีย 1 เครื่อง จะมีหนทางที่จะเลือกมาໄก้
 กี่หนทาง
45. ค้วแทนจำนวนนายอุปกรณ์การถ่ายภาพ ໄก้รับใบสั่งของจากลูกค้าให้สั่งอุปกรณ์การถ่ายภาพ
 ไปให้คันนี้คือ อุปกรณ์ประเภท ก จำนวน 20 ชิ้น ประเภท ข จำนวน 12 ชิ้น และ
 ประเภท ค จำนวน 10 ชิ้น ถ้าทางค้วแทนจำนวนนายอุปกรณ์เหล่านี้ มีอุปกรณ์ประเภท ก
 ประเภท ข และประเภท ค เท่ากับ 20, 15, 12 ชิ้น ตามลำดับ และอุปกรณ์เหล่านี้
 หากจะซื้อแยกกัน เช่นจะซื้อ 10 ชิ้น ประเภท ก และ 10 ชิ้น ประเภท ข แต่จะซื้อ 15
 ชิ้น ประเภท ก และ 5 ชิ้น ประเภท ข ให้ค้วแทนจำนวนนายอุปกรณ์การถ่ายภาพเหล่านี้ จัดส่งให้แก่ลูกค้า
 ໄก้กี่หนทาง

46. ในการลงทะเบียนเรียนภาคฤดูร้อน กำหนดค่าวันักศึกษาจะลงทะเบียนเรียนให้ไม่เกิน 12 หน่วยกิต นักศึกษาซึ่งนิ่งท้องการลงทะเบียนเรียน 4 วิชา (วิชาละ 3 หน่วยกิต) โดยคิดค่าว่าจะเรียนวิชาสถิติ 3 วิชา และวิชาพื้นฐานอีก 1 วิชา ถ้าในภาคฤดูร้อนนี้ มีวิชาสถิติเปิดสอน 10 วิชา และวิชาพื้นฐานเปิดสอน 4 วิชา เช่นจะมีทางเลือกลงทะเบียนเรียนให้กับหนทาง
47. ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีครอบครัวที่มีระดับรายได้ต่อเดือนทั้ง ๆ กัน 200 ครอบครัว ซึ่งแยกให้เป็นระดับทั่ว ๆ ดังนี้คือ
- | | | |
|---------------------------|-------|-------------|
| ระดับรายได้สูงกว่า 5,000 | จำนวน | 10 ครอบครัว |
| ระดับรายได้ 4,000 - 5,000 | จำนวน | 20 ครอบครัว |
| ระดับรายได้ 3,000 - 3,999 | จำนวน | 30 ครอบครัว |
| ระดับรายได้ 2,000 - 2,999 | จำนวน | 60 ครอบครัว |
| ระดับรายได้ต่ำกว่า 2,000 | จำนวน | 80 ครอบครัว |
- ผู้ทำการศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับจำนวนบุตรของครอบครัวที่มีรายได้ต่ำ ๆ ให้ทำการเลือกสัมภาษณ์ ครอบครัวที่มีระดับรายได้ต่ำ ๆ ที่ได้แบ่งไว้ 5 ระดับ จำนวน 100 ครอบครัว ดังนี้คือ 5, 10, 15, 30, 40 ครอบครัว ตามลำดับ อย่างทวนร่วมว่าจะมีทางเลือก ครอบครัวทั่ว ๆ มาสัมภาษณ์ให้กับหนทาง
48. ในสำนักงานแห่งหนึ่ง มีพนักงานประจำสำนักงานเป็นชาย 8 คน และหญิง 4 คน เลือกพนักงานเหล่านี้มา 3 คน จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกพนักงานให้ ถ้า
- ไม่จำกัดเพศ
 - เป็นชาย 2 คน และหญิง 1 คน
 - เป็นชาย 1 คน และหญิง 2 คน
49. เลือกอักษร 3 ตัว จากคำว่า "STATISTICS" มาจัดเป็นหมู่ จะมีหนทางจัดให้กับหนทาง ดัง
- อักษรทั้งสามตัวเหมือนกัน
 - อักษรแต่ละตัวไม่เหมือนกัน

50. โรงเรียนแห่งหนึ่ง ให้จัดห้องสารองซึ่งอยู่ในแต่ละเกี้ยวกันไว้ 10 ห้อง สำหรับแขกที่มาพัก 10 คน ถ้ามี 2 คน ห้องการอยู่ห้องเดียวกัน จะมีทางเดินทางจัดห้องให้ได้เท่าไหร่
 51. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้าออกมานาท 20 ชิ้น มีพากที่ทำกว่านาทຽุาน 2 ชิ้น พากที่สูงกว่านาทຽุาน 3 ชิ้น หยิบสินค้าเหล่านี้มาทดสอบ 4 ชิ้น (สินค้าแต่ละพากเหมือนกันทุกประการ)
 ก. จงหาจำนวนหนทางที่จะໄคลีนค้ามีนาทຽุานมากกว่า 2 ชิ้น
 ข. จงหาจำนวนหนทางที่จะໄคลีนค้ามีนาทຽุานมากกว่า 2 ชิ้น
 52. จงหาจำนวนวิธีที่จะพิจารณา 4 ฉบับ ในครั้งไปรษณีย์ 10 ถุง ถ้า
 ก. จกหมายแท่ละฉบับพิจั้งในครั้งที่พ่างกัน
 ข. ไม่จัดการพิจั้ง
 53. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 3 คน จากสามีภรรยา 4 ถุง ถ้า
 ก. ทุกคนมีลิขิไค้รับเลือกเท่ากัน
 ข. คณะกรรมการจะต้องมีระดับก้าวใหญ่ 2 ชาย 1
 ค. สามีภรรยาจะต้องไม่รวมอยู่ในคณะกรรมการเดียวกัน
 54. ชาย 6 คน ศึก นาย ก, ข, ค, ง, จ และ ฉ เข้าคิวซื้อควันหนัง
 ก. จะมีทางจัดคิวการซื้อให้กึ่นทาง
 ข. หากให้ นาย ก ถึง นาย ข ยืนติดกัน จะมีทางจัดให้กึ่นทาง
 55. องค์การแห่งหนึ่งมีพนักงาน 15 คน ห้องการแยกเป็น 3 แผนก ให้แผนกที่หนึ่งมีพนักงาน 3 คน แผนกที่สองมีพนักงาน 4 คน ส่วนที่เหลือให้อยู่แผนกที่สาม จะมีทางจัดให้กึ่นทาง
 56. จัดคน 7 คน ให้เป็นวงกลม จงหาจำนวนวิธีการจัดที่อยู่ในนี้
 ก. ให้คนอายุคำสูตรกับสูงสุดนั่งติดกัน
 ข. แยกคนอายุคำสูตรกับสูงสุดจากกัน
 57. แบ่งของเล่น 9 ชิ้น ให้เด็ก 4 คน โดยให้เด็กที่มีอายุน้อยที่สุด 3 ชิ้น และคนอื่น ๆ ให้ 2 ชิ้น เท่ากัน จะแบ่งให้กี่วิธี