บทที่ 8
การประมาณค่าของประชากร

8.1 คำนำ

ปัญหาในทางสถิติโดยทั่วไปก็เกี่ยวกับปริมาณค่าต่าง ๆ เช่น มัชฌิมเลขคณิต, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ฯลฯ ของประชากร (Parameter) ที่ไม่สามารถจะทราบค่าได้ จึงได้มีการสุ่มตัวอย่างขึ้นเพื่อเอาปริมาณค่าต่าง ๆ ของตัวอย่าง (Statistic) ที่ทราบค่า ไปประมาณค่าของประชากร หรือไปทดสอบสมมุติฐานบางอย่างเกี่ยวกับลักษณะดังกล่าวของประชากรที่ตั้งไว้ หรืออาจนำไปประมาณค่าของประชากร และทดสอบสมมติฐานด้วยพร้อมกัน ดังตัวอย่าง บริษัทร้านค้าหนึ่งมีความสนใจที่จะเปิดสาขาที่ชานเมือง และต้องการตั้งอยู่ในที่ชุมนุมชนซึ่งมีรายได้เฉลี่ยมากกว่ารายได้เฉลี่ยทั่วประเทศ เขาจะมีวิธีการอย่างไรที่จะหารายได้เฉลี่ยของชุมนุมชนที่กำหนดให้ จะสิ้นค่าใช้จ่ายมากที่จะไปสำรวจรายได้ของแต่ละครอบครัวในที่ชุมนุมชนนั้นแล้วมาหารายได้เฉลี่ย นักสถิติอาจเลือกตัวอย่างหาค่ามัชฌิมของตัวอย่างและใช้ค่านั้นเป็น estimator ของรายได้เฉลี่ยสำหรับชุมนุมชนทั้งหมด บริษัทร้านค้านั้นอาจต้องการทราบการกระจายของรายได้ เพื่อกำหนดช่วงราคาของสินค้าที่จะขายได้ ถ้าไม่ทราบการกระจาย (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร σ) ก็ประมาณค่าได้จากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง

ตามที่กล่าวมาข้างต้น ปริมาณค่าต่าง ๆ ของตัวอย่าง เช่น มัชฌิมเลขคณิตส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง เรานำไปประมาณค่าของประชากร แต่อาจจะมีปัญหาขึ้นได้ว่าทำไมเราใช้ปริมาณค่าต่าง ๆ ของตัวอย่าง (Statistics) เป็น estimator ก็มีปริมาณค่าต่าง ๆ อื่น ๆ ของตัวอย่างสามารถใช้เป็น estimator ดังตัวอย่างใช้มัธยฐานของตัวอย่าง (sample median) x_{med} เป็น estimator สำหรับมัชฌิมเลขคณิตของประชากรแทนที่จะใช้มัชฌิมเลขคณิตของตัวอย่าง $\bar{x}$ เหตุผล ทำไมเราเลือกมัชฌิมของตัวอย่าง เป็น estimator ของมัชฌิมของประชากร μ นั่นก็คือ $\bar{x}$ เป็น estimator ที่ดีของ μ และดีกว่า x_{med} อะไรที่ว่าเป็น estimator ที่ดี และหมายความว่าอะไร เมื่อเราพูด $\bar{x}$ เป็น estimator ดีกว่า x_{med} คำตอบก็คือ $\bar{x}$ มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงของ μ กว่า แต่ไม่ได้เสมอไปขึ้นอยู่ว่าเราทราบค่าเฉพาะของ $\bar{x}$ ภายหลังได้เลือกตัวอย่าง หรือทราบค่าเฉพาะของ x_{med} ภายหลังได้เลือกตัวอย่างเท่านั้น ดังนั้นเราจึงไม่สามารถที่จะกล่าวให้เป็นคำทั่ว ๆ ไปว่า $\bar{x}$ ไม่ใช่ x_{med}

มีค่าใกล้เคียงกับ μ กว่า เพราะตัวอย่างหนึ่ง $\bar{x}$ อาจมีค่าใกล้เคียงกับ μ กว่า สำหรับตัวอย่างอื่น x_{med} อาจมีค่าใกล้เคียงกับ μ กว่า

จากความรู้เล็ก ๆ น้อย ๆ ที่เราได้รับ ทำให้เราสามารถพูดได้ว่า $\bar{x}$ เป็น estimator ของ μ ดีกว่า x_{med} คำตอบก็คือ ภายหลังจากเลือกตัวอย่างจำนวนมาก เราก็มี sampling distribution ของ $\bar{x}$ กับ sampling distribution ของ x_{med} ก็จะพบว่า sampling distribution ของ $\bar{x}$ จะอยู่แออัดใกล้กับ μ กว่า x_{med} แสดงให้เห็นว่า $\bar{x}$ เป็น estimator ของ μ ดีกว่า x_{med}

เกณฑ์ (Criteria) ในการพิจารณาว่าจะเป็น estimator ที่ดีนั้นจะต้องเป็นไปได้ดังนี้

1. Unbiasedness
2. Consistency
3. Efficiency
4. Sufficiency

8.1.1 Unbiasedness

สมมติว่า ผลการสอบนักศึกษากลุ่มใหญ่กลุ่มหนึ่ง และเรามีความประสงค์ที่จะประมาณค่าคะแนนเฉลี่ยโดยการเลือกตัวอย่างแบบสุ่ม หาค่ามัชฌิมของแต่ละตัวอย่างเพื่อที่จะนำไปหาค่ามัชฌิมของมัชฌิมของตัวอย่างทั้งหมด $\bar{x}_{\bar{x}}$ หรือ $E(\bar{x})$ ถ้าหากว่า $\bar{x}_{\bar{x}}$ มีค่าเท่ากับ μ (ส่วนเฉลี่ยของประชากร) เราก็พูดได้ว่า $\bar{x}$ เป็น unbiased estimator ของ μ ในกรณีที่ $E(\bar{x}) \neq \mu$ ให้ $\hat{\theta}$ เป็น estimator และเราให้ $\hat{\theta} = \bar{x} + a$

นั่นก็คือ $\hat{\theta}$ เป็นมัชฌิมของตัวอย่างบวกด้วยค่าคงที่ a เรามาพิจารณา estimator ของ μ โดยทั่ว ๆ ไปก็จะได้

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= E(\bar{x} + a) \\ &= E(\bar{x}) + E(a) \\ &= \mu + a \qquad \qquad \text{..........(8.1.1.1)} \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า Sampling distribution ของ $\hat{\theta}$ จะจับกลุ่มอยู่รอบ ๆ $\mu + a$ สำหรับ $\hat{\theta} = \bar{x} + a$ เราได้

$$E(\hat{\theta}) = \mu + a$$

และ $\hat{\theta}$ ไม่เป็น unbiased estimator ของ μ หรือ $\hat{\theta} = \bar{x} + a$ เป็น biased estimator ของ μ และ a เป็น bias ถ้า $E(\hat{\theta}) > \mu$, $\hat{\theta}$ เป็น bias ที่มีค่าบวก แต่ถ้า $E(\hat{\theta}) < \mu$, $\hat{\theta}$ ก็เป็น bias ที่มีค่าลบ

8.1.2 Consistent Estimator

สมมติว่า ขนาดของตัวอย่าง $n = 36$ และ $\bar{x} = 65$ อะไรจะเกิดขึ้นกับ $\bar{x}$ ถ้าให้ n มีค่าใกล้เคียงกับ N (จำนวนข้อมูลของประชากร) เป็นที่เข้าใจกันอย่างชัดแจ้งว่า ขณะ n เข้าใกล้ N มัชฌิมของตัวอย่าง $\bar{x}$ ก็จะมีค่าเข้าใกล้ μ ดังตัวอย่าง N เท่ากับ 2,000 และ $\mu = 70$ ถ้า $n = 1999$ แทนที่จะเป็น 36 ก็สามารถเข้าใจว่า $\bar{x}$ คำนวณจาก $n = 1999$ จะมีค่าใกล้เคียงมากกับ $\mu = 70$ (ให้เสียว่า 69.9)

ต่อไปเรามากล่าวถึงมัธยฐานของประชากรสมมติเสียว่ามี med = 73 ให้ x_{med} เป็นมัธยฐานของตัวอย่างที่มีขนาด n ถ้า n เข้าใกล้ N มัธยฐานของตัวอย่าง x_{med} จะเข้าใกล้มัธยฐานของประชากร med = 73 เพราะฉะนั้นถ้า x_{med} ใช้เป็น estimator ของ μ ขณะ n เข้าใกล้ N x_{med} จะไม่เข้าใกล้ $\mu = 70$ แต่เข้าใกล้ med = 73

เมื่อ estimator (เช่น $\bar{x}$) เข้าใกล้ parameter (μ) ขณะขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้น เราเรียก estimator นี้ว่า consistent estimator ของ parameter เราจะเห็นว่า n มีขนาดโตขึ้นและโตขึ้น $\bar{x}$ จเข้าใกล้ μ ซึ่งอาจแสดงโดยใช้สัญลักษณ์ได้

$$\bar{x} \to \mu \text{ ขณะ } n \to \infty \text{ (หรือ N)}$$

โดยการใช้สูตรนี้ เราสามารถให้คำจำกัดความ Consistency ได้ถ้า

$$P(\bar{x} \to \mu) \to 1 \text{ ขณะ } n \to \infty$$

แล้วเรียก $\bar{x}$ ว่า Consistent estimator ของ μ probability ที่ $\bar{x}$ เข้าใกล้ μ ขณะ n มีค่ามากขึ้นมีค่าเท่ากับ 1

8.1.3 Efficiency

ก. Relative efficiency

สมมติว่าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติและเราต้องการที่จะประมาณค่ามัชฌิมของประชากร ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว เราใช้มัชฌิมของตัวอย่าง $\bar{x}$ ซึ่งจะต้องเป็น Unbiased กับ Consistent estimator เราอาจใช้มัธยฐานของตัวอย่าง x_{med} เป็น estimator ก็ได้ แต่จะต้องอยู่ในกรณีที่เป็น Unbiased กับ Consistent เราได้กล่าวมาแล้วว่า estimator ที่ดี sampling distribution จะต้องจับกลุ่มกันแออัดรอบ ๆ parameter ค่าไหนในสองค่า มัชฌิมของตัวอย่าง $\bar{x}$ หรือมัธยฐานของตัวอย่าง x_{med} ที่อยู่ใกล้รอบ ๆ μ กว่าเรามีวิธีที่จะทราบได้โดยการเปรียบเทียบความแปรปรวน (Variance) ของ estimator ทั้งสอง อันไหนที่มีความแปรปรวนน้อยกว่าก็เป็น estimator ที่ดีกว่า เพราะความ

แปรปรวนที่น้อยกว่า Sampling distribntion ก็ยิ่งจับกลุ่มแออัดรอบ ๆ parameter กว่า สมมติว่าเรามี Consistent estimator ของ $\bar{x}$ กับ x_{med} ซึ่งเป็นตัวอย่างขนาดใหญ่ที่มี

$$\text{Var}(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{..........(8.1.3.1)}$$

$$\text{Var}(x_{med}) \quad \sigma^2_{med} = \frac{\pi\sigma^2}{2n} \qquad \text{..........(8.1.3.2)}$$

กำหนดให้ขนาดตัวอย่างเท่ากัน

$$\frac{\text{Var}(\bar{x})}{\text{Var}(x_{med})} = \frac{\sigma^2_{\bar{x}}}{\sigma^2_{med}} = \frac{2}{\pi}$$

$$= 0.64\ (\pi = 3.14) \qquad \text{..........(8.1.3.3)}$$

นั่นก็คือ $\text{Var}(\bar{x}) < \text{Var}(x_{med})$ ดังนั้น $\bar{x}$ ก็เป็น estimator ที่ดีกว่า x_{med} sampling distribntion ของ $\bar{x}$ ก็อยู่กันอย่างแออัดรอบ ๆ μ กว่า x_{med} หรือเรียกว่า $\bar{x}$ efficient กว่า x_{med}

จากผลที่ได้ $\text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}(x_{med}) \times 64\%$ ....(8.1.3.4)

นั่นก็คือ ความแปรปรวนของ $\bar{x}$ เท่ากับ 64 เปอร์เซ็นต์ ของความแปรปรวนของมัธยฐาน เมื่อมีขนาดตัวอย่างเท่ากัน (เท่ากับ n)

ถ้าพูดในเทอมของขนาดตัวอย่าง ความแปรปรวนของมัธยฐานที่มีขนาดตัวอย่าง 100 จึงจะมีค่าเท่ากับความแปรปรวนของมัชฌิมของตัวอย่างที่มีขนาดตัวอย่าง 64

ข. Efficient estimators

เราสามารถหา estimators ที่มีความแปรปรวนน้อยกว่าความแปรปรวนของ estimator อื่น ๆ ได้ เราใช้ความแปรปรวนที่น้อยที่สุดเป็นฐานวัด efficiency และในเทอมของ efficiency เราสามารถพูดได้อีกแบบหนึ่งว่า estimators ที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุดคือ "sufficient estimator" แต่จะมีปัญหาขึ้นว่า น้อยแค่ไหนที่ความแปรปรวนของ estimator ควรจะเป็น คำตอบก็คือ ความแปรปรวนไม่สามารถที่จะมีค่าน้อยไปกว่า lower bound ถ้าพบว่า estimators มีความแปรปรวนเท่ากับ lower bound ความแปรปรวนนั้นเป็นความแปรปรวนที่น้อยที่สุด (minimum variance estimator)

คำว่า lower bound จะถูกกำหนดโดย Cramer Rao inequality ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ชั้นสูง จะไม่กล่าวในที่นี้ให้ละเอียดนัก จะกล่าวแต่ความหมายและนำมาใช้เกี่ยวกับการประมาณค่ามัชฌิม μ เท่านั้น

ให้ $\hat{\theta}$ เป็น estimator ของ μ แล้ว Cramer Rao inequatity ก็จะบอกเราว่าความแปรปรวนของ $\hat{\theta}$ ไม่สามารถที่จะเล็กไปกว่า $\frac{\sigma^2}{n}$ นั่นคือ

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geqslant \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{.........(8.1.3.5)}$$

$\hat{\theta}$ อาจเป็นค่ามัชฌิมของตัวอย่าง $\bar{x}$, มัธยฐานของตัวอย่าง x_{med} หรือค่าอื่น ๆ (Statistic) ของตัวอย่าง แต่ความแปรปรวนที่ไม่สามารถจะน้อยกว่า $\frac{\sigma^2}{n}$ ที่เราทราบก็คือ

$$\mathrm{Var}(\bar{x}) \quad \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{..........(8.1.3.6)}$$

ดังนั้น $\bar{x}$ ก็มีความแปรปรวนที่น้อยที่สุดและเป็น Minimum variance estimator ของ μ

สรุปได้ว่า $\bar{x}$ เป็น *Unbiased, Consistent, minimum variance estimator* ของ μ

8.1.4 Sufficiency

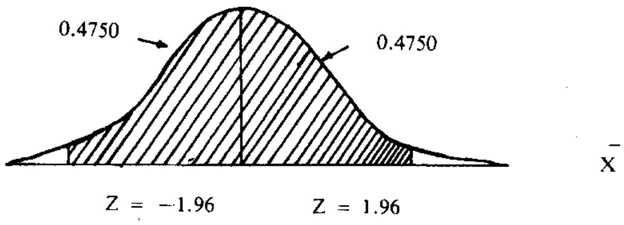
Sufficient statistic (เช่น $\bar{x}$) เป็น estimator ที่ก่อให้เกิดประโยชน์ทุก ๆ ด้านที่ได้จากตัวอย่างเพื่อนำไปประมาณค่าของ parameter ดังตัวอย่าง $\bar{x}$ เป็น sufficient estimator ของค่ามัชฌิมของประชากร μ ซึ่งหมายความว่าไม่มี estimator อื่น ๆ ที่จะมาประมาณค่าของ μ อย่างเช่นมัธยฐานของตัวอย่าง เป็นต้น

8.2 **การประมาณค่าเฉลี่ย** (ตัวอย่างขนาดใหญ่)

สมมติว่าเส้นโค้งปกติดังรูป 8.1 เป็นการเสนอ Sampling distribution ของ $\bar{x}$ ที่แสดงในหน่วยของ z ซึ่ง 95 เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งอยู่ระหว่าง $-z$ กับ z เมื่อค่าของ z จากตาราง คือ 1.96 ดังนั้น probability หรือพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งอยู่ระหว่าง -1.96 กับ 1.96 เท่ากับ 0.95 แต่เนื่องจากว่า Sampling distribution ของ $\bar{x}$ มีค่ามัชฌิมกับค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น

สูตรของ z คือ

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \text{..........(8.2.1)}$$



รูปที่ 8.1

เราสามารถพูดได้ว่า probability เป็น 0.95 ที่ $\bar{x}$ เป็นค่ามัชฌิมของตัวอย่างที่มีขนาด n $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ จะอยู่ระหว่าง -1.96 กับ 1.96 หรือจะพูดได้อีกแบบหนึ่งว่า probability เป็น 0.95 ที่ inequality เป็นจริง

$$-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96 \qquad \text{..........(8.2.2)}$$

คูณตลอดด้วย $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ก็จะได้

$$-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$ ลบออกจากแต่ละเทอมแล้วคูณด้วย -1 เราได้

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{..........(8.2.3)}$$

เราก็สามารถพูดได้ว่า Probability ของ 0.95 ของค่ามัชฌิมประชากรต้องอยู่ระหว่าง $\bar{x} - \left(1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ กับ $\bar{x} + \left(1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ช่วงระหว่างที่กำหนดให้นี้เรียกว่า 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงระหว่างความเชื่อมั่น (Confidence interval) หมายความว่า เรามี 95 เปอร์เซ็นต์ของความเชื่อมั่น (Probability .95) ที่ค่ามัชฌิมประชากรจะต้องอยู่ระหว่างนี้

เราจะคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่น เราจะต้องรู้ค่า σ เสียก่อน เนื่องจากไม่ใช่กรณีนี้กรณี

เดียว แต่ปัญหาในทางปฏิบัติเกือบทุกปัญหาที่ไม่สามารถจะรู้ค่า σ เราจึงต้องใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง s มาแทนค่า σ เราก็ไม่สามารถที่จะรู้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่างที่จะมีค่าใกล้เคียงกับค่า σ เว้นแต่ n จะใหญ่พอเหมาะจึงจะใช้แทนค่าได้ โดยทั่วไปตัวอย่างจะนับว่าใหญ่ ถ้า n มีค่าเท่ากับ 30 หรือมากกว่า ถ้าต่ำกว่านี้ก็ถือว่าเล็ก

แทนค่า σ ด้วย s เราก็ได้ 95 เปอร์เซ็นต์ ช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับ μ

$$\bar{x} - 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8.2.4)$$

ในเมื่อ $\bar{x} - \left(1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ เรียกว่าขีดจำกัดความเชื่อมั่นล่าง (lower confidence limit), $\bar{x} + \left(1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ เรียกว่าขีดจำกัดความเชื่อมั่นบน (upper confidence limit), และ 0.95 เรียกว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (confidence coefficient) สมมติว่า n = 40, $\bar{x}$ = 52.2 วินาทีและ s = 8.52 วินาที แทนค่าลงใน inequality (8.2.4) ได้

$$52.2 - 1.96 \frac{8.52}{\sqrt{40}} < \mu < 52.2 + 1.96 \frac{8.52}{\sqrt{40}}$$

$$49.56 < \mu < 54.84$$

เรากล่าวได้ว่า probability ของ 0.95 ที่ค่ามัชฌิมจริงอยู่ระหว่าง 49.56 กับ 54.84 วินาที

ถ้าเราต้องการเปลี่ยนสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นจาก 0.95 เป็น 0.98 หรือ 0.99 เราก็ต้องเปลี่ยนค่าของ z = 1.96 ให้มาเป็นค่าของ z ของ 0.98 หรือ 0.99 ซึ่งสามารถดูได้จากตารางค่า 0.98 ของพื้นที่จะอยู่ระหว่าง z = −2.33 กับ 2.33 ในขณะเดียวกัน 0.99 ของพื้นที่จะอยู่ระหว่าง z = −2.58 กับ z = 2.58 แทนค่าของ z ในกรณี 0.98 ของพื้นที่หรือสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นใน (8.2.4) เราก็จะได้ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ

$$\bar{x} - 2.33 \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 2.33 \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots (8.2.5)$$

แทนค่า $\bar{x}$ = 52.2 ; s = 8.52 ; n = 40 ก็จะได้

$$52.2 - 2.33 \frac{8.52}{\sqrt{40}} < \mu < 52.2 + 2.33 \frac{8.52}{\sqrt{40}}$$

$$49.06 < \mu < 55.34$$

เรากล่าวได้ว่า probability 0.98 ที่ค่ามัชฌิมจริงอยู่ระหว่าง 49.06 กับ 55.34 วินาที

ในทำนองเดียวกันถ้าเราใช้ 0.99 หรือ 99 เปอร์เซ็นต์ของสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นแล้ว แทนค่า $\bar{x} = 52.2$; $s = 8.52$; $n = 40$ ใน (8.2.4) ก็จะได้ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ

$$48.72 < \mu < 55.68$$

ค่า $1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$ แสดงถึงความแตกต่างระหว่าง $\bar{x}$ กับ μ ค่านี้อาจน้อยกว่าหรือมากกว่าก็ได้ ส่วนสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.95 นั้นหมายถึง probability ที่ μ มีค่าอยู่นอกขอบเขต $\bar{x} - 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$ กับ $\bar{x} + 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}}$ เท่ากับ 0.05 หรือ 5 ครั้งใน 100 ครั้ง แต่อาจจะมีปัญหาขึ้นว่าทำไมไม่ใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นให้สูงกว่านี้เพื่อจะได้ผิดน้อยลง อย่างเช่น 0.99 คำตอบก็คือ ยิ่งเราใช้สัมประสิทธิ์สูงเท่าใด ช่วงความเชื่อมั่นของ μ ก็จะต้องกว้างมากขึ้นเท่านั้น ค่า μ ที่เราได้ก็มีประโยชน์น้อยลง ตัวอย่างเช่น ถ้าใครให้เราประมาณอายุของนาย ก. ถ้าเราสามารถให้คำตอบได้เจาะจงเท่าไรก็ถือว่าเป็นที่น่าพอใจเท่านั้น แต่ถ้าเราบอกได้แต่เพียงว่า อายุของนาย ก. อยู่ในระหว่าง 30 ถึง 35 ปี ก็ไม่พอใจเท่ากับบอกว่า นาย ก. มีอายุ 31 หรือ 32 ปี แม้ว่าในกรณีแรกโอกาสที่เราจะผิดมีน้อยกว่าในกรณีหลัง ยิ่งถ้าเราบอกว่า นาย ก. มีอายุระหว่าง 20 ถึง 60 ปี แม้ไม่มีทางผิดก็ถือว่า เป็นคำตอบที่ไม่มีประโยชน์อะไรทั้งสิ้น

วิธีที่เราจะกล่าวเพื่อใช้กำหนดขนาดของตัวอย่างที่จะได้ค่าที่ถูกต้องแน่นอนขึ้น พอจะมีตัวอย่างสมมุติว่า เราต้องการประมาณค่ากระแสรายได้เฉลี่ยประจำปีของผู้สำเร็จการศึกษาเมื่อ 10 ปีก่อน แล้วสมมุติต่อไปว่า เราต้องการสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ในการประมาณค่าของเราจะอยู่ภายในวงเงิน 100 บาท ของค่าที่ถูกต้อง คำถามก็คือ จะต้องใช้ตัวอย่างใหญ่ขนาดไหนที่จะได้ค่าที่ถูกต้องแน่นอนขึ้น

ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว เราสามารถใช้ probability 0.95 ซึ่งถ้าใช้ $\bar{x}$ เป็นค่าประมาณของ μ ความคลาดเคลื่อนของเราจะน้อยกว่า $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ แต่เนื่องจากปริมาณนี้เราสมมุติให้เท่ากับ 100 บาท เราก็จะได้

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \qquad \text{..........(8.2.6)}$$

แต่เราไม่สามารถที่จะทราบ σ (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร) ได้ จึงต้องตั้งเงื่อนไข

เกี่ยวกับค่าที่จะเป็นไปได้ของ σ หรือ estimate ของ σ ที่ได้กล่าวมาข้างต้น สมมุติว่าตัวอย่างของเราคาดว่าอยู่ในวงเงินราว ๆ 1,000 บาท แทนค่าลงในสมการ (8.2.6) ได้

$$1.96 \frac{1000}{\sqrt{n}} = 100$$

$$n = 384.2 \qquad \text{..........(8.2.7)}$$

นี้หมายความว่าขนาดของตัวอย่าง 385 ที่จะให้ค่าถูกต้องแน่นอนขึ้น เพื่อที่จะให้เป็นสูตรทั่ว ๆ ไป ในการใช้ค่ามัชฌิมของตัวอย่างเป็น ค่าประมาณของค่ามัชฌิมของประชากร และเราต้องการใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ที่จะทำให้แน่ใจว่าความคลาดเคลื่อนของเราจะมีค่าน้อยกว่าปริมาณ E ก็จะได้ว่า

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = E$$

หาค่า n ได้ $$n = \left[\frac{1.96\sigma}{E}\right]^2 \qquad \text{..........(8.2.8)}$$

สูตรนี้ไม่สามารถที่จะนำมาใช้เว้นเสียแต่เราจะทราบค่า σ

ถ้าเราต้องการใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.98 หรือ 0.99 ที่จะทำให้แน่ใจว่า ความคลาดเคลื่อนของเราน้อยกว่า E เราก็สามารถดัดแปลง (8.2.8) โดยการแทนค่า 2.33 หรือ 2.58 สำหรับ 1.96 ตัวอย่างเช่น เราต้องการใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.99 ที่จะทำให้แน่ใจว่าความคลาดเคลื่อนของเราน้อยกว่า 100 บาทตามตัวอย่างข้างต้น เราจะได้ว่า

$$n = \left[\frac{2.58 \times 1000}{100}\right]^2$$

$$n = 666$$

นี่หมายความว่าขนาดตัวอย่าง 666 ที่จะให้ค่าที่ถูกต้องแน่นอนขึ้น การประมาณค่าของประชากรโดยใช้ค่าเดี่ยว ๆ (point estimate) อย่างเช่นค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่ประกอบขึ้นเป็นตัวอย่างที่สุ่มมา การประมาณแบบนี้แม้จะเป็นการประมาณที่ใช้ตัวเลขที่ดีที่สุดที่มีอยู่ แต่ก็เป็นการผูกมัดตัวเองมากเกินไป เพราะจริง ๆ เราไม่ทราบว่า ค่ามัชฌิมที่ได้จากตัวอย่างจะตรงกับค่ามัชฌิมของข้อมูลประชากรหรือไม่ วิธีแก้ในเรื่องนี้ก็คือ แทนที่จะประมาณค่าของประชากรเป็นแบบ point estimate เราใช้แต่เพียงค่าสูงสุดและต่ำสุดของประชากรที่อาจเป็นไปได้ตามทฤษฎีของความน่าจะเป็น อีกนัยหนึ่งให้ค่าของประชากรเป็นแบบที่เรียกว่า confidence interval estimate ตัวอย่างเช่น

ผลการสอบวิชาสถิติได้ของนักศึกษาระหว่างเท่านั้นเท่านี้คน มี probability เท่าใดเป็นต้น

8.3 การประมาณค่ามัชฌิม (ตัวอย่างขนาดเล็ก)

การประมาณค่ามัชฌิมของประชากรจะมีน้ำหนักมากขึ้นหรือให้ความไว้วางใจมากขึ้น ถ้าข้อมูลที่นำมาพิจารณายิ่งมีจำนวนมากขึ้น แต่ในทางปฏิบัติ บางครั้งข้อมูลที่จะหามาได้มีจำนวนจำกัด ตัวอย่างที่นำมาพิจารณาก็มีขนาดเล็ก อย่างเช่นในทางการแพทย์ การทดลองหายาที่ค้นคว้าได้ใหม่เพื่อรักษาโรคบางอย่าง อาจต้องทดลองกับคนเพียงไม่กี่คน เพราะผู้ที่เป็นโรคดังกล่าวที่จะให้ความร่วมมือในการทดลองมีอยู่น้อย ดังนั้น การสรุปว่า ยาที่ใช้ได้ผลดีไม่ดีอย่างไรต้องทำด้วยความระมัดระวังเป็นพิเศษ

ในทางสถิติ ตัวอย่างที่มีขนาดเล็กมีลักษณะแตกต่างกับตัวอย่างขนาดใหญ่อยู่ 2 ประการคือ

1. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่ามัชฌิม $\sigma_{\bar{X}}$ (standard error of means) ในการแจกแจงของตัวอย่างขนาดเล็กจะมากกว่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่ามัชฌิมของตัวอย่างขนาดใหญ่ ตัวอย่างเช่นความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่ามัชฌิมของตัวอย่างขนาดเล็ก $\sigma_{\bar{X}_1}$ และตัวอย่างขนาดใหญ่ $\sigma_{\bar{X}_2}$ เท่ากับ 10 และ 1,000 ตามลำดับ จากสูตรที่ได้เรียนมา เราได้

$$\sigma_{\bar{X}_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{10}}$$

และ

$$\sigma_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{1000}}$$

$$\frac{\sigma_{\bar{X}_1}}{\sigma_{\bar{X}_2}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{10}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{1000}}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}} = 10$$

นี่แสดงว่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่ามัชฌิมของตัวอย่างขนาดเล็กจะมากประมาณ 10 เท่าของความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่ามัชฌิมของตัวอย่างขนาดใหญ่

2. ค่ามัชฌิมที่ได้จากตัวอย่างขนาดเล็ก แม้จะมีการแจกแจง ตัวอย่างเป็นแบบสมมาตร แต่ก็ไม่เข้าข่ายการแจกแจงแบบปกติเหมือนในกรณีของตัวอย่างขนาดใหญ่ จึงไม่สามารถจะใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นขนาดเดียวกับที่ใช้สำหรับช่วงระหว่างความเชื่อมั่นต่าง ๆ เช่นเดียวกับที่ใช้ในกรณีของตัวอย่างขนาดใหญ่ได้ (การแจกแจง ตัวอย่างที่นับว่าใช้ค่า n เท่ากับ 30 หรือมากกว่า ถือว่าเป็นการแจกแจงปกติของตัวอย่างขนาดใหญ่)

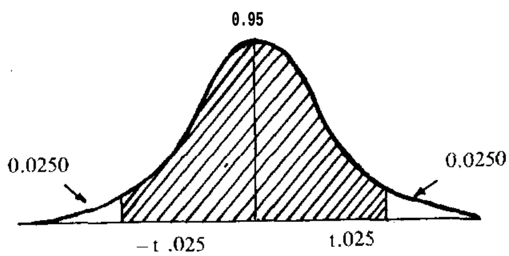
การแจกแจงที่ใช้ตัวอย่างขนาดเล็ก เราเรียกว่า การแจกแจงแบบ student – t distribution หรือเรียกสั้น ๆ ว่า การแจกแจงแบบ t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \qquad \text{..........(8.3.1)}$$

ในเมื่อ $\bar{x}$ และ s เป็นค่ามัชฌิมและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่างที่ได้มาแบบสุ่มขนาด n จากประชากรซึ่งมีค่ามัชฌิม μ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ

Student – t distribution เป็นการแจกแจงแบบสมมาตรคล้ายกับในกรณีของเส้นโค้งปกติ ส่วนตัวคูณที่จะต้องใช้คำนวณหาช่วงระหว่างความเชื่อมั่น (Confidence interval) ต่าง ๆ ในกรณีการแจกแจงแบบ t – distribution ขึ้นอยู่กับจำนวนของ degrees of freedom คือจำนวน (n – 1) เราจะเห็นว่าผลบวกของค่าเบี่ยงเบนไปจากค่ามัชฌิม, $x_i - \bar{x}$ มีค่าเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นถ้าเราทราบจำนวน (n – 1) ของค่าเบี่ยงเบนไปจากค่ามัชฌิมจำนวนที่ n เราก็สามารถทราบได้โดยอัตโนมัติ ดังตัวอย่าง ถ้าเรามีข้อมูล 5 จำนวน และ 4 จำนวนของค่าเบี่ยงเบนไปจากค่ามัชฌิมเป็น –4, 7, 5 และ –6 แล้วจำนวนที่ 5 ของค่าเบี่ยงเบนไปจากค่ามัชฌิมก็จะต้องเท่ากับ –2 แต่เนื่องจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นค่าวัดการกระจายว่าจะเบี่ยงเบนไปจากค่ามัชฌิมเท่าใดก็ขึ้นอยู่กับจำนวนที่อิสระ *(n – 1)* จำนวน เพราะ *(n – 1)* จำนวนของค่าเบี่ยงเบนเป็นตัวกำหนดจำนวนที่ *n* เราจึงเรียก (n – 1) ว่า degrees of freedom

ถ้าเราต้องการหาค่ามัชฌิมของประชากร โดยต้องการค่าที่มีสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 โดยยอมให้มีโอกาสผิดได้ทางด้านมากและด้านน้อยเท่า ๆ กัน ด้านละ .025 เราก็ต้องหาตัวคูณจากตารางค่าของ t ในภาคผนวก จากช่อง $t_{.025}$ ที่ (n – 1) degrees of freedom สมมุติว่าขนาดของตัวอย่าง n = 10 degrees of freedom คือ 9 เพราะฉะนั้นตัวเลขที่ใช้คูณกับความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่ามัชฌิมก็เท่ากับ 2.262 แทนที่จะเป็น 1.96 เช่นในกรณีของตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่



รูปที่ 8.2

จากรูปที่ 8.2 ; 95 เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ภายใต้ Student – t distribution อยู่ระหว่าง $-t_{.025}$ กับ $t_{.025}$ หรือเราสามารถกล่าวได้ว่า probability 0.95 ที่ค่าของ t อยู่ใน inequality เป็นจริง

$$-t_{.025} < t < t_{.025} \qquad \text{..........(8.3.2)}$$

ในเมื่อ $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ เราก็จะได้ $-t_{.025} < \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{.025}$

เขียนเสียใหม่ได้ $\bar{x} - t_{.025} \dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{.025} \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ ....(8.3.3)

เราก็จะได้ 95% ช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับ μ เมื่อ n น้อยกว่า 30 นั่น คือ สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถสร้างสูตรตัวอย่างขนาดเล็กสำหรับ 98 และ 99% ของช่วงระหว่างความเชื่อมั่นโดยการแทนค่า 2.33 และ 2.58 ด้วย $t_{.01}$ และ $t_{.005}$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 8.3.1 เราต้องการประมาณความสูง เฉลี่ย ของขนมเค็กทั้งหมดที่ใช้ส่วนผสมชนิดใหม่จากห้องทดลอง เราเลือกตัวอย่างขนมเค็กมาโดยแบบสุ่ม ความสูงของขนมเค็ก 1.70, 2.40 และ 2.50 นิ้ว ในที่นี้ ขนาดของตัวอย่าง n = 3 degrees of freedom เท่ากับ (n – 1) = (3 – 1) = 2,

$\bar{x} = (1.70 + 2.40 + 2.50)/3 = 2.2$ นิ้ว; $S^2 = \dfrac{(1.70 - 2.2)^2 + (2.40 - 2.2)^2 + (2.5 - 2.2)^2}{2}$

$= .19;\ S = .44$ นิ้ว

เราใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 จากตาราง t เราได้ $t_{.025}$ ที่ degrees of freedom 2 เท่ากับ 4.303 แทนค่าลงใน 8.3.3 เราได้

$$2.2 - 4.303 \frac{0.44}{\sqrt{3}} < \mu < 2.2 + 4.303 \frac{0.44}{\sqrt{3}}$$

$$1.11 < \mu < 3.29$$

เรากล่าวได้ว่า ความสูงเฉลี่ยจริงของขนมเค็กทั้งหมดจะอยู่ระหว่าง 1.11 กับ 3.29 นิ้ว ด้วย probability 0.95

หมายเหตุ เนื่องจากเราไม่ทราบค่า σ จึงต้องใช้ s มาประมาณค่า σ แต่ค่า s คำนวณได้จากสูตร $S = \dfrac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{n - 1}$ ในกรณีตัวอย่างขนาดเล็ก

ตัวอย่าง 8.3.2 ตัวอย่างประกอบด้วย แรงกดต่าง ๆ ต่อเหล็กกล้าดังนี้

41,000 44,250 69,400 70,000 80,350 psi

เราได้ $\bar{x} = 61{,}000$; $S = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1} = 17{,}350$; $n - 1 = 4$ degrees of freedom $t_{.025} = 2.776$

เราต้องการหา $t_{.025}\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2.776\dfrac{17{,}350}{\sqrt{5}} = 21{,}540$ psi

ถ้าเราประมาณค่าแรงกดเฉลี่ยต่อเหล็กกล้าทั้งหมดจากตัวอย่างได้ 61,000 psi เราก็สามารถกล่าวได้ว่า probability 0.95 ที่ความคลาดเคลื่อนของเราจะน้อยกว่า 21,540 psi

แบบฝึกหัดบทที่ 8.1

1. ตัวอย่างที่ได้มาแบบสุ่มของรถ trucks 100 คันที่วิ่งระหว่างกรุงเทพฯ นครปฐม มีน้ำหนักเฉลี่ยทั้งหมด (gross weight) 45,000 ปอนด์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3,500 ปอนด์
   ก. จงหา 95% ของช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับน้ำหนักเฉลี่ยทั้งหมดของรถ trucks ทั้งหมดที่วิ่งเส้นทางนี้ (44, 314 – 45, 686 ปอนด์)
   ข. ความคลาดเคลื่อนจะเป็นเท่าใด โดยใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ที่จะประมาณค่าน้ำหนักเฉลี่ยทั้งหมดของรถ trucks ทั้งหมดเป็น 45,000 ปอนด์ (686 ปอนด์)

2. I.Q. เฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของนักเรียน 200 คน เป็น 107 และ 12.4 ในเมืองหนึ่ง
   ก. จงหา 95% ของช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับ I.Q. เฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมด (105.28 ; 108.72)
   ข. ความคลาดเคลื่อนจะเป็นเท่าใดโดยใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ในการประมาณค่า I.Q. เฉลี่ยเป็น 107 (1.72)

3. ในการทดลองเพื่อกำหนดอายุเฉลี่ยของหลอด electronic ได้อายุเฉลี่ย 847 ชั่วโมง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 53 ชั่วโมง ของตัวอย่างที่มีขนาด 36 ถ้าเราเอาอายุเฉลี่ย 847 ชั่วโมงไปเป็นอายุเฉลี่ยของหลอด electronic ทั้งหมด จงหา probability หรือพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่ความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่า 14 ชั่วโมง
   (หาค่า z ก่อนได้ $z.53/\sqrt{36} = 14$ แล้วหาค่าพื้นที่เส้นโค้งระหว่าง $-z$ กับ z 0.89)

4. ถ้าเราต้องการหาความสามารถเป็นพิเศษเฉลี่ยของเสมียนจากชนกลุ่มใหญ่ (โดยการทดสอบ จะต้องใช้ตัวอย่างเท่าใด ที่ค่ามัชฌิมของตัวอย่างจะอยู่ภายใน 2.5 คะแนนของค่ามัชฌิมจริงด้วย probability 0.95 สมมุติว่า $\sigma = 15$ จากการศึกษามาก่อน (139)

5. ตัวอย่างจะต้องมีขนาดเท่าใดในแบบฝึกหัดข้อ 4 ถ้าเราต้องการเชื่อว่า 99% ที่ความคลาดเคลื่อนของเราจะน้อยกว่า 2.5 (240)

6. ผู้เชี่ยวชาญคนหนึ่งต้องการหาเวลาเฉลี่ยที่แม่บ้านรีดเสื้อตัวหนึ่ง จะต้องใช้ตัวอย่างใหญ่ขนาดเท่าใดที่ probability 0.98 ของค่ามัชฌิมของตัวอย่างต่างไปจากค่ามัชฌิมจริงน้อยกว่า 20 วินาที สมมติว่า จากการศึกษามาสามารถรู้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\sigma = 100$ วินาที (136)

7. สร้าง 95% ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่ามัชฌิมของประชากรดังต่อไปนี้

ก. $n = 15$, $x = 42.55$ บาท, $s = 5.34$ บาท (42.55 ± 1.58)

ข. $n = 8$, $\bar{x} = 12.74$ บาท, $s = 2.62$ บาท (12.74 ± 2.34)

ค. $n = 25$, $\bar{x} = 1{,}263.40$ บาท, $s = 82.10$ บาท $(1{,}263.4 \pm 33.89)$

8. สร้าง 98 และ 99 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ μ ของแต่ละตัวอย่างตามโจทย์ข้อที่ 7

9. ตัวอย่างที่ได้มาแบบสุ่มตัวอย่างหนึ่งของคณะรัฐมนตรี 9 คน ได้ใช้จ่ายขณะเข้าประชุมเฉลี่ยคนละ 270.50 บาท ด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 18.24 บาท จงหา 98% ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับจำนวนเฉลี่ยที่รัฐมนตรีคนหนึ่งใช้จ่ายในการประชุม (252.89; 288.11)

10. สำนักงานธุรกิจแห่งหนึ่งได้ศึกษาเกี่ยวกับค่าเช่าบ้านที่มี 2 ห้องนอนในนครหนึ่งได้สุ่มเลือกตัวอย่างหนึ่งขนาด 16 หลังคาเรือน ค่าเช่าเฉลี่ยต่อหลัง 80 ดอลล่าร์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 12 ดอลล่าร์ จงหา 95% ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเช่าเฉลี่ยจริงของบ้าน 2 ห้องนอน (73.607 ; 86.393 ดอลล่าร์)

11. จากแบบฝึกหัดข้อ 10 จงหาความคลาดเคลื่อนที่ใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ที่จะประมาณค่าเช่าบ้านเฉลี่ย 2 ห้องนอน ทั้งหมดเป็น 80 ดอลล่าร์ (6.393 ดอลล่าร์)

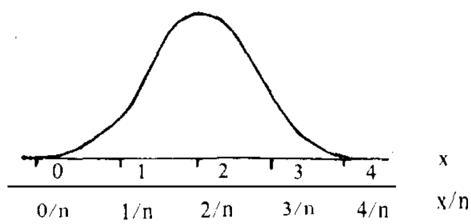
8.4 การประมาณสัดส่วน

เศรษฐกิจและธุรกิจจะมีปัญหามากเกี่ยวกับการประมาณค่าเปอร์เซ็นต์ สัดส่วนและ probability อย่างเช่น เราประสงค์จะประมาณค่าเปอร์เซ็นต์ของแม่บ้านไทยนิยมสบู่ชนิด A มากกว่าชนิด B เท่าใด สัดส่วนของนักทัศนาจรทางอากาศเป็นเท่าใด หรือเราประสงค์จะประมาณค่า probability ของธุรกิจที่เสี่ยงจะสำเร็จ

การประมาณค่า สัดส่วนก็คือความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น ถ้าเหตุการณ์เกิดขึ้น x ครั้ง ในจำนวน n ครั้ง ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นคือ x/n และใช้ สัดส่วนของตัวอย่างนี้เป็น estimate ของ p สัดส่วนจริงซึ่งเราต้องการประมาณค่า ตัวอย่างเช่น ถ้าตัวอย่างหนึ่งที่ได้มาแบบสุ่มของแม่บ้าน 500 คน 320 คนชอบสบู่ชนิด A ขณะที่ 180 คนชอบสบู่ชนิด B. $x/n = 320/500 = 0.64$ เราอาจกล่าวได้ว่า $p = 0.64$ หรือ 64% ของแม่บ้านทั้งหมดชอบสบู่ชนิด A มากกว่าชนิด B

ถ้า p เป็นตัวอย่าง สัดส่วนที่เราต้องการประมาณค่า ไม่เข้าใกล้ 0 หรือ 1 และถ้าหากว่าประชากรมีจำนวนมาก ในทางทฤษฎี sampling distribution ของจำนวนความสำเร็จ x ในจำนวนทั้งหมด n สามารถที่จะประมาณให้เป็นเส้นโค้งปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น

$$\mu = np \text{ และ } \sigma = \sqrt{np(1-p)} \qquad \text{..........(8.4.1)}$$



รูปที่ 8.3

ถ้าหากว่าประชากรมีจำนวนมาก probability ของความสำเร็จสำหรับในทางปฏิบัติเท่ากับ p ในแต่ละเหตุการณ์และ probability ที่จะเกิดความสำเร็จ x ครั้ง ในจำนวน n ครั้ง ก็กำหนดได้โดยการแจกแจงทวินาม

พิจารณาเส้นโค้งปกติของรูปที่ 8.3 ซึ่งสมมุติให้ sampling distribution ของจำนวนความสำเร็จ x ครั้ง ในจำนวน n ครั้ง เราสามารถเปลี่ยนเป็น sampling distribution ของสัดส่วนของความสำเร็จโดยหารด้วย n

ถ้าเราหารค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากรที่กล่าวข้างต้นด้วย n ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานก็จะเป็น

$$\mu = p \text{ และ } \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \text{..........(8.4.2)}$$

ดังนั้น ถ้า p มีค่าไม่เข้าใกล้ 0 หรือ 1 และประชากร ซึ่งเราเลือกตัวอย่างมามีจำนวนมาก ในทางทฤษฎี Sampling distribution ของ x/n สามารถที่จะประมาณให้เป็นเส้นโค้งปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย p และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ให้สัญลักษณ์ของความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของสัดส่วนเป็น

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \text{..........(8.4.3)}$$

เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสน $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ใช้วัดสัดส่วนของความสำเร็จที่หวังว่าจะเปลี่ยน

แปลงจากตัวอย่างไปยังอีกตัวอย่างเท่าใด ส่วน $\sqrt{np(1-p)}$ ใช้วัดจำนวนความสำเร็จที่คาดหวังว่าจะเปลี่ยนแปลงจากตัวอย่างไปยังอีกตัวอย่างมากเท่าใด

ถ้าสัดส่วนของตัวอย่าง $\frac{x}{n}$ เปลี่ยนเป็นหน่วยมาตรฐาน probability ที่ค่า z จะอยู่ระหว่าง -1.96 และ 1.96 เท่ากับ 0.95 ค่าของ z คำนวณได้จากสูตร

$$Z = \frac{\frac{x}{n} - P}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \qquad \text{..........(8.4.4)}$$

เราสามารถกล่าวได้ว่า probability 0.95 ที่ inequality นี้เป็นจริง

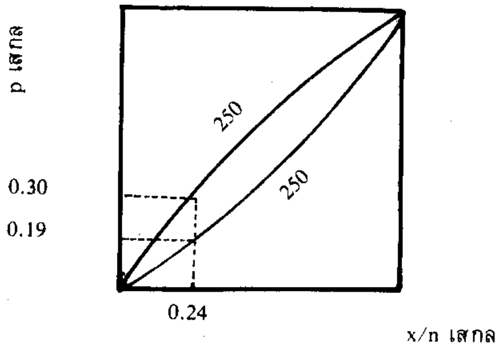
$$-1.96 < \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < 1.96 \qquad \text{..........(8.4.5)}$$

ถ้าคูณแต่ละเทอมด้วย $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ (8.4.5) ก็จะได้

$$-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{x}{n} - p < 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \text{..........(8.4.6)}$$

จาก inequality (8.4.6) ช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับ p สามารถคำนวณหาได้โดยไม่จำเป็นต้องรู้ค่า p เรานิยมจากตารางสำเร็จที่มีผู้ทำขึ้น เช่นในกรณีที่ต้องการประมาณค่าของ p โดยใช้ความเชื่อมั่น 95% เราก็ดูจากตารางขีดจำกัด 95% สำหรับสัดส่วน (ดูตารางในภาคผนวก) ซึ่งให้ขีดจำกัดความเชื่อมั่น p สำหรับตัวอย่างที่มีขนาดต่าง ๆ กัน

วิธีการใช้ตาราง สมมุติว่าจากตัวอย่างที่ได้มาแบบสุ่มของนักสูบบุหรี่ 250 คน 60 คนชอบสูบบุหรี่ตราสามิต ที่เหลือชอบบุหรี่ตราอื่น ๆ สัดส่วนของตัวอย่างของนักสูบบุหรี่ชอบสูบตราสามิต คือ $\frac{60}{250} = 0.24$ เราก็ทำเครื่องหมายของค่านี้ในแกนนอน (เสกล x/n) ของตาราง ดังรูปที่ 8.4 เนื่องจาก n = 250 เราลากเส้นตั้งฉากจากจุดนี้ จนกระทั่งไปพบเส้นโค้ง 2 เส้น ที่มีเลข 250 กำกับอยู่ ค่าสองค่าของแกนตั้ง ที่สมนัยกับจุดซึ่งเราลากตัดเส้นโค้ง 2 เส้น ก็จะได้ขีดจำกัดความเชื่อมั่นสำหรับ p (ประมาณ 0.19 กับ 0.30) เราก็กล่าวได้ว่า 95% ที่เชื่อได้ว่า 19 หรือ 30 เปอร์เซ็นต์ของนักสูบบุหรี่ทั้งหมดชอบสูบบุหรี่ตราสามิตต่อตราอื่น ๆ ทั้งหมด



รูปที่ 8.4

แทนค่า p ด้วย x/n ใน (8.4.3) สูตรของความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ x/n ก็เขียนได้

$$\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \text{ แทนที่จะเป็น } \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

แทนค่านี้ลงใน inequality (8.4.6) ได้

$$-1.96\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} < \frac{x}{n} - p < 1.96\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \qquad \text{..........(8.4.7)}$$

หรือ

$$\frac{x}{n} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} < p < \frac{x}{n} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}} \qquad \text{..........(8.4.8)}$$

เราก็จะได้ 95 เปอร์เซ็นต์ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ p โดยประมาณ ถ้าเราเปลี่ยนองศาของความเชื่อมั่นเป็น 98 หรือ 99 เปอร์เซ็นต์ เราเพียงแต่แทนค่า 1.96 ด้วย 2.33 หรือ 2.58

จากสมการ inequality (8.4.8) เราต้องการหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนจริงของนักสูบบุหรี่ที่ชอบสูบตราสามิตต่อบุหรี่ตราอื่น ๆ ทั้งหมด

$$0.24 - 1.96\sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{250}} < p < 0.24 + 1.96\sqrt{\frac{(0.24)(0.76)}{250}}$$

$$0.187 < p < 0.293$$

จะเห็นได้ว่าค่าที่ได้นี้เกือบเท่ากับค่าที่หาได้จากตาราง

ถ้าสัดส่วนของตัวอย่างใช้เป็น point estimate ของ p ความคลาดเคลื่อนของเราก็คือ $(x/n) - p$

ถ้าสัดส่วนของตัวอย่าง x/n ที่ได้จากตัวอย่างขนาดใหญ่ ใช้เป็น estimate ของ p เราก็กล่าวได้ว่า probability 0.95 ที่ความคลาดเคลื่อนของเราจะน้อยกว่า

$$1.96 \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}{n}}$$

ตัวอย่าง 8.4.1 มีผู้ออกเสียงเลือกตั้ง 600 คน 330 คน ออกเสียงให้นาย ก. และ 270 คน ออกเสียงให้นาย ข. สัดส่วนที่ออกเสียงให้นาย ก. $\frac{330}{600} = 0.55$ ของผู้ออกเสียงทั้งหมด ถ้าเราเชื่อว่า 95 เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่านี้น้อยกว่า

$$1.96 \sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{600}} = 0.04 \text{ (หรือ 4 เปอร์เซ็นต์)}$$

$$-1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{x}{n} - p < 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

จาก (8.4.6) เราก็กล่าวได้ว่า probability 0.95 ถ้าใช้ x/n เป็น estimate ของ p ความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่า $1.96\sqrt{p(1-p)/n}$

ดังนั้น ถ้าให้ E เป็นปริมาณที่เราเชื่อว่า 95 เปอร์เซ็นต์ ความคลาดเคลื่อนของเราน้อยกว่า เราเขียนได้เป็น

$$1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = E$$

หาค่า n ได้ $n = p(1-p)\left(\frac{1.96}{E}\right)^2$ ....(8.4.9)

สูตรนี้ไม่สามารถใช้หาค่าของตัวอย่างได้ที่ถูกต้องแน่นอนโดยตรง เพราะเราไม่ทราบค่า p ซึ่งเราต้องการประมาณค่า เนื่องจาก p ต้องอยู่ระหว่าง 0 และ 1 จึงสามารถแสดงว่า p (1 – p) เกือบเท่ากับ 1/4 แทนค่าใน (8.4.9) ก็จะได้

$$n \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1.96}{E}\right)^2 \qquad \text{..........(8.4.10)}$$

เป็นความจริงที่ว่า $p(1-p)$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ 1/4
(หมายเหตุ E จะต้องอยู่ในลักษณะ สัดส่วนไม่ใช่เป็นเปอร์เซ็นต์)

ตัวอย่าง 8.4.2 สมมุติว่าเราต้องการประมาณค่าของเด็กวัยรุ่นในเมือง ๆ หนึ่งไปดูภาพยนตร์อย่างน้อยกี่ครั้งต่อสัปดาห์ โดยใช้สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น 0.95 ที่การประมาณค่าของเราไม่เกินไปกว่า 0.02 แทนค่า $E = 0.02$ ลงใน (8.4.10) เราได้

$$n \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 2401$$

ตัวอย่างจากการประมาณค่าของเราได้ 2401 เราก็สามารถเชื่อได้ว่าอย่างน้อย 95% สัดส่วนของตัวอย่างของเราจะไม่ต่างไปจากอัตราส่วนจริงเกินกว่า 0.02 การที่เราเชื่อว่าอย่างน้อย 95% เพราะว่าขนาดตัวอย่าง 2401 อาจใหญ่เกินกว่าที่จำเป็นที่จะทำให้เชื่อแน่ว่าถูกต้อง

สมมุติว่าเราไม่มีแนวความคิดเกี่ยวกับค่าของ p เราก็ใช้สูตร $n \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1.96}{E}\right)^2$ แต่ถ้าเราทราบค่า p จากประสบการณ์ที่ผ่านมาว่า สัดส่วนซึ่งต้องการจะประมาณค่าอยู่ในราว ๆ 0.80 เราก็สามารถแทนค่านี้ลงใน $n = p(1-p)\left(\frac{1.96}{E}\right)^2$ ได้

$$n = (.80)(.20)\left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 1537$$

แสดงว่าค่าที่เป็นไปได้ของ p อาจสามารถทำให้เราลดขนาดของตัวอย่างตามต้องการได้

ตัวอย่าง สมมติเรามีประชากรขนาด N = 7 ดังนี้

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6, x_7 = 7$

เลือกตัวอย่างขนาด n = 2 แล้ว ตัวอย่างที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมด $\binom{7}{2} = 21$ ตัวอย่าง

มัชฌิมเลขคณิตตัวอย่างก็จะมี 21 ค่า คำนวณค่า μ, σ และ $\sigma_{\bar{X}}$ เราได้

$$\mu = 4, \sigma^2 = \frac{28}{7} = 4, \sigma = 2$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{4}{2}\left(\frac{7-2}{7-1}\right) = \frac{5}{3} = 1.666$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{1.666} = 1.29\,;\ z\sigma_{\bar{X}} = 1.64 \times 1.29 = 2.1$$

(ใช้ระดับความเชื่อมั่น 90%)

	ตัวอย่าง	$\bar{x}$	$\bar{x} - 1.640\,\sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + 1.64\,\sigma_{\bar{x}}$
1	1, 2	1.5	$-.6 < \mu < 3.6$
2	1, 3	2	$-.1 < \mu < 4.1$
3	1, 4	2.5	$.4 < \mu < 4.6$
4	1, 5	3	$.9 < \mu < 5.1$
5	1, 6	3.5	$1.4 < \mu < 5.6$
6	1, 7	4	$1.9 < \mu < 6.1$
7	2, 3	2.5	$.4 < \mu < 4.6$
8	2, 4	3	$.9 < \mu < 5.1$
9	2, 5	3.5	$1.4 < \mu < 5.6$
10	2, 6	4	$1.9 < \mu < 6.1$
11	2, 7	4.5	$2.4 < \mu < 6.6$
12	3, 4	3.5	$1.4 < \mu < 5.1$
13	3, 5	4	$1.9 < \mu < 6.1$
14	3, 6	4.5	$2.4 < \mu < 6.6$
15	3, 7	5.0	$2.9 < \mu < 7.1$
16	4, 5	4.5	$2.4 < \mu < 6.6$
17	4, 6	5	$2.9 < \mu < 7.1$
18	4, 7	5.5	$3.4 < \mu < 7.6$
19	5, 6	5.5	$3.4 < \mu < 7.6$
20	5, 7	6	$3.9 < \mu < 8.1$
21	6, 7	6.5	$4.4 < \mu < 8.6$

ระดับความเชื่อมั่น 90% นี้หมายความว่า ช่วงความเชื่อมั่น 100 ช่วง เราคาดหวังอยู่ 10 ช่วงที่ไม่ได้ครอบคลุมค่า μ จริง

$\mu = 4$ มีช่วงความเชื่อมั่นแรกและสุดท้ายไม่ครอบคลุม $\mu = 4$ นั่นคือ

$-.6 < \mu < 3.6$ กับ $4.4 < \mu < 8.6$

แบบฝึกหัดที่ 8.2

1. ชนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยนักศึกษา 250 คน 90 คนมีรถส่วนตัว 160 คน ไม่มีรถ
   ก. ใช้ตารางที่กำหนดให้ในภาคผนวก สร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนจริงของนักศึกษาที่มีรถส่วนตัว (.29, .42)
   ข. จงหาขนาดตัวอย่างถ้า probability 0.98 ที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนของเราน้อยกว่า .023 โดย สัดส่วนของตัวอย่างของคนที่มีรถส่วนตัว = 0.4 (2463)

2. ตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยลูกแอปเปิ้ล 100 ลูก มีอยู่ 18 ลูกที่แคระแกร็น
   ก. ใช้ตารางที่กำหนดให้ในภาคผนวก สร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนจริงของลูกแอปเปิ้ลที่แคระแกร็น (0.116, 0.275)
   ข. หาขนาดของตัวอย่างที่ความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า .02 ถ้าเราประมาณค่าสัดส่วนนี้ด้วย .18 โดยใช้ probability 0.98 (2004)
   ค. ใช้ (8.4.8) โดยให้ 2.58 แทน 1.96 สร้าง 99 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนจริงของลูกแอปเปิ้ลที่แคระแกร็น (.15, .21)

3. ตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วย 500 ครอบครัวที่มีโทรทัศน์ของตนเองในอำเภอบางกะปิ 200 ครอบครัว เปิดรับช่อง 4 ในระหว่างที่ออกอากาศอยู่
   ก. ใช้ตารางที่กำหนดให้ในภาคผนวกสร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนจริงของครอบครัวที่เปิดช่อง 4 (0.36, 0.44)
   ข. ใช้ (8.4.8) โดยให้ 2.33 แทน 1.96 เพื่อสร้าง 98 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นของสัดส่วนที่ต้องการ (0.35, 0.45)

4. ชนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยหมอ 11 คน 3 คนชอบสูบบุหรี่ตราเกล็ดทอง อีก 7 คน ชอบสูบตราอื่นหรือไม่สูบเลย ใช้ตารางที่กำหนดในภาคผนวก สร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ สัดส่วนจริงของหมอซึ่งสูบบุหรี่ตราเกล็ดทอง
   (หมายเหตุ สัดส่วนของตัวอย่าง .30 ไม่อยู่กึ่งกลางของช่วงความเชื่อมั่นโดยหลักความจริงแล้วการแจกแจงทวินามจะไม่สมมาตร เว้นแต่ $p = 1/2$ ถ้า p ไม่เท่ากับ 1/2 probability ของ underestimating p โดยค่าบางค่าจะไม่เท่ากับ probability ของ overestimating p สำหรับค่าเดิมนั้น)

5. สมมุติว่าเราต้องการประมาณค่า สัดส่วนของหญิงในหอพักซึ่งแต่งงานภายใน 3 ปี ภายหลัง

สำเร็จการศึกษา จงหาขนาดตัวอย่างที่ความคลาดเคลื่อนจะน้อยกว่า 0.05 ด้วย probability 0.95 (385)

6. ถ้าเราต้องการประมาณค่าของ สัดส่วนของชายที่ชอบอ่านหนังสือ ให้หาขนาดตัวอย่างที่สัดส่วนของตัวอย่างต่างไปจากสัดส่วนจริงน้อยกว่า 0.04 ด้วย probability อย่างน้อย 0.98 (ใช้ (8.4.10) อย่างน้อย 849)

7. สมมุติว่าเราต้องการประมาณค่าอัตราส่วนของลูกปืนเสียของลูกปืน (ball bearing) จำนวนมาก เราทราบจากประสบการณ์ว่า สัดส่วนนี้มีค่าประมาณ 0.04 ใช้สมการ (8.4.9) หาขนาดตัวอย่างโดยที่ สัดส่วนของตัวอย่างอยู่ภายใน .005 ของสัดส่วนจริงด้วย probability 0.95 (5901)

8. จงหาขนาดตัวอย่างของประชามติรายคนเพื่อที่จะกล่าวได้ว่า probability อย่างน้อย 0.95 ที่สัดส่วนของตัวอย่างจะมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.03 (1067)

9. จากแบบฝึกหัดข้อ 8 ถ้าเราทราบว่า สัดส่วนซึ่งเราต้องการจะประมาณค่าคือ 0.60 อยากทราบว่าตัวอย่างจะมีขนาดใหญ่เท่าใด (1025)

8.5 การประมาณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนที่น่าจะเป็น

เราได้กล่าวมาแล้วเกี่ยวกับสร้างช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับ μ และ p และหาค่าที่ถูกต้องแน่นอนของ point estimates ของ μ และ p หรือใช้หลักเดียวกันนี้ไปประมาณค่าของ population parameters จากการศึกษา sampling distribution ของ statistics นักสถิติได้พัฒนาสูตรช่วงระหว่างความเชื่อมั่นสำหรับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมัธยฐานควอไทล์ สัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน เป็นต้น โดยหลักการและวิธีการแล้วคล้ายคลึงกัน ความยากลำบากส่วนใหญ่ที่เป็นจริงก็มีบ้าง sampling distribution เหล่านี้มีลักษณะธรรมชาติค่อนข้างจะยุ่งยาก โชคดีที่ว่า เมื่อ n ของ sampling distribution มีค่ามาก ในภาคปฏิบัติเราถือว่าเป็นเส้นโค้งปกติ

ถ้า S เป็น statistic ที่คำนวณได้มาจากตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ เราก็สามารถเขียน 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงหว่างความเชื่อมั่นสำหรับ population parameter ซึ่งสมมุติ S เป็นตัว estimate ก็จะได้

$$S - 1.96\ \sigma_s < \text{pupulation parameter} < S + 1.96\ \sigma_s \qquad \text{..........(8.5.1)}$$

เมื่อ σ_s คือส่วนเบียงเบนมาตรฐานของ sampling distribution ของ S (ความคลาดเคลื่อนของ S)

ถ้า S เป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง σ_s ก็คือ $\sigma_{\bar{X}}$ และสมการ (8.5.1) ก็เป็นสมการ (8.2.3) แต่ถ้า S เป็นสัดส่วนของตัวอย่าง σ_s ก็คือ $\sigma_{\frac{x}{n}}$ และสมการ (8.5.1) ก็เป็นสมการ (8.4.6)

ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ S ก็ใช้เป็น estimate ของ σ สมการ (8.5.1) ก็เขียนใหม่ได้

$$S - 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} < \sigma < S + 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \qquad \text{..........(8.5.2)}$$

ในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ S อาจประมาณสูตร

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \qquad \text{..........(8.5.3)}$$

เขียนสมการ (8.5.2) เสียใหม่

$$\frac{S}{1 + \frac{1.96}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{S}{1 - \frac{1.96}{\sqrt{2n}}} \qquad \text{..........(8.5.4)}$$

เราก็ได้ 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ σ (ในทำนองเดียวกัน 98 และ 99 เปอร์เซ็นต์ของช่วงระหว่างความเชื่อมั่นก็คำนวณหาได้โดยแทนค่า 1.96 ด้วย 2.33 และ 2.58 ตามลำดับ)

สมมุติว่า $n = 40$ และ $S = 8.52$ แทนค่าลงในสมการ (8.5.4) เราได้

$$\frac{8.52}{1 + \frac{1.96}{\sqrt{80}}} < \sigma < \frac{8.52}{1 \quad \frac{1.96}{\sqrt{80}}}$$

หรือ $\quad 6.98 < \sigma < 10.92$

เราก็สามารถยืนยันด้วย probability 0.95 ที่ σ อยู่ระหว่าง 6.98 กับ 10.92

โดยทั่วไปเรานิยมเลือก probability .95, .98 และ .99 ในการประมาณค่าคลาดเคลื่อนของเรา เราสามารถใช้ probability .50 ก็ได้ โดยแทนค่า 1.96 ด้วย 0.6745 (ดูตารางหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติ) อย่างเช่น มีโอกาส ห้าสิบ ห้าสิบ (fifty-fifty) ที่ x ต่างไปจาก μ น้อยกว่า

$$0.6745\ \sigma_{\bar{X}} \text{ หรือ } 0.6745\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ค่านี้เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนที่น่าจะเป็นของค่ามัชฌิม (probable error of the mean)

โดยทั่ว ๆ ไป นิยามของความคลาดเคลื่อนที่น่าจะเป็นของ statistic S คือ 0.6745 เท่าของความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ s

สำหรับตัวอย่าง $P.E._s = 0.6745\ \sigma_s$

$$P.E._{\bar{x}} = 0.6745\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P.E._p = 0.6745\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$P.E._s = 0.6745\ \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

เพื่อว่าจะใช้สูตรเหล่านี้ เราก็แทนค่า σ ด้วย S และ p ด้วย x/n ปัจจุบันความคลาดเคลื่อนที่น่าจะเป็นไม่ค่อยได้ใช้สำหรับวิธีการทางทหารเกี่ยวกับปัญหาการยิงปืนใหญ่หรือทิ้งระเบิด

8.6 การประมาณค่ากรณีประชากรมีขนาดเล็ก

การประมาณค่าต่าง ๆ ของประชากรที่ได้กล่าวมาแล้วก็เป็นไปตามเงื่อนไข (Assumptions) ที่กำหนดให้ ตัวอย่างที่ได้มาก็โดยวิธีสุ่มจากประชากรที่มีขนาดใหญ่ เพื่อให้ถูกต้องกับหัวข้อนี้จึงต้องดัดแปลงสูตรที่คำนวณหา ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ sampling distribution คือแทนที่จะใช้สูตร

ก. $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

เราใช้ $$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{.........(8.6.1)}$$

ข. $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

เราใช้ $$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{.........(8.6.2)}$$

ค. $\sigma_s = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

เราใช้ $$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad \text{.........(8.6.3)}$$

ตัวอย่าง 8.6.1 มีหมอ 10 คนในเมือง ๆ หนึ่ง ในระหว่างหมอ 9 คน 3 คนสูบบุหรี่และอีก 6 คน ไม่สูบบุหรี่

วิธีทำ เราพบว่า $n = 9$ และ $x/n = 3/9$ จากตารางในภาคผนวก 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นก็เริ่มจาก .07 ถึง 0.69 จากความจริงที่ว่า ตัวอย่างของเราได้มาโดยไม่ได้สุ่ม เพราะฉะนั้น อะไรที่เราได้ทำไปจึงไม่ถูกต้อง ถ้าหมอคนที่ 10 สูบบุหรี่ p ก็จะมีค่าเท่ากับ $4/10 = 0.40$ และ ถ้าเขาไม่สูบบุหรี่ p ก็จะมีค่าเท่ากับ $3/10 = 0.30$ แต่เนื่องจาก p ไม่เป็น 0.30 หรือ 0.40 อย่างใดอย่างหนึ่ง จึงเป็นการยากที่จะเข้าใจว่า 95 เปอร์เซ็นต์ที่ p จะอยู่ระหว่าง 0.07 และ 0.69

จากสูตรข้างต้น จะเห็นได้ว่า เมื่อ n มีค่าน้อยเปรียบเทียบกับ N เทอม $\sqrt{(N-n)/(N-1)}$ หรือเรียกว่า Adjustment factor ก็จะมีค่าเข้าใกล้หนึ่ง ดังตัวอย่าง $n = 100$ และ $N = 10,000$ ก็จะได้ว่า

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{10,000 - 100}{10,000 - 1}} = 0.995$$

จะเห็นได้ว่า เราสามารถที่จะให้มีค่าเท่ากับ 1 ได้ เราจะใช้สูตร (8.6.1), (8.6.2) และ (8.6.3) ก็ต่อเมื่อตัวอย่างมีขนาดเป็น 5 เปอร์เซ็นต์หรือมากกว่าของประชากร ถ้าเราต้องการประมาณค่าเฉลี่ยของการออมทรัพย์ 400 ครอบครัว จากตัวอย่างที่ได้มาแบบสุ่ม 200 ครอบครัว ก็จะได้ adjustment factor

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{400 - 200}{400 - 1}} = 0.708$$

ผลลัพธ์นี้ทำให้ความกว้างแตกต่างไปประมาณ 30 เปอร์เซ็นต์ของช่วงระหว่างความเชื่อมั่น

Adjustment factor มีค่าไม่เกินหนึ่ง เพื่อความปลอดภัยในการใช้ ซึ่งได้ศึกษาในบทก่อน ถ้าประชากรมีขนาดใหญ่ adjustment factor ก็ตัดทิ้งได้ ช่วงระหว่างความเชื่อมั่นก็จะกว้างยิ่งขึ้น

แบบฝึกหัดที่ 8.3

1. จากแบบฝึกหัดที่ 8.1 ข้อ 1 สร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ σ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักทั้งหมด (gross weights) ของรถ trucks ที่วิ่งระหว่างนครปฐม-กรุงเทพฯ หรือ กรุงเทพฯ-นครปฐม (3073-4065 ปอนด์)

2. จากแบบฝึกหัดที่ 8.1 ข้อ 2 สร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ I.Q. ของนักเรียนทั้งหมดในเมือง ๆ นั้น (11.29-13.76)

3. จากแบบฝึกหัดที่ 8.1 ข้อ 2 สมมุติว่ามีจำนวนนักเรียน 800 คนในเมืองนั้นใช้สูตรที่ได้ดัดแปลงในหัวข้อนี้ (section) และข้อมูลในแบบฝึกหัดที่ 8.1 ข้อ 2 สร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ I.Q. เฉลี่ยของนักเรียน 800 คนนี้ (105.5-108.5)

4. ตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วย 100 ball bearings ที่ได้เลือกมาจากจำนวน 2,000 ball bearings โดยวิธีสุ่ม มีเส้นผ่าศูนย์กลางเฉลี่ย 0.354 นิ้ว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.048 นิ้ว จงคำนวณหา 98 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับเส้นผ่าศูนย์กลางเฉลี่ยของ 2,000 ball bearings (.3431-.3649 นิ้ว)

5. จากแบบฝึกหัดที่ 8.2 ข้อ 2 สมมุติว่ามีจำนวนแอปเปิ้ลทั้งหมด 1,000 ลูกสร้าง 95 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่น สำหรับสัดส่วนของลูกแอปเปิ้ลที่แคระแกรนนี้ (0.11-0.25)

6. ผู้มีสิทธิออกเสียงเลือกตั้งในเมือง ๆ หนึ่ง มี 8,000 คน เลือกตัวอย่างหนึ่งโดยวิธีสุ่มมี 1,000 คน 580 คนพอใจเลือกนาย ก. 420 คนเลือกคนอื่น ๆ สร้าง 99 เปอร์เซ็นต์ของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนจริงของผู้มีสิทธิออกเสียงเลือกตั้ง (.5423-.6177)

8.7 การประมาณค่าของผลต่างของสองตัวพารามิเตอร์

ถ้าหากว่า s_1 กับ s_2 เป็นสองตัวสถิติที่มีการแจกแจงตัวอย่างเข้าใกล้ปกติแล้ว การแจกแจงตัวอย่างของ $s_1 - s_2$ เข้าใกล้ปกติ ก็จะมีมัชฌิมเลขคณิต $\mu_{s_1} - \mu_{s_2}$ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_{s_1-s_2}$

$$Z = \frac{(s_1 - s_2) - (\mu_{s_1} - \mu_{s_2})}{\sigma_{s_1-s_2}}$$ ก็จะมีการแจกแจง

ปกติมาตรฐานมีมัชฌิมเลขคณิตศูนย์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับหนึ่ง ขีดความเชื่อมั่นสำหรับผล

ต่างของตัวพารามิเตอร์ประชากรที่สัมพันธ์กับ s_1 และ s_2 กำหนดได้โดย

$$(s_1 - s_2) \pm Z\,\sigma_{s_1 - s_2} = (s_1 - s_2) \pm Z\sqrt{\sigma_{s_1}^2 + \sigma_{s_2}^2} \qquad \text{..........(8.7.1)}$$

8.8 การประมาณค่าสำหรับผลต่างของสองมัชฌิมเลขคณิตประชากร ($n > 30$)

ถ้าหากว่า s_1 คือ $\bar{x}_1$ และ s_2 คือ $\bar{x}_2$ ขีดความเชื่อมั่นสำหรับสองมัชฌิมเลขคณิตประชากร $\mu_1 - \mu_2$ กำหนดได้โดย

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z\,\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad \text{.......(8.8.1)}$$

ในเมื่อ $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ คือมัชฌิมเลขคณิตตัวอย่างของสองตัวอย่าง

n_1, n_2 ขนาดของสองตัวอย่างและ σ_1, σ_2 คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของสองประชากร

ตัวอย่าง สุ่มหลอดไฟฟ้าขนาด 150 จากยี่ห้อ A มีอายุเฉลี่ย 1400 ชม. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 120 ชม. และสุ่มหลอดไฟฟ้าขนาด 200 จากยี่ห้อ B มีอายุเฉลี่ย 1200 ชม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 80 ชม. จงหา 99% ขีดความเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของอายุเฉลี่ยจริงของหลอดไฟฟ้ายี่ห้อ A และ B

วิธีทำ ขีดความเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของมัชฌิมเลขคณิต ของหลอดไฟฟ้ายี่ห้อ A และ B กำหนดได้

$$(L, U) = (\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm Z\sqrt{\sigma_A^2 / n_A + \sigma_B^2 / n_B}$$

$$\bar{x}_A = 1400,\ s_A = 120,\ n_A = 150,\ \bar{x}_B = 1200;\ s_B = 80$$

$$n_B = 200,\ Z = 2.58$$

$$(L, U) = (1400 - 1200) \pm 2.58\sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/200}$$

$$= 200 \pm 29.19$$

ดังนั้น เราสามารถเชื่อ 99% ว่าผลต่างของมัชฌิมเลขคณิตจริงจะวางอยู่ระหว่าง 170.81 ถึง 229.19 ชม.

8.9 การประมาณค่าสำหรับผลต่างของสองสัดส่วนประชากร ($n > 30$)

ถ้าหากว่า $s_1 - s_2$ เป็น $\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}$ และ n_1, n_2 เป็นขนาดของสองตัวอย่างที่เลือกมาจากสองประชากรและ p_1, p_2 เป็นสัดส่วนของสองประชากรแล้ว ขีดความเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของสองสัดส่วนประชากร ในกรณีประชากรแบบไม่จำกัด กำหนดได้โดย

$$\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm Z\,\sigma_{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}} = \frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm Z\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}} \qquad \text{..........(8.9.1)}$$

ในทางปฏิบัติ p แทนด้วย $\frac{x_1}{n_1}$, $q = 1 - \frac{x_1}{n_1}$, $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$, $q_2 = 1 - \frac{x_2}{n_2}$

ตัวอย่าง สุ่มตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยผู้ใหญ่ 400 คน และอีกตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยวัยรุ่น 600 คนที่ได้ดู รายการหนึ่งโดยเฉพาะมีผู้ใหญ่ 100 คนและวัยรุ่น 300 คน ชอบรายการนั้น สร้าง 95% ของความเชื่อมั่นสำหรับผลต่างในสัดส่วนของผู้ใหญ่ทั้งหมดกับวัยรุ่นทั้งหมดที่ชอบดูรายการนั้น

วิธีทำ ขีดความเชื่อมั่นสำหรับผลต่างในสัดส่วนของสองกลุ่ม กำหนดได้โดย

$$\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) \pm Z\sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1}\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right)}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2}\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)}{n_2}}$$

ในเมื่อ $\frac{x_1}{n_1} = \frac{300}{600} = .5$, $\frac{x_2}{n_2} = \frac{100}{400} = .25$, $z = 1.96$

$$(.50 - .25) \pm 1.96\sqrt{(.5)(.5)/600 + (.25)(.75)/400}$$

$= .25 \pm .06$ หรือ $0.19 < p_1 \quad p_2 < 0.31$

เพราะฉะนั้น เราสามารถเชื่อ 95% ว่า ผลต่างในสัดส่วนจริงว่างอยู่ระหว่าง .19 ถึง .31

8.10 การประมาณค่าสำหรับผลต่างของสองมัชฌิมเลขคณิต ของประชากร ($n \leqslant 30$)

ในกรณีที่เรามีตัวอย่างขนาดเล็ก การแจกแจงของผลต่างของค่าเฉลี่ยจะเป็นการแจกแจงแบบ t ค่าสถิติที่มีการแจกแจงแบบ t คือค่าสถิติ

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

ในเมือ $s_p^2 = \frac{\Sigma(x - x_1)^2 + \Sigma(x - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 \quad 2} \qquad \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n, + n_2 - 2}$

$n_1 + n_2 - 2$ คือองศาแห่งความอิสระ

ขีดความเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของสองมัชฌิมเลขคณิตของประชากรด้วยความเชื่อมั่นที่กำหนดให้เขียนได้เป็น

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2;\, n_1 + n_2 - 2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \qquad \text{..........(8.10.1)}$$

ในเมื่อ n_1, n_2 มีความอิสระกัน

ตัวอย่าง นักสังคมศาสตร์ได้ศึกษามหาเศรษฐีที่ก่อร่างสร้างตัวด้วยตนเอง โดยสุ่มตัวอย่างขนาดเก้าคนจากแต่ละประเทศของสองประเทศ อายุเฉลี่ยและความแปรปรวนดังนี้

$\bar{x}_1$	= 40.33 ปี	$\bar{x}_2$	= 36.54 ปี
s_1^2	= 25.25	s_2^2	= 34.61
n_1	= 9	n_2	= 9

การแจกแจงของอายุเป็นปกติ มีความแปรปรวนร่วมกันแต่ไม่ทราบ จงประมาณค่าผลต่างอายุเฉลี่ยของมหาเศรษฐีที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

วิธีทำ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2}\, n_1 + n_2 - 2\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = 40.33 - 36.54 = 3.79, \quad t_{.025,\,16} = 2.12$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(9-1)25.25 + (9-1)34.61}{9+9-2}$$

$$= 29.93$$

$$= (40.33 - 36.54) \pm (2.12)\sqrt{\frac{29.93}{9} + \frac{29.93}{9}}$$

$$= 3.79 \pm (2.12)(2.58)$$

$$= 3.79 \pm 5.47$$

$$1.68 < \mu_1 - \mu_2 < 9.26$$

อายุเฉลี่ยสำหรับการได้ฐานะมาเหล่านั้นของมหาเศรษฐีที่สร้างตัวด้วยตนเอง มีอายุน้อยกว่า 1.68 ปี ในประเทศที่ 1 ถึง 9.26 ปีมากกว่าสำหรับฐานะเหล่านั้นในประเทศที่ 2