บทที่ 1
การแจกแจงความน่าจะเป็น
(Probability Distribution)

รูปแบบของความน่าจะเป็น (Probability Model) ของตัวแปรเชิงสุ่ม X คือ รูปของการแจกแจงของความน่าจะเป็นที่แสดงให้เห็นถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของ X ความน่าจะเป็นถูกแสดงในรูปของตัวพารามิเตอร์ (parameter) ซึ่งเราไม่ทราบค่า แต่มีความสัมพันธ์กับลักษณะของประชากร (population) และวิธีการสุ่มตัวอย่าง

1.1 Bernoulli Trials : Success - Failure

ก. การกระทำแต่ละครั้งจะมีผล 2 ชนิดคือ สำเร็จ (Success - S) หรือไม่สำเร็จ (Failure - F)

ข. สำหรับการกระทำแต่ละครั้ง ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ คือ Pr(S) จะคงที่ตลอด ให้ $Pr(S) = p$ ดังนั้น $Pr(F) = 1 - p = q$

ค. การกระทำทุกครั้งเป็นอิสระต่อกัน นั่นคือ Pr(S) จะไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่า เราจะทราบผลของการกระทำในครั้งก่อนหรือไม่

ตัวอย่างของสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการทดลองที่ให้ผลเพียง 2 อย่างนั้น เราจะพบในหลาย ๆ สาขาวิชา

1) เฝ้าดูไข่ใบต่อไปที่จะถูกฟักเป็นตัวว่าเป็นเพศชายหรือหญิง

2) นักประมูลราคาประมูลราคางานชิ้นหนึ่ง ผลอาจเป็น ได้งานหรือไม่ได้งาน

3) ในการตรวจสอบชิ้นส่วนที่ผลิตจากเครื่องจักรเครื่องหนึ่ง อาจพบว่า เป็นของดีหรือของไม่ดี

4) ทดสอบยาปฏิชีวนะกับหนู แล้วดูว่าปฏิกริยาเป็นบวกหรือลบ

1.2 การหยิบแบบใส่คืนหรือไม่ใส่คืน (Sampling with or without replacement)

พิจารณากลุ่มของสิ่งของซึ่งประกอบด้วยของ 2 ชนิด ซึ่งเราอาจเรียกว่าของดี และของไม่ดี

ก. การหยิบแบบใส่คืน : กล่องใบหนึ่งมีของอยู่ 15 ชิ้น เป็นของดี 10 ชิ้น ส่วนที่เหลือ 5 ชิ้นเป็นของชำรุด หยิบของ 1 ชิ้นขึ้นมาอย่างสุ่ม (at random) (นั่นคือ การหยิบในลักษณะที่ของทุกชิ้นมีโอกาสที่จะถูกหยิบขึ้นมาเท่า ๆ กัน (equally likely to be selected)) จดลักษณะของของชิ้นนั้นไว้ แล้วใส่คืนลงไปในกล่องก่อนที่จะหยิบชิ้นถัดไป การกระทำในลักษณะนี้ถือเป็น Bernoulli trials ถ้ากำหนดให้การที่หยิบได้ของชำรุดเป็น Success, $Pr(S) = p = \frac{5}{15}$

ข. การหยิบแบบไม่ใส่คืน : จากสถานการณ์ในข้อ ก. ถ้าหยิบของทีละชิ้น 3 ครั้ง แต่ไม่มีการใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป จะเห็นว่าการกระทำ 3 ครั้งไม่เป็นอิสระต่อกัน $Pr(S)$ ในการหยิบครั้งที่ 1 คือ $\frac{5}{15}$ ถ้าการหยิบครั้งที่ 1 ได้ Success ของในกล่องซึ่งมีเหลืออยู่ 14 ชิ้น จะมีของชำรุดหรือ Success เหลืออยู่ 4 ชิ้น $Pr(S)$ ของการหยิบครั้งที่ 2 จะเป็น $\frac{4}{14}$ ซึ่ง $\neq \frac{5}{15}$ นั่นคือการกระทำขาดคุณสมบัติของความเป็นอิสระต่อกัน

ค. การหยิบแบบไม่ใส่คืนจากประชากรขนาดใหญ่ (Large population) : พิจารณาจากการหยิบของ 3 ชิ้นแบบไม่ใส่คืนจากกล่องที่มีของ 1,500 ชิ้น ซึ่งเป็นของเสียอยู่ 500 ชิ้น ให้ S_1 เป็นการหยิบได้ Success ในการหยิบครั้งที่ 1 ดังนั้น $Pr(S_1) = \frac{500}{1500} = \frac{5}{15}$ และถ้าให้ S_2 เป็นการหยิบได้ Success ในการหยิบครั้งที่ 2 ดังนั้น $Pr(S_2|S_1) = \frac{499}{1499}$ ซึ่งมีค่าประมาณ $\frac{5}{15}$ จะเห็นว่าการกระทำขาดคุณสมบัติของความเป็นอิสระต่อกัน แต่เราก็ยังสามารถประมาณการกระทำนี้ได้ว่าเป็น Bernoulli trials เราอาจสรุปเป็นหลักเกณฑ์ได้ว่าถ้าเราสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืนจากประชากรขนาดใหญ่ โดยที่ขนาดของตัวอย่างเป็นเพียงส่วนเล็ก ๆ ส่วนหนึ่งของประชากร (ประมาณน้อยกว่า 10% หรืออาจใช้น้อยกว่า 5%) เราจะประมาณการกระทำว่าเป็น Bernoulli trials

1.3 การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial distribution)

การกระทำแบบ Bernoulli ที่กำหนดจำนวนครั้งของการกระทำเป็น n ครั้ง ที่มี $Pr(S) = p$ ให้ X = จำนวน Success ในการกระทำ n ครั้ง การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X เรียกว่าการแจกแจงแบบทวินาม หรือ Binomial (n, p)

Binomial distribution :	n Bernoulli trials
	$p = Pr(S)$
	X = จำนวน Success ในการกระทำ n ครั้ง
	$X \sim$ Binomial (n, p)
	$Pr[X = x] = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2 \ldots, n$
	$E(X) = np$, $Var(X) = npq$ โดยที่ $q = 1 - p$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

พิจารณา Binomial expansion theorem

$n = 1$; $(a + b)^1 = a + b$

$n = 2$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n = 3$; $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n = n$ (Any positive integer power);

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} ba^{n-1} + \ldots + \binom{n}{x} b^x a^{n-x} + \ldots + b^n$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

ถ้า $a = q$ และ $b = p$ โดยที่ $p + q = 1$, นั่นคือ $q = 1 - p$

$$(q + p)^n = q^n + \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{2} p^2q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{x} p^xq^{n-x} + \ldots + p^n = 1$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^xq^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} Pr[X = x]$$

จะเห็นได้ว่าคำว่า Binomial distribution นั้น เราได้มาจากความจริงทางพีชคณิต ที่เรียกว่า Binomial expansion theorem นั่นเอง

1.3.1 วิธีใช้ตาราง Binomial (ตาราง A1)

จากตาราง A1 ให้ค่า Cumulative probabilities $Pr[X \leq r] = \sum_{x=0}^{r} \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ สำหรับบางค่าของ n และ p

$$Pr[X = x] = Pr[X \leq x] - Pr[X \leq x-1]$$
$$Pr[a \leq X \leq b] = Pr[X \leq b] - Pr[X \leq a-1]$$
$$Pr[X > x] = 1 - Pr[X \leq x]$$

ตัวอย่างที่ 1.1 สมมุติว่าอัตราการงอกของเมล็ดพืชชนิดหนึ่งเป็น 80% สำหรับฤดูการปลูกนี้ ถ้าทำการเพาะ 15 เมล็ด จงหา Probability ที่

1) อย่างมาก 8 เมล็ดจะงอก
2) 10 เมล็ดหรือมากกว่าจะงอก
3) จำนวนที่งอกจะไม่น้อยกว่า 8 และไม่มากกว่า 12

S = Success = การงอกของเมล็ด

$n = 15, p = Pr(S) = .8$

X = จำนวนเมล็ดที่จะงอก

ใช้ตาราง A1 :

1) $Pr[X \leq 8] = .0181$
2) $Pr[X \geq 10] = 1 - Pr[X \leq 9] = 1 - .0611 = .9389$
3) $Pr[8 \leq X \leq 12] = Pr[X \leq 12] - Pr[X \leq 7] = .6020 - .0042 = .5978$

หมายเหตุ

กำหนดให้ $p^* = 1 - p$ และเนื่องจาก $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$ เราจะได้ว่า

$$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} = \binom{n}{n-x} (p^*)^{n-x} (1-p^*)^x$$

ถ้าเขียนแทน $\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ ด้วย $b(x; n, p)$

ดังนั้น $b(x; n, p) = b(n-x; n, p^*)$

เช่น $b(7; 15, .8) = Pr[X \leq 7] - Pr[X \leq 6] = .0042 - .0008 = .0034$

$b(8; 15, .2) = Pr[X \leq 8] - Pr[X \leq 7] = .9992 - .9958 = .0034$

1.3.2 Mean และ Variance ของ Binomial distribution

จาก Bernoulli trial

Y = จำนวน Success ในการกระทำ Bernoulli

y	0	1
Prob	q	p

$$E(Y) = 0.q + 1.p = p$$

$$E(Y^2) = 0^2.q + 1^2.p = p$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

พิจารณา n Bernoulli trials

X = จำนวน Success ในการกระทำ n ครั้ง

ให้ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

โดยที่ X_1 = เป็นจำนวน Success ในการกระทำครั้งแรก ($X_1 = 0$ หรือ 1),

X_2 = เป็นจำนวน Success ในการกระทำครั้งที่ 2 ($X_2 = 0$ หรือ 1),

$\vdots$

X_n = เป็นจำนวน Success ในการกระทำครั้งที่ n ($X_n = 0$ หรือ 1)

เพราะว่าการกระทำทั้ง n ครั้ง เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (random variable) ที่เป็นอิสระต่อกัน และแต่ละตัวต่างก็มีการกระจายเหมือน Y

จากกฎของ Expectation และ Variance ของผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่ม เราจะได้

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots + p = np$$

และ $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = pq + pq + \ldots + pq = npq$

ดังนั้นถ้า $X \sim$ Binomial (n, p) แล้ว $E(X) = np$ และ $Var(X) = npq$

1.4 การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric distribution)

D = จำนวนของเสีย N − D = จำนวนของดี	สุ่มมา n ชิ้น (แบบไม่ใส่คืน) →	X = จำนวนของเสีย n − X = จำนวนของดี
N = ขนาดของประชากร (Population size)		n = ขนาดของตัวอย่าง (Sample size)

Hypergeometric distribution : N = ขนาดของประชากร

n = ขนาดของตัวอย่าง

D = จำนวนของเสียในประชากร

X = จำนวนของเสียในตัวอย่าง

$$Pr[X = x] = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \ldots, n,$$

โดยที่ $n \leq D$ และ $n \leq N - D$

หรือ $x = 0, 1, \ldots, D$,

โดยที่ $n > D$

$E(X) = np$ โดยที่ $p = \frac{D}{N}$ (population proportion of defective)

$Var(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, $q = 1 - p$

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ เราเรียกว่า f.p.c. (finite population correction factor) ของ variance

ถ้า $\frac{n}{N}$ เล็กมาก เทอม f.p.c. จะมีค่าเข้าใกล้ 1 ทำให้ Var(X) = npq ซึ่งเท่ากับ variance ของ Binomial random variable โดยทั่ว ๆ ไป ถ้า $n < 5\%$ ของ N หรือ 10% ของ N เราทิ้งเทอม f.p.c. ได้

ดังนั้น ถ้า N ใหญ่มาก และ n เล็กมากเมื่อเทียบกับ N เราสามารถใช้ Binomial Distribution ประมาณค่า Hypergeometric Distribution โดยใช้ E(X) = np และ Var (X) = npq โดยที่ p = D/N และ q = 1 − p

1.5 การแจกแจงแบบจีโอเมตริก (Geometric distribution) สำหรับเวลาของการรอคอย (Waiting time)

พิจารณาจาก Bernoulli trials ถ้าเรากำหนดจำนวนครั้งของการกระทำให้เท่ากับ n แล้ว จำนวน Success จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการกระจายเป็นการแจกแจงแบบทวินาม แต่ถ้าเราไม่กำหนดขนาด n ล่วงหน้า เราจะกระทำไปเรื่อย ๆ จนได้ Success เป็นครั้งแรก ดังนั้น จำนวนครั้งของการกระทำจนได้ Success 1 ครั้ง จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ให้สังเกตว่า การกระทำจะหยุดเมื่อได้ 1 Success

ถ้าให้ X = จำนวนครั้งของการกระทำที่ต้องทำจนได้ 1 Success

$$\Pr[X = x] = \Pr[\underbrace{F\ldots F}_{x-1}S] = q^{x-1}p,\ x = 1, 2, \ldots$$

เราเรียกรูปแบบของการกระจายนี้ว่า การกระจายแบบจีโอเมตริก

> Geometric distribution (Discrete Waiting Time Distribution) :
>
> X = จำนวนครั้งของการกระทำจนได้ 1 Success
>
> $p = \Pr(S),\ q = 1 - p$
>
> $\Pr[X = x] = q^{x-1}p,\ x = 1, 2, \ldots$
>
> $E(X) = \dfrac{1}{p},\ Var(X) = \dfrac{q}{p^2}$

หมายเหตุ

การกระจายแบบ Geometric เป็นกรณีพิเศษของการกระจายแบบ Negative Binomial (หัวข้อ 1.8) ที่มี $k = 1$

1.6 เหตุการณ์ที่เกิดไม่บ่อยและการแจกแจงแบบปัวซอง (Rare Events and the Poisson distribution)

นอกจากเราสามารถใช้ Poisson distribution ในการประมาณ Binomial probabilities เมื่อ n ใหญ่ ($n \to \infty$) และ p เล็กมาก ($p \to 0$) แล้ว เรายังใช้เป็นรูปแบบของความน่าจะเป็น

(Probability Model) สำหรับเหตุการณ์ซึ่งเกิดขึ้นโดยที่เราทราบเพียงจำนวนครั้งเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์ (ซึ่งเท่ากับ np) ในหนึ่งหน่วยเวลาหรือหนึ่งหน่วยพื้นที่เท่านั้น ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ เรานับจำนวนครั้งของการกระทำทั้งหมดไม่ได้ แต่จะมีเพียง 2-3 เหตุการณ์ (Success) เท่านั้นที่เกิดขึ้น ในสถานการณ์อย่างนี้เราต้องการรูปแบบของความน่าจะเป็นที่ใช้เพียงค่าของ np และไม่ต้องการทราบแต่ละค่าของ n หรือ p

Poisson distribution :

X : จำนวนครั้งของ Success ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง

m = จำนวนครั้งเฉลี่ยของการเกิด Success ในช่วงเวลาหนึ่ง

$$Pr[X = x] = \frac{e^{-m}m^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots$$

โดยที่ e = 2.71828...

E(X) = m, Var(X) = m

ใน Binomial distribution ที่มี n ขนาดใหญ่ p ขนาดเล็ก และ np = m มีขนาดปานกลาง

$$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-m}m^x}{x!}$$

ตาราง A2 ให้ค่า Cumulative probabilities $Pr[X \leq r] = \sum_{x=0}^{r} \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$ สำหรับบางค่าของ μ

1.7 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์มของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Uniform distribution)

ถ้า X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม หรือ $X \sim U(k)$

แล้ว $Pr[X = x] = \frac{1}{k}$, $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i/k = \mu$$

$$Var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k} = \sigma^2$$

1.8 การแจกแจงแบบ Negative Binomial (Negative Binomial distribution)

จากการกระทำแบบ Bernoulli , $Pr(S) = p$

X = จำนวนครั้งที่กระทำจนได้ Success รวม k ครั้ง

Sequence : $\underbrace{S \text{ มี } (k-1) \text{ ตัว, } F \text{ มี } (x-k) \text{ ตัว}}_{(x-1) \text{ ตัว}}$ $\underset{\text{ตัวที่ } x}{S}$

$$Pr[X = x] = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \quad , \; x = k, k+1, \ldots$$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ จะได้หัวทั้งหมดหรือก้อยทั้งหมดเป็นครั้งที่ 2 ในการโยนครั้งที่ 5

ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง

Sample space = {TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH}

Success = {TTT, HHH}

Pr [จะเป็น TTT หรือ HHH] $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = p$

ในที่นี้ X = จำนวนครั้งที่กระทำจนได้ Success รวม 2 ครั้ง นั่นคือ X มีการแจกแจงแบบ Negative Binomial ที่มี $p = \frac{1}{4}$, $k = 2$

$$Pr[X = 5] = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$$

1.9 การแจกแจงแบบ Negative Hypergeometric (Negative Hypergeometric distribution) : การหยิบแบบไม่ใส่คืน

X = จำนวนครั้งที่หยิบจนได้ k สิ่งจากของในกลุ่มที่ 1 (สมมุติว่าเป็นของเสียซึ่งมีอยู่ D ชิ้น)

หมายเหตุ การหยิบ หยิบไปเรื่อย ๆ จนได้ k สิ่งจาก D สิ่ง

Sequence :

$$\underbrace{\text{ชิ้นที่ 1 ถึงชิ้นที่ } (k-1) \text{ จาก } D \text{ ชิ้น} \;/\; (x-k) \text{ ชิ้นจาก } (N-D) \text{ ชิ้น}}_{(x-1) \text{ ชิ้น}} \;/\; \underbrace{\text{ชิ้นที่ } k \text{ จาก } D}_{\text{ชิ้นที่ } x}$$

$$Pr[X = x] = \frac{\binom{D}{k-1}\binom{N-D}{x-k}}{\binom{N}{x-1}} \; \frac{D-k+1}{N-x+1} \quad , \; x = k, k+1, \ldots, N-D+k$$

$\frac{D-k+1}{N-x+1}$ คือ Pr [หยิบชิ้นสุดท้ายได้ของเสีย]

ตัวอย่างที่ 1.8 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีดำ 4 ลูก หยิบลูกบอลแบบสุ่มชนิดหยิบแล้วไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลแดงครบ 3 ลูก ในการหยิบครั้งที่ 5

X = จำนวนครั้งที่หยิบจนได้ลูกบอลแดงครบ 3 ลูก

X มีการกระจายแบบ Negative Hypergeometric ที่มี N = 9, D = 5, k = 3

$$\Pr[X = 5] = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{\binom{9}{4}} \frac{3}{5} = \frac{2}{21}$$

(หมายเหตุ ในที่นี้ $x = k, k+1, \ldots, N-D+k$ หรือ $x = 3, 4, 5, 6, 7$)

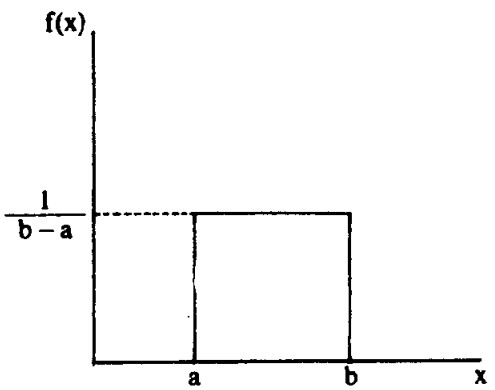
1.10 การแจกแจงแบบยูนิฟอร์มของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Uniform distribution)

$X \sim U(a,b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



1.11 การแจกแจงแบบพหุนาม (Multinomial distribution)

ถ้าแต่ละครั้งของการกระทำอาจเกิดผลได้ k อย่างต่าง ๆ กันคือ $E_1, \ldots, E_k$ ด้วยความน่าจะเป็น $p_1, \ldots, p_k$ ตามลำดับ

$X_1, \ldots, X_k$ แทนจำนวนครั้งของการเกิด $E_1, \ldots, E_k$ ใน n ครั้งของการกระทำที่เป็นอิสระต่อกัน

$$f(x_1, \ldots, x_k ; p_1, \ldots, p_k, n) = Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k]$$
$$= \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k},$$
$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \text{ และ } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

โดยที่ $\binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \dfrac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}$

ตัวอย่างที่ 1.4 ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อม ๆ กัน 6 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมเป็น 7 หรือ 11 = 2 ครั้ง, ได้ 2 ลูกที่มีหน้าเหมือนกัน 1 ครั้ง และอย่างอื่น ๆ 3 ครั้ง

ให้ E_1 : ผลรวมของ 2 หน้าเป็น 7 หรือ 11

E_2 : 2 หน้าเหมือนกัน

E_3 : ไม่ใช่ E_1 และ E_2

หน้าของลูกที่ 2 \ หน้าของลูกที่ 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

E_1

E_2

ดังนั้น $p_1 = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

$p_2 = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$p_3 = 1 - \left(\dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{11}{18}$

ค่าทั้ง 3 นี้คงที่ในการกระทำทั้ง 6 ครั้ง

$$Pr[X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3] = f(2, 1, 3; \tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{11}{18}, 6)$$
$$= \binom{6}{2, 1, 3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{11}{18}\right)^3$$
$$= \frac{6!}{2!\,1!\,3!} \left(\frac{4}{81}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{11^3}{18^3}\right)$$
$$= .1127$$