บทที่ 2
การแจกแจงของตัวอย่างและการประมาณค่า
(Sampling Distribution and Estimation)

การประมาณค่าตัวพารามิเตอร์ (Parameter : θ) 2 วิธีคือ

1. การประมาณค่าแบบจุด (Point estimation) คือการใช้ค่า 1 ค่าที่คำนวณได้จากตัวอย่างเป็นค่าประมาณของตัวพารามิเตอร์

2. การประมาณค่าเป็นช่วง (Interval estimation) คือการหา $(1-\alpha)$ 100% ช่วงของความเชื่อมั่น (Confidence interval) ของ parameter θ ในรูป (L, U) โดยที่การคำนวณค่าของ L และ U จะต้องทราบ

ก. point estimate ของ $\theta = \hat{\theta}$

ข. sampling distribution ของ estimator $\hat{\Theta}$

Parameter 2 ตัวที่เราจะพิจารณา คือ

1. σ^2 = population variance ของ normal population

2. σ_1^2/σ_2^2 = ratio ของ 2 population variances ของ 2 normal populations

Paramete (θ)	Estimato $(\hat{\Theta})$	Sampling distributior	$(1 \quad \alpha)100\%$ C.I. ของ e
σ^2	S^2	Sampling distribution ของ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ คือ χ^2_{n-1} โดยที่ n คือ ขนาดของตัวอย่างสุ่มจาก Normal population ที่มี varianc $= \sigma^2$	$(1-\alpha)100\%$ C.I. ของ σ^2 คือ $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}}\right)$ โดยที่ $s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]$ $(1-\alpha)100\%$ C.I. ของ σ คือ $\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}}}\right)$
σ_1^2/σ_2^2	S_1^2/S_2^2	Sampling distribution ของ $\frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}$ คือ $F_{(n_1-1,\ n_2-1)}$ โดยที่ n_1 และ n_2 คือขนาดของตัวอย่างสุ่มจาก 2 Normal populations และตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน	$(1-\alpha)100\%$ C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 คือ $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{(n_1-1,\ n_2-1),\alpha/2}}, \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(n_2-1,\ n_1-1),\alpha/2}\right)$ $(1-\alpha)100\%$ C.I. ของ σ_1/σ_2 คือ $\left(\sqrt{\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{(n_1-1,\ n_2-1),\ \alpha/2}}}, \sqrt{\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(n_2-1,\ n_1-1),\ \alpha/2}}\right)$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2

2.1 ใช้ตาราง Chi-square (ตาราง A 5) เพื่อหา

ก) $\chi^2_{5,\ .05}$, $\chi^2_{5,\ .95}$ ข) $\chi^2_{9,\ .01}$, $\chi^2_{9,\ .99}$

ค) $\chi^2_{16,\ .975}$, $\chi^2_{16,\ .025}$ ง) $\chi^2_{10,\ .99}$, $\chi^2_{10,\ .01}$

จากตาราง A 5

ก) $\chi^2_{5,\ .05} = 11.07$, $\chi^2_{5,\ .95} = 1.145$

ข) $\chi^2_{9,\ .01} = 21.666$, $\chi^2_{9,\ .99} = 2.088$

ค) $\chi^2_{16,\ .975} = 6.908$, $\chi^2_{16,\ .025} = 28.845$

ง) $\chi^2_{10,\ .99} = 2.558$, $\chi^2_{10,\ .01} = 23.209$

2.2 ได้ขุดหินตัวอย่างจากแหล่งน้ำมันแห่งหนึ่ง และนำมาวิเคราะห์ทางเคมีเพื่อดูเปอร์เซนต์ของ cadmium ที่มีอยู่ หลังจากวิเคราะห์หินตัวอย่าง 25 ก้อน ได้ค่าเฉลี่ย 10.2 และ s.d. 3.1 มาตรการอย่างหนึ่งที่ใช้ตัดสินคุณภาพของน้ำมันก็คือความไม่แตกต่างกันของส่วนประกอบภายในสารน้ำมัน ถ้าคุณภาพของน้ำมันขึ้นอยู่กับว่า s.d. ของเปอร์เซนต์ของ cadmium ไม่เกิน 4 ในบทที่ 3 เราจะศึกษาวิธีการเพื่อทดสอบที่ $\alpha = .01$ ว่ามีเหตุผลพอที่จะสนับสนุนว่า σ น้อยกว่า 4 หรือไม่ ในที่นี้จงหา 98% C.I. ของ σ^2 และ 98% C.I. ของ σ

$n = 25,\ \bar{x} = 10.2,\ s = 3.1,\ s^2 = (3.1)^2 = 9.61$

σ^2 = variance ของเปอร์เซนต์ของ cadmium ในหินน้ำมัน

98% C.I. ของ σ^2 คือ $\left(\dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}},\ \dfrac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}}\right)$

$$= \left(\frac{24\,(9.61)}{\chi^2_{24,\ .01}},\ \frac{24\,(9.61)}{\chi^2_{24,\ .99}}\right)$$

$$= \left(\frac{230.64}{42.98},\ \frac{230.64}{10.856}\right)$$

$$= (5.3662,\ 21.2454)$$

∴ 98% C.I. ของ σ คือ $(\sqrt{5.3662},\ \sqrt{21.2454}) = (2.3165,\ 4.6093)$

2.3 โรงงานผลิตแบตเตอรี่รถยนต์อ้างว่าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ที่ผลิตจากโรงงานของเขามี s.d. เป็น 0.9 ปี ถ้าเราสุ่มตัวอย่างแบตเตอรี่มา 10 ตัว ใช้จนหมดอายุ และคำนวณหา s.d. ได้เป็น 1.2 ปี จงหา 95% C.I. ของ σ^2 และ 95% C.I. ของ σ

σ^2 = variance ของอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ที่ผลิตจากโรงงานนี้

$n = 10, s = 1.2, s^2 = (1.2)^2 = 1.44$

95% C.I. ของ σ^2 คือ $\left(\frac{9(1.44)}{\chi^2_{9,\ .025}}, \frac{9(1.44)}{\chi^2_{9,\ .975}}\right)$

$= \left(\frac{12.96}{19.023}, \frac{12.96}{2.7}\right)$

$= (.6813, 4.8)$

$\therefore$ 95% C.I. ของ σ do $(\sqrt{.6813}, \sqrt{4.8}) = (.8254, 2.1909)$

2.4 ใช้ตาราง F (ตาราง A 6) เพื่อหา

ก) $f_{(7,\ 9),\ .05}, f_{(7,\ 9),\ .95}$ ข) $f_{(3,\ 8),\ .10}, f_{(3,\ 8),\ .90}$

ค) $f_{(12,\ 7),\ .95}, f_{(12,\ 7),\ .05}$ ง) $f_{(4,\ 8),\ .90}, f_{(4,\ 8),\ .10}$

จากตาราง A 6

ก) $f_{(7,\ 9),\ .05} = 3.29$

$f_{(7,\ 9),\ .95} = \frac{1}{f_{(9,\ 7),\ .05}} = \frac{1}{3.68} = .2717$

ข) $f_{(3,\ 8),\ .10} = 2.9238$

$f_{(3,\ 8),\ .90} = \frac{1}{f_{(8,\ 3),\ .10}} = \frac{1}{5.2517} = .1904$

ค) $f_{(12,\ 7),\ .05} = 3.57$

$f_{(12,\ 7),\ .95} = \frac{1}{f_{(7,\ 12),\ .05}} = \frac{1}{2.91} = .3436$

ง) $f_{(4,\ 8),\ .10} = 2.8064$

$f_{(4,\ 8),\ .99} = \frac{1}{f_{(8,\ 4),\ .10}} = \frac{1}{3.9549} = .2529$

2.5 ได้มีการสำรวจเพื่อดูว่า การให้ฮอร์โมนแก่หนูที่ตั้งครรภ์จะเพิ่มน้ำหนักของมันหรือไม่ ได้สุ่มหนูที่ตั้งครรภ์ 6 ตัวมาให้ฮอร์โมน และอีก 6 ตัวไม่ให้ฮอร์โมน ต่อไปนี้เป็นข้อมูลที่สรุปได้

	หนูที่ได้ฮอร์โมน	หนูที่ไม่ได้ฮอร์โมน กลุ่มควบคุม (Control group)
Mean	$\bar{x}_1 = 41.8$	$\bar{x}_2 = 60.8$
s.d.	$s_1 = 7.6$	$s_2 = 16.4$

จงหา 90% C.I. ของ ratio ของ population standard variation ทั้ง 2 (นั่นคือของ σ_1/σ_2)

$$n_1 = 6,\ \nu_1 = 5.\ s_1 = 7.6,\ s_1^2 = 57.16$$

$$n_2 = 6,\ \nu_2 = 5,\ s_2 = 16.4,\ s_2^2 = 268.96$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{57.76}{268.96} = .2148$$

$$90\%\ \text{C.I. ของ } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ คือ} \left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{(\nu_1,\nu_2),\alpha/2}},\ \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(\nu_2,\nu_1),\alpha/2}\right)$$

$$= \left(.2148\frac{1}{f_{(5,5),.05}},\ .2148 f_{(5,5),.05}\right)$$

$$= \left(\frac{.2148}{5.05},\ .2148\,(5.05)\right)$$

$$= (.0425,\ 1.0847)$$

$$\therefore 90\%\ \text{C.I. ของ } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \text{ คือ } (\sqrt{.0425}, \sqrt{1.0847}) = (.2062,\ 1.0415)$$

2.6 การทดลองทำขึ้นเพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของเครื่องมือตรวจสอบปริมาณสารปรอทในอากาศ 2 ชนิด คือชนิด A และ B ได้ใช้เครื่องมือชนิด A วัดความเข้มข้นของสารปรอท 7 ครั้ง และใช้เครื่องมือชนิด B วัด 6 ครั้ง ระหว่างเวลาเที่ยงในใจกลางเมืองใหญ่แห่งหนึ่ง ผลจากการวัด (หน่วยเป็นไมโครกรัม/ลูกบาศก์เมตรของอากาศ) ปรากฏดังนี้

เครื่อง A	.95	.82	.78	.96	.71	.86	.99
เครื่อง B	.89	.91	.94	.91	.90	.89	

จงหา 90% C.I. ของ σ_1/σ_2 (ratio ของ s.d. ของค่าที่วัดได้จากเครื่อง A และเครื่อง B)

$n_1 = 7, \; s_1 = .1042, \; s_1^2 = .0109$

$n_2 = 6, \; s_2 = .0186, \; s_2^2 = .0003$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{.0109}{.0003} = 36.3333$$

90% C.I. ของ $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ คือ $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{(6,\,5),\,.05}}, \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(5,\,6),\,.05}\right)$

$$= \left(\frac{36.3333}{4.95}, \; 36.3333\;(4.39)\right)$$

$$= (7.3401, \; 159.5032)$$

$\therefore$ 90% C.I. ของ $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ คือ $(\sqrt{7.3401}, \sqrt{159.5032}) = (2.7093, \; 12.6295)$

2.7 ในการศึกษาถึงพฤติกรรมเกี่ยวกับเพศของลิงกับเวลาในการเล่นของลิงอายุ 1 ปี ได้นำเอาลิงเพศชายและหญิงอายุ 1 ปี อย่างละ 6 ตัวมาทดลอง โดยให้อยู่รวมกลุ่มกับครอบครัวลิง 4 ครอบครัว ในช่วงเวลาช่วงละ 10 นาที ระยะเวลาเฉลี่ยที่ลิงแต่ละตัวเล่นกับลิงตัวอื่นได้ถูกบันทึกไว้ดังนี้

ตัวผู้	3.64	3.11	3.80	3.58	4.55	3.92
ตัวเมีย	1.91	2.06	1.78	2.00	1.30	2.32

จงหา 98% C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 (ratio ของ variance ของเวลาในการเล่นของลิงตัวผู้และของลิงตัวเมีย) และ 98% C.I. ของ σ_1/σ_2

$n_1 = 6, s_1 = .4734, s_1^2 = .2241$

$n_2 = 6, s_2 = .3424, s_2^2 = .1173$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{.2241}{.1173} = 1.9105$$

98% C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 คือ $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{(5,\,5),\,.01}}, \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(5,\,5),\,.01}\right)$

$$= \left(\frac{1.9105}{10.97}, \; 1.9105\;(10.97)\right)$$

$= (.1742, 20.9582)$

$\therefore$ 98% C.I. ของ σ_1/σ_2 คือ $(\sqrt{.1742}, \sqrt{20.9582})$

$= (.4174, 4.5780)$

2.8 เป็นที่คาดหมายว่าวิธีการสอนแบบใหม่จะมีประสิทธิภาพในการช่วยเพิ่มความสามารถในการอ่านของนักเรียนชั้นประถมศึกษามากกว่าวิธีเก่าที่กำลังใช้อยู่ ในการทดสอบคำกล่าวนี้ ได้แบ่งนักเรียน 16 คนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 8 คนโดยวิธีสุ่ม กลุ่มแรกสอนโดยวิธีเดิม อีกกลุ่มสอนโดยวิธีใหม่ คะแนนทดสอบเกี่ยวกับการอ่านของเด็กเป็นดังนี้

(1) วิธีเก่า	65	70	76	63	72	71	68	68
(2) วิธีใหม่	75	80	72	77	69	81	71	78

จงหา 98% C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 และของ σ_1/σ_2

$n_1 = 8, s_1 = 4.0861, s^2 = 16.6964$

$n_2 = 8, s_2 = 4.3732, s^2 = 19.125$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{16.6964}{19.125} = .8730$$

98% C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 คือ $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{(7,\ 7),\ .01}},\ \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(7,\ 7),\ .01}\right)$

$$= \left(\frac{.8730}{6.99}, .8730\ (6.99)\right)$$

$$= (.1249,\ 6.1023)$$

$\therefore$ 98% C.I. ของ σ_1/σ_2 da $(.3534, 2.4703)$

2.9 นักศึกษาหญิง 16 คน ชาย 25 คน ทำข้อสอบมาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้น ผลปรากฏว่านักศึกษาหญิงทำคะแนนเฉลี่ยได้ 78 คะแนน และ s.d. = 8 คะแนน ส่วนนักศึกษาชายทำคะแนนเฉลี่ยได้ 82 คะแนน และ s.d. = 9 คะแนน

n) จงหา 95% C.I. ของ σ_1^2 (ชาย) และของ σ_2^2 (หญิง)

U) จงหา 98% C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 และ σ_1/σ_2

ชาย : $n_1 = 25,\ s_1 = 9,\ s_1^2 = 81$

หญิง : $n_2 = 16,\ s_2 = 8,\ s_2^2 = 64$

$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{81}{64} = 1.2656$

95% C.I. ของ a: คือ $\left(\frac{(n_1-1)s_1^2}{\chi^2_{24,\ .025}}\ \frac{(n_1-1)s_1^2}{\chi^2_{24,\ .975}}\right)$

$= \left(\frac{24(81)}{39.364}, \frac{24(81)}{12.401}\right)$

$= (49.3852, \quad 156.7616)$

$\therefore$ 95% C.I. ของ σ_1 คือ (7.0275. 12.5204)

95% C.I. ของ σ_2^2 คือ $\left(\frac{(n_2-1)s_2^2}{\chi^2_{15,\ .025}}, \frac{(n_2-1)s_2^2}{\chi^2_{15,\ .975}}\right)$

$= \left(\frac{15(64)}{27.488}, \frac{15(64)}{6.262}\right)$

$= (34.9243, \quad 153.3057)$

95% C.I. ของ σ_2 คือ (5.9097, 12.3817)

98% C.I. ของ σ_1^2/σ_2^2 คือ $\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} \big/ f_{(24,\ 15),\ .01}, \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{(15,\ 24),\ .01}\right)$

$= \left(\frac{1.2656}{3.29}, 1.2656 \quad (2.89)\right)$

$= (.3847, 3.6576)$

,98% C.I. ของ σ_1/σ_2 คือ (.6202, 1.9125)