บทที่ 3
การทดสอบสมมติฐาน
(Testing Hypotheses)

สรุป 6 ขั้นของการทดสอบสมมติฐาน

1. ตั้ง H_0 ให้เกี่ยวข้องกับตัวพารามิเตอร์ $H_0 : \theta = \theta_0$

2. ตั้ง H_1 $\qquad H_1 : \theta < \theta_0$ หรือ $\theta > \theta_0$ หรือ $\theta \neq \theta_0$

3. กำหนด $\propto$ (ระดับนัยสำคัญ) $=$ Pr [Reject H_0 | H_0 จริง]

$=$ Pr [Type I-error]

4. กำหนดตัวสถิติทดสอบ (Test statistic) โดยที่ถ้า H_0 จริงแล้วเราต้องทราบ Sampling distribution ของตัวสถิติทดสอบนั้น เขียนบริเวณที่จะไม่ยอมรับ H_0 หรือเขตวิกฤติ (Critical region = CR.) โดยดูจาก H_1 ว่าการทดสอบจะเป็นการทดสอบแบบหางเดียว (One-tailed test) หรือการทดสอบแบบสองหาง (Two-tailed test) นั่นคือถ้า $H_1 : \theta < \theta_0$ หรือ $\theta > \theta_0$ การทดสอบจะเป็นการทดสอบแบบหางเดียว คือหางซ้ายและหางขวาตามลำดับ ส่วนถ้า $H_1 : \theta \neq \theta_0$ การทดสอบจะเป็นการทดสอบแบบสองหาง

5. สุ่มตัวอย่างแล้วคำนวณค่าของตัวสถิติทดสอบโดยใช้ค่าจากตัวอย่าง

6. สรุปผล ถ้าค่าที่คำนวณได้ในขั้นที่ 5 ตกอยู่ใน CR. เราจะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ $= \propto$ (fail to accept H_0) แต่ถ้าค่าที่คำนวณได้ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ระดับนัยสำคัญ $= \propto$

สรุปการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ σ^2 และ σ_1^2/σ_2^2

H_0	Condition (s)	Test statistic	H_1	CR.
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	Normal population	ถ้า H_0 จริง $X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ $\therefore \chi_c^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{\sigma_0^2}$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]$	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X^2 < \chi^2_{n-1,\,1-\alpha}$ $X^2 > \chi^2_{n-1,\,\alpha}$ $(X^2 < \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}$ และ $X^2 > \chi^2_{n-1,\,\alpha/2})$
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ หรือ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	2 Normal populations, ตัวอย่างสุ่มขนาด n_1 และ n_2 ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน	ถ้า H_0 จริง $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(\nu_1,\,\nu_2)}$ โดยที่ $\nu_1 = n_1 - 1,\ \nu_2 = n_2 - 1$ $\therefore f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2}$, $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\left[\Sigma x_{1i}^2 - \frac{(\Sigma x_{1i})^2}{n_1}\right]$, $s_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\left[\Sigma x_{2i}^2 - \frac{(\Sigma x_{2i})^2}{n_2}\right]$	$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F < \frac{1}{f_{(\nu_2,\,\nu_1),\,\alpha}}$ $F > f_{(\nu_1,\,\nu_2),\,\alpha}$ $\left(F < \frac{1}{f_{(\nu_2,\,\nu_1),\,\alpha/2}}\right.$ และ $\left.F > f_{(\nu_1,\,\nu_2),\,\alpha/2}\right)$

การวิเคราะห์ข้อมูลที่ถูกจัดจำแนกแล้ว (Analysis of Categorized Data)

1. **การทดสอบ** Goodness of fit (Pearson's χ^2 test for Goodness of fit)

อาจแยกการทดสอบเป็น

ก. ทดสอบอัตราส่วนของกลุ่มต่าง ๆ หรือ proportions ใน Multinomial distribution

ข. ทดสอบว่าข้อมูลที่สังเกตมาได้มีรูปการกระจายของความน่าจะเป็นตามที่เราคาดหรือไม่

การทดสอบอาจแยกเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ความน่าจะเป็นของแต่ละ cell (cell probability : p_i) สามารถหาได้จาก H_0 โดยไม่ต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ ทำให้จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า = 0

กรณีที่ 2 เราต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ก่อนหาความน่าจะเป็นของแต่ละ cell

ถ้า n = total frequency

o_i = ค่าความถี่ที่นับมาได้จริงของ cell ที่ i, $\sum_{\text{ทุก cells}} o_i = n$

(observed frequency)

e_i = ค่าความถี่คาดหมายของ cell ที่ i (expected frequency)

p_i = ความน่าจะเป็นของ cell ที่ i (cell probability), $\sum_{\text{ทุก cells}} p_i = 1$

$e_i = np_i, \forall i$

df. **ของ** χ^2 test

df. = จำนวนเทอมที่รวมกันเป็นค่า $\chi^2_c - 1 -$ จำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่า

6 ขั้นของการทดสอบ

1. Ho
2. H_1
3. กำหนด a

4. CR: $X2 > \chi^2_{df., \alpha}$

5. $\chi^2_c = \frac{\Sigma(o_i - e_i)^2}{e_i}$

หมายเหตุ ในกรณีที่ e_i บางตัวมีค่า < 5 เราต้องรวม e_i's ของ cell ข้างเคียงให้มีค่าอย่างน้อย 5 (เมื่อรวม e_i's แล้ว ต้องรวม o_i's ที่คู่กันด้วย) แล้วจึงคำนวณหา χ^2_c

6. สรุปผล

2. การทดสอบความเป็นอิสระต่อกันของลักษณะ 2 ลักษณะ (Test for Independence)

ถ้าให้ลักษณะที่ต้องการศึกษาคือ A และ B

A แบ่งได้เป็น r ลักษณะย่อยคือ $A_1, A_2, \ldots, A_r$

B แบ่งได้เป็น c ลักษณะย่อยคือ $B_1, B_2, \ldots, B_c$

สุ่มตัวอย่างขนาด n แล้วจัดจำแนกลงในตารางความถี่แบบ 2 ทาง ขนาด $(r \times c)$ [$(r \times c)$ contingency table]

กำหนดให้

o_{ij} = ความถี่ที่นับได้จริงของ cell ที่มีลักษณะ A_i และ B_j

R_i = ผลรวมของ row ที่ i = ความถี่ของ A_i

C_j = ผลรวมของ column ที่ j = ความถี่ของ B_j

e_{ij} = ความถี่คาดหมายของ cell ที่มีลักษณะ A_i และ B_j

$= \frac{R_i C_j}{n}, \forall$ i และ j

$p_{ij} = Pr[A_i B_j]$ = ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A_i และ B_j จะเกิดร่วมกัน

$p_i = Pr(A_i)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A_i

$p_j = Pr(B_j)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ B_j

สรุปขั้นการทดสอบ

1. $H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}, \forall\ i = 1, \ldots, r$ และ $j = 1, \ldots, c$

หรือ H_0: ลักษณะ A และ B เป็นอิสระต่อกัน

2. $H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$

หรือ H_1 : ลักษณะ A และ B ไม่เป็นอิสระต่อกัน

3. กำหนด α

4. CR : $X^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1),\ \alpha}$

5. $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$

6. สรุปผล

3. **การทดสอบความเป็นเอกภาพ** (Test for Homogeniety) : Contingency with one margin fixed

สุ่มตัวอย่างขนาด $R_1, \ldots, R_r$ จาก r populations ซึ่งคือ $A_1, \ldots, A_r$ แล้วจัดจำแนก R_i ตาม c ลักษณะย่อยของ B คือ $B_1, B_2, \ldots, B_c$ เราจะได้ตาราง contingency ขนาด $(r \times c)$ ตารางนี้ต่างจากตาราง contingency ในการทดสอบความเป็นอิสระตรงที่ผลรวมของ row (row total) หรือขนาดของตัวอย่างถูกกำหนดไว้ก่อน

กำหนดให้

o_{ij} = ความถี่ที่นับได้จริงของ cell (i, j), $i = 1, \ldots, r$ และ $j = 1, \ldots, c$

R_i = ขนาดของตัวอย่างจาก population ที่ i, $i = 1, \ldots, r$

C_j = ผลรวมของ column ที่ j = ความถี่ของ B_j

e_{ij} = ความถี่คาดหมายของ cell (i, j)

$= \left(\frac{C_j}{n}\right) R_i, \forall\ i$ และ j

$n = \sum_{i=}^{r} R_i$ = Total frequency

p_{ij} = Prob ของ cell (i, j) โดยที่ $\sum_{j=1}^{c} p_{ij} = 1$

สรุปขั้นการทดสอบ

1. Ho : $p_{1j} = p_{2j} = \ldots = p_{rj}, \forall j = 1, \ldots, c$
2. H_1 : ไม่เป็นจริงตาม H_0
3. กำหนด a
4. CR : $X^2 > \chi^2_{(r-1)(c-1), \alpha}$
5. $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$
6. สรุปผล

4. **การทดสอบการเท่ากันของ** k binomial proportions **ของ** k binomial populations (กรณีหนึ่งของการทดสอบความเป็นเอกภาพที่มี c = 2 และกำหนดค่าของ $R_1 = n_1, \ldots, R_k = n_k$ ไว้ก่อน)

สุ่มตัวอย่างขนาด $n_1, \ldots, n_k$ จาก k binomial populations โดยที่ทั้ง k ตัวอย่างเป็นอิสระต่อกัน แล้วจำแนก n_i ออกเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่ม Successes ขนาด x_i และกลุ่ม Failures ขนาด $(n_i - x_i)$ ได้ตาราง contingency ขนาด $(k \times 2)$

กำหนดให้

o_{ij} = ความถี่ที่นับได้จริงของ cell (i, j), i = 1, ..., k และ j = 1, 2

C_j = ผลรวมของ column ที่ j, j = 1.2

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

e_{ij} = ความถี่คาดหมายของ cell (i, j)

$= \frac{n_i C_j}{n}$

p_i = Pr (a success ของ population ที่ i)

สรุปขั้นการทดสอบ

1. H_0 : $p_1 = \ldots = p_k = p$ (และ $q_1 = \ldots = q_k = q$ โดยที่ $q = 1 - p$,
$q_i = 1 - p_i$, $i = 1, \ldots, k$)

2. H_1 : p_i ไม่เท่ากันหมด

3. กำหนด α

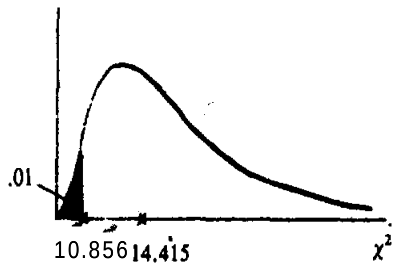
4. CR : $X^2 > \chi^2_{k-1, \alpha}$

5. $\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2} \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$

6. สรุปผล

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3

3.1 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.2 จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่ามีเหตุผลพอที่จะสนับสนุนว่า σ น้อยกว่า 4 หรือไม่



จาก 2.2 $n = 25$, $s^2 = (3.1)' = 9.61$

$H_0 : \sigma^2 = 16$

$H_1 : \sigma^2 < 16$

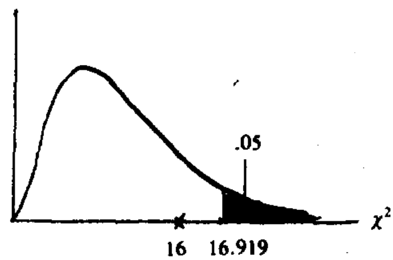
$a = .01$

CR : $X^2 < \chi^2_{24\ \ .99} = 10.856.$

$$\chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24(9.61)}{16} = \frac{230.64}{16} = 14.415$$

$\therefore \chi^2_c = 14.415 > 10.856$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ ไม่มีเหตุผลพอที่จะสนับสนุนว่า $\sigma < 4$

3.2 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.3 เราจะสรุปได้ที่ $\alpha = .05$ หรือไม่ว่า s.d. ของอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ที่ผลิตจากโรงงานนี้มากกว่า 0.9 ปี



จาก 2.3 $n = 10, s^2 = (1.2)^2 = 1.44$

$H_0 : \sigma^2 = (.9)^2 = .81$

$H_1 : \sigma^2 > .81$

$\alpha = .05$

CR : $X^2 > \chi^2_{9,\ .05} = 16.919$

$$\chi^2_c = \frac{9\ (1.44)}{.81} = 16$$

$\because \chi^2_c = 16 < 16.919$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปไม่ได้ว่า s.d. ของอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ที่ผลิตจากโรงงานนี้มากกว่า 0.9 ปี

3.3 ในการตรวจสอบเพื่อดูว่าเครื่องมือตรวจปริมาณ pH ในเลือดที่ใช้งานอยู่ทุกวันสามารถทำงานได้อย่างถูกต้องและเชื่อถือได้ ผู้ใช้เครื่องมือนี้ตั้งมาตรฐานไว้ว่าถ้าเครื่องมือวัดปริมาณ pH หลาย ๆ หนจากเลือดชนิดเดียวกัน แล้วให้ variance ของค่าที่วัดได้ไม่เกิน

0.00013 จะถือว่าเครื่องมือทำงานได้ถูกต้องและเชื่อถือได้ ผู้ทำการทดลองจึงสุ่มเลือดตัวอย่างมา 6 หลอดจากหน่วยทดลอง (Experimental unit) เดียวกัน แล้วใช้เครื่องมือนี้ตรวจปริมาณ pH ในเลือดแต่ละหลอด ปรากฏว่าได้ variance ของค่าที่วัดได้เป็น 0.00019 จากข้อมูลนี้จะทำให้เราสรุปได้ที่ $\alpha = .05$ หรือไม่ว่าเครื่องมือทำงานได้ไม่ถูกต้องแม่นยำ นั่นคือ variance เกิน 0.00013

$n = 6, s^2 = 0.00019$

$H_0 : \sigma^2 = .00013$

$H_1 : \sigma^2 > .00013$

$\alpha = .05$

$CR : X^2 > \chi^2_{5, .05} = 11.07$

$$\chi^2_c = \frac{5(0.00019)}{0.00013} = 7.3077$$

$\because \chi^2_c = 7.3077 < 11.07$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ ยอมรับว่าเครื่องมือทำงานได้ถูกต้องแม่นยำ

3.4 ในการเปรียบเทียบโปรแกรม 2 โปรแกรมในการฝึกงานแก่คนงานในโรงงานเพื่อให้ทำงานฝีมืออย่างหนึ่ง จากคนงาน 20 คน ได้สุ่ม 10 คนเพื่อฝึกงานโดยวิธีที่ 1 และอีก 10 คนที่เหลือฝึกโดยวิธีที่ 2 หลังจากเสร็จการฝึกอบรมได้ให้คนงานทั้ง 20 คนทดสอบแล้วจดเวลาที่ใช้ทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนงานสำเร็จ ผลปรากฏดังนี้

เวลา (นาที)

วิธีที่ 1	15	20	11	23	16	21	18	16	27	24
วิธีที่ 2	23	31	13	19	23	17	28	26	25	28

จงทดสอบที่ $\alpha = .10$ ว่าความแปรปรวนของเวลาที่ใช้ในการทำงานของทั้ง 2วิธี แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ **จงบอกข้อสมมุติที่ต้องสมมุติขึ้นเพื่อใช้วิธีการทดสอบนี้ด้วย**

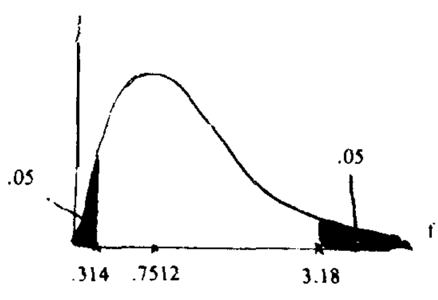
$n_1 = 10, s_1^2 = 23.2111, s_1 = 4.8178$

$n_2 = 10, s_2^2 = 30.9, s_2 = 5.5588$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ หรือ $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ หรือ $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$

$\alpha = .10$



CR : $F < f_{(9,\,9),\,.95} = \frac{1}{f_{(9,\,9),\,.05}} = \frac{1}{3.18} = .314$ และ $F > f_{(9,\,9),\,.05} = 3.18$

$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{23.2111}{30.9} = .7512$

$\because f_c = .7512$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .10$ นั่นคือความแปรปรวนของเวลาที่ใช้ในการทำงานของทั้ง 2 วิธีไม่แตกต่างกัน

ข้อสมมุติ คือทั้ง 2 populations ต่างก็เป็น Normal population

3.5 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.5 เราจะสรุปได้ที่ $\alpha = .05$ หรือไม่ว่าความแปรปรวนของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นเพราะได้ฮอร์โมนมากกว่าความแปรปรวนของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นโดยไม่ได้ฮอร์โมน

จาก 2.5

$n_1 = 6,\ s_1^2 = 57.76$

$n_2 = 6,\ s_2^2 = 268.96$

Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H1 : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$\alpha = .05$

CR : $F > f_{(5,\,5),\,.05} = 5.05$

$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{51.76}{268.96} = .2148$

$\because f_c = .2148 < 5.05$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปไม่ได้ว่าความแปรปรวนของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นเพราะฮอร์โมนมากกว่าความแปรปรวนของน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นโดยไม่ให้ฮอร์โมน

3.6 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.6 ข้อมูลนี้ช่วยให้เราสรุปได้หรือไม่ว่าเครื่องมือชนิด B วัดความเข้มของสารปรอทได้แม่นยำกว่าเครื่องมือชนิด A นั่นคือทดสอบ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ให้ทดสอบที่ $\alpha = .05$

จาก 2.6

A : $n_1 = 7,\ s_1^2 = 0.0109$

B : $n_2 = 6,\ s_2^2 = 0.0003$

H_0 : a: = a:

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$a = .05$

CR : $F > f_{(6,\ 5),\ .05} = 4.95$

$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.0109}{0.0003} = 36.3333$

$\because f_c = 36.3333 > 4.95$ เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปว่าเครื่องมือ B วัดได้แม่นยำกว่าเครื่องมือ A

3.7 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.7 ข้อมูลจะช่วยให้เราสรุปได้หรือไม่ว่าความแปรปรวนของเวลาในการเล่นไม่ต่างกันระหว่างเพศของลิง กำหนด $\alpha = .10$

จาก 2.7 $n_1 = 6, s_1^2 = 0.2241$

$n_2 = 6, s_2^2 = 0.1173$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\alpha = .10$

CR : $F < f_{(5,\ 5),\ .95} = \frac{1}{f_{(5,\ 5),\ .05}} = \frac{1}{5.05} = .198$ และ $F > f_{(5,\ 5),\ .95} = 5.05$

$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.2241}{0.1173} = 1.9105$

$\because f_c = 1.9105$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .10$ นั่นคือความแปรปรวนของเวลาในการเล่นของลูกลิงทั้ง 2 เพศไม่แตกต่างกัน

3.8 จากแบบฝึกหัดข้อ 2.8 จงทดสอบที่ $a = .02$ ว่า s.d. ของคะแนนการอ่านของทั้ง 2 กลุ่มจะไม่แตกต่างกัน

จาก 2.8 $n_1 = 8, s_1^2 = 16.6964$

$n_2 = 8, s_2^2 = 19.125$

Ho : $\sigma_1^2 =$ a:

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$a = .02$

$$CR : F < f_{(7,\ 7),\ .99} = \frac{1}{f_{(7,\ 7),\ .01}} = \frac{1}{6.99} = .1431$$

$$\text{และ } F > f_{(7,\ 7),\ .01} = 6.99$$

$$f_c = \frac{16.6964}{19.125} = .873$$

$\because$ f_c ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ $\alpha = .02$ นั่นคือความแปรปรวนของคะแนนการอ่านของทั้ง 2 กลุ่มไม่ต่างกัน

3.9 ในการเปรียบเทียบการกระจายของคะแนนสอบโดยใช้ข้อสอบ 2 ชนิด ปรากฏว่าความแปรปรวนของผลการสอบโดยใช้ข้อสอบแบบปรนัยกับนักเรียน 21 คน มีค่าเท่ากับ 105.75 ส่วนความแปรปรวนของผลการสอบโดยใช้ข้อสอบแบบอัตนัยที่ใช้กับนักเรียน 13 คน มีค่าเท่ากับ 63.41 เราอาจจะสรุปได้หรือไม่โดยอาศัยข้อเท็จจริงจากตัวอย่างว่าความแปรปรวนของคะแนนสอบเมื่อใช้ข้อสอบทั้ง 2 ชนิดนี้ไม่แตกต่างกัน กำหนด $\alpha = .02$

ปรนัย : $n_1 = 21,\ s_1^2 = 105.75$

อัตนัย : $n_2 = 13,\ s_2^2 = 63.41$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$a = .02$

$$CR : F < f_{(20,\ 12),\ .99} = \frac{1}{f_{(12,\ 20),\ 01}} = \frac{1}{3.23}$$

$$= .3096 \text{ และ } F > f_{(20,\ 12),\ .01} = 3.86$$

$$f_c = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.6677$$

$\because$ $f_c = 1.6667$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ที่ $\alpha = .02$ นั่นคือความแปรปรวนของคะแนนสอบเมื่อใช้ข้อสอบ 2 ชนิดไม่ต่างกัน

3.10 ได้จดบันทึกจำนวนรถบรรทุกน้ำมันที่เข้ามายังโรงกลั่นในแต่ละวันไว้ทั้งหมด 1000 วัน ผลปรากฏดังนี้

จำนวนรถบรรทุก/วัน	0	1	2	3	4	5	6	7	รวม
จำนวนวัน	372	360	191	57	16	2	1	1	1000

จากข้อมูลข้างต้นจะทำให้เราสรุปได้ไหมว่าจำนวนรถบรรทุกน้ำมันที่เข้ามายังโรงกลั่น/วัน เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (random variable) ที่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution กำหนด $\alpha = .05$

ให้ X = จำนวนรถบรรทุกน้ำมันที่เข้ามายังโรงกลั่น/วัน

H_0 : X $\sim$ Poisson distribution

H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Poisson

$\alpha = .05$

CR : $X^2 > \chi^2_{.05} = 7.815$, df. = S-l-l = 3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	รวม		
o_i	372	360	191	57	16	2	1	1	1000	=	n
					20						

$$m = \frac{(372\times 0)+(360\times 1)+(191\times 2)+\ldots+(7\times 1)}{1000} = \frac{1000}{1000} = 1$$

จากตาราง A2

r	$Pr[x \leqslant r \mid \mu = 1]$	$Pr[x = r] = p_i$	$e_i = np_i$
0	.3679	.3679	367.9
1	.7358	.3679	367.9
2	.9197	.1839	183.9
3	.9810	.0613	61.3
4	.9963	.0153	15.3
5	.9994	.0031	3.1
6	.9999	.0005	.5
7	1.0000	.0001	.1

$\left.\begin{matrix}15.3\\3.1\\.5\\.1\end{matrix}\right\} 19.0$

X	0	1	2	3	≥ 4	รวม
o_i	372	360	191	57	20	1000
e_i	367.9	387.9	183.9	61.3	19	1000
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	.0457	.1696	.2741	.3016	.0526	$.8436 = \chi_c^2$

$\because \chi_c^2 = .8436 > 7.815$ เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือยอมรับว่า X มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution

3.11 ปริมาณความต้องการ (demand) หรืออุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งต่อวันในระยะเวลา 1000 วันเป็นดังนี้

ปริมาณความต้องการ/วัน	0	1	2	3	4	5	รวม
จำนวนวัน	626	274	80	15	4	1	1000

จากข้อมูลนี้จะสรุปได้ (ที่ $\alpha = .05$) หรือไม่ว่าปริมาณความต้องการต่อวันเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเป็น poisson distribution

ให้ x = ปริมาณความต้องการ/วัน

H_0 : X ~ Poisson distribution

H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Poisson

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{2,\ .05} = 5.991$, d.f. = 4 − 1 − 1 = 2

x	0	1	2	3	4	5	รวม
o_i	626	274	80	15	4	1	1000 = n

$$\underbrace{15 \quad 5 \quad 4 \quad 1}_{20}$$

$$\hat{m} = \frac{(626\times 0)+(274\times 1)+(80\times 2)+\ldots+(5\times 1)}{1000} = \frac{485}{1000} = .485 \approx .5$$

จากตาราง A2

r	$Pr[X \leq r \mid \mu = .5]$	$Pr[X = r] = p_i$	$e_i = np_i$
0	.6065	.6065	606.5
1	.9098	.3033	303.3
2	.9856	.0758	75.8
3	.9982	.0126	12.6
4	.9998	.0016	1.6 } 14.4
5	1.0000	.0002	.2

x	0	1	2	≥ 3	รวม
o_i	626	274	80	20	1000
e_i	606.5	303.3	75.8	14.4	1000
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	.627	2.8305	.2327	2.1778	$5.868 = \chi^2_c$

$\chi^2_c = 5.868$ ไม่ตกอยู่ใน CR, เราไม่สามารถปฏิเสธ Ho ที่ $a = .05$ นั่นคือยอมรับว่า $X \sim$ Poisson distribution

3.12 จำนวนรถยนต์ที่วิ่งผ่านจุด ๆ หนึ่งในช่วงเวลาหนึ่ง ในระยะเวลา 400 วัน เป็นดังนี้

ปริมาณรถยนต์	0	1	2	3	4	5	6	รวม
จำนวนวัน	129	137	83	38	10	2	1	400

จากข้อมูลนี้จะทำให้สรุปได้ที่ ($\alpha = .01$) หรือไม่ว่าปริมาณรถยนต์ที่วิ่งผ่านจุด ๆ นี้ในช่วงเวลาหนึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเป็น Poisson distribution ที่มี m = 1

ให้ x = ปริมาณรถยนต์ในช่วงเวลาหนึ่ง

Ho : $X \sim$ Poisson distribution ที่มี mean = 1

H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Poisson

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{4\ .05} = 9.488$, df. = 5 - 1 = 4

จาก 3.10

x_i	$P_r[X = x_i] = p_i$	$e_i = np_i = 400\ p_i$
0	.3679	147.16
1	.3679	147.16
2	.1839	73.56
3	.0613	24.52
4	.0153	6.12
5	.0031	1.24 } 7.60
6	.0005	.20
7	.0001	.04

x_i	.0	1	2	3	≥ 4	รวม
o_i	129	137	83	38	13	400
e_i	147.16	-147.16	73.56	24.52	7.60	400
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	2.2410	.7015	1.2114	7.4107	3.8368	15.4014 $= \chi_c^2$

$\chi_c^2 =$ 15.4014 ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ α = .05 นั่นคือสรุปว่า X ไม่มีการแจกแจงเป็น Poisson

3.13 เครื่องซักผ้าชนิดหนึ่งถูกผลิตออกมาขายในสีต่าง ๆ กัน 5 สี นักวิจัยตลาดต้องการศึกษาว่าผู้ซื้อนิยมสีต่าง ๆ no ๆ กันหรือไม่ ได้สุ่มตัวอย่างคือผู้ซื้อ 300 คน ผลปรากฏดังนี้

สี	แดง	น้ำเงิน	ขาว	นวล	น้ำตาล	รวม
จำนวนคนที่ซื้อ	88	65	52	40	55	300

เราจะสรุปได้ (ที่ α = .05) หรือไม่ว่าผู้ซื้อนิยมสีต่าง ๆ พอ ๆ กัน

ให้ X = จำนวนผู้ซื้อสีต่าง ๆ

$H_0 : X \sim \text{Uniform}\ (\frac{1}{5})$

H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Uniform

$\alpha = .05$

CR $X^2 > \chi^2_{4\ .05} = 9.488$

สี	แดง	น้ำเงิน	ขาว	นวล	น้ำตาล	รวม
o_i	88	65	52	40	55	300
e_i	60	60	60	60	60	300
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	13.0667	.4167	1.0667	6.6667	.4167	21.6335 = χ^2_c

$\chi^2_c = 21.6335$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปว่าผู้ซื้อนิยมสีต่าง ๆ ไม่เหมือนกัน

3.14 หยิบไพ่ 3 ใบจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ แบบหยิบแล้วใส่คืน (with replacement) ให้ Y เป็นจำนวนไพ่โพดำที่หยิบได้ในไพ่ 3 ใบ ได้ทำการทดลองอย่างเดียวกันนี้ 128 ครั้ง (แต่ละครั้งนับจำนวนไพ่โพดำที่หยิบได้ในไพ่ 3 ใบ) ได้ผลดังนี้

y = จำนวนไพ่โพดำ	0	1	2	3	รวม
จำนวนครั้ง	42	62	22	2	128

จงทดสอบสมมติฐานที่ $\alpha = .05$ ว่าการทดลองนี้ให้ตัวเลขที่มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution ที่มี $p = \frac{1}{4}$ หรือตัวแปรเชิงสุ่ม Y มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution ที่มี $p = \frac{1}{4}$ (n = 3)

ถ้า Y ~ Binomial $(n = 3, p = \frac{1}{4})$ แล้ว

y	0	1	2	3	รวม
Pr[Y = y]	27/64	27/64	9/64	1/64	1

H_0 : Y ~ Binomial $(n = 3, p = \frac{1}{4})$

H_1 : Y ไม่มีการแจกแจงเป็น Binomial

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{2\ .05}$ = 5.991, df. = 3-1 = 2

Y	0	1	2	3	รวม
p_i	27/64	27/64	9/64	1/64	1
e_i	54	54	$\underbrace{18 \qquad 2}_{20}$		128
o_i	42	62	$\underbrace{22 \qquad 2}_{24}$		128
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	2.6667	1.1852	.8		4.6519 = χ_c^2

χ_c^2 = 4.6519

$\because$ χ_c^2 ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ a = .05 นั่นคือยอมรับว่า Y มีการแจกแจงเป็น Binomial distribution

3.15 ในภาคการศึกษาหนึ่ง จากนักศึกษาที่เรียนวิชาสถิติ 100 คน ผลปรากฏดังนี้ (จากระบบ 5 grades)

grade	A	B	C	D	F	รวม
จำนวนนักศึกษา	14	18	32	20	16	100

จงทดสอบสมมติฐานที่ a = .05 ว่า การแจกแจงของ grade เป็น Uniform distribution หรือไม่

H_0 : Grade ~ Uniform distribution

H_1 : Grade ไม่มีการแจกแจงเป็น Uniform

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{4,\ .05}$ = 9.488

Grade	A	B	C	D	F	รวม
o_i	14	18	32	20	16	100
e_i	20	20	20	20	20	100
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	1.8	.2	7.2	0	.8	$10.0 = \chi^2_c$

$\chi^2_c = 10.0$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปว่า Grade ไม่มีการแจกแจงเป็น Uniform

หมายเหตุ ถ้าทดสอบที่ $\alpha = .01$, CR : $X^2 > \chi^2_{4,\ .01} = 13.277$ เราจะไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$

3.16 โยนเหรียญ 1 อันจนกว่าจะได้หัว จดจำนวนครั้งที่ต้องโยนจนได้หัว 1 ครั้ง (ค่าของ X) ไว้ หลังจากทำการทดลอง 256 ครั้ง ผลปรากฏดังนี้

x	1	2	3	4	5	6	7	8	รวม
จำนวนครั้ง	136	60	34	12	9	1	3	1	256

จงทดสอบสมมติฐานที่ $a = .05$ ว่าการแจกแจงของ x **เป็น** Geometric distribution hi $p = \frac{1}{2}$ **หรือไม่**

Ho : X ~ Geometric distribution **ที่มี** $p = \frac{1}{2}$

H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Geometric

$a = .05$

CR : $X^2 > \chi^2_{5\ .05} = 11.07$, df $= 6 - 1 = 5$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	รวม
Pr { X = x } = pi	1/2	1/4	1/8	$1/2^4$	$1/2^5$	$1/2^6$	$1/2^7$	$1/2^8$	
o_i	136	60	34	12	9		5	1	$256 = 2^8 = n$
$e_i = np_i$	128	64	32	16	8	4	2 7	1	256

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = .5 + .25 + .125 + 1 + .125 + .5714 = 2.5714$$

$\because \chi_c^2 = 2.5714$ ไม่ตกอยู่ใน CR, เราไม่สามารถปฏิเสธ Ho ที่ a = .05 นั่นคือ สรุปว่า $x \sim$ Geometric distribution ที่มี $p = \frac{1}{2}$

3.17 ในการศึกษาถึงการใช้เวลาในการอ่านบทความที่กำหนดให้พนักงานใหม่ 390 คนอ่าน ผลปรากฏดังนี้

class boundaries	$f_i = o_i$
1.95 - 2.45	21
2.45 - 2.95	43
2.95 - 3.45	68
3.45 - 3.95	97
3.95 - 4.45	72
4.45 - 4.95	53
4.95 - 5.45	21
5.45 - 5.95	11
5.95 - 6.45	4
รวม	390

จาก Grouped data $\bar{x} = 3.81$, $s = .86$ จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าเวลาที่พนักงานใหม่กลุ่มนี้ใช้ในการอ่านมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution)

ให้ X = เวลาที่พนักงานแต่ละคนใช้ในการอ่าน

H_0 : X $\sim$ Normal distribution

H_1 : X ไม่มีการแจกแจงเป็น Normal

$\alpha = .05$

Cr : $X^2 > \chi^2_{4, .05} = 11.07$, df = B-1-2 = 5

n = 390, $\bar{x} = 3.81$, s = .86

class boundaries	z	Pi	o_i	$e_i = 390\ p_i$	$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$
1.95 - 2.45	-2.16) - (- 1.58)	0571 - .0154 = .0417	21	16.263	1.3798
2.45 - 2.95	(-1.58) - (-1)	1587 - .0571 = .1016	43	39.624	.2876
2.95 - 3.45	(-1) - (-.42)	.3372 - .1587 = .1785	68	69.615	.0375
3.45 - 3.95	(-4.2) - .16	.5636 - .3372 = .2264	97	88.2%	.8580
3.95 - 4.45	.16 .74	.7704 - .5636 = .2068	72	80.652	.9281
4.45 - 4.95	.74 - 1.33	.9082 - .7704 = .1378	53	53.742	.0102
4.95 - 5.45	1.33 - 1.91	.9719 .9082 = .0637	21	24.843	.5945
5.45 - 5.95	1.91 - 2.49	.9936 - .9719 = .0217	11 } 15	8.463 } 10.53	1.8975
5.95 - 6.45	2.49 - 3.07	.9989 .9936 = .0053	4	2.067	
				10.53	5.9932 = χ_c^2

การหาค่า z's

$$-2.16 = \frac{1.95-\bar{x}}{s} = \frac{1.95-3.81}{.86}$$

$$3.07 = \frac{6.45-\bar{x}}{s} = \frac{6.45-3.81}{.86}$$

การหา pi

$$p_1 = \Pr[-2.16 < Z < -1.58]$$

$$= \Pr[Z < -1.58] - \Pr[Z < -2.16]$$

$$= .0571 - .0154 = .0417, \text{ etc.}$$

$\because \chi_c^2 = 5.9932$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ a = .05 นั่นคือ สรุปว่า X มีการกระจายเป็น Normal distribution

3.18 ใน 120 ครอบครัว (แต่ละครอบครัวมีลูก 3 คน) นับจำนวนลูกชายของแต่ละครอบครัวที่มีอยู่

จำนวนลูกชาย	0	1	2	3	รวม
จำนวนครอบครัว	21	37	44	18	120

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าจำนวนครอบครัวที่ไม่มีลูกชายเลย : ชาย 1 : ชาย 2 : ชาย 3 = 1 : 3 : 3 : 1

H_0 : จำนวนครอบครัวที่ไม่มีลูกชายเลย : ชาย 1 : ชาย 2 : ชาย 3 = 1 : 3 : 3 : 1

H_1 : อัตราส่วนไม่เป็นไปตาม H_0

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{3,\ .05} = 7.815$

จำนวนลูกชาย	0	1	2	3	รวม
Oi	21	37	44	18	120
Pi	1/8	3/8	3/8	1/8	1
e_i	15	45	45	15	120
$\frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$	2.4	1.4222	.0222	.6	4.4444 = χ^2_c

$\because$ $\chi^2_c = 4.4444$ ตกอยู่นอก H_0 เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปว่า ข้อมูลนี้สนับสนุนอัตราส่วนข้างต้น

3.19 ในการผสมพันธุ์พืช 2 ชนิด จะได้พืชพันธุ์ใหม่ 3 ชนิด คือ A, B และ C ตามทฤษฎีของกรรมพันธุ์บอกว่าอัตราส่วนของ A : B : c จะเป็น 1 : 2 : 1 เพื่อทดสอบทฤษฎีนี้เป็นจริง ได้ทำการผสมพันธุ์พืช 2 ชนิดดังกล่าว และจากต้นอ่อน 90 ต้น ผลปรากฏดังนี้

พันธุ์ใหม่	A	B	C	รวม
จำนวนต้น	18	44	28	90

เราจะสรุปได้หรือไม่ว่าข้อมูลนี้สนับสนุนทฤษฎีกรรมพันธุ์ข้างต้น

H_0 : A : B : C = 1 : 2 : 1

H_1 : อัตราส่วนไม่เป็นไปตาม H_0

$\alpha = .05$

CR : $X^2 > \chi^2_{2,\ .05} = 5.991$

พันธุ์	A	B	C	รวม
Oi	18	44	28	90
Pi	1/4	2/4	1/4	1
e_i	22.5	45	22.5	90
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	.9	.0222	1.3444	$2.2666 = \chi^2_c$

$\because$ χ^2_c ตกอยู่นอก CR. เราไม่ปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือสรุปว่าข้อมูลนี้สนับสนุนทฤษฎีพันธุกรรมข้างต้น

3.20 ในภาคหนึ่งมีนักศึกษาลงทะเบียนวิชา ST 203 ดังนี้

คณะ	an.	บธ.	ศษ.	ศศ.	รวม
จำนวนนักศึกษา	440	35.5	155	250	1200

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าอัตราส่วนของนักศึกษา an : บธ : ศษ : ศศ = 2 : 2 : 1 : 1

H_0 : an : บธ : ศษ : ศศ = 2 : 2 : 1 : 1

H_1: อัตราส่วนไม่เป็นไปตาม H_0

a = .01

CR : $X^2 > \chi^2_{3,\ .01} = 11.345$

คณะ	วท.	บธ.	ศษ.	ศศ.	รวม
o_i	440	355	155	250	1200
p_i	1/3	1/3	1/6	1/6	1
e_i	400	400	200	200	1200
$\frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$	4	5.0625	10.125	12.5	$31.6875 = \chi^2_c$

$\because$ $\chi^2_c = 31.6875$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ Ho ที่ a = .01 นั่นคืออัตราส่วนของนักศึกษา วท : บธ : ศษ : ศศ ไม่เป็น 2 : 2 : 1 : 1

3.21 จากตารางแสดงจำนวนเด็กที่เกิดใน 4 ช่วงเวลาของปี ที่โรงพยาบาลแห่งหนึ่ง

ช่วงเวลา	Q_1 : ม.ค.–มี.ค.	Q_2 : เม.ย.–มิ.ย.	Q_3 : ก.ค.–ก.ย.	Q_4 : ต.ค.–ส.ค.
จำนวนเด็กที่เกิด	110	57	53	80

เป็นที่คาดหมายว่าจำนวนเด็กที่เกิดในช่วงแรกของปีจะมีมากเป็น 2 เท่าของช่วงอื่น ๆ ที่เหลือ จงทดสอบที่ α = .05 ว่าข้อมูลสนับสนุนความคาดหมายนี้หรือไม่

Ho : $Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 = 2 : 1 : 1 : 1$

H_1 : อัตราส่วนไม่เป็นไปตาม H_0

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{3,\ .05} = 7.815$

ช่วงเวลา	Q_1	Q_2	Q_3	Q_3	รวม
o_i	110	57	53	80	300
p_i	2/5	1/5	1/5	1/5	1
e_i	120	60	60	60	300
$\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$	.8333	.15	.8167	6.6667	$8.4667 = \chi^2_c$

$\because$ $\chi^2_c = 8.4667$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ α = .05 นั่นคือสรุปว่า จำนวนเด็กที่เกิดใน 4 ช่วงเวลาไม่เป็นไปตามอัตราส่วนที่โรงพยาบาลคาดหมาย

หมายเหตุ ถ้าทดสอบที่ a = .01, CR : $X^2 > \chi^2_{3\ .01} = 11.345$ เราจะไม่ปฏิเสธ Ho ที่ α = .01

3.22 จำแนกคน 1000 คน ว่าเป็นคนที่เล่นการพนันหรือไม่แล้วดูว่าคนคนนั้นสูบบุหรี่หรือไม่ ผลปรากฏดังนี้

	สูบบุหรี่	ไม่สูบบุหรี่
เล่นการพนัน	120	30
ไม่เล่นการพนัน	479	, 371

จงทดสอบที่ α = .01 ว่าลักษณะทั้งสองเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : การเล่นการพนันและสูบบุหรี่เป็นอิสระต่อกัน

H_1 : การเล่นการพนันและการสูบบุหรี่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

$\alpha = .01$

CR : $X^2 > \chi^2_{1, .01} = 6.635$

o_{ij} (e_{ij})

$\left[\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right]$

120 (89.85) [10.1171]	30 (60.15) [15.1126]	150
479 (509.15) [1.7854]	371 (340.85) [2.6669]	850
599	401	1000

$\chi^2_c = 10.1171 + 15.1126 + 1.7854 + 2.6669 = 29.6820$

$\because$ $\chi^2_c = 29.682$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือการเล่นการพนันและการสูบบุหรี่ไม่เป็นอิสระต่อกัน

3.23 การทดลองเพื่อตรวจสอบอิทธิพลของน้ำมันเครื่องที่มีต่อคุณภาพของการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง จากของที่สุ่มมา 390 ชิ้น ได้ผลดังนี้

	ของดี	ของไม่ดี
ไม่ใช้น้ำมันเครื่อง	22	238
ใช้น้ำมันเครื่อง	4	126

เราจะสรุปได้ที่ (α = .01) หรือไม่ว่าการใช้น้ำมันเครื่องสามารถลดอัตราของของไม่ดีที่ผลิตขึ้น

H_0 : คุณภาพของสินค้าและการใช้น้ำมันเครื่องเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : คุณภาพของสินค้าและการใช้น้ำมันเครื่องไม่เป็นอิสระต่อกัน

$\alpha = .01$

CR : $X^2 > \chi^2_{1, .01} = 6.635$

o_{ij} (e_{ij}) $\left[\frac{(o_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}\right]$			
	22 (17.3333) [1.2564]	238 (242.6667) [.0897]	260
	4 (8.6667) [2.5128]	126 (121.3333) [.1795]	130
	26	364	390

$\chi_c^2 = 1.2564 + .0897 + 2.5128 + .1795 = 4.0384$

$\because$ $\chi_c^2 = 4.0384$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ การใช้น้ำมันเครื่องไม่สามารถลดอัตราของของไม่ดีที่ผลิตขึ้น

หมายเหตุ ถ้าทดสอบที่ a = .05, CR : $X^2 > \chi^2_{1, .05} = 3.841$ เราจะปฏิเสธ H_0 ที่ a = .05

3.24 ได้จำแนกคน 6800 คน ตามสีผมและสีตาดังต่อไปนี้

ผม / ตา	น้ำตาลเข้ม	น้ำตาล	Al	แดง
ฟ้า	1768	807	189	47
เขียว	946	1387	746	43
น้ำตาล	115	438	288	16

จงทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่าสีผมและสีตาเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : สีผมและสีตาเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : สีผมและสีตาไม่เป็นอิสระต่อกัน

a = .01

CR : $X^2 > \chi^2_{6, .01} = 16.812$, df = $(4-1)(3-1) = 6$

o_{ij} (e_{ij})					
	1768 (1171.181)	807 (1089.6247)	189 (506.3112)	47 (43.8.831)	2811
	946 (1300.7567)	1387 (1210.1773)	746 (562.3278)	43 (48.75'81)	3122
	115 (357.0623)	438 (332.1979)	288 (154.3610)	16 (13.3788)	857
	2829	2632	1223	106	6790

χ^2_c = 1073.7896 ซึ่งตกใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ α = .01 นั่นคือสีผมและสีตาไม่เป็นอิสระต่อกัน

3.25 ผลการทดสอบของวิชาความน่าจะเป็นเบื้องต้น และวิชาการควบคุมคุณภาพของนักศึกษาที่ลงทั้ง 2 วิชาพร้อมกันเป็นดังนี้

	วิชาการควบคุมคุณภาพ			
วิชาความน่าจะเป็น	A	B	C	D
A	38	24	8	2
B	16	12	8	8
C	10	19	35	23
D	3	6	7	13

จงทดสอบที่ a = .01 ว่าผลการสอบของทั้ง 2 วิชาเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : ผลการสอบของ 2 วิชาเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : ผลการสอบของ 2 วิชาไม่เป็นอิสระต่อกัน

a = .01

CR : $X^2 > \chi^2_{9\ .01} = 21.666$, df = (4-1)(4-l) = 9

o_{ij} (e_{ij})

38 (20.7931)	24 (18.9310)	8 (18)	2 (14.2759)	72
16 (12.7069)	12 (11.5690)	8 (11)	8 (8.7241)	44
10 (25.125)	19 (22.875)	35 (21.75)	23 (17.25)	87
3 (8.375)	6 (7.625)	7 (7.25)	13 (5.75)	29
67	61	58	46	232

χ^2_c = 66.2118 ซึ่งตกใน CR. เราปฏิเสธ Ho ที่ a = .01 นั่นคือผลการสอบของ 2 วิชาไม่เป็นอิสระต่อกัน

3.26 ผู้จัดการฝ่ายบุคคลของบริษัทใหญ่แห่งหนึ่งสนใจที่จะศึกษาว่าการแต่งงานเป็นเหตุให้พนักงานหญิงของบริษัทขาดงานบ่อยหรือไม่ ได้สุ่มคนงานที่เคยขาดงานมา 400 คน ผลปรากฏดังนี้

	ขาดบ่อย	ขาดนาน ๆ หน	รวม
แต่งงาน	84	96	180
ไม่แต่งงาน	6258		220
รวม	146	254	400

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าสถานภาพสมรสและการขาดงานเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : สถานภาพสมรสและการขาดงานเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : สถานภาพสมรสและการขาดงานไม่เป็นอิสระต่อกัน

α = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{1,.05} = 3.841$

Oij (eij) [(Oij − eij)²/eij]			
	84 (65.7) [5.0973]	86 (114.3) [2.9299]	180
	62 (80.3) [4.1705]	158 (139.7) [2.3972]	220
	146	254	400

χ^2_c = 14.5949 ซึ่งตกใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ α = .05 นั่นคือสถานภาพสมรสและการขาดงานไม่เป็นอิสระต่อกัน

3.27 สุ่มอาจารย์ในมหาวิทยาลัยมาจากคณะมนุษยศาสตร์ 50 คน คณะวิทยาศาสตร์ 30 คน และคณะบริหารธุรกิจ 40 คน จัดจำแนกตามความเห็นในเรื่องของการใช้งานวิจัยมากหรือน้อยเพื่อช่วยในการเลื่อนตำแหน่งทางวิชาการ ผลปรากฏดังนี้

	ควรใช้มากขึ้น	ใช้น้อยลง	ใช้เท่าเดิม	รวม
คณะ มษ.	20	20	10	50
วท.	15	5	20	40
บธ.	15	5	10	30
รวม	50	30	40	120

จงทดสอบที่ a = .05 ว่า proportions ของความเห็นเหมือนกันทั้ง 3 คณะ

ทดสอบความเป็นเอกภาพของคณะทั้ง 3 ในเรื่องความเห็น

Ho : $p_{1j} = p_{2j} = p_{3j}$, j = I, 2, 3

H_1 : ไม่เป็นจริงตาม Ho

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{4\ .05} = 9.488$, df = (3 − 1) (3 − I) = 4

o_{ij} (e_{ij}) [$(o_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$]				
	20 (20.8333) [.0333]	20 (12.5) [4.5]	10 (16.6667) [2.6667]	50
	15 (16.6667) [.1667]	5 (10) [2.5]	20 (13.3333) [3.3334]	40
	15 (12.5) 1.501	5 (7.5) [.8333]	10 (10) [0]	30
	50	30	40	120

∵ $\chi^2_c = 14.5334$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ Ho ที่ α = .05 นั่นคือ proportions ของความเห็นไม่เหมือนกันหมดทั้ง 3 คณะ

3.28 ในการสำรวจเกี่ยวกับขวัญของพนักงาน ได้สุ่มคนงานในสำนักงานมา 30 คน พนักงานขาย 35 คน พนักงานขายของหน้าร้าน 40 คน และนักบริหาร 15 คน จัดจำแนกตามความความรู้สึก ผลปรากฏดังนี้

กลุ่มพนักงาน	ความรู้สึกเกี่ยวกับขวัญ			
	ดีพอสมควร	ปานกลาง	ต่ำเกินไป	รวม
สำนักงาน	15	10	5	30
พนักงานขาย	20	10	5	35
พนักงานขายหน้าร้าน	5	10	25	40
นักบริหาร	10	3	2	15
รวม	50	33	37	120

จงทดสอบที่ α = .01 ว่า proportions ของความเห็นเหมือนกันในทุกกลุ่ม

ทดสอบความเป็นเอกภาพของคนทั้ง 4 กลุ่มในเรื่องความรู้สึกเกี่ยวกับงาน

$H_0 : p_{1j} = p_{2j} = p_{3j} = p_{4j}$, $j = 1, 2, 3$

H_1 : ไม่เป็นจริงตาม H_0

a = .01

CR : $X^2 > \chi^2_{6\ .01}$ = 16.812, df = $(4-1)(3-1)$ = 6

o_{ij} (e_{ij}) $[(o_{ij}-e_{ij})^2/e_{ij}]$				
	15 (12.5) [.5]	10 (8.25) [.3712]	5 (9.25) [1.9527]	30
	20 (14.5833) [2.0119]	10 (9.625) [.0146]	5 (10.7917) [3.1083]	35
	5 (16.6667) [8.1667]	10 (11) [.0909]	25 (12.3333) [13.0091]	40
	10 (6.25) [2.25]	3 (4.125) [.3068]	2 (4.625) [1.4899]	15
	5 0	33	37	120

χ^2_c = 33.2721 ซึ่งอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ a = .01 นั่นคือ proportions ของความเห็นของคน 4 กลุ่มไม่เหมือนกัน

3.29 ผลการทดสอบทัศนคติของคน 200 คนต่อนโยบายอย่างหนึ่งของรัฐบาล ปรากฏผลดังนี้

	ความเห็น				
เพศ	ไม่เห็นด้วยเลย	ไม่เห็นด้วย	ไม่ตัดสินใจ	เห็นด้วย	เห็นด้วยเต็มที่
ชาย	7	6	11	21	52
หญิง	23	24	21	17	18

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าทัศนคติและเพศเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : คำตอบเกี่ยวกับความเห็นและเพศเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : คำตอบเกี่ยวกับความเห็นและเพศไม่เป็นอิสระต่อกัน

$\alpha = .05$

CR : $X^2 > \chi^2_{4,\ .05} = 9.488,\ df = (2-1)(5-1) = 4$

$o_{ij}\ (e_{ij})$	7 (14.55)	6 (14.55)	11 (15.52)	21 (18.43)	52 (33.95)	97
$\lvert (o_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij} \rvert$	| 3.9177 |	| 5.0242 |	| 1.3164 |	| .3584 |	| 9.5965 |	
	23 (15.45)	24 (15.45)	21 (16.48)	17 (19.57)	18 (36.05)	103
	| 3.6895 |	| 4.7316 |	| 1.2397 |	| .3375 |	| 9.0375 |	
	30	30	32	38	70	200

$\chi^2_c = 39.249$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือคำตอบและเพศไม่เป็นอิสระต่อกัน

3.30 ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับการศึกษาและความสนใจเกี่ยวกับการเมืองในประเทศ ได้ทำการสุ่มนักเรียนในระดับต่าง ๆ มาทั้งหมด 200 คน จำแนกตามระดับการศึกษา และระดับความสนใจได้ดังนี้

	ระดับความสนใจ		
ระดับการศึกษา	ไม่สนใจเลย	สนใจปานกลาง	สนใจมาก
มัธยม	14	37	32
มหาวิทยาลัย	19	42	17
สูงกว่าปริญญาตรี	12	17	10

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าระดับการศึกษาและความสนใจเกี่ยวกับการเมืองในประเทศเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : ระดับการศึกษาและระดับความสนใจเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : ระดับการศึกษาและระดับความสนใจไม่เป็นอิสระต่อกัน

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{4,\ .05}$ = **9.488**, **df** = (3 − 1) (3 I) = 4

o_{ij} (e_{ij})				
	14 (18.675)	37 (39.84)	32 (24.485)	83
	19 (17.55)	42 (37.44)	17 (23.01)	78
	12 (8.775)	17 (18.72)	10 (11.505)	39
	45	96	59	200

χ^2_c = 7.4646 ตกอยู่นอก CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ α = .05 นั่นคือระดับการศึกษาและระดับความสนใจเป็นอิสระต่อกัน

3.31 ในการศึกษาเพื่อดูว่าอัตราการสูบบุหรี่ของนักศึกษาในปีต่าง ๆ แตกต่างกันหรือไม่ ได้สุ่มนักศึกษาปีที่หนึ่งมา 50 คน ปีที่สองมา 40 คน ปีที่สามมา 60 คน และปีที่สี่มา 50 คน จัดจำแนกตามนิสัยการสูบบุหรี่ได้ผลดังนี้

	นิสัยการสูบบุหรี่			
ปีการศึกษา	สูบน้อยมาก	สูบปานกลาง	สูบมาก	รวม
1	21	12	17	50
2	13	8	19	40
3	13	18	29	60
4	3	22	25	50

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าอัตราการสูบบุหรี่ของนักศึกษาทั้ง 4 ปีไม่ต่างกัน

ทดสอบความเป็นเอกภาพของนักศึกษาทั้ง 4 ปีในเรื่องการสูบบุหรี่

H_0 : $p_{1j} = p_{2j} = \ = p_{4j}$, j = 1, 2, 3

H_1 : ไม่เป็นจริงตาม Ho

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{6\ .05} = 12.592$, df = (4 – 1) (3 – 1) = 6

o_{ij} (e_{ij}) / $(o_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij}$				
	21 (12.5) [5.78]	12 (15) [.6]	17 (22.5) [1.3444]	50
	13 (10) [.9]	8 (12) [1.3333]	19 (18) [.0556]	40
	13 (15) [.2667]	18 (18) [0]	29 (27) [.1481]	60
	3 (12.5) [7.22]	22 (15) [3.2667]	25 (22.5) [.2778]	50
	50	60	90	200

χ^2_c = 21.1926 ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ Ho ที่ a = .05 นั่นคืออัตราการสูบบุหรี่ของนักศึกษาทั้ง 4 ปีไม่เหมือนกัน

3.32 จากการสุ่มตัวอย่างชายสูงอายุ 200 คน จัดจำแนกตามความรู้และจำนวนลูกที่เขามีได้ผลดังนี้

	จำนวนลูก (คน)		
การศึกษา	0 - I	2 - 3	มากกว่า 3
จบประถม	14	37	32
จบมัธยม	19	42	17
จบปริญญา	12	17	10

จงทดสอบที่ α = .05 ว่าจำนวนลูกที่มี กับระดับการศึกษาของบิดาเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

H_0 : จำนวนลูกที่มีและระดับการศึกษาของบิดาเป็นอิสระต่อกัน

H_1 : จำนวนลูกที่มีและระดับการศึกษาของบิดาไม่เป็นอิสระต่อกัน

$\alpha = .05$

CR: $X^2 > \chi^2_{4, .05} = 9.488$, df = (3 – 1) (3 – 1) = 4

Oij (eij) [(Oij – eij)^2/eij]

14 (18.675) [1.1703]	37 (39.84) [.2024]	32 (24.485) [2.3065]	83
19 (17.55) [.0393]	42 (37.44) [.5554]	17 (23.01) [1.5698]	78
12 (8.775) [1.1853]	17 (18.72) [.1580]	10 (11.505) [.1969]	39
45	96	59	200

$\chi^2_c = 7.3839$ ตกอยู่นอก CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือจำนวนลูกที่มีและระดับการศึกษาของบิดาเป็นอิสระต่อกัน

3.33 ต้องการเปรียบเทียบผลการรักษาโรคไอกรนด้วยยาชนิดต่าง ๆ 5 ชนิด และดูความไร้ผลของการรักษาหลังการรักษาแล้ว 6 วัน จากผลการทดลองในตารางข้างล่างนี้ จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าอัตราส่วนของการรักษาที่ไร้ผลจากการใช้ยาทั้ง 5 ชนิดเท่ากันหมดหรือไม่

ชนิดของยาที่ใช้รักษา	จำนวนผู้ป่วยทั้งสิ้น	จำนวนผู้ป่วยที่ไม่หายจากโรค
1	45	23
2	66	28
3	27	14
4	55	23
5	49	17

ให้ p_i = Pr [ผู้ป่วยไม่หายจากโรคเมื่อใช้ยาชนิดที่ i]

Ho: $p_1 = p_2 = \ldots = p_5$

H_1 : p_i ไม่เท่ากันหมด

a = .05

CR: $X^2 > \chi^2_{4,\ .05} = 9.488$, df = (5 - 1) (2 - 1) = 4

	ยา	จำนวนผู้ป่วยที่ไม่หายจากโรค	จำนวนผู้ป่วยที่หายจากโรค	รวม
o_{ij} (e_{ij})	1	23 (19.5248)	22 (25.4752)	45
	2	28 (28.6364)	38 (37.3636)	66
	3	14 (11.7149)	13 (15.2851)	27
	4	23 (23.8636)	32 (31.1364)	55
	5	17 (21.2603)	32 (27.7397)	49
	รวม	105	137	242

∵ $\chi^2_c = 3.4681$ ไม่ตกอยู่ใน CR. เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .05$ นั่นคือ สรุปว่ายาทั้ง 5 ชนิดมีประสิทธิภาพในการรักษาโรคไอกรนพอ ๆ กันหมด

3.34 เลือกสุ่มของที่ส่งมาจากโรงงาน 4 โรงงาน และจากการตรวจสอบคุณภาพของพบว่ามีจำนวนของชำรุดดังนี้

โรงงาน	ของที่สุ่มมาตรวจ (ชิ้น)	จำนวนของชำรด
1	100	20
2	200	38
3	150	37
4	250	45

จงทดสอบที่ $\alpha = .05$ ว่าอัตราส่วนของของชำรุดจากทั้ง 4 โรงงานเท่ากันหมดหรือไม่

ให้ p_i = Pr [พบของชำรุดจากโรงงานที่ i]

$H_0 : p_1 = \ldots = p_4$

H_1 : Pi ไม่เท่ากันหมด

a = .05

CR : $X^2 > \chi^2_{3,\ .05}$ = 7.815, df = (4 – 1) (2 – 1) = 3

Oij (eij)

โรงงาน	จำนวนของชำรุด	จำนวนของดี	จำนวนของที่สุ่มมา
1	20 (20)	80 (80)	100
2	38 (40)	162 (160)	200
3	37 (30)	113 (120)	150
4	45 (50)	205 (200)	250
รวม	140	560	700

∵ χ^2_c = 2.7916 ตกอยู่นอก CR.เราไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ที่ α = .05 นั่นคือ อัตราส่วนของของชำรุดจากโรงงานทั้ง4 เท่ากันหมด

3.35 ตัวแทนจำหน่ายผงซักฟอกชนิดหนึ่งกล่าวว่าความนิยมผงซักฟอกชนิดนี้ในแต่ละภาคมีพอ ๆ กัน เพื่อยืนยันคำกล่าวนี้ เขาได้สุ่มตัวอย่างมาจาก 4 ภาคได้ผลดังนี้

ภาค	จำนวนคนที่นิยม	จำนวนคนที่ไม่นิยม	คนทั้งหมด
เหนือ	120	80	200
กลาง	200	50	250
ตะวันออกเฉียงเหนือ	200	100	300
ใต้	180	70	250

จงทดสอบที่ α = .01 ว่าคำกล่าวของตัวแทนจำหน่ายผู้นี้เชื่อถือได้หรือไม่

ให้ p_i = Pr [คนในภาคที่ i จะนิยมผงซักฟอกชนิดนี้]

$H_0 : p_1 = \ldots = p_4$

$H_1 : p_i$ ไม่เท่ากันหมด

$\alpha = .01$

CR : $X^2 > \chi^2_{3,\ .01}$ = 11.345, df = (4 – 1)(2 – 1) = 3

$o_{ij}\ (e_{ij})$

120 (140)	80 (60)	200
200 (175)	50 (75)	250
200 (210)	100 (90)	300
180 (175)	70 (75)	250
700	300	1000

$\because\ \chi^2_c = 23.492$ ตกอยู่ใน CR. เราปฏิเสธ H_0 ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือความนิยมของคนในภาคต่าง ๆ แตกต่างกัน