บทที่ 4
การวิเคราะห์ความแปรปรวน
(Analysis of Variance)

การวางแผนการทดลอง (Design of Experiments) อย่างรอบคอบระมัดระวังเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับความสำเร็จในการใช้วิธีการทางสถิติเพื่อสรุปผลจากข้อมูลที่รวบรวมได้ โดยที่การทดลองที่ได้รับการออกแบบอย่างดีจะช่วยให้การแปลความหมายข้อมูลเป็นไปได้อย่างชัดเจน และหลีกเลี่ยงการวิเคราะห์ที่ยุ่งยากได้

4.1 คำจำกัดความ (Definitions)

ผลหรือค่าสังเกตจากการวัด (Response measurement) คือค่าของตัวแปรเชิงสุ่มที่เราสนใจ

หน่วยทดลอง (Experimental units หรือ subjects) คือ หน่วยที่ให้ค่าสังเกต หรือหน่วยที่ให้ผลการทดลองแก่เรา

ปัจจัย (Factors) คือ ลักษณะต่าง ๆ กันที่เราจะทำให้เกิดขึ้นแก่หน่วยทดลอง

ระดับของปัจจัย (Factor levels) คือ ชนิดย่อย ๆ ของปัจจัย

วิธีการ (Treatments) คือ combination ของระดับต่าง ๆ ของปัจจัยที่ต่างกัน หรือคือลักษณะต่าง ๆ ที่ใช้ในการจัดจำแนก (classification)

จำนวนที่ทำซ้ำ (Replications) จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับวิธีการเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 4.1

ในการเปรียบเทียบวิธีการรักษาโรคความดันโลหิตสูง 4 วิธี ได้ทำการทดลองกับคน 40 คน ซึ่งมีอาการของโรคมากพอ ๆ กัน ใช้แต่ละวิธีการกับคนไข้ 10 คน

ผลจากการวัดหรือค่าสังเกต	: ความดันโลหิตที่ลดลง
หน่วยทดลอง	: คนไข้
ปัจจัย	: วิธีการรักษาโรค
ระดับของปัจจัย	: มี 4 ระดับ ในที่นี้คือ 4 วิธีการที่ต่างกัน

วิธีการ : วิธีการรักษาโรค 4 วิธี นั่นคือ มี 4 วิธีการ

จำนวนที่กระทำซ้ำ : ในที่นี้คือ 10 สำหรับแต่ละวิธีการ

ตัวอย่างที่ 4.2

ในการเปรียบเทียบคุณภาพของปุ๋ย 3 ชนิดที่มีต่อความเจริญของพืชชนิดหนึ่ง ได้นำต้นพืชที่มีความสูงและความแข็งแรงพอ ๆ กันมา 12 ต้น โดยที่จะใส่ปุ๋ยชนิดที่ 1 แก่ต้นพืช 3 ต้น ปุ๋ยชนิดที่ 2 แก่ต้นพืช 5 ต้น ส่วนอีก 4 ต้น ใส่ปุ๋ยชนิดที่ 3 เมื่อระยะเวลาผ่านไป 2 เดือน วัดความสูงที่เพิ่มขึ้น

ผลจากการวัดหรือค่าสังเกต : ความสูงที่เพิ่มขึ้น

หน่วยทดลอง : ต้นพืช

ปัจจัย : ปุ๋ย

ระดับของปัจจัย : 3 ชนิดที่ต่างกันของปุ๋ย

วิธีการ : ปุ๋ย 3 ชนิด

จำนวนที่ทำซ้ำ : 3, 5 และ 4 ตามลำดับ

หมายเหตุ

ถ้าปัจจัยประกอบด้วยปุ๋ยและไม่ใส่ปุ๋ย และถ้าปุ๋ยมี 3 ชนิดที่สนใจ ระดับของปัจจัยจะเป็น 4 ระดับ คือ 3 ชนิดของปุ๋ยและไม่ใส่ปุ๋ย และวิธีการจะเป็น 4 วิธีการ การที่เราไม่ให้ปุ๋ยแก่หน่วยทดลอง (ต้นพืช) บางส่วน เราจะถือว่านั่นเป็นอีก 1 วิธีการ และเรียกกลุ่มของหน่วยทดลองนี้ว่า กลุ่มควบคุม (Control group)

4.2 หลักใหญ่ ๆ สำหรับการออกแบบการทดลอง อาจสรุปได้ดังนี้

1. กำหนดปัจจัย (Factors) ที่ต้องการศึกษาในการทดลอง และกำหนดระดับของแต่ละปัจจัยที่ต้องการสำรวจ สิ่งเหล่านี้จะทำให้ทราบวิธีการ (Treatments) ที่เราจะใช้ กรณีนี้ตัวแบบ (Model) ที่ใช้จะเป็น Fixed model แต่ถ้าเราสุ่มปัจจัยและระดับที่ต้องการศึกษามาจากปัจจัยและระดับที่มีอยู่ทั้งหมด ตัวแบบจะเป็น Random model

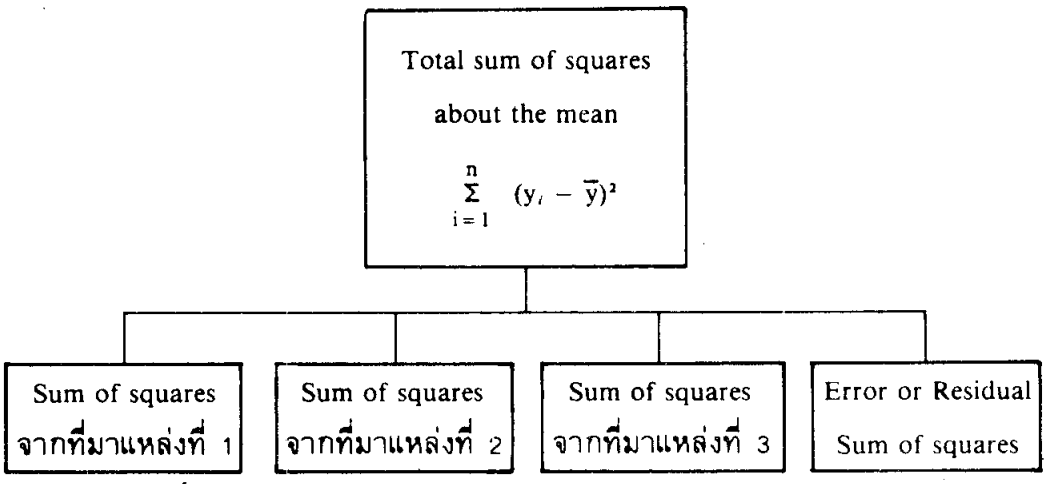
2. พิจารณาขอบเขตของการที่จะทำการสรุปผลจากตัวอย่าง และเลือกชนิดของหน่วยทดลองที่เราจะใช้ในการทดลอง

3. ค่าใช้จ่ายและความแม่นยำของการสรุปผล จะเป็นตัวกำหนดขนาดของหน่วยทดลองที่จะใช้ในการทดลอง

4. สิ่งสุดท้าย แต่สำคัญที่สุด คือ การกำหนดวิธีที่จะให้วิธีการกับหน่วยทดลอง นั่นคือ การกำหนดวิธีการสุ่ม (method of randomization)

เราน่าจะเรียกวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนให้ชัดเจนว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ย วิธีการนี้ คือ การแบ่งความแปรปรวนทั้งหมด (Total variation) ที่ปรากฏอยู่ในข้อมูล ออกเป็นส่วน ๆ ตามที่มาของมัน ส่วนของที่มาของความแปรปรวนส่วนหนึ่งมาจากปัจจัยที่เราไม่สามารถควบคุมได้ และความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม (random errors) ที่ติดมากับข้อมูลหรือผลจากการวัด

ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยค่าสังเกต n ค่า (observations or measurements) $y_1, \ldots, y_n$ และ $\bar{y}$ แทนค่าเฉลี่ย (mean) ของข้อมูลชุดนี้ เราเรียก $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ ว่า Total sum of squares (SST) ดังนั้น วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนคือ การแบ่ง SST ออกเป็นส่วนย่อย ๆ ตามที่มาของมัน และส่วนที่เนื่องมาจาก random errors จำนวนส่วนของความแปรปรวนที่จะแยกออกมานั้นขึ้นอยู่กับแผนการทดลองที่ใช้ในการเก็บข้อมูล และตัวแบบทางสถิติ (Statistical model) ที่เห็นว่าเหมาะสมกับการวิเคราะห์



รูปที่ 4.1

แผนผังการแบ่ง SST ออกเป็นส่วน ๆ ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน

จากรูปที่ 4.1 มีที่มาของความแปรปรวน 3 แหล่ง และที่มาซึ่งเกิดจาก random errors

4.8 การจัดจำแนกแบบทางเดียว (One - way classification or the Completely randomized design : CRD)

ในการสุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกันจากหลาย ๆ ประชากร (populations) โดยเราถือว่าแต่ละประชากรแทนประชากรของผลที่ได้จากการใช้แต่ละวิธีการ สมมุติว่า ในการทดลองมี t วิธีการที่เราจะทำการศึกษา โดยที่จะใช้

วิธีการที่ 1 กับ n_1 หน่วยทดลอง,
" 2 กับ n_2 " ,
.
.
.
" t กับ n_t "

ใน CRD เราจะทำการสุ่ม n_1 หน่วย จากทั้งหมด N หน่วย (โดยที่ $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$) ให้ได้รับวิธีการที่ 1 สุ่ม n_2 หน่วย จากที่เหลืออยู่ $(N - n_1)$ หน่วย ให้ได้รับวิธีการที่ 2 ทำไปเรื่อย ๆ จนเหลือ n_t หน่วย ได้รับวิธีการที่ t

ตารางที่ 4.1
โครงสร้างของข้อมูลสำหรับ CRD ที่มี t วิธีการ

	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	...	วิธีที่ t	
	x_{11}	x_{21}		x_{t1}	
	x_{12}	x_{22}		x_{t2}	
	.	.		.	
	.	.		.	
	.	.		.	
	x_{1n_1}	x_{2n_2}		x_{tn_t}	
Total : T_i	T_1	T_2	...	T_t	G = Grand total
Mean : $\bar{x}_i$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_t$	$\bar{x}$ = Grand mean = $\frac{G}{N}$
Sample size : n_i	n_1	n_2	...	n_t	$N = \sum_{i=1}^{t} n_i$

x_{ij} แทนข้อมูลตัวที่ j จากวิธีการที่ i

$i = 1, \ldots, t$ และ $j = 1, \ldots, n_i$

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$G = \sum_{i=1}^{t} T_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\bar{x}_i = \frac{T_i}{n_i}$$

พิจารณา Observation = Grand mean + (deviation due to treatments) + Residual

$$x_{ij} = \bar{x} + (\bar{x}_i - \bar{x}) + (x_{ij} - \bar{x}_i)$$

$$(x_{ij} - \bar{x}) = (\bar{x}_i - \bar{x}) + (x_{ij} - \bar{x}_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$(1)^2$;

$$(x_{ij} - \bar{x})^2 = (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + 2(\bar{x}_i - \bar{x})(x_{ij} - \bar{x}_i)$$

$\sum_i^t \sum_j^{n_i} (1)^2$; $\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$

$$+ 2 \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{x})(x_{ij} - \bar{x}_i)$$

เทอม $2 \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{x})(x_{ij} - \bar{x}_i) = 2 \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x}) \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)$

$$= 0$$

ดังนั้น $\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$

$$\sum_i^t \sum_j^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i^t n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_i^t \sum_j^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

$$\underbrace{\text{Total SS}}_{\text{d.f.} = N - 1} = \underbrace{\text{Treatment SS}}_{\text{d.f.} = t - 1} + \underbrace{\text{Residual SS or Error SS}}_{\text{d.f.} = N - t}$$

ในที่นี้ e_{ij} = residual = $(x_{ij} - \bar{x}_i)$

สรุปเป็น ANOVA table ดังนี้

ที่มา (Source of Variation)	d.f.	SS (Sum of squares)	MS (Mean square)	f_c
วิธีการ (Treatments)	$t - 1$	$SStr = \sum_i n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$MStr = SStr/(t - 1)$	$f_c = \frac{MStr}{MSE}$
Error	$N - t$	$SSE = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$MSE = SSE/(N - t)$	
Total	$N - 1$	$SST = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2$		

ตัวแบบในการเปรียบเทียบ t วิธีการ : Fixed model

$$X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

เพราะว่า $\mu_i = \mu + \alpha_i$

ดังนั้น $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \ldots, t$ และ $j = 1, \ldots, n_i$

โดยที่ μ = overall mean

μ_i = population mean ของ population ที่ i

α_i = อิทธิพลของวิธีการที่ i, $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 0$

และ ε_{ij} = random error

$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$

(NID = Normally independently distributed นั่นคือ แต่ละตัวต่างมีการกระจายเป็น $N(0, \sigma^2)$ และต่างก็เป็นอิสระต่อกัน)

สมมติฐาน (Hypothesis) ที่ต้องการทดสอบ

1) และ 2) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t$ และ H_1 : mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน หรืออาจเขียนใหม่ได้ในรูปของ α_i ดังนี้

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_t = 0$ และ $H_1 : \alpha_i$ อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$

3) กำหนด α

4) ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ $F = \frac{MStr}{MSE}$

โดยที่ถ้า H_0 จริง $F = \frac{MStr}{MSE}$ จะมีการแจกแจงเป็น F - distribution ที่มี

d.f. = (t − 1, N − t)

CR. : $F > f_{(t-1,N-t),\alpha}$

5) คำนวณ $f_c = \frac{MStr}{MSE}$ ซึ่งในการคำนวณด้วยมือหรือใช้เครื่องคิดเลขแนะนำให้ใช้สูตรดังนี้

ก. หา Correction factor : $CF = G^2/N$

ข. หา $SST = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - CF$

ค. หา $SStr = \sum_{i=1}^{t} \frac{T_i^2}{n_i} - CF$

ง. หา $SSE = SST - SStr$

จ. $MStr = SStr/(t-1)$

ฉ. $MSE = SSE/(N-t)$

ช. $f_c = \frac{MStr}{MSE}$

6) สรุปผล ถ้า f_c ตกใน CR. เราจะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ = α สรุปว่า population means ของทั้ง t populations ไม่เท่ากันหมด หรือทั้ง t วิธีการมีประสิทธิภาพไม่เท่ากันหมด

แต่ถ้า f_c ไม่ตกใน CR. เราจะไม่ปฏิเสธ H_0

หมายเหตุ

ในกรณีที่ n_i เท่ากันหมดคือ $n_1 = n_2 = \ldots = n_t = n$ เราอาจใช้สูตรข้างต้นเพื่อคำนวณค่า SST และ SStr หรือใช้สูตรต่อไปนี้ก็ได้

$N = nt$

$T_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $\bar{x}_i = \frac{T_i}{n}$

$$G = \sum_{i=1}^{t} T_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$CF = G^2/nt$$

$$SST = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 - CF$$

$$SStr = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{t} T_i^2 - CF$$

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	f
Treatments	$t-1$	SStr	$MStr = SStr/(t-1)$	$f_c = \frac{MStr}{MSE}$
Error	$t(n-1)$	SSE	$MSE = SSE/t(n-1)$	
Total	$nt-1$	SST		

ตัวอย่างที่ 4.3 (กรณีที่ n_i ไม่เท่ากันหมด)

ในการทดลองเพื่อดูว่าการขาดความชื้นของพื้นดินมีผลมาจากปริมาณเศษไม้ที่เหลืออยู่จากการตัดไม้ในป่าหรือไม่ ปริมาณของเศษไม้ 3 ระดับ คือ

1) ไม่มีเศษไม้เหลือเลย จะเรียกวิธีการที่ 1
2) เหลืออยู่ 2000 bd.ft. " " 2
3) เหลืออยู่ 8000 bd.ft. " " 3

(bd.ft. = board feet เป็นหน่วยที่ใช้วัดปริมาตรของไม้)

ตารางแสดงปริมาณความชื้นที่ขาดไปของดิน

	วิธีการที่ 1	วิธีการที่ 2	วิธีการที่ 3	
	1.52	1.63	2.56	
	1.38	1.82	3.32	
	1.29	1.35	2.76	
	1.48	1.03	2.63	
	1.63	2.30	2.12	
		1.45	2.78	
T_i	7.30	9.58	16.17	G = 33.05
$\bar{x}_i$	1.46	1.60	2.70	$\bar{x}$ = 1.944
n_i	5	6	6	N = 17

$t = 3$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 71.3047$$

$$CF = \frac{G^2}{N} = \frac{(33.05)^2}{17} = 64.2531$$

$$SST = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 71.3047 - 64.2531 = 7.0516$$

$$SStr = \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} - CF = \frac{(7.30)^2}{5} + \frac{(9.58)^2}{6} + \frac{(16.17)^2}{6} - CF$$

$$= 69.5322 - 64.2531$$

$$= 5.2791$$

$$SSE = SST - SStr = 7.0516 - 5.2791 = 1.7725$$

S.V.	d.f.	SS	MS	f_c
Treatments	2	5.2791	2.64	$\frac{2.64}{0.127} = 20.79^{**}$
Error	14	1.7725	0.127	
Total	16	7.0516		

หมายเหตุ

สัญลักษณ์ที่ f_c

* แทน การปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ การทดสอบมีนัยสำคัญ (significant)

** **แทน การปฏิเสธ** H_0 **ที่** $\alpha = .01$ **นั่นคือ** การทดสอบมีนัยสำคัญอย่างสูง (highly significant)

(n.s.) แทน not significant เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 นั่นคือ การทดสอบไม่มีนัยสำคัญ

Model : $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ หรือ

$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

โดยที่ $i = 1, 2, 3$ และ

$j = 1, 2, \ldots, n_i$

1) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ หรือ $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

2) H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ ที่ไม่เท่ากัน หรือ H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$

3) $\alpha = .01$

4) CR : $F > f_{(2,14),.01} = 6.51$

5) $f_c = 20.79$ (จากตาราง ANOVA)

6) $\because f_c > 6.51$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ สรุปว่ามีความแตกต่างระหว่างปริมาณเศษไม้ที่เหลืออยู่ 3 ระดับต่อความชื้นของพื้นดินอย่างมีนัยสำคัญ

ตัวอย่างที่ 4.4 (กรณีที่ n_i เท่ากันหมดนั่นคือต่างก็เท่ากับ n)

ในการทดสอบความทนไฟของผ้า 4 ชนิด ได้จดระยะเวลาในการเผาไหม้ (วินาที) ตั้งแต่เริ่มจุดไฟที่ผ้า จนกระดาษที่ติดไว้ที่ส่วนหนึ่งของผ้าแต่ละชนิดติดไฟ ผลปรากฏดังนี้

ตารางแสดงระยะเวลาในการเผาไหม้ของผ้า 4 ชนิด

	ผ้าชนิดที่ 1	ผ้าชนิดที่ 2	ผ้าชนิดที่ 3	ผ้าชนิดที่ 4	
	17.8	11.2	11.8	14.9	
	16.2	11.4	11.0	10.8	
	17.5	15.8	10.0	12.8	
	17.4	10.0	9.2	10.7	
	15.0	10.4	9.2	10.7	
T_i	83.9	58.8	51.2	59.9	G = 253.8
$\bar{x}_i$	16.78	11.76	10.24	11.98	$\bar{x}$ = 12.69
n_i	5	5	5	5	N = 20

จะทำการทดสอบที่ α = .05 เพื่อดูว่า มีความแตกต่างในเรื่องของความทนไฟของผ้าทั้ง 4 ชนิดหรือไม่

$t = 4 \quad , n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n = 5$

$N = nt = 5(4) = 20$

$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 = 3387.48$

$$CF = \frac{G^2}{N} = G^2/nt = \frac{(253.8)^2}{20} = 3220.722$$

$$SST = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF = 3387.48 - 3220.722 = 166.758$$

$$SStr = \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} - CF = \frac{1}{n}\sum_i T_i^2 - CF = \frac{(83.9)^2 + (58.8)^2 + (51.2)^2 + (59.9)^2}{5} - CF$$

$$= 3341.22 - 3220.722 = 120.498$$

$$SSE = SST - SStr = 166.758 - 120.498 = 46.260$$

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	f_c
Treatments	3	120.498	40.166	$\frac{40.166}{2.891} = 13.9^*$
Error	16	46.260	2.891	
Total	19	166.758		

Model : $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$, i = 1, ..., 4 และ j = 1, ..., 5

1) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

2) H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ ที่ไม่เท่ากัน

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(3,16),.05} = 3.24$

5) $f_c = 13.9$ (จากตาราง ANOVA)

6) สรุปผล $\because f_c > 3.24$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ แสดงว่าความทนไฟของผ้าทั้ง 4 ชนิดไม่เท่ากันหมด

4.4 การตรวจสอบข้อสมมุติ (Assumptions) ของการใช้ตัวแบบ

เราต้องการตรวจสอบข้อสมมุติที่ว่า $\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$ ในการตรวจสอบเราอาจทำได้หลายวิธี

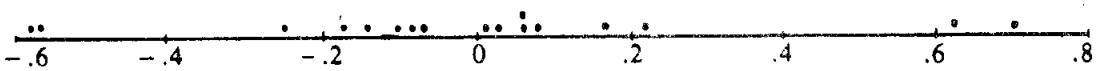
4.4.1 ตรวจความเป็นอิสระต่อกัน (Independency) ของ t ตัวอย่าง ผลจากการสุ่ม (Randomization) คือ การสุ่มหน่วยทดลองเพื่อรับวิธีการต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ทำให้ข้อสมมุติข้อนี้เป็นจริง

4.4.2 เพื่อตรวจรูปแบบการแจกแจงว่าเป็นการแจกแจงแบบ Normal และการเท่ากันของ error variance ในทุกวิธีการ (check normality and constant variance)

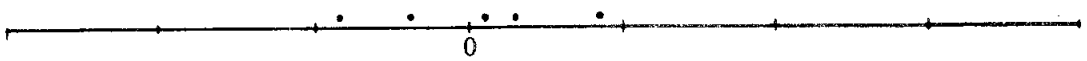
4.4.2.1 โดยวิธีทาง Graphic โดยการทำ Overall plot ของ residuals (หรือเรียกว่า Combined residual plot) และ plot residual ของแต่ละวิธีการ

จากตัวอย่างที่ 4.3 คำนวณหา $e_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_i)$ = residual สำหรับข้อมูลชุดนั้น

วิธีการที่ 1	วิธีการที่ 2	วิธีการที่ 3
.06	.03	−.14
−.08	.22	.62
−.17	−.25	.06
.02	−.57	−.07
.17	.70	−.58
	−.15	.08

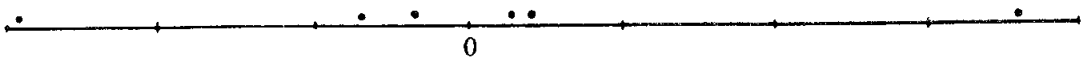


ก) Combined residual plot



วิธีการที่ 1

วิธีการที่ 2



วิธีการที่ 3

ข) Residual plot ของแต่ละวิธีการ

จากการสำรวจ dot diagram (ข) จะเห็นว่าการกระจายของจุดในวิธีการที่ 1 ดูน้อยกว่าการกระจายของจุดในวิธีการที่ 2 และ 3 แต่อย่างไรก็ดีการที่มีข้อมูลจำนวนน้อยตัวเช่นนี้ เป็นการยากที่จะสรุปว่าสิ่งที่เกิดขึ้นเป็นผลจากเหตุบังเอิญ (by chance) เท่านั้นเอง หรือเป็นผลจากการที่วิธีการที่ 1 มี variance เล็กจริง ๆ เราอาจต้องใช้ข้อมูลเพิ่มเพื่อที่จะทำให้ได้รูปที่มีความหมายมากกว่านี้ ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนนั้น แม้ว่าข้อสมมุติจะไม่เป็นไปตามที่สมมุติไว้ทีเดียว คือมีการเบี่ยงเบนไปจากการแจกแจงแบบ Normal และการเท่ากันของ variance แต่จะไม่ทำให้วิธีการวิเคราะห์ใช้ไม่ได้ผลดี

4.4.2.2 โดยใช้วิธีการในหัวข้อ 2.4 ตรวจการแจกแจงของ residuals

4.4.2.3 การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_t^2$

ก) วิธีของ Bartlett (Bartlett's test)

σ_i^2s เป็น population variances ของ Normal populations

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_t^2$
2) H_1 : variance ไม่เท่ากันหมด
3) กำหนด α
4) CR : $B > \chi^2_{t-1,\alpha}$
5) คำนวณค่าของตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ

$$b_c = 2.3026 \frac{q}{h}$$

โดยที่ $$q = (N - t) \log_{10} s_p^2 - \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) \log_{10} s_i^2$$

$$h = 1 + \frac{1}{3(t-1)} \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - t} \right)$$

และ $$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) s_i^2}{N - t}$$

6) สรุปผล

ตัวอย่างที่ 4.5

จากตัวอย่างที่ 4.3 $n_1 = 5, n_2 = 6, n_3 = 6, N = 17, t = 3$

คำนวณ $s_1^2 = .0171, s_2^2 = .1898$ และ $s_3^2 = .1510$

$$s_p^2 = \frac{4(.0171) + 5(.1898) + 5(.1510)}{14}$$

$$= \frac{1.7724}{14} = .1266$$

$$q = (17 - 3)\log_{10}(.1266) - [4\log_{10}(.0171) + 5\log_{10}(.1898) + 5\log_{10}(.1510)]$$

$$= 14(-.8975663) - [4(-1.7670039) + 5(-.7217038) + 5(-.8210231)]$$

$$= -12.565928 + 14.78165 = 2.215722$$

$$h = 1 + \frac{1}{3(3-1)}\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{14}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{6}(.65 - .0714286) = 1.0964286$$

$$\therefore b_C = 2.3026\frac{(2.215722)}{1.0964286} = 4.6532182 \approx 4.653$$

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

2) $H_1 : \sigma_i^2$ ไม่เท่ากันหมด

3) $\alpha = .05$

4) CR : $B > \chi^2_{2,.05} = 5.991$

5) $b_C = 4.653$

6) $\because b_C < 5.991$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ ยอมรับว่า variance ของทั้ง 3 populations เท่ากันหมด

ข) วิธีของ Cochran (Cochran's test)

ใช้เมื่อ $n_1 = n_2 = \ldots = n_t = n$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $G = \dfrac{\text{largest } S_i^2}{\sum_{i=1}^{t} S_i^2}$

CR : $G > g_{(n,t),\alpha}$ โดยที่ค่า $g_{(n,t),\alpha}$ อ่านได้จากตาราง A7 (k ในตาราง A_7 คือ t)

ตัวอย่างที่ 4.6 จากตัวอย่างที่ 4.4 $n_1 = n_2 = \ldots = n_4 = 5, t = 4$

คำนวณ $s_1^2 = 1.362, s_2^2 = 5.428, s_3^2 = 1.308$ และ $s_4^2 = 3.467$

$$\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 11.565$$

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_4^2$

2) $H_1 : \sigma_i^2$ ไม่เท่ากันหมด

3) $\alpha = .05$

4) $CR : G > g_{(5,4),.05} = .6287$

5) $g_C = \dfrac{\text{largest } s_i^2}{\sum_{i=1}^{4} s_i^2} = \dfrac{5.428}{11.565} = .4693$

6) $\because g_C < .6287$ เราไม่สามารถ ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ ยอมรับว่า variance ของทั้ง 4 populations เท่ากันหมด

ค) วิธีของ Hartley (Hartley's test)

σ_i^2s เป็น population variances ของ Normal populations

$n_1 = n_2 = \ldots = n_r = n$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ $H = \dfrac{\text{largest } S_i^2}{\text{smallest } S_i^2}$

$CR : H > h_{(t,n),\alpha}$ โดยที่ค่า $h_{(t,n),\alpha}$ อ่านได้จากตาราง A8

(r ในตาราง A8 คือ t)

ตัวอย่างที่ 4.7 ในการศึกษาถึงการโฆษณาทีวี 4 รายการว่าจะชักจูงผู้บริโภคหรือไม่ สำหรับแต่ละรายการได้สอบถามผู้ดู 10 คน จากข้อมูลที่ได้มาคำนวณ sample variance ของแต่ละรายการได้ดังนี้

$s_1^2 = 193, s_2^2 = 146, s_3^2 = 215$ และ $s_4^2 = 128$

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_4^2$

2) $H_1 : \sigma_i^2$ ไม่เท่ากันหมด

3) $\alpha = .05$

4) ในที่นี้ $n = 10, t = 4$

$CR : H > h_{(4,10),.05} = 6.31$

5) $h_c = \dfrac{\text{largest } s_i^2}{\text{smallest } s_i^2} = \dfrac{215}{128} = 1.68$

6) $\because h_c < 6.31$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ ยอมรับว่า variance ของทั้ง 4 treatments เท่ากันหมด

หมายเหตุ

วิธีการของ Cochran และ Hartley โดยทั่วไปจะให้ผลสรุปเหมือนกัน แต่วิธีของ Cochran จะใช้ได้ดีกว่าเพราะใช้ข้อเท็จจริงจากข้อมูลที่รวบรวมมาได้มากกว่าวิธีของ Hartley

จากตัวอย่างที่ 4.6 ถ้าใช้วิธีของ Hartley

$$h_c = \frac{5.428}{1.308} = 4.14$$

$CR : H > h_{(4,5),.05} = 20.6$

$\because h_c = 4.14 < 20.6$ เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$

และ จากตัวอย่างที่ 4.7 ถ้าใช้วิธีของ Cochran

$$g_c = \frac{215}{682} = .3152$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} s_i^2 = 682 \right)$$

$CR : G > g_{(10,4),.05} = .5017$

$\because g_c = .3152 < .5017$ เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$

4.5 Duncan's new multiple range test

การวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นเพียงขั้นแรกของการวิเคราะห์ เพื่อที่จะดูว่า population means หรือ treatment effects นั้นต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ จุดมุ่งหมายของการวิเคราะห์ไม่ได้มีเพียงต้องการสรุปว่า ข้อมูลแสดงว่ามีความแตกต่างระหว่าง population means หรือ treatment effects แต่เราต้องการทราบว่ามีวิธีการใดที่เหมือนกันบ้างหรือต่างกันบ้าง

ดังนั้น การประมาณค่าความแตกต่างระหว่าง population means จึงมีความสำคัญมากกว่าการทำ F-test เท่านั้น

วิธีการที่จะกล่าวถึงนี้ เป็นวิธีการแบ่ง t population means ออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ โดยที่ population means ในกลุ่มย่อยเดียวกัน จะไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ วิธีการนี้เราจะทดสอบสมมติฐานทั้งหมดในรูป $H_0 : \mu_i - \mu_j = 0, i \neq j = 1, \ldots, t$

t random samples ที่มีขนาดเท่ากัน คือ n range ของ p sample means (mean ที่มีค่าสูงสุดในกลุ่ม − mean ที่มีค่าต่ำสุดในกลุ่ม) จะต้องมีค่าเกินค่า ๆ หนึ่ง เราจึงจะสรุปว่า p means จะแตกต่างกัน ค่านี้คือ Least significant range สำหรับ p means และเขียนแทนด้วย- R_p โดยที่ $R_p = r_p \sqrt{\frac{MSE}{n}}$ และ r_p คือ Least significant studentized range ซึ่งอ่านได้จากตาราง A9 สำหรับค่า $p = 2, \ldots, 10$

วิธีทำ

1) เรียง sample means จากค่าน้อยไปหามาก

2) กำหนด α

3) อ่านค่า r_p จากตาราง A9, ค่า r_p ขึ้นอยู่กับ d.f. ของ SSE และ α สำหรับ $p = 2, 3, \ldots, t$

4) คำนวณ R_p โดยใช้ค่า MSE จาก ANOVA table

5) เปรียบเทียบค่า R_p กับค่าความแตกต่างของ sample means ที่เรียงลำดับไว้แล้ว โดยให้เริ่มจาก mean ค่าสูงสุดกับต่ำสุดก่อน กับรองต่ำสุด และถัดไปเรื่อย ๆ จนถึงกับรองสูงสุด แล้วเปรียบเทียบรองสูงสุดกับต่ำสุดเรื่อย ๆ ไป ดูตัวอย่างที่ 4.8 และ 4.9 ประกอบคำอธิบาย

ตัวอย่างที่ 4.8 จากตัวอย่างที่ 4.4 $\bar{x}_1 = 16.78, \bar{x}_2 = 11.76, \bar{x}_3 = 10.24$ และ $\bar{x}_4 = 11.98$

1) เรียง $\bar{x}_i$'s จากน้อยไปหามาก

$\bar{x}_3$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_1$
10.24	11.76	11.98	16.78

2) $\alpha = .05$

3) และ 4)

d.f. ของ SSE = 16 = ν, MSE = 2.891, n = 5, t = 4

$$\sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{2.891}{5}} = .7604$$

p	2	3	4
r_p	2.998	3.144	3.235
R_p	2.280	2.391	2.460

... (จากตาราง A9, $\alpha = .05$, $\nu = 16$)

5) เริ่มจาก mean ตัวที่มากที่สุดก่อน (คือ $\bar{x}_1$)

$\bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 6.54 > R_4 = 2.46$ เราสรุปว่า $\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_3$ ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5.02 > R_3 = 2.391$ " $\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_2$ " "

$\bar{x}_1 - \bar{x}_4 = 4.8 > R_2 = 2.28$ " $\bar{x}_1$ และ $\bar{x}_4$ " "

เปรียบเทียบ mean ตัวรองสูงสุด (คือ $\bar{x}_4$)

$\bar{x}_4 - \bar{x}_3 = 1.74 < R_3 = 2.391$ เราสรุปว่า $\bar{x}_4$ และ $\bar{x}_3$ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ นั่นคือ $\bar{x}_4$, $\bar{x}_2$ และ $\bar{x}_3$ จะเป็นกลุ่มของ mean ที่ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นเราไม่ต้องเปรียบเทียบ ($\bar{x}_4$ และ $\bar{x}_2$) และ ($\bar{x}_2$ และ $\bar{x}_3$) อีก

สรุปผลการเปรียบเทียบ โดยลากเส้นเชื่อม $\bar{x}_i$'s ที่ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

$\underline{\bar{x}_3 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{x}_4} \qquad \underline{\bar{x}_1}$

นั่นคืออาจสรุปได้ว่า $\mu_2 = \mu_3$, $\mu_2 = \mu_4$ และ $\mu_3 = \mu_4$ ส่วนคู่อื่น ๆ นอกจากนี้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ตัวอย่างที่ 4.9 สมมุติในการเปรียบเทียบ 6 วิธีการ จากตาราง ANOVA : MSE = 2.45 ที่มี d.f. ของ SSE = 24, $n_1 = n_2 = \ldots = n_6 = 5$ จาก 6 sample means

1) เรียง $\bar{x}_i$'s ได้ดังนี้

$\bar{x}_2$	$\bar{x}_5$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_4$
14.5	16.75	19.84	21.12	22.90	23.20

2) $\alpha = .05$

3) และ 4)

$$R_p = r_p \sqrt{\frac{MSE}{n}} = r_p \sqrt{\frac{2.45}{5}} = 0.7\, r_p$$

p	2	3	4	5	6
r_p	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276
R_p	2.043	2.146	2.212	2.258	2.293

...(จากตาราง A9, $\alpha = .05$, $\nu = 24$)

5) ก) $\because \bar{x}_4 - \bar{x}_2 = 8.70 > R_6 = 2.293$ สรุปว่า $\bar{x}_4$ และ $\bar{x}_2$ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

ข) เปรียบเทียบ $(\bar{x}_4 - \bar{x}_5)$ และ $(\bar{x}_6 - \bar{x}_2)$ กับ R_5 สรุปได้ว่า $\bar{x}_4$ มากกว่า $\bar{x}_5$ และ $\bar{x}_6$ มากกว่า $\bar{x}_2$

ค) เปรียบเทียบ $(\bar{x}_4 - \bar{x}_1)$, $(\bar{x}_6 - \bar{x}_5)$ และ $(\bar{x}_3 - \bar{x}_2)$ กับ R_4 สรุปได้ว่า $\bar{x}_i$'s ในขั้นนี้ต่างกันทุกคู่

ง) เปรียบเทียบ $(\bar{x}_4 - \bar{x}_3)$, $(\bar{x}_6 - \bar{x}_1)$, $(\bar{x}_3 - \bar{x}_5)$ และ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ กับ R_3 สรุปได้ว่ามี $\bar{x}_4$ และ $\bar{x}_3$ เท่านั้น ที่ไม่แตกต่างกัน (เราไม่ต้องเปรียบเทียบ ($\bar{x}_3$ และ $\bar{x}_6$) และ ($\bar{x}_4$ และ $\bar{x}_6$) อีก)

จ) เปรียบเทียบ $(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)$, $(\bar{x}_1 - \bar{x}_5)$ และ $(\bar{x}_5 - \bar{x}_2)$ กับ R_2 สรุปได้ว่ามีเพียง $\bar{x}_3$ และ $\bar{x}_1$ ที่ไม่แตกต่างกัน

สรุปผลรวมจากข้อ 5) ได้ดังนี้

$$\underline{\bar{x}_2 \quad \bar{x}_5 \quad \bar{x}_1 \quad \bar{x}_3 \quad \bar{x}_6 \quad \bar{x}_4}$$

นั่นคือมีเพียง 4 คู่เท่านั้นที่ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ คือ $\mu_1 = \mu_3$, $\mu_3 = \mu_4$, $\mu_3 = \mu_6$ และ $\mu_4 = \mu_6$ ส่วนคู่อื่น ๆ นอกจากนี้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

หมายเหตุ

แม้ว่า $\mu_1 = \mu_3$ และ $\mu_3 = \mu_4 = \mu_6$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\mu_1 = \mu_4$ และ $\mu_1 = \mu_6$ ด้วย (ดู 5 ค) และ 5 ง) ประกอบ)

4.6 Multiple - t confidence intervals

Population model : $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$

หรือ $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \ldots, t$ และ $j = 1, \ldots, n_i$

$\because \quad \mu_i = \mu + \alpha_i$

$\alpha_i = \mu_i - \mu$

นั่นคือ $\mu_\ell - \mu_k = \alpha_\ell - \alpha_k, \ \ell \neq k = 1, \ldots, t$

$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i$

$\therefore \ \widehat{\mu_\ell - \mu_k} = \bar{X}_\ell - \bar{X}_k$

$\bar{X}_\ell \sim N(\mu_\ell, \frac{\sigma^2}{n_\ell}), \ \ell = 1, \ldots, t$

$\because \ (\bar{X}_\ell - \bar{X}_k) \sim N(\mu_\ell - \mu_k, \sigma^2(\frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_k}))$

และ $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(N-t)}$

$$\therefore \ T = \frac{(\bar{X}_\ell - \bar{X}_k) - (\mu_\ell - \mu_k)}{\sqrt{\frac{SSE}{N-t}}\sqrt{\frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_k}}} \sim t_{N-t}$$

Confidence interval สำหรับความแตกต่างของ mean 1 คู่ใด ๆ (LSD = Least significant difference)

> $100(1-\alpha)\%$ C.I. ของ $(\mu_\ell - \mu_k)$, ความแตกต่างของ mean ของวิธีการที่ ℓ และของวิธีการที่ k, คือ
>
> $(\bar{x}_\ell - \bar{x}_k) \pm t_{N-t,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{MSE(\frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_k})}$, โดยที่ $MSE = \frac{SSE}{N-t}$

เนื่องจากเราสามารถใช้ C.I. ข้างต้นในการทดสอบ $H_0 : \mu_\ell = \mu_k$ และ $H_1 : \mu_\ell \neq \mu_k$ ได้ นั่นคือ ถ้า C.I. ที่คำนวณได้จากตัวอย่างรวม 0 อยู่ด้วย เราจะยอมรับ H_0 ที่ α level

ถ้า F - test แสดงว่ามีความแตกต่างระหว่าง means อย่างมีนัยสำคัญ นักสถิติบางท่านอาจเพียงแต่เปรียบเทียบ mean แต่ละคู่ โดยหา C.I. ตามสูตรข้างต้น โดยที่แต่ละ interval ต่างมีเปอร์เซนต์ของความเชื่อมั่นเป็น $100(1-\alpha)\%$ เท่ากันหมด แต่นักสถิติบางกลุ่มต้องการจะหาวิธีที่จะหาช่วงของความเชื่อมั่นทั้งหมดที่จะเป็นไปได้ ด้วยเปอร์เซนต์ของความเชื่อมั่นจำนวนหนึ่งเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ถ้ามี 4 วิธีการ จะมี $\binom{4}{2} = 6$ คู่ ของความแตกต่างของ mean $(\mu_\ell - \mu_k)$, $\ell \neq k = 1, \ldots, 4$ ถ้าใช้สูตรข้างต้นเพื่อหา 6 intervals จะเห็นว่าแต่ละ interval

ต่างมีเปอร์เซนต์ของความเชื่อมั่นเป็น $100(1 - \alpha)\%$ แต่เป็นการยากที่จะบอกได้ว่า intervals ทั้ง 6 นั้น เชื่อถือได้ทั้งหมดด้วยระดับความเชื่อมั่นเท่าใด

ถ้าเราต้องการกำหนดระดับความเชื่อมั่นไว้ก่อนแล้วหา C.I.'s ซึ่งเราสามารถรับประกันว่า C.I.'s ทั้งหมดจะถูกต้องด้วยความเชื่อมั่นอย่างน้อยที่สุดเท่ากับระดับความเชื่อมั่นที่เราตั้งไว้ Intervals เหล่านี้ เราเรียกว่า Multiple confidence intervals หรือ simultaneous confidence intervals ได้มีผู้เสนอวิธีการต่าง ๆ มากมาย แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีที่ง่าย และสะดวกแก่การนำไปใช้โดยทั่ว ๆ ไป

ชุดของ $100(1 - \alpha)\%$ Simultaneous confidence intervals ของความแตกต่างของ means $(\mu_\ell - \mu_k)$, $\ell \neq k = 1, .., t$, m คู่ คือ

$$(\bar{x}_\ell - \bar{x}_k) \pm t_{N-t,\alpha/2m} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_k}\right)},$$

โดยที่ MSE = Mean square error, m = จำนวน confidence statements (intervals)

โดยวิธีการนี้ความน่าจะเป็นที่ทั้ง m intervals จะถูกต้องจะมีค่าอย่างน้อย $(1 - \alpha)$, นั่นคือ $\geq(1 - \alpha)$, m ไม่จำเป็นต้องเป็นคู่ของ mean ที่เป็นไปได้ทั้งหมด m อาจเป็นจำนวน intervals ที่เราสนใจเท่านั้นก็ได้ เช่น $t = 4 \therefore$ จำนวนคู่ทั้งหมดของ mean $= \binom{4}{2} = 6$ แต่ m อาจเป็น 3 ก็ได้

ตัวอย่างที่ 4.10 จากตัวอย่างที่ 4.3 เราปฏิเสธ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$MSE = .127$, $N - t = 14$ ต้องการหา 95% multiple – t confidence intervals ของความแตกต่างของ mean ทั้ง 3 คู่

$m = 3$

$$\frac{\alpha}{2m} = \frac{.05}{2 \times 3} = .0083$$

$t_{14,.0083} = 2.744$ (โดยวิธี linear interpolation, ดูหมายเหตุ)

$\bar{x}_1 = 1.46$, $\bar{x}_2 = 1.60$, $\bar{x}_3 = 2.70$

ด้วยความเชื่อมั่นอย่างน้อย 95% เชื่อว่า intervals ทั้ง 3 นี้ถูกต้อง

$\mu_2 - \mu_1 : (1.60 - 1.46) \pm 2.744 \sqrt{.127 (\frac{1}{6} + \frac{1}{5})} = .14 \pm .592 = (-.452, .732)$

$\mu_3 - \mu_2 : (2.70 - 1.60) \pm 2.744 \sqrt{.127 (\frac{1}{6} + \frac{1}{6})} = 1.10 \pm .565 = (.535, 1.665)$

$\mu_3 - \mu_1 : (2.70 - 1.46) \pm 2.744 \sqrt{.127 (\frac{1}{6} + \frac{1}{5})} = 1.24 \pm .592 = (.648, 1.832)$

สรุปจาก C.I. ทั้ง 3

$\underline{\mu_1 \quad \mu_2} \quad \mu_3$

นั่นคือ μ_1 และ μ_2 ไม่แตกต่างกัน แต่ทั้ง 2 means ต่างก็แตกต่างจาก μ_3

หมายเหตุ จากตาราง A4 $t_{14,.01} = 2.624$ และ $t_{14,.005} = 2.977$

$$.005\left[\begin{array}{ccc} .0017 & \begin{bmatrix} .01 & 2.624 \\ .0083 & X \end{bmatrix} & X - 2.624 \\ & .005 \quad 2.977 & \end{array}\right] .353$$

$$\frac{X - 2.624}{2.977 - 2.624} = \frac{.01 - .0083}{.01 - .005}$$

$$\text{หา } X = .12002 + 2.624$$

$$= 2.74402 \approx 2.744$$

4.7 Contrasts หรือ Comparisons

คำจำกัดความ 1 : เราเรียก Linear function ของ population means ที่มีรูป

$L = \sum_{i=1}^{t} C_i \mu_i$, โดยที่ $\sum_{i=1}^{t} C_i = 0$ ถ้า $n_i = n, \forall i = 1, \ldots\ldots, t$ (เพื่อทำให้เราสามารถประมาณค่า L ได้) ว่า Comparison หรือ Contrast ของ population means หรือ ของ treatment means

ในที่นี้ $\hat{L} = \sum_{i=1}^{t} C_i \hat{\mu}_i = \sum_{i=1}^{t} C_i \bar{X}_i$ เป็น unbiased estmator ของ L

$\because \text{Var}(\hat{L}) = \text{Var}(\sum_{i=1}^{t} C_i \bar{X}_i)$

$$= \text{Var}(C_1\bar{X}_1 + C_2\bar{X}_2 + \ldots + C_t\bar{X}_t)$$

และ $\text{Var}(C_i\bar{X}_i) = C_i^2\,\text{Var}(\bar{X}_i) = C_i^2\,\frac{\sigma^2}{n_i}$

$\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t$ เป็นอิสระต่อกัน

$$\therefore \text{Var}(\hat{L}) = \sum_{i=1}^{t} C_i^2\,\frac{\sigma^2}{n_i}$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}$$

$$\hat{\sigma}_L^2 = \text{est. Var}(\hat{L}) = \text{MSE} \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}$$

ในการทดสอบ $H_0 : L = 0$ or $\sum_{i=1}^{t} C_i\,\mu_i = 0$

$H_1 : L \neq 0$ or $\sum_{i=1}^{t} C_i\,\mu_i \neq 0$

เราอาจใช้ t - test โดยที่ ถ้า H_0 จริง $t_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{t} C_i\,\bar{x}_i}{\sqrt{\text{MSE} \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}}}$

จะเป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม T ซึ่งมีการแจกแจงเป็น t – distribution ที่มี d.f. = N – t

หรืออาจใช้ F - test โดยที่ถ้า H_0 จริง $f_c = t_c^2 = \dfrac{(\sum_{i=1}^{t} C_i\bar{x}_i)^2}{\text{MSE} \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}}$

จะเป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม F ซึ่งมีการแจกแจงเป็น F - distribution ที่มี d.f. = (1, N – t)

เราเรียก $SSL = \dfrac{(\sum_{i=1}^{t} C_i\bar{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}}$ ว่า Contrast sum of squares

$\because \bar{x}_i = \dfrac{T_i}{n_i}$

$\therefore SSL = \dfrac{(\sum_{i=1}^{t} C_iT_i/n_i)^2}{\Sigma \frac{C_i^2}{n_i}}$

และถ้า n_i เท่ากันหมด $(= n)$

$$SSL = \frac{(\sum_{i=1}^{t} C_iT_i)^2}{n \sum_{i=1}^{t} C_i^2}$$,ที่มี d.f. = 1

ดังนั้น เมื่อทดสอบ $H_0 : L = 0$ เราคำนวณ $f_c = \dfrac{SSL}{MSE}$ เปรียบเทียบกับ $f_{(1,N-t),\alpha}$

คำจำกัดความ 2 : Contrast 2 contrasts $L_1 = \sum_{i=1}^{t} B_i\mu_i$ และ $L_2 = \sum_{i=1}^{t} C_i\mu_i$ จะเป็น orthogonal contrasts ถ้า $\sum_{i=1}^{t} \frac{B_iC_i}{n_i} = 0$ หรือ $\sum_{i=1}^{t} B_iC_i = 0$ เมื่อ $n_1 = n_2 = \ldots, = n_t = n$

SStr มี (t − 1) d.f. เราสามารถแยก SStr ออกเป็น (t − 1) ส่วน คือ $SSL_1, SSL_2, \ldots, SSL_{t-1}$ ซึ่ง $SStr = SSL_1 + SSL_2 + \ldots + SSL_{t-1}$ ถ้า $L_1, \ldots, L_{t-1}$ ต่างเป็น orthogonal contrast ซึ่งกันและกัน โดยที่แต่ละ SSL มี 1 d.f.

ตัวอย่างที่ 4.11 ในการศึกษาเกี่ยวกับอิทธิพลของยาฆ่าวัชพืชที่ใส่ในแปลงข้าวสาลีต่อปริมาณผลผลิตข้าวสาลีที่เก็บเกี่ยวได้

วิธีการที่ 1 : ไม่ใช้ยาฆ่าวัชพืช (เป็นcontrol group)
" 2 : ยาชนิด A แบบผง
" 3 : ยาชนิด B แบบผง
" 4 : ยาชนิด A แบบเม็ด
" 5 : ยาชนิด B แบบเม็ด

ได้ใช้วิธีการสุ่มวิธีการให้แก่แปลงปลูกข้าว ใช้วิธีการละ 10 แปลง ปรากฏว่าได้ปริมาณรวมของผลผลิตจากแต่ละวิธีการเป็น $T_1 = 50, T_2 = 70, T_3 = 100, T_4 = 60$ และ $T_5 = 120$ กำหนด SST = 565

1) จงเขียน 4 mutually orthogonal contrasts ที่มีความหมาย และทดสอบว่า แต่ละ contrast = 0 หรือไม่

2) ทดสอบว่า $\mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5}{4}$ หรือไม่

1) 4 orthogonal contrasts

1.1)

coefficients ของแต่ละ contrast	L_1	L_2	L_3	L_4
วิธีการที่ 1	4	0	0	0
วิธีการที่ 2	−1	1	1	0
วิธีการที่ 3	−1	1	−1	0
วิธีการที่ 4	−1	−1	0	1
วิธีการที่ 5	−1	−1	0	−1
ความหมายของ Contrast	เปรียบเทียบกลุ่ม control & กลุ่มใช้ยา	เปรียบเทียบยาผง และยาเม็ด	เปรียบเทียบยาผง A และยาผง B	เปรียบเทียบยาเม็ด A และยาเม็ด B

หรือ 1.2)

Coefficient ของแต่ละ contrast	L_1	L_2	L_3	L_4
วิธีการที่ 1	4	0	0	0
วิธีการที่ 2	−1	1	−1	0
วิธีการที่ 3	−1	−1	0	−1
วิธีการที่ 4	−1	1	1	0
วิธีการที่ 5	−1	−1	0	1
ความหมายของ Contrast	เปรียบเทียบกลุ่ม control และกลุ่มใช้ยา	เปรียบเทียบยาชนิด A และยาชนิดB	เปรียบเทียบยาผง A และยาเม็ด A	เปรียบเทียบยาผง B และยาเม็ด B

$$G = \sum_{i=1}^{5} T_i = 400 \text{ , } N = 50, n_1 = n_2 = \ldots = n_5 = 10$$

$$CF = \frac{(400)^2}{50} = 3200$$

$$SStr = \frac{1}{10} \Sigma T_i^2 - CF = \frac{1}{10} (2500 + 4900 + 10000 + 3600 + 14400) - CF$$

$$= 3540 - 3200 = 340$$

$$SSE = SST - SStr = 565 \quad 340 = 225$$

$$MSE = \frac{SSE}{50-5} = \frac{225}{45} = 5$$

จาก 1.1) $L_1 = 4\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)$ นั่นคือ $C_1 = 4, C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = -1$

$L_2 = (\mu_2 + \mu_3) - (\mu_4 + \mu_5)$ " $C_1 = 0, C_2 = 1 = C_3, C_4 = -1 = C_5$

$L_3 = \mu_2 - \mu_3$ " $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -1, C_4 = C_5 = 0$

$L_4 = \mu_4 - \mu_5$ " $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1, C_5 = -1$

L_1, L_2, L_3 และ L_4 เป็น mutually orthogonal contrasts

$n_1 = n_2 = \ldots = n_5 = 10$

$$SSL = \frac{(\sum_{i=1}^{5} C_i T_i)^2}{n \sum_{i=1}^{5} C_i^2}$$

$$SSL_1 = [4(50) - (70 + 100 + 60 + 120)]^2/10[4^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2]$$

$$= \frac{(200 - 350)^2}{200} = 112.5$$

$$SSL_2 = (70 + 100 - 60 - 120)^2/10[1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2] = \frac{100}{40} = 2.5$$

$$SSL_3 = (70 - 100)^2/10[1^2 + (-1)^2] = \frac{900}{20} = 45$$

$$SSL_4 = (60 - 120)^2/10[1^2 + (-1)^2] = \frac{3600}{20} = 180$$

$$SSL_1 + SSL_2 + SSL_3 + SSL_4 = 340 = SStr$$

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	f_c	f_{table}[1]
Treatments	4	SStr = 340	85	$f_1 = 85/5 = 17^{**}$	$f_{(4,45),.05} = 2.575$
L_1	1	$SSL_1 = 112.5$	112.5	$f_2 = 112.5/5 = 22.5^{**}$	$f_{(4,45),.01} = 3.78$
L_2	1	$SSL_2 = 2.5$	2.5	$f_3 = 2.5/5 = .5$(n.s.)	$f_{(1,45),.05} = 4.055$
L_3	1	$SSL_3 = 45$	45	$f_4 = 45/5 = 9^{**}$	$f_{(1,45),.01} = 7.23$
L_4	1	$SSL_4 = 180$	180	$f_5 = 180/5 = 36^{**}$	
Error	45	SSE = 225	5		
Total	49	SST = 565			

[1] ค่า linear interpolated

สรุปผลการทดสอบจากตาราง ANOVA

1. f_1 ใช้ในการทดสอบ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_5$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ population means ไม่เท่ากันหมด

2. f_2 ใช้ในการทดสอบ $H_0 : L_1 = 0$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ ยาฆ่าวัชพืชมีผลต่อปริมาณผลผลิต ($\hat{L}_4 = -15$)

3. f_3 ใช้ในการทดสอบ $H_0 : L_2 = 0$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ ยาผงและยาเม็ดมีคุณภาพพอ ๆ กัน

4. f_4 ใช้ในการทดสอบ $H_0 : L_3 = 0$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ ยาผงชนิด A และยาผงชนิด B มีคุณภาพไม่เท่ากัน

5. f_5 ใช้ในการทดสอบ $H_0 : L_4 = 0$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ ยาเม็ดชนิด A และยาเม็ดชนิด B มีคุณภาพไม่เท่ากัน

2) $H_0 : \mu_1 = \dfrac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5}{4}$ หรือ $4\mu_1 = \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$

หรือ $4\mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5) = 0$

หรือ $L_1 = 0$

$H_1 : L_1 \neq 0$

$\alpha = .01$

$CR : F > f_{(1,45),.01} = 7.23$

$f_C = 22.5$

$\because f_C > 7.23$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ population mean ของ population ที่ 1 ไม่เท่ากับค่าเฉลี่ยของอีก 4 population means ที่เหลือ

4.8 Scheffé 's method of multiple comparisons

ถ้าเราสนใจ contrast ใด contrast หนึ่งในรูป $L = \sum_{i=1}^{t} C_i\mu_i$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{t} C_i = 0$ จากหัวข้อ 4.7 เราสามารถหา $100(1 - \alpha)\%$ C.I. ของ L ได้ดังนี้

$$\hat{L} \pm t_{N-t,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}} \qquad (1)$$

ในกรณีที่เราสนใจ contrast ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เราสามารถจะเขียนขึ้นได้จาก t population means วิธีการของ Scheffé จะรับประกันว่าทั้ง family ของ Confidence intervals ของทุก contrasts จะถูกต้องด้วยความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ แต่เนื่องจากว่าจำนวน contrasts ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีจำนวนมากมาย และเรามักไม่สนใจทั้งหมดใน family แต่สนใจเพียงบางส่วนเท่านั้น เราจึงมักกล่าวว่าวิธีการของ Scheffe' จะรับประกันชุดของ C.I.'s ชุดหนึ่งด้วยความเชื่อมั่นอย่างน้อย $(1-\alpha)$ Confidence interval ตามรูปแบบของ Scheffe' คือ

$$\hat{L} \pm \sqrt{(t-1)\, f_{(t-1,\, N-t),\, \alpha}} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}} \qquad (2)$$

ข้อสังเกต จะเห็นได้ว่า C.I. ใน (2) เราได้จากการแทนที่ $t_{N-t,\, \frac{\alpha}{2}}$ ใน (1) ด้วย $\sqrt{(t-1)\, f_{(t-1,N-t),\alpha}}$ เท่านั้น ในการหา C.I. ของ Contrast หนึ่งโดยใช้สูตร (2) จะให้ C.I. ที่ยาวกว่า C.I. ที่หาโดยใช้สูตร (1) ทั้งนี้เพราะวิธีการของ Scheffe' จะต้องรับประกันทั้ง C.I. ของ Contrast นั้น และ C.I. ของ Contrast อื่น ๆ ใน family ด้วย C.I. ที่ยาวกว่าจึงเป็นสิ่งที่วิธีการของ Scheffe' จะต้องชดเชยกับข้อดีอันนี้

ตัวอย่างที่ 4.12 ในการทดลองให้สารกระตุ้นหัวใจ 4 ชนิดแก่หนูตะเภา (Guinea pig) จำนวนหนึ่งในห้องทดลอง แล้วบันทึกปริมาณสารที่ให้จนหนูแต่ละตัวตาย (dosage of death) ผลปรากฏดังนี้

	สารชนิดที่ 1	สารชนิดที่ 2	สารชนิดที่ 3	สารชนิดที่ 4
	29,28,23, 26,26,19 25,29,26, 28	17,25,24, 19,28,21, 20,25,19, 24	17,16,21, 22,23,18 20,17,25, 21	18,20,25, 24,16,20 20,17,19, 17
Total : T_i	259	222	200	196
mean : $\bar{x}_i$	25.9	22.2	20.0	19.6
n_i	10	10	10	10

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	fc	f table
สาร	3	249.875	83.292	8.545**	$f_{(3,36),.01} = 4.38$
Error	36	350.900	9.747		
Total	39	600.775			

Contrasts ที่สนใจ คือ

$$L_1 = \frac{\mu_1+\mu_3}{2} - \frac{\mu_2+\mu_4}{2}$$

$$L_2 = \mu_1 - \frac{\mu_2+\mu_3+\mu_4}{3}$$

$$L_3 = \frac{\mu_1+\mu_2}{2} - \frac{\mu_3+\mu_4}{2}$$

Pairwise Comparisons : $\binom{4}{2} = 6$ คู่

$L_4 = \mu_1 - \mu_4$

$L_5 = \mu_1 - \mu_3$

$L_6 = \mu_1 - \mu_2$

$L_7 = \mu_2 - \mu_4$

$L_8 = \mu_2 - \mu_3$

$L_9 = \mu_3 - \mu_4$

1) $L_1 = \frac{\mu_1+\mu_3}{2} - \frac{\mu_2+\mu_4}{2}$, $C_{11} = \frac{1}{2}$, $C_{12} = -\frac{1}{2}$, $C_{13} = \frac{1}{2}$, $C_{14} = -\frac{1}{2}$

$$\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{4} \frac{C_i^2}{n_i}} = \sqrt{9.747 \left[\frac{(1/2)^2}{10} + \frac{(-1/2)^2}{10} + \frac{(1/2)^2}{10} + \frac{(-1/2)^2}{10} \right]}$$

$$= 0.9873$$

$$\hat{L}_1 = \frac{\bar{x}_1+\bar{x}_3}{2} - \frac{\bar{x}_2+\bar{x}_4}{2} = \left(\frac{25.9+20.2}{2} - \frac{22.2+19.6}{2} \right) = 23.05-20.9$$

$$= 2.15$$

(α = .05) Scheffe''s Confidence interval ของ L_1 คือ

$$\hat{L}_1 \pm \sqrt{(t-1)\, f_{(t-1,\, N-t),\, \alpha}} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{C_i^2}{n_i}}$$

$$= 2.15 \pm \sqrt{3 f_{(3,36),.05}}\,(.9873)$$

$$= 2.15 \pm \sqrt{3\,(2.886)}\,(.9873)$$

$$= 2.15 \pm 2.9424\,(.9873)$$

$$= 2.15 \pm 2.905 = (-.755,\ 5.055)$$

2) $\hat{L}_2 = 5.3$, $\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{4} \frac{C_i^2}{n_i}} = 1.14$

Scheffe''s C.I. ของ L_2 คือ $5.3 \pm 2.9424\,(1.14)$

$$= 5.3 \pm 3.354 = (1.946,\ 8.654)$$

3) $\hat{L}_3 = 4.24$, $\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{4} \frac{C_i^2}{n_i}} = .9873$

Scheffe''s C.I. ของ L_3 คือ $4.24 \pm 2.9424\,(.9873)$

$$= 4.24 \pm 2.905 = (1.345,\ 7.155)$$

Scheffe''s C.I. สำหรับ pairwise comparisons

$$\sqrt{(t-1)\, f_{(t-1,N-t),\alpha}} \sqrt{MSE \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right)} = (2.9424)\,(1.3962) = 4.108$$

Contrast	Point estimate	C.I.
L_4	$\hat{L}_4 = (25.9-19.6) = 6.3$	$6.3 \pm 4.108 = (2.192,\ 10.408)$
L_5	$\hat{L}_5 = (25.9-20.0) = 5.9$	$5.9 \pm 4.108 = (1.792,\ 10.008)$
L_6	$\hat{L}_6 = (25.9-22.2) = 3.7$	$3.7 \pm 4.108 = (-0.408,\ 7.808)$
L_7	$\hat{L}_7 = (22.2-19.6) = 2.6$	$2.6 \pm 4.108 = (-1.508,\ 6.708)$
L_8	$\hat{L}_8 = (22.2-20.0) = 2.2$	$2.2 \pm 4.108 = (-1.908,\ 6.308)$
L_9	$\hat{L}_9 = (20.0-19.6) = 0.4$	$0.4 \pm 4.108 = (-3.708,\ 4.508)$

สรุปจาก pairwise comparisons

$\bar{x}_4$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$
19.6	20.0	22.2	25.9

นั่นคือ $\mu_4 = \mu_3 = \mu_2$ และ $\mu_1 = \mu_2$ ส่วนคู่อื่น ๆ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

จากวิธีการของ Scheffe' เราสรุปได้ด้วยความเชื่อมั่นอย่างน้อย 95% ว่า C.I.'s เหล่านี้ถูกต้อง

L_1 : (−.755, 5.055) (ความยาวของช่วง = 5.055 − (−.755) = 5.81)

L_2 : (1.946, 8.654)

L_3 : (1.345, 7.155)

:

L_9 : (−3.708, 4.508)

หมายเหตุ ถ้าสนใจที่จะหา 95% C.I. ของ L_1 เท่านั้น เราใช้สูตร (1) ของหัวข้อ 4.8

∴ 95% C.I. ของ L_1 คือ

$$\hat{L}_1 \pm t_{36,.025}\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{4} \frac{C_i^2}{n_i}}$$

$$= 2.15 \pm (2.0282)(.9873)$$

$$= 2.15 \pm 2.002$$

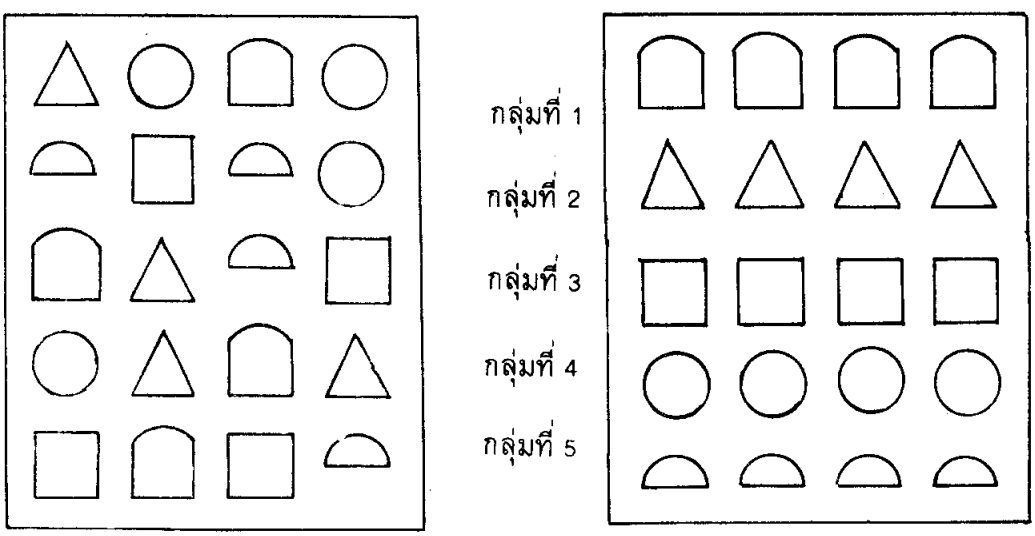
= (.148, 4.152) ความยาวของช่วง = 4.152 − .148 = 2.002 ซึ่งสั้นกว่า C.I. ของ L_1 ที่หาได้โดยวิธีของ Scheffé

($t_{36,.025}$ = 2.0282 ได้จากวิธี linear interpolation)

4.9 การทดลองแบบ Randomized complete block (RCB)

ในการทดลองแบบ CRD ความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง (experimental error) อาจเกิดขึ้นได้มากเนื่องจากความไม่เป็นเนื้อเดียวกัน (non-homogeneous) ของหน่วยทดลอง (experimental unit) วิธีการอันหนึ่งซึ่งขจัดหรือลดความคลาดเคลื่อนจากการทดลองคือโดยวิธีการแยกกลุ่ม (blocking) ของหน่วยทดลอง ในการแยกกลุ่มเราแยกหน่วยทดลองออกเป็นกลุ่ม ๆ โดยที่หน่วยที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันจะเหมือน ๆ กัน (homogeneous) แต่หน่วยที่อยู่ต่างกลุ่มกันจะต่างกัน ตัวอย่างเช่นในการทดสอบปฏิกิริยาต่อน้ำหอม 4 ชนิด คนถูกถามอาจจะถูกแบ่งออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามอายุ ดังนั้นความแตกต่างในเรื่องความชอบไม่ชอบซึ่งเนื่องมาจากอายุจะถูกขจัดออกไปจากความคลาดเคลื่อนจากการทดลอง

ในการเปรียบเทียบ k วิธีการ ในที่นี้เราจะจัดกลุ่ม (block) ซึ่งมีสมาชิกกลุ่มละ k ตัว แล้วกำหนดแต่ละวิธีการให้แก่แต่ละหน่วยทดลองในกลุ่ม ดังนั้นทุกวิธีการจะถูกใช้ 1 ครั้งในแต่ละกลุ่ม หรืออาจกล่าวว่าทุกวิธีการจะปรากฏในแต่ละกลุ่ม ดังนั้นชื่อของการทดลองจึงมีคำว่า "complete" อยู่ด้วย กรณีนี้เป็นกรณีหนึ่งของ Balanced design



ก) หน่วยทดลองลักษณะต่าง ๆ กัน ข) แยกกลุ่มตามลักษณะที่เหมือนกัน

รูปที่ 4.2 รูปแสดงแนวคิดของการแยกกลุ่ม (Blocking)