บทที่ 3
การทดสอบสมมติฐาน
(Testing Hypotheses)

สมมติฐานทางสถิติ (Statistical hypothesis) คือคำกล่าวหรือข้อความ (Statement) ที่กล่าวถึงลักษณะของประชากร เราจะใช้ข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรในการพิสูจน์คำกล่าวหรือข้อความนั้น

การเลือก H_0 (Null hypothesis) และ H_1 (Alternative hypothesis) นั้น เมื่อเราตั้งใจจะพิสูจน์คำกล่าวอ้างโดยใช้ข้อสนับสนุนจากตัวอย่าง ข้อความที่ตรงกันข้ามกับคำกล่าวอ้างเราจะตั้งเป็น H_0 ส่วนคำกล่าวอ้างนั้น ๆ เราจะตั้งเป็น H_1

ตัวอย่างที่ 3.1 จากประสบการณ์พบว่า 60% ของผู้ใช้ยาชนิดหนึ่งหายจากโรคชนิดหนึ่งได้ ได้คาดว่ายาชนิดใหม่จะทำให้คนหายจากโรคได้มากกว่ายาชนิดเก่า ถ้าลองใช้ยาชนิดใหม่กับคนเป็นโรคนี้ 20 คน แล้วนับจำนวนคนที่หายจากโรคไว้ เราจะใช้วิธีการทดสอบสมมติฐานเพื่อช่วยตอบปัญหาที่ว่า "มีเหตุผลมากพอที่จะกล่าวว่ายาชนิดใหม่ให้อัตราการหายจากโรคสูงกว่ายาชนิดเก่าหรือไม่"

ในการทดสอบสมมติฐานเราจะตั้ง

H_0 : ยาชนิดใหม่ไม่ดีกว่ายาชนิดเก่า หรือ $p \leq .6$

H_1 : ยาชนิดใหม่ดีกว่ายาชนิดเก่า หรือ $p > .6$

โดยที่ p = อัตราการหายจากโรคเนื่องจากการใช้ยาชนิดใหม่ หรือ

= ความน่าจะเป็นที่คนคนหนึ่งจะหายจากโรคเนื่องจากใช้ยาชนิดใหม่

ในการทดสอบ H_0 vs. H_1 เราตั้งใจไว้ว่าเราจะเชื่อไว้ก่อนว่า H_0 เป็นจริง นอกจากว่าข้อมูลที่ได้จากตัวอย่างคัดค้านกับ H_0 ซึ่งในกรณีนี้เราจะยอมรับ H_1 แทน การปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 จริง เราถือว่าร้ายแรงกว่า การไม่ปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_1 จริง ดังนั้น ในทางปฏิบัติเราจึงกำหนด α = Pr[Type I - error] ซึ่งเรียกว่า ระดับนัยสำคัญ (Level of significance)

3.1 ความคลาดเคลื่อน 2 ชนิดในการทดสอบสมมติฐาน

ผลสรุปในการทดสอบ	เหตุการณ์จริงที่เราไม่ทราบ	
	H_0 จริง	H_0 ไม่จริง
ไม่ปฏิเสธ H_0 (Do not reject H_0)	✓	X(Type II - error)
ปฏิเสธ H_0 (Reject H_0)	X(Type I - error)	✓

ความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (Type I - error) เกิดขึ้นเมื่อเราปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 จริง
ความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 2 (Type II - error) เกิดขึ้นเมื่อเราไม่ปฏิเสธ H_0 เมื่อ H_0 ไม่จริง

α = Pr[Type I - error] = Pr[Reject H_0 | H_0 true]

β = Pr[Type II - error] = Pr[Do not reject H_0 | H_0 false]

3.2 6 ขั้นของการทดสอบสมมติฐาน

1) ตั้ง H_0 ให้เกี่ยวข้องกับตัวพารามิเตอร์ : $H_0 : \theta = \theta_0$
2) ตั้ง H_1 : $H_1 : \theta < \theta_0$ หรือ $\theta > \theta_0$ หรือ $\theta \neq \theta_0$
3) กำหนด α (ระดับนัยสำคัญ)
4) กำหนดตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ (Test statistic) โดยที่ ถ้า H_0 จริงแล้ว เราต้องทราบ Sampling Distribution ของตัวสถิตินั้น

เขียนบริเวณที่จะไม่ยอมรับ หรือเขตวิกฤต (Critical Region = CR.) โดยดูจาก H_1 ว่า การทดสอบจะเป็นการทดสอบแบบหางเดียว (One - tailed test) หรือ การทดสอบแบบสองหาง (Two - tailed test)

นั่นคือ ถ้า $H_1 : \theta < \theta_0$ หรือ $\theta > \theta_0$ การทดสอบจะเป็นการทดสอบแบบหางเดียว คือ หางซ้าย และหางขวา ตามลำดับ

ส่วน ถ้า $H_1 : \theta \neq \theta_0$ การทดสอบจะเป็นการทดสอบแบบสองหาง

5) สุ่มตัวอย่าง แล้วคำนวณค่าของตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบโดยใช้ค่าจากตัวอย่าง

6) สรุปผล ถ้าค่าคำนวณในขั้นที่ 5 ตกอยู่ใน CR. เราจะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ $= \alpha$ (fail to accept H_0) แต่ถ้าค่าคำนวณนั้นไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ระดับนัยสำคัญ $= \alpha$

3.3 ตารางสรุปเกี่ยวกับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ Population mean (s), Population proportion (s) และ Population variance (s)

	H_0	Condition (s)	Test Statistic	H_1	CR.
1	$\mu = \mu_0$	ทราบค่า σ^2 และ Normal population หรือ n มีขนาดใหญ่จาก population อะไรก็ได้ที่ทราบค่า σ^2	ถ้า H_0 จริง $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ ($Z < -z_{\alpha/2}$ และ $Z > z_{\alpha/2}$)
2	$\mu = \mu_0$	ไม่ทราบค่า σ^2, Normal population, n ขนาดเล็ก (<30)	ถ้า H_0 จริง $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ $t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$T < -t_{n-1,\alpha}$ $T > t_{n-1,\alpha}$ ($T < -t_{n-1,\alpha/2}$ และ $T > t_{n-1,\alpha/2}$)
3	$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	ทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2 ของ 2 Normal populations หรือ ทั้ง n_1 และ n_2 มี	ถ้า H_0 จริง $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ $z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ ($Z < -z_{\alpha/2}$ และ $Z > z_{\alpha/2}$)

	H_0	Condition (s)	Test Statistic	H_1	CR.
		ขนาดใหญ่ จาก 2 populations ใดๆ ก็ได้ที่ทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2 ตัวอย่างทั้ง 2 เป็น อิสระต่อกัน			
4	$\mu_1-\mu_2=d_0$	2 Normal Populations ไม่ทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2 แต่ $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ n_1 และ n_2 ขนาดเล็ก 2 ตัวอย่างเป็นอิสระต่อกัน	ถ้า H_0 จริง $T=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $\sim t_{n_1+n_2-2}$ $t_c=\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$, $s_p^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu_1-\mu_2<d_0$ $\mu_1-\mu_2>d_0$ $\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$T<-t_{v,\alpha}$ $T>t_{v,\alpha}$ $(T<-t_{v,\alpha/2}$ และ $T>t_{v,\alpha/2}$ โดยที่ $v=$ n_1+n_2-2
5	$\mu_1-\mu_2=d_0$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ และไม่ทราบ ค่า 2 ตัวอย่างเป็น อิสระต่อกัน	$T'=\dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\ \dot{\sim}\ t_v$ โดยที่ $v=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$ $t_c=\dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}$	$\mu_1-\mu_2<d_0$ $\mu_1-\mu_2>d_0$ $\mu_1-\mu_2\neq d_0$	$T<-t_{v,\alpha}$ $T>t_{v,\alpha}$ $(T>-t_{v,\alpha/2}$ และ $T>t_{v,\alpha/2})$
6	$\mu_D=d_0$	Paired Comparison (2 ตัวอย่างไม่เป็น อิสระต่อกัน)	ถ้า H_0 จริง $T=\dfrac{\bar{D}-d_0}{S_D/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$ $t_c=\dfrac{\bar{d}-d_0}{s_D/\sqrt{n}}$,	$\mu_D<d_0$ $\mu_D>d_0$ $\mu_D\neq d_0$	$T<-t_{n-1,\alpha}$ $T>t_{n-1,\alpha}$ $(T<-t_{n-1,\alpha/2}$

	H_0	Condition (s)	Test Statistic	H_1	CR.
		n = จำนวน pair	$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$ $s_D^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}\right]$		และ $T > t_{n-1,\alpha/2}$)
7	$p = p_0$	Binomial population n มีขนาดใหญ่ และ p_0 ไม่เข้าใกล้ 0 หรือ 1	ถ้า H_0 จริง $Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} \sim N(0, 1)$ $z_c = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}}$ x = จำนวน success ในการกระทำ n ครั้ง	$p < p_0$ $p > p_0$ $p \neq p_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ ($Z < -z_{\alpha/2}$ และ $Z > z_{\alpha/2}$)
8	$p_1 = p_2$ หรือ $p_1 - p_2 = 0$	2 Binomial populations, n_1 และ n_2 มีขนาดใหญ่ ตัวอย่างทั้ง 2 เป็นอิสระต่อกัน	ถ้า H_0 จริง $Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}\hat{Q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim N(0, 1)$ $\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1}$, $\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ และ $\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$ $z_c = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$ $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$, $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$	$p_1 < p_2$ $p_1 > p_2$ $p_1 \neq p_2$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$ ($Z < -z_{\alpha/2}$ และ $Z > z_{\alpha/2}$)
9	$p_1 - p_2 = d_0$ ($d_0 \neq 0$)	2 Binomial populations, n_1 และ	ถ้า H_0 จริง $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{Q}_1}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\hat{Q}_2}{n_2}}}$	$p_1 - p_2 < d_0$ $p_1 - p_2 > d_0$	$Z < -z_\alpha$ $Z > z_\alpha$

	H_0	Condition (s)	Test Statistic	H_1	CR.
		n_2 มีขนาดใหญ่ ตัวอย่างทั้ง 2 เป็นอิสระต่อกัน	$\sim N(0, 1)$ $z_c = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$	$p_1 - p_2 \neq d_0$	$(Z < -z_{\alpha/2}$ และ $Z > z_{\alpha/2})$
10	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	Normal population	ถ้า H_0 จริง $X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ $\chi^2_c = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$, $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right]$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ $X^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$ $(X^2 < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ และ $X^2 > \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}})$
11	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ หรือ $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	2 Normal populations ตัวอย่างทั้ง 2 เป็นอิสระต่อกัน	ถ้า H_0 จริง $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(v_1,v_2)}$ $v_1 = n_1 - 1$ และ $v_2 = n_2 - 1$ $f_c = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ $s_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\left[\Sigma x_{1i}^2 - \dfrac{(\Sigma x_{1i})^2}{n_1}\right]$ $s_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\left[\Sigma x_{2i}^2 - \dfrac{(\Sigma x_{2i})^2}{n_2}\right]$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F < \dfrac{1}{f_{(v_2,v_1),\alpha}}$ $F > f_{(v_1,v_2),\alpha}$ $(F < \dfrac{1}{f_{(v_2,v_1),\frac{\alpha}{2}}}$ และ $F > f_{(v_1,v_2),\frac{\alpha}{2}})$

หมายเหตุ การทดสอบสมมติฐานในข้อ 10 และ 11 จะกล่าวโดยละเอียดในหัว 2 ข้อถัดไป

3.4 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ Population variance (σ^2) ของ Normal population

สุ่มตัวอย่างขนาด n จาก Normal population ซึ่งมี Population variance σ^2

1) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

2) H_1 : 1. $\sigma^2 < \sigma_0^2$ หรือ

   2. $\sigma^2 > \sigma_0^2$ หรือ

   3. $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

3) กำหนด α (ในทางปฏิบัติ นิยมใช้ α = .05 หรือ .01)

4) ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{(ดูหัวข้อ 2.7)}$$

ถ้า H_0 จริง $X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$

CR. คือ 1. $X^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$

2. $X^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$

3. $X^2 < \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ และ $X^2 > \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$

5) จากตัวอย่างสุ่มขนาด n

คำนวณ $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\left[\Sigma x_i^2 - \dfrac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]$

$$\chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

6) สรุปผล 1. ถ้า χ^2_c ตกอยู่ใน CR. เราจะปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ยอมรับ H_1

2. ถ้า χ^2_c ตกอยู่นอก CR. เราจะไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ยอมรับ H_0

ตัวอย่างที่ 3.2 แผ่นปลาสติกที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องหนึ่ง ได้ถูกตรวจสอบเป็นระยะ ๆ เพื่อควบคุมความหนาของมัน มีสภาวะบางอย่างที่ไม่สามารถควบคุมได้ทำให้ความหนาที่วัดได้จะไม่คงที่ อย่างไรก็ดีถ้า s.d. ของความหนาเกิน 1.5 ม.ม. จะเป็นเหตุให้ต้องคำนึงถึงคุณภาพของแผ่นปลาสติกที่ผลิตออกมา สุ่มตัวอย่าง 10 ชิ้นจากการผลิตในผลัดหนึ่ง และวัดความหนา (ม.ม.) ได้ดังต่อไปนี้ 226, 228, 226, 225, 232, 228, 227, 229, 225 และ 230

ก) ข้อมูลทำให้เราตั้งข้อสงสัยได้ไหมว่า ความแปรปรวน (σ^2) ของความหนาของของที่ผลิตในผลัดนี้เกินมาตรฐานที่ได้ตั้งไว้ ให้ทดสอบที่ $\alpha = .05$ และจงบอกข้อสมมุติที่เรากล่าวถึง population distribution ด้วย

ข) จงหา 95% C.I. ของ σ (s.d. ของความหนาของแผ่นปลาสติกที่ผลิตจากผลัดนี้)

ก) 1) $H_0 : \sigma^2 = (1.5)^2 = 2.25$

2) $H_1 : \sigma^2 > 2.25$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{9,.05} = 16.919 \quad \because n = 10, \text{d.f.} = 9$

5) $\Sigma x_i^2 = 518064$

$\Sigma x_i = 2276$

$$s^2 = \frac{1}{9}\left[518064 - \frac{(2276)^2}{10}\right] = 5.1556$$

$$\therefore \chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)(5.1556)}{2.25} = 20.6224$$

6) $\chi^2_c = 20.6224 > 16.919$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ เราเชื่อว่าความแปรปรวน (variance) ของความหนาของแผ่นปลาสติกที่ผลิตจากผลัดนี้เกินมาตรฐานที่ตั้งไว้

ข้อสมมุติที่เรากล่าวถึง population distribution คือ population เป็น Normal population

ข) 95% C.I. ของ σ^2 คือ $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{9,.025}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{9,.975}}\right)$

$$= \left(\frac{9(5.1556)}{19.0228}, \frac{9(5.1556)}{2.7039}\right)$$

$$= (2.4392, 17.1605)$$

$\therefore$ 95% C.I. ของ σ คือ $(\sqrt{2.4392}, \sqrt{17.1605})$

$$= (1.5618, 4.1425)$$

3.5 การเปรียบเทียบ Variances ของ 2 Normal populations โดยทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

สุ่มตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 (โดยที่ 2 ตัวอย่างเป็นอิสระต่อกัน) จาก 2 Normal populations ที่มี population variance σ_1^2 และ σ_2^2 ตามลำดับ

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ หรือ $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$

2) H_1 : 1. $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ หรือ

2. $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ หรือ

3. $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

3) กำหนด α

4) ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1)} \quad \text{(ดูหัวข้อ 2.12)}$$

ถ้า H_0 จริง $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$

CR. คือ 1. $F < \frac{1}{f_{(\nu_2,\nu_1),\alpha}}$

2. $F > f_{(\nu_1,\nu_2),\alpha}$

3. $F < \frac{1}{f_{(\nu_2,\nu_1),\frac{\alpha}{2}}}$ และ $F > f_{(\nu_1,\nu_2),\frac{\alpha}{2}}$

โดยที่ $\nu_1 = n_1 - 1$ และ $\nu_2 = n_2 - 1$

5) จากตัวอย่าง 2 ตัวอย่างคำนวณ

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\left[\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}^2 - \frac{(\Sigma x_{1i})^2}{n_1}\right] \text{ และ}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\left[\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}^2 - \frac{(\Sigma x_{2i})^2}{n_2}\right]$$

$$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

6) สรุปผล 1. ถ้า f_c ตกอยู่ใน CR. เราจะปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ยอมรับ H_1

2. ถ้า f_c ตกอยู่นอก CR. เราจะไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ยอมรับ H_0

ตัวอย่างที่ 3.3 จากตัวอย่างที่ 2.10 มีเหตุผลเพียงพอหรือไม่ที่จะสรุปว่าความแปรปรวนของน้ำหนักของผ้าที่ผลิตจากเครื่อง A จะมากกว่าความแปรปรวนของน้ำหนักของผ้าที่ผลิตจากเครื่อง B

1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ หรือ $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$

2) $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ หรือ $\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(11,9),.05} = 3.11$

5) $n_1 = 12, s_1^2 = (2.3)^2 = 5.29$

$n_2 = 10, s_2^2 = (1.5)^2 = 2.25$

$$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5.29}{2.25} = 2.35$$

6) $f_c = 2.35 < 3.10$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ ความแปรปรวนของน้ำหนักของผ้าที่ผลิตจากเครื่อง A ไม่มากกว่าความแปรปรวนของน้ำหนักของผ้าที่ผลิตจากเครื่อง B

3.6 การวิเคราะห์ข้อมูลที่ถูกจัดจำแนกแล้ว (Analysis of Categorized Data)

3.6.1 การทดสอบ Goodness of fit (Goodness of fit test หรือ Pearson's χ^2 test for Goodness of fit)

การทดสอบที่เรียกว่า Goodness of fit เป็นการทดสอบว่าค่าความถี่ที่นับมาได้จริง-(Observed frequency : o) และค่าความถี่ที่คาดหมายว่าควรจะเป็น (Expected frequency : e) นั้นใกล้เคียงกันดีหรือไม่ การทดสอบขึ้นอยู่กับค่า $\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$ ซึ่งเป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม X^2 ที่เราสามารถประมาณการแจกแจงของมันด้วย Chi-square distribution โดยที่ o_i และ e_i แทนค่าความถี่ที่นับมาได้จริง และค่าความถี่คาดหมายสำหรับ cell ที่ i

ถ้าค่าของ o_i's ใกล้กับค่า e_i's ที่คู่กัน ค่า χ_c^2 จะเล็ก นั่นแสดงว่า ตัวเลข 2 ชุดใกล้เคียงกัน ดังนั้นถ้าเราต้องการทดสอบ H_0 : ตัวเลข 2 ชุด fit กันดี เราจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ χ_c^2 มีค่ามาก นั่นคือ CR. จะอยู่หางขวาของ Chi-square curve

ในการทดสอบ Goodness of fit เราทดสอบว่าข้อมูลชุดที่เราสังเกตมาได้ fit กับรูปการแจกแจงของความน่าจะเป็น (Probability distribution) ที่เรารู้จักหรือไม่

ตัวอย่างของรูปการกระจายของความน่าจะเป็นที่เรารู้จักเช่น

Multinomial distribution
Uniform ″
Binomial ″
Poisson ″
Geometric ″
Normal ″
Exponential ″ , etc.

ในการทดสอบอาจแยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 กรณีที่ความน่าจะเป็นของแต่ละเซลสามารถหาได้จาก H_0 โดยไม่ต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ ในกรณีนี้จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าจะ = 0

กรณีที่ 2 กรณีที่ต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ก่อนที่จะหาความน่าจะเป็นของแต่ละเซล

ถ้า $n = \sum_{i=1}^{k} o_i$ (total frequency) และ p_i = cell probability แล้ว $e_i = np_i$

สูตรในการหา d.f. ของ Chi-square distribution

d.f. =	จำนวนเทอม (ที่รวมกันเป็นค่า χ_c^2) – 1 – จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า

หมายเหตุ ก่อนคำนวณค่า χ_c^2 ต้องตรวจดูก่อนว่า มี e_i ของ cell ใดบ้างหรือไม่ที่ < 5 ถ้ามีให้รวมค่า e_i กับ cell ข้างเคียงจนได้อย่างน้อย 5 (เมื่อรวม e_i's ต้องรวม o_i's ที่คู่กันด้วย) แล้วจึงหาค่า χ_c^2 ทั้งนี้เพราะการประมาณการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X^2 ว่าเป็น Chi-square distribution จะดี ถ้า $e_i \geq 5$

ตัวอย่างที่ 3.4 (Case 1)

จากการสำรวจเพศของลูกฝาแฝดจำนวน 300 คู่ ปรากฏว่ามี 84 คู่เป็นชายชาย มี 126 คู่ เป็นชายหญิง และอีก 90 คู่เป็นหญิงหญิง ต้องการทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่า จำนวนคู่แฝดจะอยู่ในอัตราส่วน ชช : ชญ : ญญ = 1 : 2 : 1 หรือไม่

1) H_0 : อัตราส่วนของคู่แฝด ชช : ชญ : ญญ = 1 : 2 : 1

2) H_1 : อัตราส่วนของคู่แฝด ชช : ชญ : ญญ ไม่เป็น 1 : 2 : 1

3) $\alpha = .05$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{(3-1),.05} = 5.99$

5) ถ้า H_0 จริง $p_1 = Pr[\text{ชช}] = \frac{1}{4}$, $e_1 = np_1 = 300(\frac{1}{4}) = 75$

$p_2 = Pr[\text{ชญ}] = \frac{1}{2}$, $e_2 = np_2 = 300(\frac{1}{2}) = 150$

$p_3 = Pr[\text{ญญ}] = \frac{1}{4}$, $e_3 = np_3 = 300(\frac{1}{4}) = 75$

	ชช	ชญ	ญญ	รวม
o_i	84	126	90	300
e_i	75	150	75	300

$$\chi^2_c = \frac{(84-75)^2}{75} + \frac{(126-150)^2}{150} + \frac{(90-75)^2}{75} = 7.92$$

6) $\chi^2_c = 7.92 > 5.99$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ อัตราส่วนของ ชช : ชญ : ญญ ไม่เป็น 1 : 2 : 1

ตัวอย่างที่ 3.5 (Case 1)

ตัวเลขจากตารางเลขสุ่ม (Uniform random number table) แต่ละตัวมีความน่าจะเป็นที่จะถูกเลือกแต่ละครั้งเท่า ๆ กัน คือ $\frac{1}{10}$ เพื่อทดสอบความถูกต้องของตาราง จึงได้สุ่มตัวเลขมา 200 ตัว ได้ผลดังนี้

ตัวเลข	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	รวม
o_i	18	24	15	28	23	20	25	22	14	11	200 = n

ถ้าให้ X แทนตัวเลขจากตารางเลขสุ่ม $x = 0, 1, \ldots, 9$ **จะทดสอบที่** $\alpha = .05$ ว่า X มีการแจกแจงเป็น Uniform distribution หรือไม่

1) H_0 : X มีการแจกแจงเป็น Uniform distribution ที่มี $f(x) = \frac{1}{10}$, $x = 0, \ldots, 9$

2) H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Uniform distribution

3) $\alpha = .05$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{9,.05} = 16.9$

5) ถ้า H_0 เป็นจริง $e_i = np_i = 200\left(\frac{1}{10}\right) = 20, \forall i = 1, \ldots, 10$

ตัวเลข	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	รวม
o_i	18	24	15	28	23	20	25	22	14	11	200
e_i	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	200

$$\chi^2_c = \frac{(18-20)^2}{20} + \ldots + \frac{(11-20)^2}{20} = 13.20$$

6) $\chi^2_c = 13.2 < 16.9$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ ตารางเลขสุ่มนี้ให้ตัวเลขที่มีโอกาสจะถูกเลือกเท่า ๆ กัน

ตัวอย่างที่ 3.6 (Case 2)

จากกระต่าย 80 ครอก ซึ่งมีลูกครอกละ 3 ตัว นับจำนวนตัวผู้ในแต่ละครอก ได้ผลดังนี้

จำนวนตัวผู้ในครอก	0	1	2	3	รวม
จำนวนครอก	19	32	22	7	80

ถ้า Assume Bernoulli model สำหรับเพศของกระต่ายในแต่ละครอก (ความน่าจะเป็นของการเกิดเพศใดเพศหนึ่งคงที่และในแต่ละครอก การเกิดลูกแต่ละตัวเป็นอิสระต่อกัน)

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าจำนวนกระต่ายตัวผู้จากครอกละ 3 ตัว มีการแจกแจงเป็น **Binomial distribution ที่มี n = 3**

ให้ p = Pr [**เป็นตัวผู้**]

X = จำนวนกระต่ายตัวผู้ในครอกที่มีลูกกระต่าย 3 ตัว

จากข้อมูล $\hat{p} = \dfrac{\text{จำนวนกระต่ายตัวผู้ทั้งหมดใน 80 ครอก}}{\text{จำนวนกระต่ายทั้งหมดใน 80 ครอก}}$

$$= \frac{(0 \times 19) + (1 \times 32) + (2 \times 22) + (3 \times 7)}{80 \times 3}$$

$$= \frac{97}{240} = .404 \approx .4$$

1) H_0 : **Binomial distribution fit กับข้อมูล**

2) H_1 : **Binomial distribution ไม่ fit กับข้อมูล**

3) $\alpha = .05$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{2,.05} = 5.991$

(d.f. = 4 − 1 − 1 = 2 , **เพราะว่าเราต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ p ดังนั้น จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า** = 1)

5) **ถ้า** H_0 **จริง**

$$\hat{p}_1 = \widehat{Pr[X = 0]} = \binom{3}{0}(.4)^0(.6)^3 = .216$$

$$\hat{p}_2 = \widehat{Pr[X = 1]} = \binom{3}{1}(.4)^1(.6)^2 = .432$$

$$\hat{p}_3 = \widehat{Pr[X = 2]} = \binom{3}{2}(.4)^2(.6)^1 = .288$$

$$\hat{p}_4 = \widehat{Pr[X = 3]} = \binom{3}{3}(.4)^3(.6)^0 = \underline{.064}$$

$$\underline{\underline{1.00}}$$

$e_1 = 80(.216) = 17.28$

$e_2 = 80(.432) = 34.56$

$e_3 = 80(.288) = 23.04$

$e_4 = 80(.064) = 5.12$

x	0	1	2	3	รวม
o_i	19	32	22	7	80
e_i	17.28	34.56	23.04	5.12	80
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	.1712	.1896	.0469	.6903	$1.098 = \chi_c^2$

6) $\chi_c^2 = 1.098 < 5.991$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ Binomial distribution fit กับข้อมูลชุดนี้ หรือจำนวนกระต่ายตัวผู้มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution

ตัวอย่างที่ 3.7 (Case 2)

จากอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ (ปี) ของรถยนต์จากโรงงานหนึ่ง 40 ตัว ซึ่งจดมาได้ดังนี้

2.2	4.1	3.5	4.5	3.2	3.7	3.0	2.6
3.4	1.6	3.1	3.3	3.8	3.1	4.7	3.7
2.5	4.3	3.4	3.6	2.9	3.3	3.9	3.1
3.3	3.1	3.7	4.4	3.2	4.1	1.9	3.4
4.7	3.8	3.2	2.6	3.9	3.0	4.2	3.5

สร้างตารางแสดงความถี่ (Frequency table) ได้ดังนี้

จากขั้นที่ 5

Class boundaries	$o_i = f_i$		Midpoint (m_i)	p_i	e_i	
1.45 - 1.95	2		1.7	.0155	.600	
1.95 - 2.45	1	7	2.2	.0659	2.636	10.016
2.45 - 2.95	4		2.7	.1695	6.780	
2.95 - 3.45	15		3.2	.2682	10.728	
3.45 - 3.95	10		3.7	.2579	10.316	
3.95 - 4.45	5	8	4.2	.1525	6.100	8.28
4.45 - 4.95	3		4.7	.0545	2.180	
	40					

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่รถยนต์ที่ผลิตจากโรงงานนี้มีการแจกแจงเป็น Normal distribution

ให้ X = อายุการใช้งานของแบตเตอรี่รถยนต์

1) H_0 : X มีการแจกแจงเป็น Normal distribution

2) H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Normal distribution

3) α = .05

4) CR : $X^2 > \chi^2_{1,.05} = 3.841$

(d.f. = 4 − 1 − 2 = 1, เพราะว่าเราต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ดังนั้นจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า = 2 ส่วนจำนวนเทอมที่รวมกันเป็นค่า χ^2_c = 4 เพราะมี e_i บางตัว <5 เราต้องรวม e_i's เพื่อทำให้มีค่า ≥5)

5) ก่อนจะหา e_i เราต้องหาความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าตกอยู่ในแต่ละ class ก่อน

ถ้า H_0 จริง เราจะหาความน่าจะเป็นของแต่ละ class เราต้องทราบ μ และ σ^2 ในที่นี้เราจะหาค่าประมาณของ μ และ σ^2 จากข้อมูลในรูปของ Grouped data

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\Sigma m_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{136.5}{40} = 3.4125$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\Sigma m_i^2 f_i - (\Sigma m_i f_i)^2/\Sigma f_i}{(\Sigma f_i) - 1}} = .697$$

ดังนั้น $\hat{p}_1$ = ค่าประมาณของ $Pr\,[1.45 < X < 1.95]$

$$\approx Pr\left[\frac{1.45 - 3.4125}{.697} < Z < \frac{1.95 - 3.4125}{.697}\right]$$

$$= Pr\,[-2.82 < Z < -2.10]$$

$$= .0155 \quad , \quad \text{etc.}$$

$$e_1 = 40(.0155) = .6 \quad , \quad \text{etc.}$$

จากตารางในโจทย์

o_i	7	15	10	8
e_i	10.016	10.728	10.316	8.28

$$\chi^2_c = .9082 + 1.7012 + .0097 + .0095 = 2.6286$$

๖) $\chi^2_c = 2.6286 < 3.841$ **เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่** $\alpha = .05$ **นั่นคือ เรายอมรับว่า** อายุการใช้งานของแบตเตอรี่รถยนต์ที่ผลิตจากโรงงานนี้มีการแจกแจงเป็น Normal distribution

ตัวอย่างที่ 3.8 (Case 2)

สุ่มกระดาษตะกั่ว (aluminum foil) **ขนาด** 1 **ตารางฟุต มา** 1,000 **แผ่น จากกระดาษตะกั่วจำนวนมาก นับจำนวนรู** (pinholes) **ที่เกิดอยู่ในแต่ละแผ่น** ผลปรากฏดังตารางข้างล่าง จง **ทดสอบที่** $\alpha = .01$ ว่าจำนวนรูต่อหนึ่งตารางฟุตนั้นเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution

x_i : จำนวนรูในแผ่น	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	รวม
o_i : จำนวนแผ่น	120	266	260	169	96	35	17	3	2	1	1000 = n

ให้ X = จำนวนรูที่ปรากฏ/แผ่นตะกั่ว 1 แผ่น

1) H_0 : X มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution

หรือ $Pr[X = x] = \dfrac{e^{-m} m^x}{x!}$, x = 0, 1,...

2) H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution

3) $\alpha = .01$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{5,.01} = 15.086$

(d.f. = 7 − 1 − 1 = 5, เพราะต้องประมาณค่า m)

5) $\hat{m} = \dfrac{\Sigma o_i x_i}{\Sigma o_i} = \dfrac{1}{1000}\left[(0 \times 120) + (1 \times 266) + \ldots + (9 \times 1)\right] = 2$

ถ้า H_0 เป็นจริง และ $\hat{m} = 2$

ค่าประมาณของ $Pr[X = x] = \dfrac{e^{-2} 2^x}{x!}$, x = 0, 1,...

$\therefore \hat{p}_1$ = ค่าประมาณของ $Pr[X = 0] = \dfrac{e^{-2} 2^0}{0!} = .1353$, etc.

หรือใช้ตาราง Poisson (ตาราง A2) ที่ $\mu = 2$

r	$Pr[X \leq r]$	$Pr[X = r] = p_i$	$e_i = np_i$	
0	.1353	.1353	135.3	
1	.4060	.2707	270.7	
2	.6767	.2707	270.7	
3	.8571	.1804	180.4	
4	.9473	.0902	90.2	
5	.9834	.0361	36.1	
6	.9955	.0121	12.1	
7	.9989	.0034	3.4	16.6
8	.9998	.0009	0.9	
9	1.0000	.0002	0.2	

x	0	1	2	3	4	5	≥ 6	รวม
o_i	120	266	260	169	96	35	23	1000
e_i	135.3	270.7	270.7	180.4	90.2	36.1	16.6	1000
$\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$	1.73	.081	.423	.720	.373	.033	2.56	5.92 $= \chi^2_c$

$\chi^2_c = 5.92$

6) $\chi^2_c = 5.96 < 15.086$ เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ จำนวนรูในกระดาษตะกั่วมีการแจกแจงเป็น Poisson distribution

3.6.2 การทดสอบความเป็นอิสระต่อกันของลักษณะ 2 ลักษณะ (Test for Independence)

การจัดจำแนกสมาชิกในตัวอย่างขนาด n ออกเป็นกลุ่ม ๆ โดยใช้ 2 ลักษณะ (Characteristic) เป็นตัวจัดจำแนก เราจะได้ตารางความถี่แบบ 2 ทาง (Two-way frequency table) ถ้าลักษณะที่ 1 แบ่งเป็น r ระดับหรือลักษณะย่อย (level) ส่วนลักษณะที่ 2 แบ่งเป็น c ระดับ เราจะได้ตาราง $(r \times c)$ contingency table นั่นคือ เราจัดจำแนกสมาชิกในตัวอย่างขนาด n ออกเป็น rc กลุ่ม เราต้องการทดสอบว่าลักษณะ 2 ลักษณะที่ใช้ในการจัดจำแนกนั้นเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

ถ้าให้ 2 ลักษณะที่ต้องการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของมันเป็น A และ B

A แบ่งได้เป็น r ลักษณะย่อย คือ $A_1, A_2, \ldots, A_r$ ส่วน

B แบ่งได้เป็น c ลักษณะย่อย คือ $B_1, B_2, \ldots, B_c$

สุ่มตัวอย่างขนาด n แล้วจัดจำแนกลงใน cells ต่าง ๆ

ให้ o_{ij} เป็นความถี่ (frequency) ของ cell ที่มีลักษณะ A_i และ B_j

R_i = ผลรวมของ row ที่ i = ความถี่ของ A_i

C_j = ผลรวมของ column ที่ j = ความถี่ของ B_j

ตารางที่ 3.1 $(r \times c)$ Contingency table

o_{ij}	B_1	B_2	...	B_c	Row total
A_1	o_{11}	o_{12}	...	o_{1c}	R_1
A_2	o_{21}	o_{22}	...	o_{2c}	R_2
$\vdots$					$\vdots$
A_r	o_{r1}	o_{r2}	...	o_{rc}	R_r
Column total	C_1	C_2		C_c	n

ตารางที่ 3.2 Cell probabilities

p_{ij}	B_1	B_2	...	B_c	Row total
A_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1c}	$p_{1\cdot}$
A_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2c}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$					$\vdots$
A_r	p_{r1}	p_{r2}	...	p_{rc}	$p_{r\cdot}$
Column total	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	. .	$p_{\cdot c}$	1

$p_{ij} = Pr(A_i B_j)$ = ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A_i และ B_j จะเกิดร่วมกัน

$p_{i\cdot} = Pr(A_i)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A_i

$p_{\cdot j} = Pr(B_j)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ B_j

เราต้องการทดสอบว่าลักษณะ A และ B เป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ ถ้าเหตุการณ์ A_1, $A_2, \ldots, A_r$ เป็นอิสระกับเหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots, B_c$ เราจะเขียนได้ว่า

$Pr(A_i B_j) = Pr(A_i) Pr(B_j), \ \forall_i = 1, .., r$ และ $j = 1, \ldots, c$

3.6.2.1 การทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$, for all cells (i, j)

จากตารางที่ 3.1

$$\hat{p}_{i.} = \frac{R_i}{n} \text{ และ } \hat{p}_{.j} = \frac{C_j}{n}$$

ถ้า H_0 จริง $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_{i.}\,\hat{p}_{.j} = \frac{R_i}{n}\,\frac{C_j}{n}$

ดังนั้น เราสามารถประมาณค่า expected frequency **ของแต่ละ** cell **คือ** $e_{ij} = n\hat{p}_{ij} = \frac{R_iC_j}{n}$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{r} p_{i.} = 1$ **เราประมาณค่า** $p_{i.}$ **เพียง** $r - 1$ **ตัว ส่วนตัวสุดท้ายหาได้** จากการลบผลบวกของ $p_{i.}$ ทั้ง $(r-1)$ ตัวออกจาก 1 ทำนองเดียวกัน เพราะ $\sum_{j=1}^{c} p_{.j} = 1$ เราประมาณค่า $p_{.j}$ เพียง $(c - 1)$ ตัว

$$\begin{aligned} \text{d.f.} &= \text{จำนวน cells} - 1 - \text{จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า} \\ &= rc - 1 - (r - 1) - (c - 1) \\ &= rc - r - c - 1 \\ &= r(c-1) - (c-1) \\ &= (r-1)(c-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น d.f. ของ χ^2 สำหรับการทดสอบความเป็นอิสระต่อกันจากตาราง $(r \times c)$ คือ $(r-1)(c-1)$

สรุปขั้นในการทดสอบความเป็นอิสระต่อกัน

1) $H_o : p_{ij} = p_{i.}\,p_{.j}$, for all cells (i, j)
2) $H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$
3) กำหนด α
4, CR : $X^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1),\,\alpha}$
5` $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$
6) สรุปผล

3.6.2.2 การวัดระดับความสัมพันธ์ในตาราง Contingency

เราอาจต้องการวัดระดับความสัมพันธ์ของลักษณะ 2 ลักษณะ ในทำนองเดียวกับที่เราใช้สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) วัดระดับความสัมพันธ์ของตัวแปรเชิงสุ่ม 2 ตัวจากค่าที่วัดมาได้ 2 ชุด โดยที่ค่า χ_c^2 แทนความเบี่ยงเบนรวม (overall deviation) จากตัวแบบของความเป็นอิสระ (model of independence) ดังนั้นจึงสมเหตุสมผลที่จะใช้มันเป็นเครื่องมือวัดระดับความสัมพันธ์นี้ แต่ความยุ่งยากในการใช้ค่า χ_c^2 เพื่อเป็นตัวชี้ค่าความสัมพันธ์คือค่าขององศาของความเป็นอิสระ (degree of freedom) ของมันซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดของตาราง Contingency เช่น $\chi_c^2 = 20.7$ ในตารางขนาด (2×2) แสดงว่าความสัมพันธ์มีนัยสำคัญ แต่ในตารางขนาด (5×8) จะสรุปเช่นนั้นไม่ได้ ($\chi^2_{1,.005} = 7.879$ และ $\chi^2_{28,.005} = 50.993$) ได้มีการเสนอวิธีการปรับค่าหลายวิธีเพื่อให้ค่าที่อยู่ในสเกลซึ่งไม่คำนึงถึงขนาดของตาราง ดังจะได้กล่าวถึงในที่นี้ 3 วิธี ค่าที่คำนวณจากสูตรทั้ง 3 ต่อไปนี้ ค่าสูงจะแสดงถึงระดับความสัมพันธ์ที่สูงด้วย

ถ้า $q = \min(r, c)$ นั่นคือ ค่าที่น้อยกว่าระหว่าง r = จำนวน row

และ c = จำนวน column

และ n = ขนาดของตัวอย่างหรือ total frequency

Cramer's contingency coefficient:

$$Q_1 = \frac{\chi_c^2}{n(q-1)}, \quad 0 \leqslant Q_1 \leqslant 1$$

Pearson's contingency coefficient:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n+\chi_c^2}}, \quad 0 \leqslant Q_2 \leqslant \sqrt{\frac{q-1}{q}}$$

ถ้าตารางขนาด (2×2) มีโครงสร้างดังนี้

n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

Pearson's phi coefficient:

$$\phi = \frac{(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})}{\sqrt{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}}, \quad -1 \leqslant \phi \leqslant 1$$

ตัวอย่างที่ 3.9

สุ่มนักศึกษาปริญญาตรีมา 350 คน จัดจำแนกตามเพศและทัศนคติเกี่ยวกับข้อเสนอเรื่องการเปลี่ยนแปลงกฎเกณฑ์ขององค์การนักศึกษา ผลการจัดจำแนกเป็นตาราง Contingency ขนาด (2×3) ดังนี้

ทัศนคติ / เพศ	เห็นด้วย	ไม่ออกความเห็น	คัดค้าน	รวม
ชาย	93	72	21	186
หญิง	55	79	30	164
รวม	148	151	51	350

ต้องการทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าทัศนคติของนักศึกษาและเพศของนักศึกษา มีความสัมพันธ์กันหรือไม่

1) H_0 : ทัศนคติและเพศของนักศึกษาเป็นอิสระต่อกัน

2) H_1 : ทัศนคติและเพศของนักศึกษาไม่เป็นอิสระต่อกัน

3) $\alpha = .01$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{2,\,.01} = 9.21$ [d.f. = (2 – 1) (3 – 1) = 2]

5) หา $e_{ij} = \dfrac{R_i C_j}{n}$

$$e_{11} = \frac{(186)\,(148)}{350} = 78.65, \text{ etc.}$$

$o_{ij}\ (e_{ij})$ $\left[\dfrac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right]$	เห็นด้วย	ไม่ออกความเห็น	คัดค้าน	รวม
ชาย	93 (78.65) [2.618]	72 (80.25) [0.848]	21 (27.10) [1.373]	186
หญิง	55 (69.35) [2.969]	79 (70.75) [0.962]	30 (23.90) [1.557]	164
รวม	148	151	51	350

$$\chi^2_c = 2.618 + 0.848 + 1.373 + \ldots\ldots + 1.557 = 10.327$$

6) $\chi_c^2 = 10.327 > 9.21$ **เราปฏิเสธ** H_0 **ที่** $\alpha = .01$ **นั่นคือ ทัศนคติและเพศของนักศึกษาไม่เป็นอิสระต่อกัน**

$$\text{คำนวณ } Q_1 = \frac{\chi_c^2}{n(q-1)} = \frac{10.327}{350(1)} = .0295 \approx .03 \; (0 \leqslant Q_1 \leqslant 1)$$

$$\text{และ } Q_2 = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n+\chi_c^2}} = \sqrt{\frac{10.327}{350+10.327}} = \sqrt{0.02866} = .169$$

$$(0 \leqslant Q_2 \leqslant .707)$$

จากค่า Q_1 และ Q_2 ที่คำนวณได้ จะเห็นว่าระดับความสัมพันธ์ของเพศและทัศนคติอยู่ในระดับต่ำ

3.6.3 การทดสอบความเป็นเอกภาพ (Test for Homogeniety) : Contingency table with one margin fixed

สุ่มตัวอย่างขนาด $R_1, R_2, \ldots, R_r$ จาก r populations **ซึ่งคือ** $A_1, \ldots, A_r$ **แล้วจัดจำแนก** R_i **ตามลักษณะของ** B **ซึ่งมีอยู่** c **ลักษณะย่อยคือ** $B_1, B_2, \ldots, B_c$ **เราจะได้ตาราง** contingency table **ขนาด** ($r \times c$) **ตารางนี้ต่างจากตาราง** contingency **ในการทดสอบความเป็นอิสระตรงที่** row totals **หรือขนาดของตัวอย่างถูกกำหนดไว้ก่อน**

ตารางที่ 3.3

ตารางขนาด ($r \times c$) **ที่กำหนดขนาดของตัวอย่างหรือ** Row totals **ไว้ก่อน**

	o_{ij}	B_1	B_2	…	B_c	Row Total
Population	A_1	o_{11}	o_{12}		o_{1c}	R_1
	A_2	o_{21}	o_{22}		o_{2c}	R_2
	:					:
	A_r	o_{r1}	o_{r2}		o_{rc}	R_r
Column Total		C_1	C_2		C_c	n

ตารางที่ 3.4
ตารางแสดงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B_j ในแต่ละ population

	p_{ij}	B_1	B_2	...	B_c	Row total
Population	A_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1c}	1
	A_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2c}	1
	$\vdots$					$\vdots$
	A_r	p_{r1}	p_{r2}	...	p_{rc}	1

$$\sum_{j=1}^{c} p_{ij} = 1 \quad , i = 1, \ldots, r$$

ต้องการทดสอบ

$H_0 : p_{1j} = p_{2j} = \ldots = p_{rj}$, สำหรับทุก ๆ ค่าของ $j = 1, \ldots, c$

หรือ $H_0 : \begin{cases} p_{11} = p_{21} = \ldots = p_{r1} = p_1 \\ p_{12} = p_{22} = \ldots = p_{r2} = p_2 \\ \vdots \\ p_{1c} = p_{2c} = \ldots = p_{rc} = p_c \end{cases}$

ถ้า H_0 จริง $\hat{p}_{1j} = \hat{p}_{2j} = \ldots = \hat{p}_{rj} = \frac{C_j}{n}$, $j = 1, \ldots, c$

ดังนั้น $e_{ij} = \frac{C_j}{n} R_i, \ \forall i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, c$

สรุปขั้นในการทดสอบความเป็นเอกภาพ

1) $H_0 : p_{1j} = p_{2j} = \ldots = p_{rj}, \ \forall j = 1, \ldots, c$
2) H_1 : ไม่เป็นจริงตาม H_0
3) กำหนด α
4) CR : $X^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1), \alpha}$
5) $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$
6) สรุปผล

หมายเหตุ

เนื่องจากแต่ละ population มี c cells และให้ d.f. = (c−1) และมี r populations df ก่อนลบจำนวน parameter ที่ต้องประมาณค่าออก = r (c−1) ดังนั้น เราจะลบจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าคือ (c−1) ตัว ออกจาก r (c-1) [เราต้องประมาณค่า p_i = (c−1) ตัวจาก $p_1, \ldots, p_c$]

$$\text{นั่นคือ d.f.} = r(c-1) - (c-1)$$

$$= (r-1)(c-1)$$

ตัวอย่างที่ 3.10

บริษัทส่งสินค้าชนิดใหม่ไปขายในท้องตลาด หลังจากที่เขาส่งของออกไปในตลาดเขาต้องการประเมินผลการขายโดยดูการเข้าถึงประชาชนของสินค้านี้ สมมุติว่าฝ่ายการตลาดของบริษัทได้สุ่มคนมา 200 คน, 150 คน และ 300 คน จาก 3 เมือง ได้ข้อมูลดังนี้

	ไม่เคยได้ยินเกี่ยวกับสินค้านี้เลย : B_1	ได้ยินแต่ไม่ซื้อ : B_2	เคยซื้ออย่างน้อย 1 ครั้ง : B_3	รวม
เมือง 1	36	55	109	200
เมือง 2	45	56	49	150
เมือง 3	54	78	168	300
รวม	135	189	326	650

ข้อมูลนี้แสดงให้เห็นหรือไม่ว่าสถานการณ์ในตลาดของ 3 เมืองนี้ไม่ต่างกัน

ให้ p_{ij} = ความน่าจะเป็นของ cell (i, j) หรือเซลซึ่งอยู่ row ที่ i และ column ที่ j

1) $H_0 : p_{11} = p_{21} = p_{31}, p_{12} = p_{22} = p_{32}, p_{13} = p_{23} = p_{33}$

2) H_1 : ไม่เป็นจริงตาม H_0

3) $\alpha = .005$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{4,.005} = 14.86$ (d.f. $= (3-1)(3-1) = 4$)

5) $e_{11} = \dfrac{R_1C_1}{n} = \dfrac{200\,(135)}{650} = 41.54$, etc.

$o_{ij}\,(e_{ij})$ $\left[\dfrac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right]$	B_1	B_2	B_3	รวม
เมือง 1	36 (41.54) [0.739]	55 (58.15) [0.171]	109 (100.31) [0.753]	200
เมือง 2	45 (31.15) [6.158]	56 (43.62) [3.514]	49 (75.23) [9.145]	150
เมือง 3	54 (62.31) [1.108]	78 (87.23) [0.977]	168 (150.46) [2.045]	300
รวม	135	189	326	650

$\chi^2_c = 0.739 + 0.171 + \ldots + 2.045 = 24.61$

6) $\chi^2_c = 24.61 > 14.86$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .005$ นั่นคือ สถานการณ์ในตลาดของสินค้าชนิดนี้ใน 3 เมืองแตกต่างกัน

3.6.4 การทดสอบการเท่ากันของ k Binomial proportions **ของ** k Binomial populations **(กรณีหนึ่งของการทดสอบความเป็นเอกภาพที่มี** $c = 2$ **และกำหนดค่าของ** $n_1, \ldots, n_k$ **ไว้ก่อน)**

ในการทดสอบ $H_0 : p_1 = p_2 = \ldots = p_k = p$

$H_1 : p_i,\ i = 1, \ldots, k$ ไม่เท่ากันหมด

โดยที่ $p_1, \ldots, p_k$ เป็น population proportions ของ k Binomial populations

สุ่มตัวอย่างขนาด $n_1, \ldots, n_k$ จาก k Binomial populations โดยที่ ทั้ง k ตัวอย่างเป็นอิสระต่อกัน แล้วจัดข้อมูลในรูปตาราง Contingency ขนาด ($k \times 2$) (k rows, 2 columns)

ตารางที่ 3.5

k **ตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกันจาก** k Binomial populations

o_{ij}		Successes	Failures	รวม
Binomial populations	1	x_1	$n_1 - x_1$	n_1
	2	x_2	$n_2 - x_2$	n_2
	:	:	:	:
	k	x_k	$n_k - x_k$	n_k
รวม		C_1	C_2	n

คำนวณหาค่า e_{ij} จากสูตร $e_{ij} = \frac{n_i C_j}{n}$ โดยที่ $i = 1, \ldots, k$ และ $j = 1, 2$

โดยที่ n_i = ขนาดของตัวอย่างจาก population ที่ i

C_j = ผลรวมของ Column ที่ j ; $j = 1, 2$

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

สรุปขั้นในการทดสอบ

1) $H_0 : p_1 = p_2 = \ldots = p_k = p$ (และ $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = q$, โดยที่ $q = 1 - p$, $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, \ldots, k$)

2) $H_1 : p_i$ ไม่เท่ากันหมด

3) กำหนด α

4) $CR : X^2 > \chi^2_{k-1,\alpha}$ $\quad$ [d.f. = $(k-1)(2-1) = (k-1)$]

5) $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$

6) สรุปผล

ตัวอย่างที่ 3.11

เราต้องการสำรวจดูการเป็นโรคพิษสุราเรื้อรังของคนในกลุ่มอาชีพต่าง ๆ จึงสุ่มคนอาชีพต่าง ๆ มา 4 กลุ่ม แล้วนับจำนวนคนที่เป็นโรคพิษสุราเรื้อรังในแต่ละกลุ่มได้ผลดังนี้

	เป็นโรคพิษสุราเรื้อรัง	ไม่เป็นโรคพิษสุราเรื้อรัง	รวม
เสมียน	32	268	300
นักการศึกษา	51	199	250
นักบริหาร	67	233	300
พ่อค้า	83	267	350
รวม	233	967	1200

ถ้าให้ p_1, p_2, p_3 และ p_4 เป็น population proportions ของการเป็นโรคพิษสุราเรื้อรังของเสมียน, นักการศึกษา, นักบริหาร, และพ่อค้าตามลำดับ

ต้องการทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่า proportion ทั้ง 4 เท่ากันหมด

1) $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4$

2) $H_1 : p_i$ ไม่เท่ากันหมด

3) $\alpha = .05$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{3,.05} = 7.815$

5) $e_{11} = \dfrac{C_1 n_1}{n} = \dfrac{233\ (300)}{1200} = 58.25$

$e_{21} = \dfrac{C_1 n_2}{n} = \dfrac{233\ (250)}{1200} = 48.54$, etc.

o_{ij} (e_{ij})	เป็นโรค	ไม่เป็นโรค	รวม
เสมียน	32 (58.25)	268 (241.75)	300
นักการศึกษา	51 (48.54)	199 (201.46)	250
นักบริหาร	67 (58.25)	233 (241.75)	300
พ่อค้า	83 (67.96)	267 (282.04)	350
รวม	233	967	1200

$$\chi_c^2 = \frac{(32-58.25)^2}{58.25} + \ldots + \frac{(267-282.04)^2}{282.04} = 20.59$$

6) $\chi_c^2 = 20.59 > 7.815$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ proportion ของคนเป็นโรคพิษสุราเรื้อรังในกลุ่มคนอาชีพต่าง ๆ ไม่เท่ากันหมด

3.6.5 (2 × 2) Contingency table (ถ้า n ≥ 50 ไม่จำเป็นต้องทำ)

เมื่อ d.f. = 1 เราจะใช้ Yates' correction for continuity นั่นคือใช้สูตร $\chi^2_{(corrected)} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(|o_{ij}-e_{ij}|-.5)^2}{e_{ij}}$ แต่ในกรณีที่ expected frequency มีขนาดใหญ่ การคำนวณค่า χ_c^2 โดยสูตรธรรมดา และ $\chi^2_{(corrected)}$ จะให้ผลเกือบเหมือนกันในทุกกรณี เมื่อมี expected frequency บางตัวน้อยกว่า 5 เราจะต้องใช้วิธีการที่เรียกว่า Fisher - Irwin Exact Test วิธีการนี้อาจหาอ่านได้จากหนังสือ Statistical Concepts and Methods ซึ่งเรียบเรียงโดย Bhattacharyya และ Johnson (ดูบรรณานุกรม)

ตัวอย่างที่ 3.12 (ทดสอบความเป็นเอกภาพของ Binomial population 2 populations)

ในการศึกษาเพื่อดูว่าการใส่สารเคมีพวกฮอร์โมนแก่เมล็ดพันธุ์พืชชนิดหนึ่งจะทำให้อัตราการงอกของมันเปลี่ยนแปลงหรือไม่ ได้เอาเมล็ดพืช 100 เมล็ด มาให้ฮอร์โมน ส่วนอีก 150 เมล็ดไม่ได้ให้ฮอร์โมน นำเมล็ดทั้งหมดมาเพาะและนับจำนวนเมล็ดที่งอกได้ผลดังตารางข้างล่างนี้

ข้อมูลนี้จะเป็นหลักฐานสนับสนุนได้หรือไม่ว่าอัตราการงอกของเมล็ดทั้ง 2 ชนิดแตกต่างกัน

	งอก	ไม่งอก	รวม
ได้ฮอร์โมน	$84 = x_1$	$16 = n_1 - x_1$	$100 = n_1$
ไม่ได้ฮอร์โมน	$132 = x_2$	$18 = n_2 - x_2$	$150 = n_2$
รวม	$216 = C_1$	$34 = C_2$	$250 = n$

ถ้าให้ p_1 และ p_2 เป็นอัตราการงอกของเมล็ดที่ได้ฮอร์โมนและไม่ได้ฮอร์โมนตามลำดับ

1) $H_0 : p_1 = p_2$ และ $q_1 = q_2$

2) $H_1 : p_1 \neq p_2$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $X^2 > \chi^2_{1, .05} = 3.841$

5) $e_{11} = \dfrac{C_1 n_1}{n} = \dfrac{216\ (100)}{250} = .86.4$, etc.

$o_{ij}\ (e_{ij})$	งอก	ไม่งอก	รวม
ได้ฮอร์โมน	84 (86.4)	16 (13.6)	100
ไม่ได้ฮอร์โมน	132 (129.6)	18 (20.4)	150
รวม	216	34	250

$$\chi^2_c = \frac{(84-86.4)^2}{86.4} + \frac{(16-13.6)^2}{13.6} + \frac{(132-129.6)^2}{129.6} + \frac{(18-20.4)^2}{20.4}$$

$$= 0.067 + 0.424 + 0.044 + 0.282$$

$$= 0.817$$

ส่วน $\chi^2_{(\text{corrected})} = \dfrac{(|84-86.4|-.5)^2}{86.4} + \dfrac{(|16-13.6|-.5)^2}{13.6} + \dfrac{(|132-129.6|-.5)^2}{129.6}$

$$+ \frac{(|18-20.4|-.5)^2}{20.4}$$

$$= 0.042 + 0.265 + 0.028 + 0.177$$

$$= 0.247$$

6) ทั้ง 2 วิธี (corrected และ uncorrected) ให้ผลการทดสอบเหมือนกัน คือ สรุปที่ $\alpha = .05$ ว่าอัตราการงอกของเมล็ดพืชทั้ง 2 ชนิดเหมือนกัน

หมายเหตุ

ในการทดสอบ $H_0 : p_1 = p_2$ เราอาจใช้ Z – test (ดูข้อ 8 หัวข้อ 3.3)

โดยที่คำนวณ $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{84}{100} = 0.84,$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{132}{150} = 0.88,$$

และ $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{84+132}{100+150} = \frac{216}{250} = 0.864$

$$z_c = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{0.84 - 0.88}{\sqrt{(.864)(.136)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)}} = -0.904$$

1) $H_0 : p_1 = p_2$ หรือ $p_1 - p_2 = 0$

2) $H_1 : p_1 \neq p_2$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $|Z| > z_{.025} = 1.96$

5) $z_c = -0.904$

6) $z_c = -0.904 < 1.96$ เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$

ให้สังเกตว่า $z^2_c = (-0.904)^2 = .817 = \chi^2_c$ และ

$$z^2_{.025} = (1.96)^2 = 3.8416 = \chi^2_{1,.05}$$

ดังนั้นวิธีการทดสอบทั้ง 2 วิธีให้ผลเหมือนกัน อย่างไรก็ดี ถ้า $H_1 : p_1 > p_2$ หรือ $H_1 : p_1 < p_2$ การทดสอบต้องใช้ Z – test เท่านั้น จะใช้ χ^2 – test ไม่ได้

แบบฝึกหัด

3.1 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.2 จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่ามีเหตุผลพอที่จะสนับสนุนว่า σ น้อยกว่า 4 หรือไม่

3.2 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.3 เราจะสรุปได้ที่ $\alpha = .05$ หรือไม่ว่า s.d. ของอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ที่ผลิตจากโรงงานนี้มากกว่า 0.9 ปี

3.3 ในการตรวจสอบเพื่อดูว่าเครื่องมือตรวจปริมาณ pH ในเลือดที่ใช้งานอยู่ทุกวันสามารถทำงานได้อย่างถูกต้องและเชื่อถือได้ ผู้ใช้เครื่องมือนี้ตั้งมาตรฐานไว้ว่า ถ้าเครื่องมือวัดปริมาณ pH หลาย ๆ หนจากเลือดชนิดเดียวกัน แล้วให้ variance ของค่าที่วัดได้ไม่เกิน 0.00013 จะถือว่าเครื่องมือทำงานได้ถูกต้องและเชื่อถือได้ ผู้ทำการทดลองจึงสุ่มเลือดตัวอย่างมา 6 หลอดจากหน่วยทดลอง (experimental unit) เดียวกัน แล้วใช้เครื่องมือนี้ตรวจปริมาณ pH ในเลือดแต่ละหลอด ปรากฏว่าได้ variance ของค่าที่วัดได้เป็น 0.00019 จากข้อมูลนี้จะทำให้เราสรุปได้ที่ $\alpha = .05$ หรือไม่ว่า เครื่องมือทำงานได้ไม่ถูกต้องแม่นยำ นั่นคือ variance เกิน 0.00013

3.4 ในการเปรียบเทียบโปรแกรม 2 โปรแกรมในการฝึกงานแก่คนงานในโรงงาน เพื่อให้ทำงานฝีมืออย่างหนึ่ง จากคนงาน 20 คน ได้สุ่ม 10 คนเพื่อฝึกงานโดยวิธีที่ 1 และอีก 10 คนที่เหลือฝึกโดยวิธีที่ 2 หลังจากเสร็จการฝึกอบรมได้ให้คนงานทั้ง 20 คน ทดสอบแล้วจดเวลาที่ใช้ทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนงานสำเร็จ ผลปรากฏดังนี้

เวลา (นาที)

วิธีที่ 1	15	20	11	23	16	21	18	16	27	24
วิธีที่ 2	23	31	13	19	23	17	28	26	25	28

จงทดสอบที่ $\alpha = .10$ ว่าความแปรปรวนของเวลาที่ใช้ในการทำงานของทั้ง 2 วิธีแตกต่างกันอย่างมีนัยยะสำคัญหรือไม่ จงบอกข้อสมมุติที่ต้องสมมุติขึ้นเพื่อใช้วิธีการทดสอบนี้ด้วย

3.5 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.5 เราจะสรุปได้ที่ $\alpha = .05$ หรือไม่ว่าความแปรปรวนของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นเพราะได้ฮอร์โมนมากกว่าความแปรปรวนของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นโดยไม่ได้ฮอร์โมน

3.6 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.6 ข้อมูลนี้ช่วยให้เราสรุปได้หรือไม่ว่าเครื่องมือชนิด B วัดความเข้มของสารปรอทได้แม่นยำกว่าเครื่องมือชนิด A นั่นคือทดสอบ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ให้ทดสอบที่ $\alpha = .05$

3.7 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.7 ข้อมูลจะช่วยให้เราสรุปได้หรือไม่ว่าความแปรปรวนของเวลาในการเล่นไม่ต่างกันระหว่างเพศของลิง กำหนด $\alpha = .10$

3.8 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.8 จงทดสอบที่ $\alpha = .02$ ว่า s.d. ของคะแนนการอ่านของทั้ง 2 กลุ่มจะไม่แตกต่างกัน

3.9 ในการเปรียบเทียบการกระจายของคะแนนสอบโดยใช้ข้อสอบ 2 ชนิด ปรากฏว่าความแปรปรวนของผลการสอบโดยใช้ข้อสอบแบบปรนัยกับนักเรียน 21 คนมีค่าเท่ากับ 105.75 ส่วนความแปรปรวนของผลการสอบโดยใช้ข้อสอบแบบอัตนัยที่ใช้กับนักเรียน 13 คน มีค่าเท่ากับ 63.41 เราอาจจะสรุปได้หรือไม่โดยอาศัยข้อเท็จจริงจากตัวอย่างว่า ความแปรปรวนของคะแนนสอบเมื่อใช้ข้อสอบทั้ง 2 ชนิดนี้ไม่แตกต่างกัน กำหนด $\alpha = .02$

3.10 ได้จดบันทึกจำนวนรถบรรทุกน้ำมันที่เข้ามายังโรงกลั่นในแต่ละวันไว้ทั้งหมด 1000 วัน ผลปรากฏดังนี้

จำนวนรถบรรทุก/วัน	0	1	2	3	4	5	6	7	รวม
จำนวนวัน	372	360	191	57	16	2	1	1	1000

จากข้อมูลข้างต้นจะทำให้เราสรุปได้ไหมว่าจำนวนรถ บรรทุกน้ำมันที่เข้ามายังโรงกลั่น/วัน เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (ramdom variable) ที่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution กำหนด $\alpha = .05$

3.11 ปริมาณความต้องการ (demand) หรืออุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งต่อวัน ในระยะเวลา 1000 วันเป็นดังนี้

ปริมาณความต้องการ/วัน	0	1	2	3	4	5	รวม
จำนวนวัน	626	274	80	15	4	1	1000

จากข้อมูลนี้จะสรุปได้ (ที่ α = .05)หรือไม่ว่าปริมาณความต้องการต่อวันเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution

3.12 จำนวนรถยนต์ที่วิ่งผ่านจุด ๆ หนึ่งในช่วงเวลาหนึ่ง ในระยะเวลา 400 วัน เป็นดังนี้

ปริมาณรถยนต์	0	1	2	3	4	5	6	รวม
จำนวนวัน	129	137	83	38	10	2	1	400

จากข้อมูลนี้จะทำให้สรุปได้ (ที่ α = .01) หรือไม่ว่าปริมาณรถยนต์ที่วิ่งผ่านจุด ๆ หนึ่งในช่วงเวลาหนึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution ที่มี m = 1

3.13 เครื่องซักผ้าชนิดหนึ่งถูกผลิตออกมาขายในสีต่าง ๆ กัน 5 สี นักวิจัยตลาดต้องการศึกษาว่าผู้ซื้อนิยมสีต่าง ๆ พอ ๆ กันหรือไม่ ได้สุ่มตัวอย่างคือผู้ซื้อ 300 คน ผลปรากฏดังนี้

สี	แดง	น้ำเงิน	ขาว	นวล	น้ำตาล	รวม
จำนวนคนที่ซื้อ	88	65	52	40	55	300

เราจะสรุปได้ (ที่ α = .05) หรือไม่ว่าผู้ซื้อนิยมสีต่าง ๆ พอ ๆ กัน

3.14 หยิบไพ่ 3 ใบจากไพ่สำหรับหนึ่ง ซึ่งมี 52 ใบ แบบหยิบแล้วใส่คืน (with replacement) ให้ Y เป็นจำนวนไพ่โพดำที่หยิบได้ในไพ่ 3 ใบ ได้ทำการทดลองอย่างเดียวกันนี้ 128 ครั้ง (แต่ละครั้งนับจำนวนไพ่โพดำที่หยิบได้ในไพ่ 3 ใบ) ได้ผลดังนี้

y = จำนวนไพ่โพดำ	0	1	2	3	รวม
จำนวนครั้ง	42	62	22	2	128

จงทดสอบสมมติฐานที่ α = .05 ว่าการทดลองนี้ให้ตัวเลขที่มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution ที่มี $p = \frac{1}{4}$ หรือตัวแปรเชิงสุ่ม Y มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution ที่มี $p = \frac{1}{4}$ (n = 3)

ถ้า Y มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution ที่มี n = 3 และ $p = \frac{1}{4}$ แล้ว

y	0	1	2	3	รวม
Pr [Y=y]	27/64	27/64	9/64	1/64	1

3.15 ในภาคการศึกษาหนึ่ง จากนักศึกษาที่เรียนวิชาสถิติ 100 คน ผลปรากฏดังนี้ (จากระบบ 5 grade)

grade	A	B	C	D	F	รวม
จำนวนนักศึกษา	14	18	32	20	16	100

จงทดสอบสมมติฐานที่ α = .05 ว่า การแจกแจงของ grade เป็น Uniform distribution หรือไม่

3.16 โยนเหรียญ 1 อันจนกว่าจะได้หัว จดจำนวนครั้งที่ต้องโยนจนได้หัว 1 ครั้ง (ค่าของ X) ไว้ หลังจากทำการทดลอง 256 ครั้ง ผลปรากฏดังนี้

x	1	2	3	4	5	6	7	8	รวม
จำนวนครั้ง	136	60	34	12	9	1	3	1	256

จงทดสอบสมมติฐานที่ α = .05 ว่าการแจกแจงของ X เป็น Geometric distribution ที่มี $p = \frac{1}{2}$ หรือไม่

3.17 ในการศึกษาถึงการใช้เวลาในการอ่านบทความที่กำหนดให้พนักงานใหม่ 390 คนอ่าน ผลปรากฏดังนี้

เวลา (นาที) Class boundaries	$f_i = o_i$
1.95 - 2.45	21
2.45 - 2.95	43
2.95 - 3.45	68
3.45 - 3.95	97
3.95 - 4.45	72
4.45 - 4.95	53
4.95 - 5.45	21
5.45 - 5.95	11
5.95 - 6.45	4
	390

จาก grouped data $\bar{x} = 3.81, s = .86$ จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่า เวลาที่พนักงานใหม่กลุ่มนี้ใช้ในการอ่านมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution)

3.18 ใน 120 ครอบครัว(แต่ละครอบครัวมีลูก 3 คน)นับจำนวนลูกชายของแต่ละครอบครัวที่มีอยู่เป็นดังนี้

จำนวนลูกชาย	0	1	2	3	รวม
จำนวนครอบครัว	21	37	44	18	120

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าจำนวนครอบครัวที่ไม่มีลูกชายเลย : ชาย 1 : 2 : 3 = 1 : 3 : 3 : 1

3.19 ในการผสมพันธุ์พืช 2 ชนิด จะได้พืชพันธุ์ใหม่ 3 ชนิด คือ A, B และ C ตามทฤษฎีของกรรมพันธุ์บอกว่าอัตราส่วนของ A : B : C จะเป็น 1 : 2 : 1 เพื่อทดสอบว่าทฤษฎีนี้เป็นจริงจึงได้ทำการผสมพันธุ์พืช 2 ชนิดดังกล่าว และจากต้นอ่อน 90 ต้นผลปรากฏ ดังนี้

พันธุ์ใหม่	A	B	C	รวม
จำนวนต้น	18	44	28	90

เราสรุปได้ (ที่ α = .01) หรือไม่ว่าข้อมูลนี้สนับสนุนทฤษฎีกรรมพันธุ์ข้างต้น

3.20 ในภาคหนึ่งมีนักศึกษาลงทะเบียนเรียนวิชา ST 203 ดังนี้

คณะ	วท	บธ	ศษ	ศศ	รวม
จำนวนนักศึกษา	440	355	155	250	1200

จงทดสอบที่ α = .01 ว่าอัตราส่วนของนักศึกษา วท : บธ : ศษ : ศศ = 2 : 2 : 1 : 1

3.21 จากตารางแสดงจำนวนเด็กที่เกิดใน 4 ช่วงเวลาของปี ที่โรงพยาบาลแห่งหนึ่ง

ช่วงเวลา	Q_1 : ม.ค.-มี.ค.	Q_2 : เม.ย.-มิ.ย.	Q_3 : ก.ค.-ก.ย.	Q_4 : ต.ค.-ธค.
จำนวนเด็กที่เกิด	110	57	53	80

เป็นที่คาดหมายว่าจำนวนเด็กที่เกิดในช่วงแรกของปีจะมีมากเป็น 2 เท่าของช่วงอื่น ๆ ที่เหลือ จงทดสอบที่ α = .05 ว่าข้อมูลสนับสนุนความคาดหมายนี้หรือไม่

3.22 จำแนกคน 1000 คนว่าเป็นคนที่เล่นการพนันหรือไม่แล้วดูว่าคนคนนั้นสูบบุหรี่หรือไม่ ผลปรากฏดังนี้

	สูบบุหรี่	ไม่สูบบุหรี่
เล่นการพนัน	120	30
ไม่เล่นการพนัน	479	371

จงทดสอบที่ α = .01 ว่าลักษณะทั้ง 2 เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.23 การทดลองเพื่อตรวจสอบอิทธิพลของน้ำมันเครื่องที่มีต่อคุณภาพของการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง จากของที่สุ่มมา 390 ชิ้น ได้ผลดังนี้

	ของไม่ดี	ของดี
ไม่ใช้น้ำมันเครื่อง	22	238
ใช้น้ำมันเครื่อง	4	126

เราจะสรุปได้ (ที่ $\alpha = .01$) หรือไม่ว่าการใช้น้ำมันเครื่องสามารถลดอัตราของของไม่ดีที่ผลิตขึ้น

3.24 ได้จำแนกคน 6800 คน ตามสีผมและสีตาดังต่อไปนี้

ผม / ตา	น้ำตาลเข้ม	น้ำตาล	ดำ	แดง
ฟ้า	1768	807	189	47
เขียว	946	1387	746	43
น้ำตาล	115	438	288	16

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าสีผมและสีตาเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.25 ผลการทดสอบของวิชาความน่าจะเป็นเบื้องต้น และวิชาการควบคุมคุณภาพของนักศึกษาที่ลงทั้ง 2 วิชาพร้อมกันเป็นดังนี้

	วิชาการควบคุมคุณภาพ			
วิชาความน่าจะเป็น	A	B	C	D
A	38	24	8	2
B	16	12	8	8
C	10	19	35	23
D	3	6	7	13

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าผลการทดสอบของทั้ง 2 วิชาเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.26 ผู้จัดการฝ่ายบุคคลของบริษัทใหญ่แห่งหนึ่งสนใจที่จะศึกษาว่าการแต่งงานเป็นเหตุให้พนักงานหญิงของบริษัทขาดงานบ่อยหรือไม่ ได้สุ่มคนงานที่เคยขาดงานมา 400 คน ผลปรากฏดังนี้

	ขาดบ่อย	ขาดนาน ๆ หน	รวม
แต่งงาน	84	96	180
ไม่แต่งงาน	62	158	220
รวม	146	254	400

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าสถานภาพสมรสและการขาดงานเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.27 สุ่มอาจารย์ในมหาวิทยาลัยมาจากคณะมนุษย์ศาสตร์ 50 คน คณะวิทยาศาสตร์ 30 คน และคณะบริหารธุรกิจ 40 คน จัดจำแนกตามความเห็นในเรื่องของการใช้งานวิจัยมากหรือน้อยเพื่อช่วยในการเลื่อนตำแหน่งทางวิชาการ ผลปรากฏดังนี้

	ควรใช้มากขึ้น	ใช้น้อยลง	ใช้เท่าเดิม	รวม
คณะมษ.	20	20	10	50
วท.	15	5	20	40
บธ.	15	5	10	30
รวม	50	30	40	120

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่า proportions ของความเห็นเหมือนกันทั้ง 3 คณะ

3.28 ในการสำรวจเกี่ยวกับขวัญของพนักงาน ได้สุ่มคนงานในสำนักงานมา 30 คน พนักงานขาย 35 คน พนักงานขายของหน้าร้าน 40 คน และนักบริหาร 15 คน จัดจำแนกตามระดับความรู้สึก ผลปรากฏดังนี้

กลุ่มพนักงาน	ความรู้สึกเกี่ยวกับขวัญ			รวม
	ดีพอสมควร	ปานกลาง	ต่ำเกินไป	
สำนักงาน	15	10	5	30
พนักงานขาย	20	10	5	35
พนักงานขายหน้าร้าน	5	10	25	40
นักบริหาร	10	3	2	15
รวม	50	33	37	120

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่า proportions ของความเห็นเหมือนกันในทุกกลุ่ม

3.29 ผลการทดสอบทัศนคติของคน 200 คนต่อนโยบายอย่างหนึ่งของรัฐบาล ปรากฏผลดังนี้

เพศ	คำตอบ				
	ไม่เห็นด้วยเลย	ไม่เห็นด้วย	ไม่ตัดสินใจ	เห็นด้วย	เห็นด้วยเต็มที่
ชาย	7	6	11	21	52
หญิง	23	24	21	17	18

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าทัศนคติและเพศเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.30 ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับการศึกษาและความสนใจเกี่ยวกับการเมืองในประเทศ ได้ทำการสุ่มนักเรียนในระดับต่าง ๆ มาทั้งหมด 200 คน จำแนกตามระดับการศึกษาและระดับความสนใจได้ดังนี้

ระดับการศึกษา	ระดับความสนใจ		
	ไม่สนใจเลย	สนใจปานกลาง	สนใจมาก
มัธยม	14	37	32
มหาวิทยาลัย	19	42	17
สูงกว่าปริญญาตรี	12	17	10

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าระดับการศึกษาและความสนใจเกี่ยวกับการเมืองในประเทศเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.31 ในการศึกษาเพื่อดูว่าอัตราการสูบบุหรี่ของนักศึกษาในปีต่าง ๆ แตกต่างกันหรือไม่ ได้สุ่มนักศึกษาปีที่ 1 มา 50 คน ปีที่ 2 มา 40 คน ปีที่ 3 มา 60 คน และปีที่ 4 มา 50 คน จัดจำแนกตามนิสัยการสูบบุหรี่ได้ผลดังนี้

ปีที่ศึกษา	นิสัยการสูบบุหรี่			
	สูบน้อยมาก	สูบปานกลาง	สูบมาก	รวม
1	21	12	17	50
2	13	8	19	40
3	13	18	29	60
4	3	22	25	50

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าอัตราการสูบบุหรี่ของนักศึกษาทั้ง 4 ปีพอ ๆ กัน

3.32 จากการสุ่มตัวอย่างชายสูงอายุ 200 คน จัดจำแนกตามความรู้และจำนวนลูกที่เขามีได้ผลดังนี้

การศึกษา	จำนวนลูก (คน)		
	0 - 1	2 - 3	มากกว่า 3
จบประถม	14	37	32
จบมัธยม	19	42	17
จบปริญญา	12	17	10

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าจำนวนลูกที่มีและระดับการศึกษาของบิดาเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

3.33 ต้องการเปรียบเทียบผลการรักษาโรคไอกรนด้วยยาชนิดต่าง ๆ 5 ชนิด และดูความไร้ผลของการรักษาหลังการรักษาแล้ว 6 วัน จากผลการทดลองในตารางข้างล่างนี้ จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าอัตราส่วนของการรักษาที่ไร้ผลจากการใช้ยาทั้ง 5 ชนิด เท่ากันหมดหรือไม่

ชนิดของยาที่ใช้รักษา	จำนวนผู้ป่วยทั้งสิ้น	จำนวนผู้ป่วยที่ไม่หายจากโรคนี้
1	45	23
2	66	28
3	27	14
4	55	23
5	49	17

3.34 เลือกสุ่มของที่ส่งมาจากโรงงาน 3 โรงงาน และจากการตรวจสอบคุณภาพของ พบว่ามีจำนวนของชำรุดดังนี้

โรงงาน	ของที่สุ่มมาตรวจ	จำนวนของชำรุด
1	100	20
2	200	38
3	150	37
4	250	45

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าอัตราส่วนของของชำรุดจากทั้ง 4 โรงงานเท่ากันหมดหรือไม่

3.35 ตัวแทนจำหน่ายผงซักฟอกชนิดหนึ่ง กล่าวว่าความนิยมผงซักฟอกชนิดนี้ในแต่ละภาคมีพอ ๆ กัน เพื่อยืนยันคำกล่าวนี้ เขาได้สุ่มตัวอย่างมาจาก 4 ภาค ได้ผลดังนี้

ภาค	จำนวนคนที่นิยม	จำนวนคนที่ไม่นิยม	คนทั้งหมด
เหนือ	120	80	200
กลาง	200	50	250
ตะวันออกเฉียงเหนือ	200	100	300
ใต้	180	70	250

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าคำกล่าวของตัวแทนจำหน่ายผู้นี้เชื่อถือได้หรือไม่