บทที่ 4
การวิเคราะห์ความแปรปรวน
(Analysis of Variance)

1. สรุปสูตรการวิเคราะห์ความแปรปรวนของการจัดจำแนกแบบทางเดียว (One-way classification)

โครงสร้างของข้อมูล

	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	...	วิธีที่ t	
	x_{11}	x_{21}		x_{t1}	
	x_{12}	x_{22}		x_{t2}	
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	x_{1n_1}	x_{2n_2}		x_{tn_t}	
Total : T_i	T_1	T_2	...	T_t	G = grand total
Mean : $\bar{x}_i$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_t$	$\bar{\bar{x}} = \frac{G}{N}$ = grand mean
Sample size : n_i	n_1	n_2	...	n_t	$N = \sum_{i=1}^{t} n_i$

x_{ij} = ข้อมูลตัวที่ j จากวิธีการที่ i

$i = 1, ..., t$ และ $j = 1, ..., n_i$

T_i = treatment total

$= \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

$$G = \sum_{i=1}^{t} T_i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\bar{x}_i = \text{treatment mean} = \frac{T_i}{n_i}$$

$$CF. = \frac{G^2}{N}$$

$$SST = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CF.$$

$$SStr = \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} - CF.$$

$$SSE = SST - SStr$$

Model : $x_{ij} = \mu_i + E_{ij}, i = 1, \ldots, t$ และ $j = 1, \ldots, n_i$

หรือ $x_{ij} = \mu + \alpha_i + E_{ij}$

μ_i = population mean ของ population ที่ i

α_i = อิทธิพลของวิธีการที่ i, $\sum_{i=i}^{t} \alpha_i = O$

สรุปขั้นการทดสอบ

1. $H_0 : \mu_1 = \ldots \mu_t$ หรือ $\alpha_1 = \ldots = \alpha_t = 0$
2. H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน หรือมี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$
3. กำหนด α
4. CR : $F > f_{(t-1, N-t), \alpha}$
5. หา f_c จากตาราง ANOVA

ANOVA

S.V.	df.	SS	MS	f
Treatments	$t-1$	SStr	MStr	$f_c = \frac{MStr}{MSE}$
Error	$N-t$	SSE	MSE	
Total	$N-1$	SST		

6. สรุปผล

ถ้า f_c ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 สรุปว่า population means ของทั้ง t populations ไม่เท่ากันหมด หรือ t วิธีการมีประสิทธิภาพไม่เท่ากันหมด

ถ้า f_c ตกอยู่นอก CR. เราจะไม่ปฏิเสธ H_0 สรุปว่า t population means เท่ากันหมด หรือ t วิธีการมีประสิทธิภาพเท่ากันหมด

2. การทดสอบการเท่ากันของ population variances จาก t normal populations

2.1 วิธีของ Bartlett (n_i ไม่เท่ากันหมด)

สรุปขั้นการทดสอบ

1. $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_t^2$
2. H_1 : variances ไม่เท่ากันหมด
3. กำหนด α
4. CR : $B > \chi^2_{t-1,\,\alpha}$
5. $b_c = 2.3026 \dfrac{q}{h}$

โดยที่ $q = (N-t) \log_{10} s_p^2 - \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) \log_{10} s_i^2$

$$h = 1 + \frac{1}{3(t-1)} \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-t} \right)$$

และ $s_p^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) s_i^2}{N-t}$

6. สรุปผล

2.2 วิธีของ Cochran (ใช้เมื่อ n_i เท่ากันหมด = n)

สรุปขั้นการทดสอบ

1. $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_t^2$
2. H_1 : variances ไม่เท่ากันหมด
3. กำหนด α
4. CR : $G > g_{(n,\,t),\,\alpha}$ (ค่า $g_{(n,\,t),\,\alpha}$ อ่านจากตาราง A7 โดยที่ k = t)
5. $g_c = \dfrac{\text{largest } s_i^2}{\sum_{i=1}^{t} s_i^2}$
6. สรุปผล

2.3 วิธีของ Hartley (ใช้เมื่อ n_i เท่ากันหมด = n)

สรุปขั้นการทดสอบ

1. $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_t^2$

2. H_1 : variances ไม่เท่ากันหมด

3. กำหนด α

4. CR : $H > h_{(t,\, n),\, \alpha}$ (ค่า $h_{(t,\, n),\, \alpha}$ อ่านจากตาราง A8 โดยที่ r = t)

5. $h_c = \dfrac{\text{largest } s_i^2}{\text{smallest } s_i^2}$

6. สรุปผล

3. Duncan's new multiple range test (ใช้เมื่อ n_i มีค่าเท่ากันหมด = n)

วิธีทำ

1. เรียง sample means จากค่าน้อยไปหามาก

2. กำหนด α

3. อ่านค่า r_p จากตาราง A9, ค่า r_p ขึ้นอยู่กับ df ของ SSE (จากตาราง ANOVA) และ α สำหรับ p = 2, 3, ..., t

4. คำนวณ $R_p = r_p \sqrt{\dfrac{MSE}{n}}$, $n_1 = \ldots = n_t = n$, MSE จากตาราง ANOVA

5. เปรียบเทียบค่า R_p กับค่าความแตกต่างของ sample means ที่เรียงลำดับไว้แล้ว โดยให้เริ่มจาก mean ค่าสูงสุดกับต่ำสุดก่อน, กับรองต่ำสุด และถัดไปเรื่อย ๆ จนถึงกับรองสูงสุด แล้วเปรียบเทียบรองสูงสุดกับต่ำสุดเรื่อย ๆ ไป

ถ้า range ของ p means < R_p เราสรุปได้ว่ากลุ่มของ means p ตัวนั้นไม่ต่างกันอย่างมีนัยยะสำคัญ (ในกลุ่มของ means p ตัว : range = mean ค่าสูงสุดของกลุ่ม - mean ค่าต่ำสุดของกลุ่ม) ตัวอย่างเช่น

$\bar{x}_3$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_4$	$\bar{x}_1$
10.24	11.76	11.98	16.78

$\bar{x}_4 - \bar{x}_3 < R_3$ เราสรุปได้ว่า $\bar{x}_4$, $\bar{x}_2$ และ $\bar{x}_3$ เป็นกลุ่มของ means 3 ตัวที่ไม่ต่างกัน ในกรณีนี้เราไม่ต้องเปรียบเทียบ ($\bar{x}_4$ และ $\bar{x}_2$) และ ($\bar{x}_2$ และ $\bar{x}_3$) อีก

ในการสรุปผล เราจะลากเส้นเชื่อม $\bar{x}_i$'s ที่ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยยะสำคัญ เช่น $\underline{\bar{x}_3\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4}\ \underline{\bar{x}_1}$ นั่นคือสรุปว่า $\mu_2 = \mu_3$, $\mu_2 = \mu_4$ และ $\mu_3 = \mu_4$ ส่วนคู่อื่น ๆ นอกจากนี้ต่างกันอย่างมีนัยยะสำคัญ

4. Multiple-t Confidence Interval

$(1-\alpha)$ 100% Confidence interval ของ $(\mu_\ell - \mu_k)$ ความแตกต่างของ mean ของวิธีการที่ ℓ และของวิธีการที่ $k, \ell \neq k = 1, \ldots, t$ คือ

$$(\bar{x}_\ell - \bar{x}_k) \pm t_{N-t,\,\alpha/2}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_\ell}+\frac{1}{n_k}\right)}, \text{โดยที่ } MSE = \frac{SSE}{N-t}$$

ชุดของ $(1-\alpha)$ 100% simultaneous confidence intervals ของความแตกต่างของ $(\mu_\ell - \mu_k)$, $\ell \neq k = 1, \ldots, t$ m คู่คือ

$$(\bar{x}_\ell - \bar{x}_k) \pm t_{N-t,\,\alpha/2m}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_\ell}+\frac{1}{n_k}\right)}, \quad \text{โดยที่}$$

m = จำนวน confidence statements (intervals)

5. Contrasts หรือ Comparisons

คำจำกัดความ เราเรียก **Linear** function ของ population means ที่มีรูป $L = \sum_{i=1}^{t} c_i\mu_i$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{t} c_i = 0$ (เพื่อทำให้เราสามารถประมาณค่า L ได้) ว่า comparison หรือ contrast ของ population means หรือของ treatment means

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^{t} c_i\bar{x}_i$$

$$\text{Est.Var}(\hat{L}) = \hat{\sigma}^2_{\hat{L}} = MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{c_i^2}{n_i}$$

สรุปขั้นการทดสอบ

1. $H_0 : L = 0$ หรือ $\sum_{i=1}^{t} c_i\mu_i = 0$
2. $H_1 : L \neq 0$ หรือ $\sum_{i=1}^{t} c_i\mu_i \neq 0$

3. กำหนด α

4. ถ้าใช้ t – test CR : $|T| > t_{N-t, \alpha/2}$

ถ้าใช้ F – test CR : $F > f_{(1, N-t), \alpha}$

5. $t_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{t} c_i\bar{x}_i}{\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} \frac{c_i^2}{n_i}}}$

หรือ $f_c = t_c^2 = \dfrac{(\Sigma\, c_i\bar{x}_i)^2}{MSE\, \Sigma \frac{c_i^2}{n_i}} = \dfrac{SSL}{MSE}$

โดยที่ SSL = contrast sum of squares $= \dfrac{(\Sigma c_i\bar{x}_i)^2}{\Sigma \frac{c_i^2}{n_i}}$

$$= \frac{(\Sigma c_i T_i/n_i)^2}{\Sigma c_i^2/n_i}$$

คำจำกัดความ 2 contrast 2 contrasts $L_1 = \sum_{i=1}^{t} b_i\mu_i$ และ $L_2 = \sum_{i=1}^{t} c_i\mu_i$ จะเป็น orthogonal contrasts ถ้า $\sum_{i=1}^{t} \frac{b_i c_i}{n_i} = 0$

หรือถ้า $n_1 = \ldots n_t = n$ แล้ว $\sum_{i=1}^{t} b_i c_i = 0$

6. Scheffe''s method of multiple comparisons

ถ้าสนใจ contrast ใด contrast หนึ่งเพียงอันเดียว

$(1-\alpha)$ 100% confidence interval ของ L คือ

$$\hat{L} \pm t_{N-t, \alpha/2} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} c_i^2/n_i}$$

แต่ถ้าจาก family ของ contrasts เราสนใจจะรับประกัน ชุดของ confidence intervals ชุดหนึ่ง (เพียงส่วนหนึ่งของ family) ด้วยความเชื่อมั่นอย่างน้อย $(1-\alpha)$ 100% confidence interval ตามรูปแบบของ Scheffe' คือ

$$\hat{L} \pm \sqrt{(t-1)\, f_{(t-1, N-t), \alpha}} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{t} c_i^2/n_i}$$

7. สรุปสูตรการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการทดลองแบบ Randomized complete block (RCB)

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการทดลองแบบ RCB เพื่อเปรียบเทียบ k วิธีการ (treatment) และมี b กลุ่ม (block)

กลุ่ม	วิธีการ				Total	Mean
	1	2	...	k	$x_{i.}$	$\bar{x}_{i.}$
1	x_{11}	x_{12}		x_{1k}	$x_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
2	x_{21}	x_{22}		x_{2k}	$x_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
b	x_{b1}	x_{b2}		x_{bk}	$x_{b.}$	$\bar{x}_{b.}$
Total : $x_{.j}$	$x_{.1}$	$x_{.2}$		$x_{.k}$	$x_{..}$	
Mean : $\bar{x}_{.j}$	$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$		$\bar{x}_{.k}$		$\bar{x}_{..}$

x_{ij} = ข้อมูลในกลุ่มที่ i ที่ได้รับวิธีการที่ j (ข้อมูลใน cell (i, j))

$i = 1, \ldots, b$ และ $j = 1, \ldots, k$

$x_{i.} = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ = ผลรวมของกลุ่มที่ i (total of i'th block)

$x_{.j} = \sum_{i=1}^{b} x_{ij}$ = ผลรวมของวิธีการที่ j (total of j'th treatment)

$\bar{x}_{i.} = x_{i.}/k$ = mean ของกลุ่มที่ i (mean of i'th block)

$\bar{x}_{.j} = x_{.j}/b$ = mean ของวิธีการที่ j (mean of j'th treatment)

$x_{..} = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}$ = Grand total

$\bar{x}_{..} = \frac{x_{..}}{bk}$ = Grand mean

$$CF = (x_{..})^2/bk$$

$$SST = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - CF$$

$$SStr = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{k} x_{.j}^2 - CF$$

$$SSblk = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{b} x_{i.}^2 - CF$$

$$SSE = SST - SStr - SSblk$$

ANOVA (Fixed model)

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	k − 1	SStr	MStr	f_1 = MStr/MSE
Blocks	b − 1	SSblk	MSblk	f_2 = MSblk/MSE
Error	(k − 1) (b − 1)	SSE	MSE	
Total	bk − 1	SST		

Model : $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + E_{ij}$, $i = 1, \ldots, k$ และ $j = 1, \ldots, b$

α_i = อิทธิพลของกลุ่มที่ i, $\sum_{i=1}^{b} \alpha_i = 0$ และ $\alpha_i = \mu_{i.} - \mu$

โดยที่ $\mu_{i.}$ = population mean ของกลุ่มที่ i

β_j = อิทธิพลของวิธีการที่ j, $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$ และ $\beta_j = \mu_{.j} - \mu$

โดยที่ $\mu_{.j}$ = population mean ของวิธีการที่ j

สรุปขั้นการทดสอบ

ในการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบ k วิธีการ (treatment)

1. $H_0 = \mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots = \mu_{.k}$ หรือ $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$
2. H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน หรือ H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$
3. กำหนด α
4. CR : $Ff_{(k-1, (b-1)(k-1)), \alpha}$
5. $f_c = f_1 =$ MStr/MSE (จากตาราง ANOVA)
6. สรุป

ในการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบ b กลุ่ม (block)

1. $H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = \mu_{b.}$ หรือ $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_b = 0$
2. H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน หรือ H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0$
3. กำหนด α
4. CR : $F > f_{(b-1, (b-1)(k-1)), \alpha}$
5. $f_c = f_2 =$ MSblk/MSE (จากตาราง ANOVA)
6. สรุป

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4

4.1 ในการโฆษณา 3 วิธี คือทางหนังสือพิมพ์, ทางวิทยุ, และทางโทรทัศน์ ผู้ที่ต้องการดูว่าผลของการโฆษณาวิธีใดจะทำให้ปริมาณขายเพิ่มขึ้นมากกว่าวิธีอื่น ได้กำหนดระยะเวลาทดสอบไว้ 15 สัปดาห์ โดยที่วิธีโฆษณาแต่ละวิธีจะทำใน 5 สัปดาห์ที่ต่างกัน แล้วหาปริมาณขายที่เพิ่มขึ้นต่อสัปดาห์ (ตัวเลขได้มาจากผลต่างของปริมาณขายที่คาดว่าจะขายได้ต่อ 1 สัปดาห์กับปริมาณที่ขายได้จริงต่อสัปดาห์) ไว้ ผลปรากฏดังนี้

ทาง น.ส.พ.	ทางวิทยุ	ทางโทรทัศน์
790	640	721
853	832	834
940	734	737
820	969	931
830	742	923

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าปริมาณขายเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นของแต่ละวิธีที่ใช้ในการโฆษณาเท่ากันหมด ถ้าท่านปฏิเสธ H_0 จงใช้วิธีของ Duncan เพื่อตรวจดูว่าวิธีใดดีกว่าวิธีใด

	น.ส.พ.	วิทยุ	โทรทัศน์	
Total : T_i	4233	3917	4146	$G = 12296$
Mean : $\bar{x}_i$	846.6	783.4	829.2	$\bar{x} = 819.7333$

$$n_1 = n_2 = n_3 = 5,\ N = 15,\ t = 3$$

$$\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{5} x_{ij}^2 = 10203970$$

$$CF = \frac{G^2}{N} = 10079441$$

$$SST = 10203970 - CF = 124529$$

$$SStr = \frac{1}{5}(4233^2 + 3917^2 + 4146^2) - CF$$

$$= 10090098.8 - CF = 10657.8$$

$$SSE = 124529 - 10657.8 = 113871.2$$

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	2	10657.8	5328.9	$f_c = .5616$
Error	12	113871.2	9489.2667	
Total	14	124529		

ให้ μ_i = ปริมาณขายเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นเมื่อใช้วิธีโฆษณาวิธีที่ i, i = 1, 2, 3

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .05$

CR : $F > f_{(2,\ 12),\ .05} = 3.8853$

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{5328.9}{9489.2667} = .5616$$

$\because f_c = .5616$ ตกอยู่นอก CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ สรุปว่าผลจากการโฆษณาทั้ง 3 วิธีดีพอ ๆ กัน

ดังนั้นไม่ต้องทำการเปรียบเทียบ mean ตามวิธีของ Duncan ต่อไป

4.2 เจ้าหน้าที่ฝ่ายบุคคลของบริษัทสนใจความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วที่ใช้ในการอ่านและระดับการศึกษาของพนักงานในบริษัท เขาได้แยกระดับการศึกษาเป็น 4 ระดับคือ

A_1 : เรียนมัธยมปลายแต่ไม่จบ

A_2 : จบมัธยมปลาย

A_3 : เรียนมหาวิทยาลัยแต่ไม่จบ

A_4 : จบปริญญาตรีและสูงกว่าปริญญาตรี

เขาได้สุ่มคนมาจากกลุ่มต่าง ๆ กลุ่มละ 10 คน และวัดเวลาที่แต่ละคนใช้ในอ่านบทความเดียวกัน ได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	3	15.915	5.305	$f_c = 5.4066$
Error	36	35.324	.9812	
Totel	39	51.239		

ให้ μ_i = ความเร็วเฉลี่ยของการอ่านของพนักงานกลุ่มที่ i

$H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_4$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .01$

CR : $F > f_{(3,\ 36),\ .01} = 4.39$ (โดยวิธี linear interpolation)

$$\begin{cases} f_{(3,\ 30),\ .01} = 4.51 \\ f_{(3,\ 40),\ .01} = 4.31 \end{cases}$$

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{5.305}{.9812} = 5.4066$$

$\because f_c = 5.4066$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือความเร็วเฉลี่ยที่ใช้ในการอ่านของพนักงานทั้ง 4 กลุ่มไม่เท่ากันหมด

4.3 ในการทดลองเพื่อทดสอบว่าปุ๋ย 4 ชนิดจะให้ผลต่อการเจริญเติบโตของพืชชนิดหนึ่งได้เหมือนกันหรือไม่ ได้นำพืชที่มีส่วนสูงและลักษณะความแข็งแรงของต้นพอ ๆ กันมา 20 ต้น แบ่งออกเป็น 4 พวกอย่างสุ่ม แต่ละพวกใส่ปุ๋ยแต่ละชนิด แล้ววัดความสูง (ฟุต) ที่เพิ่มขึ้นหลังจาก 3 เดือนไปแล้ว ได้ผลดังนี้

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าความเร็วเฉลี่ยที่ใช้ในการอ่านของพนักงานทั้ง 4 กลุ่มเท่ากันหมดหรือไม่

A_1	A_2	A_3	A_4
7.2	5.7	5.8	3.7
6.7	5.7	4.1	6.3
6.5	7.9	4.2	5.6
7.4	5.2	5.0	5.7
6.4	6.6	7.6	5.1
8.4	4.6	4.6	3.6
7.5	6.3	6.0	4.4
7.0	7.0	6.0	5.1
5.5	4.8	5.2	6.4
5.7	5.7	5.4	6.2

$n_1 = \ldots = n_4 = 10, N = 40, t = 4$

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{10} x_{ij}^2 = 1417.8$$

	A_1	A_2	A_3	A_4	
Total : T_i	68.3	59.5	53.9	52.1	$G = 233.8$
Mean : $\bar{x}_i$	6.83	5.95	5.39	5.21	$\bar{x} = 5.845$

$$CF = \frac{(233.8)^2}{40} = 1366.561$$

$$SST = 1417.8 - 1366.561 = 51.239$$

$$SStr = \frac{1}{10}(68.3^2 + \ldots + 52.1^2) - CF$$

$$= 1382.476 - 1366.561$$

$$= 15.915$$

$$SSE = 51.239 - 15.915 = 35.324$$

	ปุ๋ย				
	A	B	C	D	
	.6	1.1	2.1	.5	
	.8	1.3	2.0	.9	
	.3	1.5	1.7	1.0	
	.5	.8	1.6	.7	$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 = 26.2$
	.6	.9	1.0	.7	
T_i	2.8	5.6	8.4	3.8	$G = 20.6$
T_i^2	7.84	31.36	70.56	14.44	124.2
$\bar{x}_i$	.56	1.12	1.68	.76	$\bar{x} = 1.03$

สมมุติว่า Population ของส่วนสูงของพืชที่ได้รับปุ๋ยแต่ละชนิดต่างมีการกระจายเป็น Normal ที่มี $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_D^2 = \sigma^2$

ก) จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าส่วนสูงเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นเมื่อใช้ปุ๋ยทั้ง 4 ชนิดไม่แตกต่างกัน จากผลการทดสอบจะสรุปได้หรือไม่ว่าปุ๋ยทั้ง 4 ดีพอ ๆ กันในการช่วยการเจริญเติบโตของพืชชนิดนี้ ถ้าปฏิเสธ H_0 จงใช้วิธีของ Duncan เพื่อตรวจดูว่าปุ๋ยชนิดใดดีกว่าชนิดใด

ข) กำหนด $L_1 = \frac{\mu_A + \mu_B}{2} - \frac{\mu_C + \mu_D}{2}$, L_1 เป็น Contrast หรือไม่ เพราะเหตุใด

ค) จงหา $\hat{L}_1$, $\sigma^2_{\hat{L}_1}$ และทดสอบ $H_0 : L_1 = 0$

ง) จงหา Contrast L_2 ที่ orthogonal กับ L_1 และทดสอบ $H_0 : L_2 = 0$

$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5,\ N = 20,\ t = 4$

$$CF = \frac{(20.6)^2}{20} = 21.218$$

$$SST = 26.2 - 21.218 = 4.982$$

$$SStr = \frac{124.2}{5} - 21.218 = 24.84 - 21.218 = 3.622$$

$$SSE = 4.982 - 3.622 = 1.36$$

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	3	3.622	1.2073	$f_c = 14.2035$
Error	16	1.36	.085	
Total	19	4.982		

ให้ μ_i = ส่วนสูงเฉลี่ยของพืชที่เพิ่มขึ้นเมื่อได้ปุ๋ย i

ก) $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .01$

CR : $F > f_{(3,\ 16),\ .01} = 5.29$

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{1.2073}{.085} = 14.2035$$

$\because f_c = 14.2035$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ สรุปไม่ได้ว่าปุ๋ยทั้ง 4 ชนิดดีเท่า ๆ กัน

Duncan's method

$\bar{x}_1$	x_4	x_2	$\bar{x}_3$
.56	.76	1.12	1.68

MSE = .085, df. = 16, n = 5

$\alpha = .01$

$$R_p = r_p\sqrt{\frac{MSE}{5}} = .1304\ r_p$$

จากตาราง A 9

p	2	3	4
r_p	4.131	4.309	4.425
$\therefore R_p$	.539	.562	.577

1) $\bar{x}_3 - \bar{x}_1 = 1.68 - .56 = 1.12 > R_4$

2) $\bar{x}_3 - \bar{x}_4 = .92 > R_3$

3) $\bar{x}_3 - \bar{x}_2 = .56 > R_2$

4) $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = .56 < R_3$

สรุป : $\underline{\bar{x}_1 \quad \bar{x}_4 \quad \bar{x}_2} \quad \underline{\bar{x}_3}$

นั่นคือ $\mu_1 = \mu_4 = \mu_2$ และ mean ทั้ง 3 ต่างก็ต่างจาก μ_3

ข) L_1 เป็น contrast เพราะสัมประสิทธิ์ของ μ_is รวมกัน $= 0$

ค) $$\hat{L}_1 = \frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2} - \frac{\bar{x}_C + \bar{x}_D}{2}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} - \frac{\bar{x}_3 + \bar{x}_4}{2}$$

$$= .84 - 1.22 = -.38$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{L}_1} = \text{MSE} \sum_{i=1}^{4} \frac{c_i^2}{n_i} = (.085)\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{.085}{5} = .017$$

$H_0 : L_1 = 0$

$H_1 : L_1 \neq 0$

$\alpha = .05$

CR : $|T| > t_{16,\ .025} = 2.12$

$$t_c = \frac{\Sigma c_i \bar{x}_i}{\sqrt{MSE\ \Sigma \frac{c_i^2}{n_i}}} = \frac{\hat{L}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{L}_1}} = \frac{-.38}{\sqrt{.017}} = -2.9145$$

$\because$ t_c ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$

3) $L_2 = \mu_C - \mu_D = \mu_3 - \mu_4$

L_2 orthogonal กับ L_1

จากสัมประสิทธิ์ของ μ_is ใน L_1 และ L_2

$n_1 = \ldots = n_4 = 5$

L_1	b_i	1	1	−1	−1
L_2	c_i	0	0	1	−1

$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = 0$

$$\hat{L}_2 = \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = 1.68 - .76 = .92$$

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{L}_2} = (.085)\frac{1}{5}[1^2 + (-1)^2] = .034$$

$H_0 : L_2 = 0$

$H_1 : L_2 \neq 0$

$\alpha = .05$

CR : $|T| > t_{16,\ .025} = 2.12$

$$t_c = \frac{\hat{L}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{L}_2}} = \frac{.92}{\sqrt{.034}} = 4.9894$$

$\because$ t_c ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ $\mu_3 \neq \mu_4$

4.4 โรงงานผลิตสินค้าชนิดหนึ่งเช่าเครื่องจักรใหม่มา 4 เครื่องจากโรงงานผลิตเครื่องจักร 4 โรงงาน โรงงานนี้ต้องการทราบว่าเครื่องจักรทั้ง 4 ผลิตสินค้าได้เร็วเท่า ๆ กันหรือไม่ โรงงานจึงทำการนับปริมาณสินค้า (ชิ้น) ที่เครื่องจักรแต่ละเครื่องผลิตได้ในช่วงเวลาครั้งละ 1 ชั่วโมง

ให้ x_{ij} เป็นปริมาณสินค้า (ชิ้น) ที่เครื่องจักร i ผลิตได้ในช่วงเวลา j

$i = 1, \ldots, 4$ และ $j = 1, \ldots, n_i$

เครื่องจักร			
1	2	3	4
8	7	12	10
10	5	9	9
7	10	13	8
14	9	12	12
	9	14	6
	11		12
			9

ก) จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ $H_0 : \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_4^2$

ข) สมมุติว่าผลการทดสอบจาก ก) เราไม่ปฏิเสธ H_0 จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าปริมาณสินค้าที่ผลิตได้โดยเฉลี่ยจากเครื่องจักรทั้ง 4 เครื่องเท่ากันหมด และจากผลการทดสอบเราจะสรุปได้หรือไม่ว่าเครื่องจักรทั้ง 4 มีประสิทธิภาพในการผลิตดีเท่า ๆ กัน

	เครื่องจักร				
	1	2	3	4	
n_i	4	6	5	7	$N = 22$
T_i	39	51	60	60	$G = 216$
$\bar{x}_i$	9.75	8.5	12	9.4286	$\bar{x} = 9.8182$
s_i^2	9.5833	4.7	3.5	4.619	$\Sigma s_i^2 = 22.4023$

$t = 4, N-t = 18$

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 2250$$

$$CF = \frac{G^2}{N} = 2120.7273$$

ก) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$

$H_1 : \sigma_i$'s ไม่เท่ากันหมด

$\alpha = .05$

CR : $B > \chi^2_{3,\ .05} = 7.815$ (Bartlett's test)

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{t} (n_i - 1)s_i^2}{N - t} = \frac{1}{18}[3(9.5833) + 5(4.7) + 4(3.5) + 6(4.619)]$$

$$= \frac{93.9639}{18} = 5.2202$$

$$q = (N - t) \log s_p^2 - \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) \log s_i^2$$

$$= 18 \log (5.2202) - [3 \log (9.5833) + 5 \log (4.7) + 4 \log (3.5) + 6 \log (4.619)]$$

$$= 18 (.7176871) - [3 (.9815151) + 5 (.6720979) + 4 (.544068) + 6 (.664548)]$$

$$= 12.9184 - 12.4686 = .4498$$

$$h = 1 + \frac{1}{3(t-1)} \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - t} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3(3)} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{18} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{9}(.8944) = 1.0994$$

$$b_c = 2.3026 \frac{q}{h}$$

$$= 2.3026 \frac{(.4498)}{1.0994} = .9421$$

$\therefore\ b_c = .9421$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$

ข) $SST = 2250 - 2120.7273 = 129.2727$

$$SStr = \left(\frac{39^2}{4} + \frac{51^2}{6} + \frac{60^2}{5} + \frac{66^2}{7}\right) - CF$$

$$= 2156.0357 - 2120.7273 = 35.3084$$

$SSE = 129.2727 - 35.3084 = 93.9643$

ให้ μ_i = ปริมาณสินค้าเฉลี่ยที่ผลิตได้จากเครื่องจักรที่ i ในช่วงเวลา 1 ชั่วโมง

$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_4$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .05$

CR : $F > f_{(3,\ 18),\ .05} = 3.16$

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	3	35.3084	11.7695	$f_c = 2.2546$
Error	18	93.9643	5.2202	
Total	21	129.2727		

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{11.7695}{5.2202} = 2.2546$$

$\because\ f_c$ ไม่ตกอยู่ใน CR.เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือเครื่องจักรทั้ง 4 มีประสิทธิภาพในการผลิตดีพอ ๆ กัน

4.5 ในการศึกษาว่าวิธีสอนที่ต่างกันทำให้ผลการเรียนวิชาสถิติเบื้องต้นต่างกันหรือไม่ ได้แบ่งวิชาสถิติเบื้องต้นเป็น 3 กลุ่ม ใช้วิธีสอนต่างกัน ในการสอบใช้ข้อสอบเดียวกัน สุ่มนักศึกษา 15 คน จาก 3 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน ปรากฏว่าได้คะแนน (จากคะแนนเต็ม 15 คะแนน) ดังนี้

กลุ่ม		
1	2	3
8	7	12
10	5	9
7	10	13
14	9	12
11	9	14

สมมุติ population ของคะแนนของแต่ละกลุ่มต่างมีการกระจายเป็น Normal ที่มี population variance เท่ากันหมด จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่า population mean ของคะแนนของทั้ง 3 กลุ่มเท่ากันหมด จากผลการทดสอบจะสรุปได้หรือไม่ว่าวิธีสอนทั้ง 3 วิธีให้ผลดีเท่า ๆ กัน ถ้าสรุปไม่ได้ จงใช้ Duncan's method เพื่อตรวจสอบความแตกต่าง

$n_1 = n_2 = n_3 = 5, \ t = 3, \ N = 15$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 = 1600$$

	กลุ่ม			
	1	2	3	
T_i	50	40	60	G = 150
$\bar{x}_i$	10	8	12	$\bar{\bar{x}} = 10$

$$CF = \frac{(150)^2}{15} = 1500$$

$$SST = 1600 - 1500 = 100$$

$$SStr = \frac{1}{5}(50^2 + 40^2 + 60^2) - 1500 = 1540 - 1500 = 40$$

$$SSE = 100 - 40 = 60$$

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	2	40	20	$f_c = 4$
Error	12	60	5	
Total	14	100		

ให้ μ_i = คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ i

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .05$

CR : $F > f_{(2,\ 12),\ .05} = 3.89$

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{20}{5} = 4$$

$\because\ f_c = 4$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือวิธีการสอน 3 วิธีให้ผลดีไม่เท่ากันหมด

Duncan's method

$$\begin{array}{ccc} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & \bar{x}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 10 & 12 \end{array}$$

$n = 5$

MSE $= 5$, df $= 12$, $\alpha = .05$

$$R_p = r_p\sqrt{\frac{MSE}{5}} = r_p$$

จากตาราง A9

p	2	3
$R_p = r_p$	3.082	3.225

1) $\bar{x}_3 - \bar{x}_2 = 12 - 8 = 4 > R_3$

2) $\bar{x}_3 - \bar{x}_1 = 2 < R_2$

3) $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 2 < R_2$

สรุป : $\underline{\bar{x}_2 \ \bar{x}_1} \ \bar{x}_3$ นั่นคือ $\mu_2 = \mu_1$, $\mu_1 = \mu_3$ แต่ $\mu_2 \neq \mu_3$

4.6 วิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นถูกแบ่งเป็น 3 กลุ่ม แต่ละกลุ่มสอนโดยครูแต่ละคน (นักเรียนใน 3 กลุ่มมีความรู้พื้นฐานและความสามารถทางสมองพอ ๆ กันหมด) ผลการสอบไล่ (โดยใช้ข้อสอบเดียวกัน) เป็นดังนี้

ครู		
A	B	C
73, 60	88, 31	68, 41
89, 45	78, 78	79, 59
82, 93	48, 62	56, 68
43, 36	91, 76	91, 53
80, 77	51, 96	71, 79
73, 66	85, 80	71, 15
	74, 56	87
	77	

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้ง 3 กลุ่มต่างกันอย่างมีนัยยะสำคัญหรือไม่ เราจะสรุปได้ไหมว่าครูทั้ง 3 คน สอนดีพอ ๆ กัน

	A	B	C	
n_i	12	15	13	N = 40
T_i	817	1071	838	G = 2726
$\bar{x}_i$	68.0833	71.4	64.4615	$\bar{x}$ = 68.15

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 199462$$

$$CF = \frac{(2726)^2}{46} = 185776.9$$

$$SST = 199462 - CF = 13685.1$$

$$SStr = \left[\frac{817^2}{12} + \frac{1071^2}{15} + \frac{838^2}{13}\right] - CF$$

$$= 186112.25 - CF = 335.35$$

$$SSE = 13685.1 - 335.35 = 13349.75$$

ANOVA

S.V.	of	SS	MS	f
Treatments	2	335.35	167.675	$f_c = .4647$
Error	37	13349.75	360.8041	
Total	39	13685.1		

$H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .05$

CR : $F > f_{(2,\ 37),\ .05} = 3.257$ (โดยวิธี linear interpolation)

$$\begin{cases} f_{(2,\ 30),\ .05} = 3.32 \\ f_{(2,\ 40),\ .05} = 3.23 \end{cases}$$

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{167.675}{360.8041} = .4647$$

$\because$ f_c ไม่ตกอยู่ใน CR.เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปได้ว่าครูทั้ง 3 คนสอนดีพอ ๆ กัน

4.7 ในการทดลองเพื่อทดสอบว่าอาหาร 3 ชนิดจะลดน้ำหนักได้เหมือนกันหรือไม่ ได้เอาคนที่ต้องการจะลดน้ำหนัก และมีน้ำหนักพอ ๆ กันมา 20 คน แบ่งออกเป็น 4 พวกอย่างสุ่ม

โดยสุ่ม 5 คนแรกให้ทานอาหารตามปกติ (Control group) สุ่มอีก 3 คนให้ทานอาหารชนิดที่สอง สุ่ม 4 คนให้ทานอาหารชนิดที่สาม ส่วน 5 คนที่เหลือให้ทานอาหารชนิดที่สี่ แล้วหาน้ำหนักที่ลดลงในช่วงเวลา 2 เดือนได้ผลดังนี้

Control	อาหารชนิดที่ 1	อาหารชนิดที่ 2	อาหารชนิดที่ 3
.6	1.1	2.1	.5
.8	1.3	2.0	.9
.3	1.5	1.7	1.0
.5		1.6	.7
.6			.7

สมมุติว่า $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_4^2$

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าน้ำหนักเฉลี่ยที่ลดลงของ 4 กลุ่มเท่ากันหมดหรือไม่

กลุ่ม

	1	2	3	4	
n_i	5	3	4	5	N = 17
T_i	2.8	3.9	7.4	3.8	G = 17.9
$\bar{x}_i$	.56	1.3	1.85	.76	$\bar{x}$ = 1.0529

t = 4 $\quad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 = 23.75$

$$CF = \frac{(17.9)^2}{17} = 18.8476$$

$$SST = 23.75 - 18.8476 = 4.9024$$

$$SStr = \left(\frac{2.8^2}{5} + \frac{3.9^2}{3} + \frac{7.4^2}{4} + \frac{3.8^2}{5}\right) - CF$$

$$= 23.216 - CF = 4.3684$$

$$SSE = 4.9024 - 4.3684 = .534$$

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	f
Treatments	3	4.3684	1.4561	$f_c = 35.4282$
Error	13	.543	.0411	
Total	16	4.9024		

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1 : มี mean อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

$\alpha = .01$

CR : $F > f_{(3,\,13),\,.01} = 5.74$

$$f_c = \frac{MStr}{MSE} = \frac{1.4561}{.0411} = 35.4282$$

$\because$ f_c ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคืออาหาร 4 ชนิดมีผลต่อการลดน้ำหนักไม่เหมือนกันหมด

4.8 ในการพิจารณาเพื่อเลือกใช้เครื่องจักรที่ต่างกัน 4 ชนิด ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง ได้ตกลงจะเอาพนักงาน 6 คนมาร่วมในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบเครื่องจักรทั้ง 4 การควบคุมเครื่องจักรนั้นขึ้นกับสภาวะร่างกายและทักษะส่วนตัวของพนักงานด้วย และเราทราบว่าพนักงานแต่ละคนมีความสามารถในการควบคุมเครื่องจักรต่างกัน ได้จดเวลา (เป็นวินาที) ที่พนักงานแต่ละคนใช้เครื่องจักรแต่ละชนิดในการผลิตตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จไว้ดังตารางข้างล่าง จงทดสอบว่าเครื่องจักรทั้ง 4 ทำงานได้ด้วยความเร็วเท่ากันหรือไม่ และทดสอบเกี่ยวกับความเร็วของพนักงานทั้ง 6 คนด้วย ($\alpha = .05$)

พนักงาน (กลุ่ม)	เครื่องจักร (วิธีการ)				รวม
	1	2	3	4	
1	42.5	39.8	40.2	41.3	163.8
2	39.3	40.1	40.5	42.2	162.1
3	39.6	40.5	41.3	43.5	164.9
4	39.9	42.3	43.4	44.2	169.8
5	42.9	42.5	44.9	45.9	176.2
6	43.6	43.1	45.1	42.3	174.1
รวม	247.8	248.3	255.4	259.4	1010.9

กำหนด $\sum_{i}^{6}\sum_{j}^{4} x_{ij}^2 = 42661.81$, $\sum_{i=1}^{6} x_{i.}^2 = 170488.15$

$\sum_{j=1}^{4} x_{.j}^2 = 255575.25$, CF $= 42579.95$

$$SST = 42661.81 - 42579.95 = 81.86$$

$$SStr = \frac{255575.25}{6} - 42579.95 = 42595.88 - 42579.95 = 15.93$$

$$SSblk = \frac{170488.15}{4} - 42579.95 = 42622.04 - 42579.95 = 42.09$$

$$SSE = 81.86 - 15.93 - 42.09 = 23.84$$

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	f	f_{table}
เครื่องจักร	3	15.93	5.31	$f_1 = 3.34^*$	$f_{(3,\ 15),\ .05} = 3.29$
พนักงาน	5	42.09	8.42	$f_2 = 5.30^*$	$f_{(5,\ 15),\ .05} = 2.90$
Error	15	23.84	1.59		
Total	23	81.86			

เครื่องจักร (เป็นวิธีการ)

1) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

2) H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0, j = 1, \ldots, 4$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(3,\ 15),\ .05} = 3.29$

5) $f_c = f_1 = 3.34$

6) $\because f_c > 3.29$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือเครื่องจักรทั้ง 4 ทำงานได้ด้วยความเร็วไม่เท่ากันหมด

พนักงาน (เป็นกลุ่ม)

1) $H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_6 = 0$

2) H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0, i = 1, \ldots, 6$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(5,\ 15),\ .05} = 2.90$

5) $f_c = f_2 = 5.30$

6) $\because f_c > 2.90$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือพนักงานทั้ง 6 คน ทำงานได้ด้วยความเร็วไม่เท่ากันหมด

4.9 ปุ๋ย 4 ชนิดคือ f_1, f_2, f_3 และ f_4 ถูกใช้เพื่อดูปริมาณผลิตผลของถั่ว ดินได้ถูกแบ่งเป็น 3 แปลง (ซึ่งต่างกันในคุณภาพของดิน) โดยที่แต่ละแปลงประกอบด้วยหลุม 4 หลุม (plots) ซึ่งมีสภาพดินเหมือนกัน ผลิตผลต่อเอเคอร์ (1 เอเคอร์ = 2 ไร่ครึ่ง) ได้ถูกบันทึกไว้ดังนี้

แปลงที่ 1	$f_1 = 42.7$	$f_3 = 48.5$	$f_4 = 32.8$	$f_2 = 39.3$
แปลงที่ 2	$f_3 = 50.9$	$f_1 = 50.0$	$f_2 = 38.0$	$f_4 = 40.2$
แปลงที่ 3	$f_4 = 51.1$	$f_2 = 46.3$	$f_1 = 51.9$	$f_3 = 53.3$

กำหนด $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}^2 = 25257.48$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i.}^2 = 99871.59$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{.j}^2 = 74965.34$$

$$CF = 24770.25$$

จงทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนตามการทดลองแบบ RCB ($\alpha = .05$)

ปุ๋ย

แปลง	f_1	f_2	f_3	f_4	รวม
1	42.7	39.3	48.5	32.8	163.3
2	50.0	38.0	50.9	40.2	179.1
3	51.9	46.3	53.5	51.1	202.8
รวม	144.6	123.6	152.9	124.1	545.2

$$SST = 25257.48 - 24770.25 = 487.23$$

$$SStr = 74965.34/3 - CF = 24988.45 - CF = 218.20$$

$$SSblk = 99871.59/4 - CF = 24967.89 - CF = 197.64$$

$$SSE = 487.23 - 218.20 - 197.64 = 71.39$$

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	f	f_{table}
ปุ๋ย	3	218.2	72.73	$f_1 = 6.11^*$	$f_{(3,6),.05} = 4,76$
แปลง	2	197.64	98.82	$f_2 = 8.3^*$	$f_{(2,6),.05} = 5.14$
Error	6	71.39	11.90		
Total	11	487.23			

ปุ๋ย (เป็นวิธีการ)

1) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

2) H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0, j = 1, \ldots, 4$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(3,6),.05} = 4.76$

5) $f_c = f_1 = 6.11$

6) $\because f_c > 4.76$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือปุ๋ยทั้ง 4 ชนิด ทำให้ผลิตผลของถั่วต่างกัน

แปลง (เป็นกลุ่ม)

1) $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

2) H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0, i = 1, 2, 3$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(8, 6), .05} = 5.14$

5) $f_c = f_2 = 8.3$

6) $\because f_c > 5.14$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือทั้ง 4 แปลงมีคุณภาพของดินแตกต่างกัน

4.10 ขนมปัง 3 แถว แต่ละแถวใช้ส่วนผสมต่างกัน นำเข้าไปอบในเตาอบพร้อม ๆ กัน เนื่องจากสิ่งที่ควบคุมไม่ได้นั้นทำให้เตาอบทำงานไม่เหมือนกันในแต่ละครั้งของการอบ ได้ทำการอบขนมปังทีละ 3 แถว 5 ครั้ง และวัดความแน่นของขนมปังไว้ดังนี้

ครั้งที่อบ (block)	สูตร		
	1	2	3
1	.95	.71	.69
2	.86	.85	.68
3	.71	.62	.51
4	.72	.72	.73
5	.74	.64	.44

กำหนด $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 = 7.6763$, $CF = 7.4483$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{i.}^2 = 22.6415 , \quad \sum_{j=1}^{3} x_{.j}^2 = 37.6745$$

จงทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้ (α = .05)

ครั้งที่อบ	สูตร			
(block)	1	2	3	รวม
1	.95	.71	.69	2.35
2	.86	.85	.68	2.39
3	.71	.62	.51	1.84
4	.72	.72	.73	2.17
5	.74	.64	.44	1.82
รวม	3.98	3.54	3.05	10.57

$$SST = 7.6763 - 7.4483 = 0.2280$$

$$SStr = \frac{37.6745}{5} - CF = 7.5349 - CF = 0.0866$$

$$SSblk = \frac{22.6415}{3} - CF = 7.5472 - CF = 0.0989$$

$$SSE = 0.2280 - 0.0866 - 0.0989 = .0425$$

ANOVA

S.V.	d.f.	SS	MS	f	f_{table}
สูตร	2	.0866	.0433	$f_1 = 8.17^*$	$f_{(2,8),.05} = 4.46$
ครั้งที่อบ	4	.0989	.0247	$f_2 = 4.66^*$	$f_{(4,8),.05} = 3.84$
Error	8	.0425	.0053		
Total	14	.2280			

สูตร (เป็นวิธีการ)

1) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

2) H_1 : มี β_j อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0, j = 1, 2, 3$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(2, 8), .05} = 4.46$

5) $f_c = f_1 = 8.17$

6) $\because f_c > 4.46$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสูตรทั้ง 3 ต่างกัน

ครั้งที่อบ (เป็นกลุ่ม)

1) $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$

2) H_1 : มี α_i อย่างน้อย 1 ตัว $\neq 0, i = 1, \ldots, 5$

3) $\alpha = .05$

4) CR : $F > f_{(4, 8), .05} = 3.84$

5) $f_c = f_2 = 4.66$

6) $\because f_c > 3.84$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสภาพของเตาอบไม่คงที่