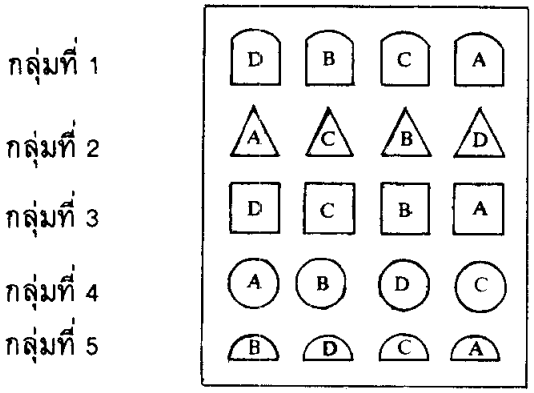
4.9.1 วิธีการกำหนดวิธีการ (treatment) ให้แก่สมาชิกของกลุ่ม (block)

จากชื่อของการทดลองแบบ RCB นี้ จะเห็นว่าการสุ่ม (randomization) เป็นส่วนสำคัญของการทดลอง ดังนั้นหลังจากที่ได้แยกกลุ่มโดยยึดหลักที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว เราอาจดำเนินการสุ่มดังนี้

1. สุ่มกลุ่มมา 1 กลุ่มจากกลุ่มที่มีอยู่ (หรือกลุ่มที่เหลืออยู่)

2. สุ่มหน่วยทดลองทีละหน่วยทดลองจากกลุ่มที่สุ่มได้ในข้อ 1 เพื่อรับวิธีการที่ 1, 2, ..., k (เราอาจสุ่มวิธีการเพื่อให้แก่หน่วยทดลองที่สุ่มมาได้)

3. ทำซ้ำข้อ 1 และข้อ 2 กับกลุ่มที่เหลืออยู่



รูปที่ 4.3 รูปแสดงผลการสุ่มวิธีการ A, B, C และ D ให้แก่สมาชิกในกลุ่ม

4.9.2 การวิเคราะห์ข้อมูลสำหรับการทดลองแบบ RCB

ตารางที่ 4.2

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการทดลองแบบ RCB เพื่อเปรียบเทียบ k วิธีการและมี b กลุ่ม

กลุ่ม	วิธีการ 1	2	...	k	Totals $x_{i.}$	Means $\bar{x}_{i.}$
1	x_{11}	x_{12}		x_{1k}	$x_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}		x_{2k}	$x_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
b	x_{b1}	x_{b2}		x_{bk}	$x_{b.}$	$\bar{x}_{b.}$
Totals: x_{j}	x_{1}	x_{2}		x_{k}	$x_{..}$	
Means: $\bar{x}_{j}$	$\bar{x}_{1}$	$\bar{x}_{2}$		$\bar{x}_{k}$		$\bar{x}_{..}$

x_{ij} แทนข้อมูลในกลุ่มที่ i ที่ได้รับวิธีการที่ j (ข้อมูลใน cell (i, j))

$i = 1, \ldots, b$ และ $j = 1, \ldots, k$

หมายเหตุ ในที่นี้ทั้งหมดมี bk cells และจำนวนที่ทำซ้ำ (replications) ในแต่ละ cell เป็น 1 จำนวนที่ทำซ้ำในแต่ละ cell อาจมีมากกว่า 1 ได้ แต่วิธีการวิเคราะห์จะเปลี่ยนไป

$x_{i.} = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ = ผลรวมของกลุ่มที่ i

$x_{.j} = \sum_{i=1}^{b} x_{ij}$ = ผลรวมของวิธีการที่ j

$x_{..} = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ = grand total

$\bar{x}_{i.} = x_{i.}/k$ = mean ของกลุ่มที่ i

$\bar{x}_{.j} = x_{j}/b$ = mean ของวิธีการที่ j

$\bar{x}_{..} = x_{..}/bk$ = grand mean

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแบบ RCB เราแบ่ง SST ออกเป็น 3 ส่วนตามที่มาของมันดังนี้คือ ส่วนที่เนื่องมาจากความแตกต่างของวิธีการ ส่วนที่เนื่องมาจากความแตกต่างของกลุ่ม และส่วนที่เนื่องมาจาก random errors

พิจารณา

Observation = Grand mean + Deviation due to treatments

+ Deviation due to blocks + Residuals

$$x_{ij} = \bar{x}_{..} + (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})$$

$$(x_{ij} - \bar{x}_{..}) = (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})$$

$$\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} [(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$$

$$+2\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})$$

$$+2\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})$$

$$+2\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})$$

เพราะว่า 3 เทอมหลัง แต่ละเทอมเป็น 0

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2 = b\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2 + k\sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})^2$$

$$SST = SStr + SSblk + SSE$$

Total sum of squares	=	Treatment sum of squares	+	Block sum of squares	+	Error sum of squares
(df. = bk − 1)		(df. = k − 1)		(df. = b − 1)		(df. = (k − 1) (b − 1))

4.9.2.1 ANOVA Table สำหรับการทดลองแบบ RCB ดังนี้

ANOVA

ที่มา (S.V.)	df.	SS	MS = SS/df.	fc
วิธีการ (Treatments)	k − 1	$SStr = b\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2$	MStr	f_1 = MStr/MSE
กลุ่ม (Blocks)	b − 1	$SSblk = k\sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2$	MSblk	f_2=MSblk/MSE
Error	(k − 1) (b − 1)	$SSE = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})^2$	MSE	
Total	bk − 1	$SST = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2$		

ในการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขแนะนำให้ใช้สูตรดังนี้

1. $CF = (x_{..})^2/bk$

2. $SST = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - CF$

3. $SStr = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{k} x_{.j}^2 - CF$

4. $SSblk = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{b} x_{i.}^2 - CF$

5. $SSE = SST - SStr - SSblk$

4.9.2.2 ตัวแบบในการเปรียบเทียบ k วิธีการในการทดลองแบบ RCB : Fixed model

$X_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$

$\because \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$

ดังนั้น $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \ldots, b$ และ $j = 1, \ldots, k$

โดยที่ μ = overall mean หรือ grand mean

$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu$ คืออิทธิพลของกลุ่มที่ i, $\sum_{i=1}^{b} \alpha_i = 0$

$\beta_j = \mu_{.j} - \mu$ คืออิทธิพลของวิธีการที่ j, $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$

$\mu_{i.}$ = population mean ของกลุ่มที่ i $= \sum_{j=1}^{k} \mu_{ij}/k$

$\mu_{.j}$ = population mean ของวิธีการที่ j $= \sum_{i=1}^{b} \mu_{ij}/b$

ε_{ij} = random error

$$\varepsilon_{ij} = (X_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)$$
$$= (X_{ij} - \mu - \mu_{i.} + \mu - \mu_{.j} + \mu)$$
$$= (X_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu)$$

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$ นั่นคือสมมุติว่า x_{ij}, $i = 1, \ldots, b$ และ $j = 1, \ldots, k$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม bk ตัวที่เป็นอิสระต่อกัน และแต่ละตัวมีการกระจายเป็น normal distribution ที่มี mean μ_{ij} และ variance เท่ากันหมด คือ σ^2

หมายเหตุ ตัวแบบข้างต้นเรียกว่า Additive model นั่นคือไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่างวิธีการและกลุ่ม (no interaction effects)

4.9.2.3 การทดสอบสมมุติฐาน

จุดประสงค์ที่แท้จริงของการทดลองแบบ RCB คือการเปรียบเทียบวิธีการไม่ใช่เพื่อเปรียบเทียบกลุ่ม การแยกกลุ่มนั้นทำเพื่อขจัดอิทธิพลหรือขจัดส่วนของความแปรปรวนที่เนื่องมาจากความแตกต่างของกลุ่ม ทั้งนี้เพื่อให้ความแปรปรวนที่เหลืออยู่เป็นส่วนที่เนื่องมาจากความแตกต่างของวิธีการจริง ๆ แต่ในการทดสอบสมมติฐานเราอาจทดสอบเกี่ยวกับกลุ่มด้วยเพื่อเป็นการยืนยันว่าการแบ่งกลุ่มนั้นช่วยลดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองได้จริง แต่ถ้าปรากฏว่าการทดสอบพบว่ากลุ่มไม่แตกต่างกัน เราอาจกลับไปวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีการของการทดลองแบบ CRD ได้

สรุปขั้นในการทดสอบสมมติฐานเพื่อเปรียบเทียบ k วิธีการ (treatment)

1) $H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots = \mu_{.k}$ หรือ $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$
2) H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน หรือ H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$, $j = 1, \ldots, k$
3) กำหนด α
4) CR : $F > f_{((k-1, (b-1)(k-1)), \alpha}$
5) $f_c = f_1 = MStr/MSE$
6) สรุป

สรุปขั้นในการทดสอบสมมติฐานเพื่อเปรียบเทียบ b กลุ่ม (block)

1) $H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = \mu_{b.}$ หรือ $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_b = 0$
2) H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน หรือ H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$, $i = 1, \ldots, b$
3) กำหนด α
4) CR : $F > f_{((b-1), (b-1)(k-1)), \alpha}$
5) $f_c = f_2 = MSblk/MSE$
6) สรุป

ตัวอย่างที่ 4.13 ในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบความเร็วของการตัดโดยใช้เครื่องมือ 4 ชนิด วัตถุ 5 ชนิดซึ่งมีความแข็งต่างกันจะเป็นกลุ่ม (block) ที่จะใช้ในการทดลองนี้ ตัวเลขในตารางข้างล่างคือเวลาที่ใช้ตัดเป็นวินาที

วัตถุ (กลุ่ม)	เครื่องมือ (วิธีการ)				Totals	Means
	1	2	3	4	$x_{i.}$	$\bar{x}_{i.}$
1	12	20	13	11	56	14
2	2	14	7	5	28	7
3	8	17	13	10	48	12
4	1	12	8	3	24	6
5	7	17	14	6	44	11
Totals : $x_{.j}$	30	80	55	35	200	-
Means : $\bar{x}_{.j}$	6	16	11	7	-	10

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าเครื่องมือที่ใช้ในการตัดทั้ง 4 ชนิดมีประสิทธิภาพในการตัดไม่แตกต่างกันหรือไม่

$b = 5, \; k = 4, \; bk = 20$

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} x_{ij}^2 = 2518$$

$$CF = \frac{(x_{..})^2}{bk} = \frac{(200)^2}{20} = 2000$$

$$SST = 2518 - 2000 = 518$$

$$SStr = \frac{30^2 + 80^2 + 55^2 + 35^2}{5} - CF = 2310 - 2000 = 310$$

$$SSblk = \frac{56^2 + 28^2 + 48^2 + 24^2 + 44^2}{4} - CF = 2184 - 2000 = 184$$

$$SSE = SST - SStr - SSblk = 518 - 310 - 184 = 24$$

ANOVA

S.V.	df.	SS	MS	f	f_{table}
เครื่องมือ	3	310	103.3	$f_1 = 103.3/2 = 51.65$	$f_{(3,\ 12),\ .05} = 3.49$
วัตถุ	4	184	46	$f_2 = 46/2 = 23$	$f_{(4,12),\ .05} = 3.26$
Error	12	24	2		
Total	19	518			

Model : $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \ldots, 5$ และ $j = 1, \ldots, 4$

โดยที่ $\beta_j = \mu_{.j} - \mu$

= อิทธิพลของเครื่องมือ (วิธีการ) ที่ j

$\mu_{.j}$ = ความเร็วเฉลี่ยเมื่อใช้เครื่องมือที่ j

1) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_4 = 0$ หรือ $H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3} = \mu_{.4}$

2) H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$ หรือ H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(3,12),\ .05} = 3.49$

5) $f_c = f_1 = MStr/MSE = 103.3/2 = 51.65$

6) $\because f_c = 51.65 > 3.49$ (f_c ตกอยู่ใน CR.) เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือเครื่องมือทั้ง 4 ชนิดมีประสิทธิภาพในการตัดต่างกัน

4.9.2.4 ช่วงความเชื่อมั่นของ $\mu_{.j} - \mu_{.j'}$ หรือ $\beta_j - \beta_{j'}$ ($j \neq j' = 1, \ldots, k$)

เมื่อเราทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนในการทดลองแบบ RCB และสรุปว่าเราไม่ยอมรับว่าวิธีการทั้ง k วิธีการเหมือนกันหมด ผู้ทำการทดลองมักต้องการจะสร้างช่วงของความเชื่อมั่นเพื่อเปรียบเทียบวิธีการเป็นคู่ ๆ

$\mu_{.j} - \mu_{.j'} = \beta_j - \beta_{j'}$ คือค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากวิธีการที่ j และ j'

$\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.j'}$ เป็น point estimator ของ $\mu_{.j} - \mu_{.j'}$

$\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.j'} \sim N\left(\mu_{.j} - \mu_{.j'}, \sigma^2 \left(\frac{2}{b}\right)\right)$

ดังนั้น

$$T = \frac{(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.j'}) - (\mu_{.j} - \mu_{.j'})}{\sqrt{MSE}\sqrt{2/b}} \sim t_{(b-1)\ (k-1)}$$

เราอาจสร้างช่วงความเชื่อมั่นของ $\mu_{.j}-\mu_{.j'}$ $(j \neq j' = 1, \ldots, k)$ แต่ละคู่ได้ และถ้าต้องการหา simultaneous confidence intervals เราก็สามารถใช้วิธีการในหัวข้อ 4.6 ได้ ดังนั้น

> $100(1-\alpha)\%$ confidence interval ของ $(\mu_{.j}-\mu_{.j'})$, $j \neq j' = 1, \ldots, k$ คือ
> $(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{.j'}) \pm t_{(b-1)(k-1),\alpha/2}\sqrt{MSE}\sqrt{2/b}$, โดยที่ $MSE = SSE/(b-1)(k-1)$

และ

> ชุดของ $100(1-\alpha)\%$ simultaneous confidence intervals ของ
> $(\mu_{.j}-\mu_{.j'})$, $j \neq j' = 1, \ldots, k$, m คู่ คือ
> $(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{.j'}) \pm t_{(b-1)(k-1),\alpha/2m}\sqrt{MSE}\sqrt{2/b}$, โดยที่ m = จำนวน confidence statements (intervals)

4.10 Factorial Experiments

ในทางวิทยาศาสตร์เราสนใจอิทธิพลของปัจจัยหลาย ๆ ปัจจัยต่อผลที่จะเกิดขึ้น โดยวิธีการแปรค่าของปัจจัยหนึ่ง ๆ ระหว่างการทำการทดลอง แล้วดูผลที่เกิดขึ้นกับหน่วยทดลองซึ่งนอกจากเราจะได้ศึกษาถึงอิทธิพลหลัก (main effect) ของแต่ละปัจจัยแล้ว เรายังอาจได้ศึกษาถึงอิทธิพลร่วม (interaction effect) ของปัจจัยด้วย ทั้งนี้เราจะออกแบบการทดลองเป็นแบบ Factorial design

เพื่อให้เข้าใจถึงแนวความคิดของ Factorial design สมมุติเราสนใจศึกษาปัจจัย 2 ปัจจัย คือ A และ B ทั้งนี้

ปัจจัย A มี a ระดับคือ $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_a$

ปัจจัย B มี b ระดับคือ $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_b$

แต่ละ combination ของระดับของ A และระดับของ B จะถือเป็น 1 วิธีการ ดังนั้นจำนวนวิธีการในการทดลองจะเท่ากับ ab เราเรียกการทดลองนี้ว่า $a \times b$ Factorial design ถ้าเราจะกำหนดแต่ละวิธีการให้แต่ละหน่วยทดลอง เราจะต้องใช้หน่วยทดลองจำนวน ab หน่วย โครงสร้างของข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 4.3 ซึ่งเป็นตารางแบบ 2 ทาง

ตารางที่ 4.3

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับ $a \times b$ Factorial design
ซึ่งมี 1 หน่วยทดลองใน 1 cell (single replication)

		Levels of Factor B				Totals
		B_1	B_2	. . .	B_b	
Levels of Factor A	A_1	y_{11}	y_{12}	. . .	y_{1b}	$y_{1.}$
	A_2	y_{21}	y_{22}	. . .	y_{2b}	$y_{2.}$
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	A_a	y_{a1}	y_{a2}	. . .	y_{ab}	$y_{a.}$
Totals		$y_{.1}$	$y_{.2}$	. . .	$y_{.b}$	$y_{..}$

y_{ij} คือค่าสังเกตใน cell A_iB_j, $i = 1, \ldots, a$ และ $j = 1, \ldots, b$

ถ้าการทดลองกำหนดให้ n หน่วยทดลองรับวิธีการหนึ่ง ๆ เราจะต้องใช้หน่วยทดลอง abn หน่วย นั่นคือเรามี $a \times b$ Factorial design ซึ่งมี n หน่วยทดลองใน 1 cell (n replications) และในกรณีนี้เราทดสอบอิทธิพลร่วมระหว่างปัจจัยได้ ซึ่งจะได้กล่าวถึงวิธีวิเคราะห์ไว้ด้วย

Additive model for a two-factor experiment

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ij}, \quad i = 1, \ldots, a \text{ และ } j = 1, \ldots, b$$

โดยที่ μ = overall mean

α_i = effect of the i th level of A, $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$

β_j = effect of the j th level of B, $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$

และ E_{ij} เป็น random errors ซึ่งมีการกระจายเป็น $N(0,\sigma^2)$ และเป็นอิสระต่อกัน

Decomposition of observations

Observation =	Grand mean	+	Deviation due to Factor A	+	Deviation due to Factor B	+	Residual

$$y_{ij} = \bar{y}_{..} + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})$$

$i = 1, \ldots, a$ และ $j = 1, \ldots, b$

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเราสร้างตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองนี้ดังนี้

ANOVA

สำหรับ $a \times b$ Factorial design ซึ่งมี 1 หน่วยทดลอง/1 cell

S.V.	df	SS	MS	f
Factor A	a – 1	SSA	MSA	MSA/MSE
Factor B	b – 1	SSB	MSB	MSB/MSE
Error	(a – 1) (b – 1)	SSE	MSE	
Total	ab – 1	SST		

โดยที่ $SSA = b \sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$

$$SSB = a \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

ในการคำนวณเราใช้สูตรต่อไปนี้

$$C.F. = y_{..}^2/ab$$

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - C.F.$$

$$SSA = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{a} y_{i.}^2 - C.F.$$

$$SSB = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2 - C.F.$$

$$SSE = SST - SSA - SSB$$

4.10.1 การทดสอบสมมติฐาน (กรณี single replication/cell)

ในการกำหนดระดับของปัจจัย A และ B นั้น ถ้ากระทำโดยระบุระดับที่ใช้ตามความต้องการ เราถือว่า model เป็น Fixed model ดังนั้น วิธีในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลของปัจจัย A และ B คือ

การทดสอบอิทธิพลของปัจจัย A

1) $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$ หรือ $H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = \mu_{a.}$

2) H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$ หรือ H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

3) กำหนด α

4) CR : $F > f_{(a-1,(a-1)(b-1)),\ \alpha}$

5) f_c = MSA/MSE

6) สรุปผล ถ้า f_c ตกนอก CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือปัจจัย A ไม่มีอิทธิพลต่อค่าสังเกต (ไม่มี A effect)

ถ้า f_c ตกใน CR. เราปฏิเสธ H_0 นั่นคือปัจจัย A มีอิทธิพลต่อค่าสังเกต (มี A effect)

การทดสอบอิทธิพลของปัจจัย B

1) $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$ หรือ $H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots = \mu_{.b}$

2) H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$ หรือ H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

3) กำหนด α

4) CR : $F > f_{(b-1,(a-1)(b-1)),\ \alpha}$

5) f_c = MSB/MSE

6) สรุปผล ถ้า f_c ตกนอก CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือปัจจัย B ไม่มีอิทธิพลต่อค่าสังเกต (ไม่มี B effect)

ถ้า f_c ตกใน CR. เราปฏิเสธ H_0 นั่นคือปัจจัย B มีอิทธิพลต่อค่าสังเกต (มี B effect)

4.10.2 อิทธิพลร่วม (interaction) และความหมาย

ในตัวแบบที่ผ่านมา เราสมมุติว่า

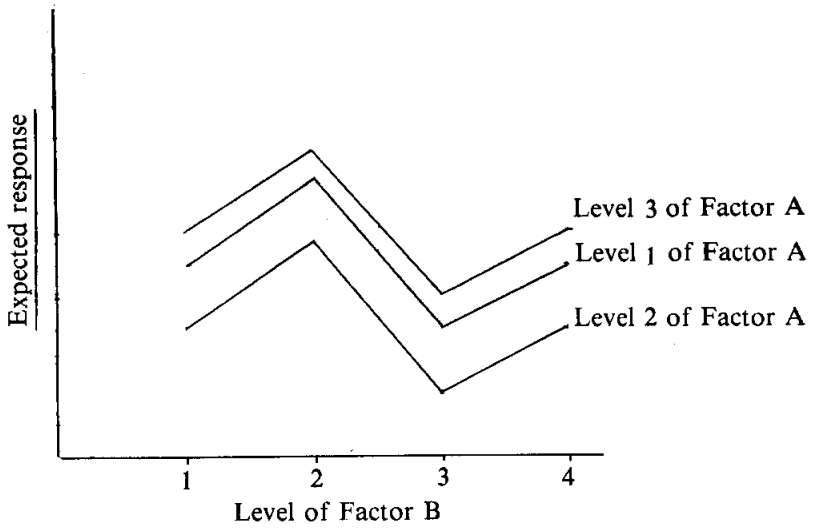
$$E(Y_{ij}) = E(\mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ij})$$
$$= \mu + \alpha_i + \beta_j$$

ถ้าเราทำการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรของระดับที่ 1 และ 3 ของปัจจัย A ณ ระดับหนึ่งของปัจจัย B สมมุติให้เป็นระดับที่ j

$$\begin{pmatrix}\text{ค่าเฉลี่ยของระดับ}\\ \text{ที่ 1 ของ A}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{ค่าเฉลี่ยของระดับ}\\ \text{ที่ 3 ของ A}\end{pmatrix} = (\mu + \alpha_1 + \beta_j) - (\mu + \alpha_3 + \beta_j)$$
$$= \alpha_1 - \alpha_3$$

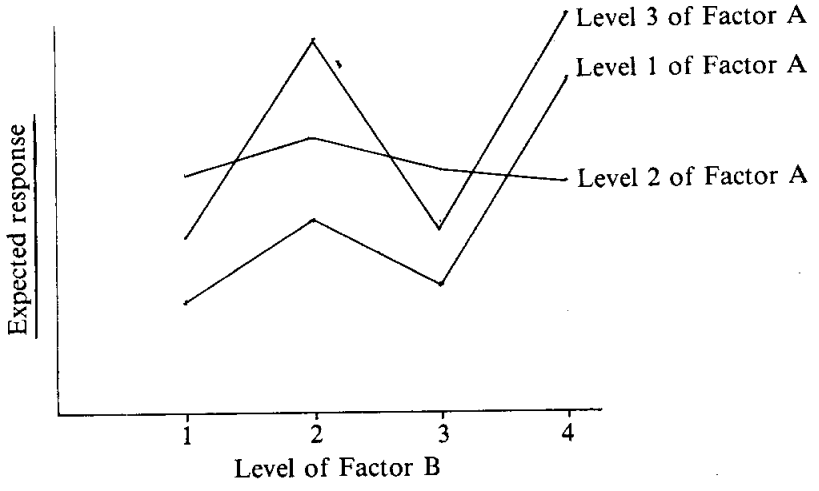
สำหรับทุก ๆ ระดับ j ของปัจจัย B ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจะเหมือนกันไม่ว่าปัจจัย B จะเป็นระดับใด ๆ เราเรียกตัวแบบนี้ว่า additive model ทั้งนี้เพราะอิทธิพลของแต่ละปัจจัยถูกนำมาบวกกัน

รูปต่อไปนี้แสดงว่าความแตกต่างของ 2 เส้นใด ๆ จะเป็นค่าคงที่สำหรับทุกระดับของปัจจัย B



รูปที่ 4.4 Curves for expected response without interaction

เพื่อแสดงสถานการณ์ที่ตรงข้ามกับรูปที่ 4.4 ในรูปที่ 4.5 จะแสดงว่าความแตกต่างของ mean response ระหว่างระดับที่ 1 และระดับที่ 2 ของปัจจัย A นั้นบางครั้งก็เป็นบวก บางครั้งก็เป็นลบ ทั้งนี้เพราะพฤติกรรมดังกล่าวขึ้นอยู่กับระดับของปัจจัย B เรากล่าวว่า ปัจจัย A และ B "interact" กัน ในกรณีเหล่านี้ตัวแบบที่เรียกว่า additive model ใช้ไม่ได้



รูปที่ 4.5 Curves for expected response with interaction

อิทธิพลร่วมมักเกิดขึ้นบ่อย ๆ ในทางปฏิบัติ และเป็นสิ่งสำคัญที่เราจะต้องนำเข้ามาพิจารณาด้วยถ้าสิ่งนี้เกิดขึ้น และถ้าเราไม่นำมาพิจารณาจะทำให้อิทธิพลของปัจจัยหลัก (main effect) ไม่ชัดเจน ดังนั้นเราจะขยายตัวแบบออกโดยเพิ่ม interaction term (γ_{ij}) เข้าไป โดยที่เทอม γ_{ij} ขึ้นอยู่กับระดับที่ i ของปัจจัย A และระดับที่ j ของปัจจัย B หรือ

$$Y_{ij} \text{ (observation)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + E_{ij}$$

อย่างไรก็ดี ดังที่กล่าวมาแล้วในตอนแรกว่า จากข้อมูลเพียงตัวเดียวในแต่ละ cell ของ $a \times b$ Factorial design นั้นเราไม่สามารถศึกษาทั้งอิทธิพลของปัจจัยหลักและอิทธิพลร่วมได้ ถ้าเราต้องการศึกษาอิทธิพลร่วมเราต้องใช้ข้อมูลมากกว่า 1 ตัวในแต่ละ cell ในที่นี้ให้เป็น n ตัวในแต่ละ cell ของ $a \times b$ Factorial design

ให้ y_{ijk} แทนค่าสังเกตตัวที่ k ใน cell A_iB_j (ในวิธีการ A_iB_j) ดังนั้น

$$\text{Observation} = \begin{matrix}\text{Grand}\\ \text{mean}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Deviation}\\ \text{due to A}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Deviation}\\ \text{due to B}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Interaction}\\ \text{of } A_i \text{ กับ } B_j\end{matrix} + \text{Residual}$$

$$y_{ijk} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})$$

ANOVA

สำหรับ $a \times b$ Factorial design ซึ่งมี n หน่วยทดลอง/1 cell

S.V.	df	SS	MS	f
Factor A	$(a-1)$	SSA	MSA	MSA/MSE
Factor B	$(b-1)$	SSB	MSB	MSB/MSE
Interaction $A \times B$	$(a-1)(b-1)$	SSAB	MSAB	MSAB/MSE
Error	$ab(n-1)$	SSE	MSE	
Total	$abn-1$	SST		

ตารางที่ 4.4

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับ a × b Factorial design ซึ่งมี n หน่วยทดลองใน 1 cell (n replications)

	B_1	B_2	. . .	B_j	. . .	B_b	Total
A_1	y_{111} y_{112} ⋮ y_{11n}	y_{121} y_{122} ⋮ y_{12n}		y_{1j1} y_{1j2} ⋮ y_{1jn}		y_{1b1} y_{1b2} ⋮ y_{1bn}	
Total	$y_{11.}$	$y_{12.}$	. . .	$y_{1j.}$		$y_{1b.}$	$y_{1..}$
A_2	y_{211} y_{212} ⋮ y_{21n}	y_{221} y_{222} ⋮ y_{22n}		y_{2j1} y_{2j2} ⋮ y_{2jn}		y_{2b1} y_{2b2} ⋮ y_{2bn}	
Total	$y_{21.}$	$y_{22.}$	. . .	$y_{2j.}$		$y_{2b.}$	$y_{2..}$
⋮							
A_i	y_{i11} y_{i12} ⋮ y_{i1n}	y_{i21} y_{i22} ⋮ y_{i2n}		y_{ij1} y_{ij2} ⋮ y_{ijn}		y_{ib1} y_{ib2} ⋮ y_{ibn}	
Total	$y_{i1.}$	$y_{i2.}$	. . .	$y_{ij.}$		$y_{ib.}$	$y_{i..}$
⋮							
A_a	y_{a11} y_{a12} ⋮ y_{a1n}	y_{a21} y_{a22} ⋮ y_{a2n}		y_{aj1} y_{aj2} ⋮ y_{ajn}		y_{ab1} y_{ab2} ⋮ y_{abn}	
Total	$y_{a1.}$	$y_{a2.}$	. . .	$y_{aj.}$		$y_{ab.}$	$y_{a..}$
Total	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$		$y_{.j.}$		$y_{.b.}$	$y_{...}$

จาก ANOVA table

$$SSA = bn \sum_{i=1}^{a} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$$

$$SSB = an \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$$

$$SSAB = n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

$$SST \quad \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$$

ในการคำนวณเราใช้สูตรต่อไปนี้คือ

$$C.F. = y_{...}^2/abn$$

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - C.F.$$

$$SSA = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - C.F.$$

$$SSB = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - C.F.$$

$$SSAB = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - C.F. - SSA - SSB$$

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB$$

4.10.3 การทดสอบสมมติฐาน (กรณี n replications/cell)

ในการทดสอบสมมติฐานนั้นเราจะทำการทดสอบอิทธิพลร่วมก่อนอื่น ถ้าผลการทดสอบสรุปว่าไม่มีอิทธิพลร่วม นักสถิติบางคนจะ pooled SSAB เข้ากับ SSE และ pooled df ด้วย แล้วจึงทดสอบอิทธิพลหลักต่อไป

ใน Fixed model

สำหรับอิทธิพลร่วม $A \times B$: f_c = MSAB/MSE เทียบกับ $f_{[(a-1)(b-1),ab(n-1)],\ \alpha}$

สำหรับอิทธิพลของ factor A : f_c = MSA/MSE.เทียบกับ $f_{[(a-1),ab(n-1)],\ \alpha}$

สำหรับอิทธิพลของ factor B : f_c = MSB/MSE เทียบกับ $f_{[(b-1),ab(n-1)],\ \alpha}$

ตัวอย่างที่ 4.14 ช่างถ่ายรูปต้องการจะปรับปรุงความชัดเจนของการล้างฟิล์ม ได้เพิ่ม Metol 2 ระดับ (1.5 กรัมและ 2.5 กรัม) และ Hydroquinone 2 ระดับ (4 กรัมและ 6 กรัม) ลงในของเหลวที่ใช้ล้างฟิล์ม 1 ลิตร ผลของการวัดความชัดเจนของภาพแสดงในตารางต่อไปนี้

		Hydroquinone		Total
		4	6	
Metol	1.5	28, 30	33, 33	
		$y_{11.} = 58$	$y_{12.} = 66$	$y_{1..} = 124$
	2.5	42, 38	40, 42	
		$y_{21.} = 80$	$y_{22.} = 82$	$y_{2..} = 162$
Total		$y_{.1.} = 138$	$y_{.2.} = 148$	$y_{...} = 286$

ในที่นี้ a = 2, b = 2, n = 2, abn = 8

เพื่อสร้าง ANOVA table เราคำนวณค่าต่อไปนี้

$$\text{C.F.} = y_{...}^2/abn = (286)^2/8 = 10224.5$$

$$\text{SSA} = (124^2 + 162^2)/4 - \text{C.F.} = 10405 - \text{C.F.} = 180.5$$

$$\text{SSB} = (138^2 + 148^2)/4 - \text{C.F.} = 10237 - \text{C.F.} = 12.5$$

$$\text{SSAB} = (58^2 + 66^2 + 80^2 + 82^2)/2 - \text{C.F.} - \text{SSA} - \text{SSB} = 10422 - 10224.5 - 180.5 - 12.5 = 4.5$$

$$\text{SST} = (28^2 + 30^2 + 33^2 + 33^2 + 42^2 + 38^2 + 40^2 + 42^2) - \text{C.F.} = 10434 - \text{C.F.} = 209.5$$

$$\therefore \text{SSE} = \text{SST} - \text{SSA} - \text{SSB} - \text{SSAB} = 12.0$$

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Metol	1	180.5	180.5	60.2*
Hydroquinone	1	12.5	12.5	$4.2_{(n.s.)}$
Interaction (M × H)	1	4.5	4.5	$1.5_{(n.s.)}$
Error	4	12.0	3	
Total	7	209.5		

$f_{(1,4),.05} = 7.71$

ดังนั้นปริมาณ Metol มีอิทธิพลต่อการทำให้ภาพชัดเจนอย่างมีนัยสำคัญ (ทั้งนี้สรุปเฉพาะในพิสัยของค่าจากการทดลองเท่านั้น)

พิจารณา $\bar{y}_{1..} = 31, \bar{y}_{2..} = 40.5$ ดังนั้นเราสรุปได้ว่า Metol ระดับ 2.5 กรัม จะช่วยให้ภาพชัดเจนกว่าระดับ 1.5 กรัม

4.10.4 Two-level Factorial design

4.10.4.1 2^2 Factorial design

เมื่อเราสนใจเพียง 2 ระดับคือระดับสูง (high level) และระดับต่ำ (low level) สำหรับปัจจัยแต่ละปัจจัย ดังนั้นการทดลองจะประกอบด้วย $2^2 = 2 \times 2$ วิธีการ หรือมีเงื่อนไขในการทดลอง 4 อย่างที่ต่างกัน

ตารางที่ 4.5

ตารางแสดง 2^2 Factorial design ในลำดับมาตรฐาน

Design	
x_1	x_2
−1	−1
1	−1
−1	1
1	1

เพื่อความสะดวกเราจะใช้ -1 แทนระดับต่ำ และ $+1$ แทนระดับสูงของแต่ละปัจจัย ถ้าระดับ 2 ระดับของปัจจัยไม่เป็นจำนวนเชิงปริมาณ (เช่นอาจเป็น 2 ชนิดของสบู่) เราก็จะกำหนดให้ชนิดหนึ่งเป็น -1 และอีกชนิดหนึ่งเป็น $+1$

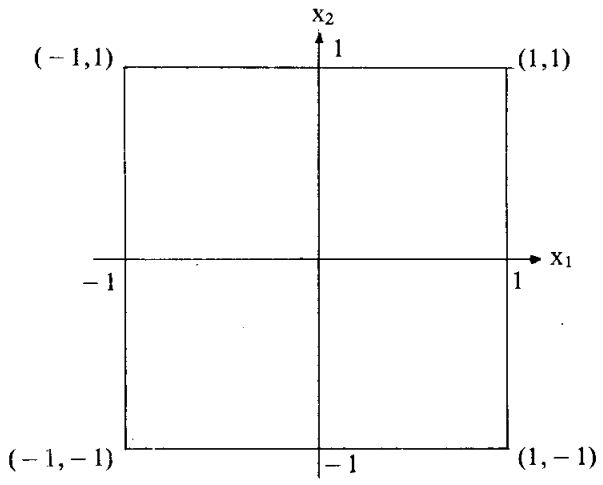
พิจารณาตัวอย่างที่ 4.14 ปัจจัยทั้ง 2 เป็นจำนวนเชิงปริมาณ และเราอาจให้รหัสโดยใช้สูตรต่อไปนี้

	Low	High	
Metol	1.5	2.5	coded $x_1 = \dfrac{M-(1.5+2.5)/2}{(2.5-1.5)/2} = \dfrac{M-2}{.5}$
Hydroquinone	4	6	coded $x_2 = \dfrac{H-(4+6)/2}{(6-4)/2} = H-5$

วิธีการหรือเงื่อนไขในการทดลองทั้ง 4 วิธีคือ $(-1,-1)$, $(+1,-1)$, $(-1,+1)$, และ $(+1,+1)$ ตัวอย่างเช่น

$(+1,-1)$ คือการทดลองที่ใช้ Metol 2.5 กรัม และ Hydroquinone 4 กรัม เป็นต้น

เราอาจแสดงเงื่อนไขทั้ง 4 ด้วยตำแหน่งมุมทั้ง 4 ของสี่เหลี่ยมจตุรัส ดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.6 แสดงการให้รหัสของ 2^2 Factorial design

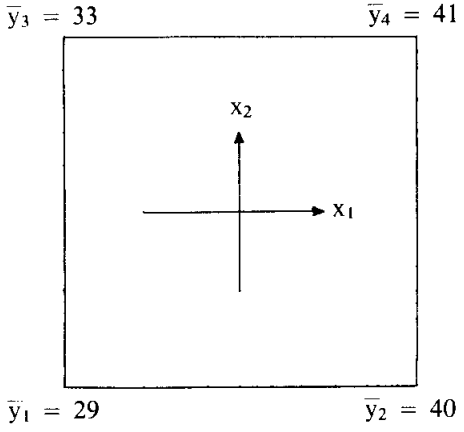
ทำการทดลองอย่างสมบูรณ์ 2 ครั้ง ดังนั้นเราจะมีค่าสังเกต 8 ค่า โดยที่มี 2 ค่าสำหรับแต่ละวิธีการ เมื่อเราไม่เขียนเลข 1 โดยที่เอาไว้แต่เครื่องหมาย ตารางต่อไปจะแสดง design และค่าสังเกต

ตารางที่ 4.6

แสดงค่าสังเกตในเรื่องความชัดเจนของภาพถ่าย

Run	Design		Observations		average
	x_1	x_2	replicate 1	replicate 2	
1	−	−	28	30	$\bar{y}_1 = 29$
2	+	−	42	38	$\bar{y}_2 = 40$
3	−	+	33	33	$\bar{y}_3 = 33$
4	+	+	40	42	$\bar{y}_4 = 41$

ต่อไปจะพิจารณาวิธีการประมาณค่าของอิทธิพลหลักทั้ง 2 และอิทธิพลร่วม ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกต 2 ค่าจากวิธีการเดียวกันจะใช้ในการประมาณค่า ความแตกต่างระหว่างค่าสังเกต 2 ค่าจะใช้ในการประมาณค่าของ error variance



รูปที่ 4.7 แสดงค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตสำหรับแต่ละวิธีการ

การประมาณค่าอิทธิพลหลัก (main effect)

Run ที่ 1 และ 2 มี x_2 อยู่ที่ระดับต่ำ (−1) ดังนั้นความแตกต่าง (40 − 29) จะใช้วัดผลของการเพิ่มค่า x_1 จาก −1 ไปเป็น +1

Run ที่ 3 และ 4 มี x_2 ระดับเดียวกัน ดังนั้นความแตกต่าง (41 − 33) เป็นอีกค่าหนึ่งที่ใช้ประมาณผลการเปลี่ยนแปลงของ x_1 ดังนั้นอิทธิพลหลักของปัจจัย A จะถูกประมาณค่าโดยการหาค่าเฉลี่ยของค่าประมาณทั้ง 2 ค่า นั่นคือ

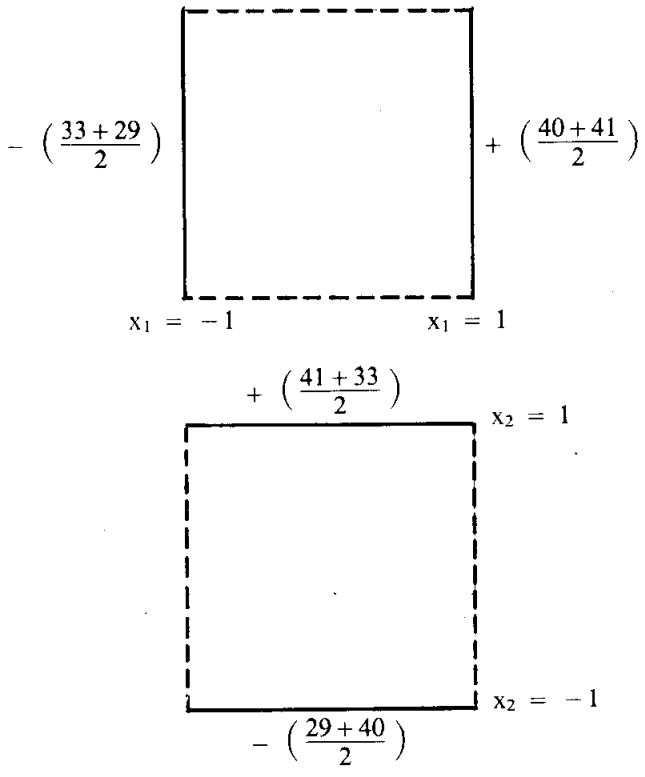
ค่าประมาณของอิทธิพลหลัก A $= \dfrac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + (\bar{y}_4 - \bar{y}_3)}{2}$

$$= \frac{(40-29) + (41-33)}{2} = 9.5$$

ทำนองเดียวกัน

ค่าประมาณของอิทธิพลหลัก B $= \dfrac{(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) + (\bar{y}_4 - \bar{y}_2)}{2}$

$$= \frac{(33-29) + (41-40)}{2} = 2.5$$



รูปที่ 4.8 การประมาณอิทธิพลหลัก A และ B ใน 2^2 design

การประมาณค่าอิทธิพลร่วม (interaction effect)

เราสามารถประมาณอิทธิพลร่วมโดยการหาความแตกต่างระหว่างค่าเพิ่มที่ระดับสูง (41 – 33) และค่าเพิ่มที่ระดับต่ำ (40 – 29) ของปัจจัย B ถ้าส่วนผสมทั้งสองคือ Metol และ Hydroquinone ไม่มีอิทธิพลร่วมกัน ค่าที่เพิ่มขึ้นทั้ง 2 ค่าควรจะใกล้เคียงกัน และผลต่างของทั้ง 2 ค่าดังกล่าวควรเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น

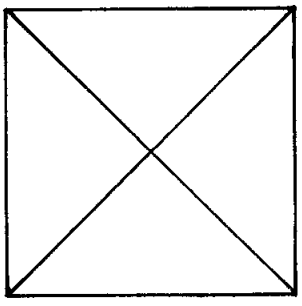
ค่าประมาณของอิทธิพลร่วม $= \dfrac{(\bar{y}_4 - \bar{y}_3) - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{2}$

$$= \frac{(41-33) - (40-29)}{2}$$

$$= -1.5$$

โปรดสังเกตว่าเราจะได้คำตอบเท่าเดิม ถ้าเราหาผลต่างของค่าที่เพิ่มเนื่องจากปัจจัย B หรือ $\dfrac{(41-40) - (33-29)}{2} = -1.5$

$$-\left(\frac{33+40}{2}\right) \qquad \left(\frac{41+29}{2}\right)$$



รูปที่ 4.9 การประมาณอิทธิพลร่วม

ตัวประมาณค่า (estimator) ค่าของอิทธิพลข้างต้นจะอยู่ในรูป

$$\frac{1}{2}\left[\pm\bar{Y}_1 \pm \bar{Y}_2 \pm \bar{Y}_3 \pm \bar{Y}_4\right]$$

โดยที่เครื่องหมายจะสมนัยกับเครื่องหมายของ x_1 สำหรับอิทธิพลของ Metol สมนัยกับเครื่องหมายของ x_2 สำหรับอิทธิพลของ Hydroquinone และสมนัยกับเครื่องหมายของ x_1x_2 สำหรับอิทธิพลร่วม

จากตารางที่ 4.6

$$x_1 : - \; + \; - \; + \rightarrow \frac{1}{2}\left[-\bar{y}_1+\bar{y}_2-\bar{y}_3+\bar{y}_4\right] = \frac{(\bar{y}_2-\bar{y}_1) + (\bar{y}_4-\bar{y}_3)}{2}$$

$$x_2 : - \; - \; + \; + \rightarrow \frac{1}{2}\left[-\bar{y}_1-\bar{y}_2+\bar{y}_3+\bar{y}_4\right] = \frac{(\bar{y}_3-\bar{y}_1) + (\bar{y}_4-\bar{y}_2)}{2}$$

$$x_1x_2 : + \; - \; - \; + \rightarrow \frac{1}{2}\left[\bar{y}_1-\bar{y}_2-\bar{y}_3+\bar{y}_4\right] = \frac{(\bar{y}_4-\bar{y}_3) + (\bar{y}_2-\bar{y}_1)}{2}$$

$$\text{Var (estimator)} = \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

(n = จำนวน replications ใน cell)

$$s^2_{pooled} = \frac{1}{4}(s_1^2 + \ldots + s_4^2)$$

โดยที่ s_i^2 = sample variance ของ run ที่ i

$100(1-\alpha)\%$ confidence interval ของอิทธิพล (n replications) ของ 2^2 Factorial design คือ ค่าประมาณของอิทธิพล $\pm\, t_{4(n-1),\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2_{pooled}}{n}}$

4.10.4.2 2^3 Factorial design

เมื่อเรามีปัจจัย 3 ปัจจัยในการทดลอง โดยที่แต่ละปัจจัยเราสนใจระดับที่ต่างกัน 2 ระดับ เราจะทำการทดลองที่เรียกว่า 2^3 Factorial design ใน design นี้เราจะมีวิธีการ $2^3 = 2\times2\times2 = 8$ วิธีการ ถ้าให้ +1 แทนระดับสูง และ −1 แทนระดับต่ำของแต่ละปัจจัย เราจะแสดงรูปแบบการทดลองดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.7

แสดง 2^3 Factorial design ในลำดับมาตรฐาน

Run	x_1	x_2	x_3
1	−	−	−
2	+	−	−
3	−	+	−
4	+	+	−
5	−	−	+
6	+	−	+
7	−	+	+
8	+	+	+

จากตารางจะเห็นว่า

คอลัมน์ x_1 มี − + − + − + − +

คอลัมน์ x_2 มี − − + + − − + +

คอลัมน์ x_3 มี − − − − + + + +

ตัวประมาณค่าของอิทธิพลจะอยู่ในรูป

$$\frac{1}{2^{3-1}}\left[\pm\overline{Y}_1\pm\overline{Y}_2\pm\ldots\pm\overline{Y}_8\right]$$

ทั้งนี้เครื่องหมายจะสมนัยกับเครื่องหมายในตารางที่ 4.8 ของ x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 และ $x_1x_2x_3$ สำหรับอิทธิพลหลัก และอิทธิพลร่วม

ตารางที่ 4.8

2^3 Factorial design

Run	Design x_1	x_2	x_3	ผลคูณของ design columns x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	Observations replicate 1 ... replicate n	Average
1	−	−	−	+	+	+	−		$\bar{y}_1$
2	+	−	−	−	−	+	+		$\bar{y}_2$
3	−	+	−	−	+	−	+		$\bar{y}_3$
4	+	+	−	+	−	−	−		$\bar{y}_4$
5	−	−	+	+	−	−	+		$\bar{y}_5$
6	+	−	+	−	+	−	−		$\bar{y}_6$
7	−	+	+	−	−	+	−		$\bar{y}_7$
8	+	+	+	+	+	+	+		$\bar{y}_8$

$100(1-\alpha)\%$ confidence interval ของอิทธิพลใด ๆ (n replications) สำหรับ 2^3 Factorial design คือ

$$\text{ค่าประมาณของอิทธิพล} \pm t_{8(n-1),\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s^2_{pooled}}{2n}}$$

โดยที่

$s^2_{pooled} = \frac{1}{8}(s_1^2 + \ldots + s_8^2)$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของ σ^2 และมี $df = 8(n-1)$

s_i^2 = sample variance ของ run ที่ i

แบบฝึกหัด

4.1 ในการโฆษณา 3 วิธี คือทาง น.ส.พ., ทางวิทยุ และทางโทรทัศน์ ผู้ที่ต้องการดูว่าผลของการโฆษณาวิธีใดจะทำให้ปริมาณขายเพิ่มขึ้นมากกว่าวิธีอื่น ได้กำหนดระยะเวลาทดสอบไว้ 15 สัปดาห์ โดยที่วิธีโฆษณาแต่ละวิธีจะทำใน 5 สัปดาห์ที่ต่างกัน แล้วหาปริมาณขายที่เพิ่มขึ้นต่อสัปดาห์ (ตัวเลขได้มาจากผลต่างของปริมาณขายที่คาดว่าจะขายได้ต่อ 1 สัปดาห์ กับปริมาณที่ขายได้จริงต่อสัปดาห์) ไว้ ผลปรากฏดังนี้

ทาง น.ส.พ.	ทางวิทยุ	ทางโทรทัศน์
790	640	721
853	832	834
940	734	737
820	969	931
830	742	923

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าปริมาณขายเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นของแต่ละวิธีที่ใช้ในการโฆษณาเท่ากันหมด ถ้าท่านปฏิเสธ H_0 จงใช้วิธีของ Duncan เพื่อตรวจดูว่า วิธีใดดีกว่าวิธีใด

4.2 เจ้าหน้าที่ฝ่ายบุคคลของบริษัทสนใจความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วที่ใช้ในการอ่านและระดับการศึกษาของพนักงานในบริษัท เขาได้แยกระดับการศึกษาเป็น 4 ระดับ

คือ A_1 : เรียนมัธยมปลายแต่ไม่จบ

A_2 : จบมัธยมปลาย

A_3 : เรียนมหาวิทยาลัยแต่ไม่จบ

และ A_4 : จบปริญญาตรีและสูงกว่าปริญญาตรี

เขาได้สุ่มคนมาจากกลุ่มต่าง ๆ กลุ่มละ 10 คน และวัดเวลาที่แต่ละคนใช้ในการอ่านบทความเดียวกัน ได้ผลดังตารางข้างล่างนี้

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าความเร็วเฉลี่ยที่ใช้ในการอ่านของพนักงานทั้ง 4 กลุ่มเท่ากันหมด

A_1	A_2	A_3	A_4
7.2	5.7	5.8	3.7
6.7	5.7	4.1	6.3
6.5	7.9	4.2	5.6
7.4	5.2	5.0	5.7
6.4	6.6	7.6	5.1
8.4	4.6	4.6	3.6
7.5	6.3	6.0	4.4
7.0	7.0	6.0	5.1
5.5	4.8	5.2	6.4
5.7	5.7	5.4	6.2

4.3 ในการทดลองเพื่อทดสอบว่าปุ๋ย 4 ชนิดจะให้ผลต่อการเจริญเติบโตของพืชชนิดหนึ่งได้เหมือนกันหรือไม่ ได้นำพืชที่มีส่วนสูงและลักษณะความแข็งแรงของต้นพอ ๆ กันมา 20 ต้น แบ่งออกเป็น 4 พวกอย่างสุ่ม แต่ละพวกใส่ปุ๋ยแต่ละชนิด แล้ววัดความสูง (ฟุต) ที่เพิ่มขึ้น หลังจาก 3 เดือนไปแล้ว ได้ผลดังนี้

	ปุ๋ย				
	A	B	C	D	
	.6	1.1	2.1	.5	
	.8	1.3	2.0	.9	
	.3	1.5	1.7	1.0	
	.5	.8	1.6	.7	
	.6	.9	1.0	.7	
T_i	2.8	5.6	8.4	3.8	20.6
T_i^2	7.84	31.36	70.56	14.44	124.2
$\bar{x}_i$	.56	1.12	1.68	.76	$\bar{x} = 1.03$

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 = 26.2$$

สมมุติว่า Population ของส่วนสูงของพืชที่ได้รับปุ๋ยแต่ละชนิดต่างมีการกระจายเป็น Normal ที่มี $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_D^2 = \sigma^2$

ก) จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าส่วนสูงเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นเมื่อใช้ปุ๋ยทั้ง 4 ชนิดไม่แตกต่างกัน จากผลการทดสอบจะสรุปได้หรือไม่ว่าปุ๋ยทั้ง 4 ดีพอ ๆ กันในการช่วยการเจริญเติบโตของพืชชนิดนี้ ถ้าปฏิเสธ H_0 จงใช้วิธีของ Duncan เพื่อตรวจดูว่าปุ๋ยชนิดใดดีกว่าชนิดใด

ข) กำหนด $L_1 = \frac{\mu_A + \mu_B}{2} - \frac{\mu_C + \mu_D}{2}$, L_1 เป็น contrast หรือไม่เพราะเหตุใด

ค) จงหา $\hat{L}_1$ และ $\hat{\sigma}^2_{\hat{L}_1}$ และทดสอบ $H_0 : L_1 = 0$

ง) จงหา Contrast L_2 ที่ orthogonal กับ L_1 และทดสอบ $H_0 : L_2 = 0$

4.4 โรงงานผลิตสินค้าชนิดหนึ่งเช่าเครื่องจักรใหม่มา 4 เครื่องจากโรงงานผลิตเครื่องจักร 4 โรงงาน โรงงานนี้ต้องการทราบว่าเครื่องจักรทั้ง 4 ผลิตสินค้าได้เร็วเท่า ๆ กันหรือไม่ โรงงานจึงทำการนับปริมาณสินค้า (ชิ้น) ที่เครื่องจักรแต่ละเครื่องผลิตได้ในช่วงเวลาครั้งละ 1 ชั่วโมง

ให้ x_{ij} เป็นปริมาณสินค้า (ชิ้น) ที่เครื่องจักร i ผลิตได้ในช่วงเวลาที่ j

$i = 1, 2, \ldots, 4$ และ $j = 1, \ldots, n$

เครื่องจักร			
1	2	3	4
8	7	12	10
10	5	9	9
7	10	13	8
14	9	12	12
	9	14	6
	11		12
			9

ก) จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_4^2$

ข) สมมุติว่าผลการทดสอบจาก ก) เราไม่ปฏิเสธ H_0 จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าปริมาณสินค้าที่ผลิตได้โดยเฉลี่ยจากเครื่องจักรทั้ง 4 เครื่องเท่ากันหมด และจากผลการทดสอบเราจะสรุปได้หรือไม่ว่าเครื่องจักรทั้ง 4 มีประสิทธิภาพในการผลิตดีเท่า ๆ กัน

4.5 ในการศึกษาว่าวิธีสอนที่ต่างกันทำให้ผลการเรียนวิชาสถิติเบื้องต้นต่างกันหรือไม่ ได้แบ่งวิชาสถิติเบื้องต้นออกเป็น 3 กลุ่ม ใช้วิธีสอนต่างกัน ในการสอบใช้ข้อสอบเดียวกัน สุ่มนักศึกษา 15 คนจาก 3 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน ปรากฏว่าได้คะแนน (จากคะแนนเต็ม 15) ดังนี้

กลุ่ม		
1	2	3
8	7	12
10	5	9
7	10	13
14	9	12
11	9	14

สมมุติ population ของคะแนนของแต่ละกลุ่มต่างมีการกระจายเป็น Normal ที่มี population variance เท่ากันหมด จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่า population mean ของคะแนนของทั้ง 3 กลุ่มเท่ากันหมด จากผลการทดสอบจะสรุปได้หรือไม่ว่าวิธีสอนทั้ง 3 วิธีให้ผลดีเท่า ๆ กัน ถ้าสรุปไม่ได้ จงใช้วิธีของ Duncan เพื่อทดสอบความแตกต่าง

4.6 วิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นถูกแบ่งเป็น 3 กลุ่ม แต่ละกลุ่มสอนโดยครูแต่ละคน (นักเรียนใน 3 กลุ่มมีความรู้พื้นฐานและความสามารถทางสมองพอ ๆ กันหมด) ผลการสอบไล่ (โดยใช้ข้อสอบเดียวกัน) เป็นดังนี้

ครู		
A	B	C
73, 60	88, 31	68, 41
89, 45	78, 78	79, 59
82, 93	48, 62	56, 68
43, 36	91, 76	91, 53
80, 77	51, 96	71, 79
73, 66	85, 80	71, 15
	74, 56	87
	77	

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้ง 3 กลุ่มต่างกันอย่างมีนัยยะสำคัญหรือไม่ เราจะสรุปได้ไหมว่าครูทั้ง 3 คนสอนดีพอ ๆ กัน

4.7 ในการทดลองเพื่อทดสอบว่าอาหาร 3 ชนิดจะลดน้ำหนักได้เหมือนกันหรือไม่ ได้เอาคนที่ต้องการจะลดน้ำหนัก และมีน้ำหนักพอ ๆ กันมา 20 คน แบ่งเป็น 4 พวกอย่างสุ่ม โดยสุ่ม 5 คนแรกให้ทานอาหารตามปกติ (Control group) สุ่มอีก 3 คนให้ทานอาหารชนิดที่ 2 สุ่ม 4 คนให้ทานอาหารชนิดที่ 3 ส่วน 5 คนที่เหลือทานอาหารชนิดที่ 4 แล้วจดน้ำหนักที่ลดลงในช่วงเวลา 2 เดือนได้ผลดังนี้

อาหาร			
Control	อาหารชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3
.6	1.1	2.1	.5
.8	1.3	2.0	.9
.3	1.5	1.7	1.0
.5		1.6	.7
.6			.7

สมมุติว่า $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_4^2$

จงทดสอบที่ α = .01 ว่าน้ำหนักเฉลี่ยที่ลดลงของ 4 กลุ่มเท่ากันหมดหรือไม่ เราจะสรุปได้หรือไม่ว่าการควบคุมอาหารจะช่วยการลดน้ำหนักได้

4.8 ในการพิจารณาเพื่อเลือกใช้เครื่องจักรที่ต่างกัน 4 ชนิดในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ได้ตกลงจะเอาพนักงาน 6 คนมาร่วมในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบเครื่องจักรทั้ง 4 การควบคุมเครื่องจักรนั้นขึ้นกับสภาวะร่างกายและทักษะส่วนตัวของพนักงานด้วย และเราทราบว่าพนักงานแต่ละคนมีความสามารถในการควบคุมเครื่องจักรต่างกัน ได้จดเวลา (เป็นวินาที) ที่พนักงานแต่ละคนใช้เครื่องจักรแต่ละชนิดในการผลิตตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จไว้ดังตารางข้างล่าง จงทดสอบว่าเครื่องจักรทั้ง 4 ทำงานได้ด้วยความเร็วเท่ากันหรือไม่ และทดสอบเกี่ยวกับความเร็วของพนักงานทั้ง 6 คนด้วย (α = .05)

พนักงาน (กลุ่ม)	เครื่องจักร (วิธีการ)				รวม
	1	2	3	4	
1	42.5	39.8	40.2	41.3	163.8
2	39.3	40.1	40.5	42.2	162.1
3	39.6	40.5	41.3	43.5	164.9
4	39.9	42.3	43.4	44.2	169.8
5	42.9	42.5	44.9	45.9	176.2
6	43.6	43.1	45.1	42.3	174.1
รวม	247.8	248.3	255.4	259.4	1010.9

กำหนด $\sum_{i}^{6}\sum_{j}^{4} x_{ij}^2 = 42661.81$, $\sum_{i=1}^{6} x_{i.}^2 = 170488.15$

$\sum_{j=1}^{4} x_{.j}^2 = 255575.25$, CF = 42579.95

4.9 ปุ๋ย 4 ชนิดคือ f_1, f_2, f_3 และ f_4 ถูกใช้เพื่อดูปริมาณผลิตผลของถั่ว ดินได้ถูกแบ่งเป็น 3 แปลง (ซึ่งต่างกันในคุณภาพของดิน) โดยที่แต่ละแปลงประกอบด้วยหลุม 4 หลุม (plots) ซึ่งมีสภาพเหมือนกัน ผลิตผลต่อเอเคอร์ (เอเคอร์ = 2 ไร่ครึ่ง) ได้ถูกบันทึกไว้ดังนี้

แปลงที่ 1	f_1 = 42.7	f_3 = 48.5	f_4 = 32.8	f_2 = 39.3
แปลงที่ 2	f_3 = 50.9	f_1 = 50.0	f_2 = 38.0	f_4 = 40.2
แปลงที่ 3	f_4 = 51.1	f_2 = 46.3	f_1 = 51.9	f_3 = 53.5

กำหนด $\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{4} x_{ij}^2 = 25257.48$, $\sum_{i}^{3} x_{i.}^2 = 99871.59$, $\sum_{j}^{4} x_{.j}^2 = 74965.34$

CF = 24770.25

จงทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนตามการทดลองแบบ RCB (α = .05)

4.10 ขนมปัง 3 แถว แต่ละแถวใช้ส่วนผสมต่างกัน นำเข้าไปอบในเตาอบพร้อม ๆ กัน เนื่องจากสิ่งที่ควบคุมไม่ได้นั้นทำให้เตาอบทำงานไม่เหมือนกันในแต่ละครั้งของการอบ ได้ทำการอบขนมปังทีละ 3 แถว 5 ครั้ง และวัดความแน่นของขนมปังไว้ดังนี้

ครั้งที่อบ (block)	สูตร		
	1	2	3
1	.95	.71	.69
2	.86	.85	.68
3	.71	.62	.51
4	.72	.72	.73
5	.74	.64	.44

กำหนด $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 = 7.6763$, CF = 7.4483

$\sum_{i=1}^{5} x_{i.}^2 = 22.6415$, $\sum_{i=1}^{3} x_{.j}^2 = 37.6745$

จงทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้ (α = .05)