บทที่ 6
ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น
Probability

6.1 คำนำ

โลกที่เราอาศัยอยู่นี้เป็นโลกแห่งความไม่แน่นอน การดำรงชีวิตภายใต้สภาวการณ์อันไม่แน่นอนนี้ไม่สามารถบอกเหตุการณ์ได้ล่วงหน้า อย่างเช่น นักศึกษาจะไม่สามารถบอกได้ว่าจะสอบผ่านทุกวิชาในภาคการศึกษานี้จนกว่าจะประกาศผล เราจะบอกไม่ได้ว่าพรุ่งนี้ฝนจะตก นักธุรกิจตัดสินใจเปิดร้านขายอาหาร เขาจะบอกไม่ได้เลยว่ากิจการของเขาจะประสบความสำเร็จหรือล้มเหลว คำตอบถูกต้องก็ต่อเมื่อร้านอาหารประสบความสำเร็จหรือคำตอบผิด ถ้าร้านอาหารล้มเหลว หากเราซื้อล๊อตเตอรี่ในงวดนี้จะบอกไม่ได้ว่าจะถูกล๊อตเตอรี่หรือไม่ จะบอกได้ก็ต่อเมื่อได้ออกรางวัลไปแล้ว

6.2 การทดลองเชิงสุ่ม

การทดลองเชิงสุ่มคือการทดลองใด ๆ ที่เราไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ได้ล่วงหน้า ผลลัพธ์ดังกล่าวขึ้นอยู่กับตัวประกอบบางตัวซึ่งผู้ทำการทดลองเองก็ไม่สามารถทราบได้แน่นอน หรือบางครั้งแม้จะทราบกลไกและตัวประกอบที่ทำให้เกิดผลลัพธ์ของการทดลอง ก็ไม่สามารถควบคุมตัวประกอบเหล่านี้ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ พอที่จะทำให้ทราบผลลัพธ์ของการทดลองได้ล่วงหน้า ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 การโยนเหรียญเป็นการทดลองเชิงสุ่ม เพราะเราไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าเหรียญจะออกผลลัพธ์เป็นหัวหรือก้อย

ตัวอย่างที่ 2 การทอดลูกเต๋าเป็นการทดลองเชิงสุ่ม เพราะเราไม่สามารถทำนายได้ล่วงหน้าว่าจะได้หน้าอะไรหรือได้กี่แต้ม

ตัวอย่างที่ 3 ซื้อล๊อตเตอรี่ก็เป็นการทดลองเชิงสุ่ม เพราะไม่สามารถทำนายล่วงหน้าว่าจะถูกล๊อตเตอรี่หรือไม่

ตัวอย่างที่ 4 หยิบลูกบอลล์หนึ่งลูกจากในกล่องซึ่งมีลูกบอลล์สีแดง สีเขียว และสีขาวก็เป็นการทดลองเชิงสุ่ม ทั้งนี้เพราะไม่สามารถทำนายได้ล่วงหน้าว่าจะได้ลูกบอลล์สีอะไร

ตัวอย่างที่ 5 การขับรถไปบนท้องถนนเป็นการทดลองเชิงสุ่ม เพราะเราไม่ทราบว่าจะเกิดอุบัติเหตุขึ้นอยู่กับตัวประกอบหลายตัว บางตัวก็อยู่ในวิสัยสามารถที่ผู้ขับรถจะควบคุมได้ แต่ก็มีตัวประกอบอื่นที่ไม่สามารถควบคุมได้ เช่น การขับรถของผู้อื่น รถเกิดเบรคเสีย ฯลฯ

6.3 การทดลองที่ทราบผลแน่นอน

การเกิดของผลลัพธ์นี้อาศัยทฤษฎีหรือกฎเกณฑ์ตามธรรมชาติ ตัวอย่างของการทดลองประเภทนี้คือ การโยนของจากที่สูงจะบอกได้ล่วงหน้าว่าของชิ้นนั้นจะตกลงพื้นอย่างแน่นอน การเอาเงินไปฝากในธนาคาร เราทราบแน่นอนว่าจะได้ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ถ้าหากว่าธนาคารไม่ล้มละลายเสียก่อน

การตายของคนเป็นของที่เกิดขึ้นอย่างแน่นอนกับทุกคน การที่มนุษย์ดำรงชีวิตอยู่ถือได้ว่าเป็นการทดลองอย่างหนึ่ง การมีชีวิตอยู่ของแต่ละคนเมื่อมองในทัศนะของการตายที่เกิดขึ้นกับคน ๆ นั้นอย่างแน่นอนก็เป็นการทดลองที่ทราบผลลัพธ์แน่นอน แต่หากจะมองในทัศนะนี้ว่าจะตายเมื่ออายุเท่าไรก็จะเป็นความไม่แน่นอนเสียแล้ว เพราะเราไม่สามารถจะบอกได้ว่าแต่ละคนจะตายเมื่ออายุเท่าไรเพราะฉะนั้น การมีชีวิตอยู่ของคนมองในทัศนะของอายุที่จะตายจึงเป็นการทดลองเชิงสุ่ม

ตัวอย่างข้างต้นนี้พอจะแสดงให้เห็นว่าการทดลองเมื่อมองในทัศนะหนึ่งอาจจะเป็นการทดลองเชิงสุ่มได้ แต่เมื่อมองในอีกทัศนะหนึ่งก็อาจจะเป็นการทดลองที่ทราบผลลัพธ์ที่แน่นอนได้อีกด้วย

6.4 ผลลัพธ์ของการทดลองเชิงสุ่มและ Sample Space

เราทราบแล้วว่าการทดลองเชิงสุ่มเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษา ทฤษฎีความน่าจะเป็นและการทดลองเชิงสุ่มจะเสร็จสิ้นลงด้วยผลลัพธ์เพียงอย่างหนึ่งอย่างเดียวเท่านั้น แต่ในการศึกษาเกี่ยวกับการทดลองหนึ่ง ๆ เราควรจะทราบเซ็ทของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ เซ็ทดังกล่าวเรียกว่า "sample space" เรานิยมใช้สัญลักษณ์ $0_1, 0_2, \ldots$ แทนผลลัพธ์ของการทดลองและแทน sample space ด้วย S ดังนั้น สัญลักษณ์ของเซ็ทก็เขียนได้เป็น

$$S = \{ 0_1, 0_2, 0_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

ตัวอย่างที่ 1 ในการโยนเหรียญ 2 อันหนึ่งครั้งผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดก็มีอยู่ 4 ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) ดังนั้น sample space จึงเท่ากับ

$$S = \{ (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) \}$$

$$0_1 = (H,H),\ 0_2 = (H,T),\ 0_3 = (T,H),\ 0_4 = (T,T)$$

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ที่ปรากฏหนึ่งหัวจะมีอยู่ 2 ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 0_2 = (H,T) และ 0_3 = (T,H) ให้เหตุการณ์แสดงได้โดย A และ A = { (H,T), (T,H) } และเป็นเหตุการณ์ประกอบ

ตัวอย่างที่ 2 ผลการทดสอบของนักศึกษา 500 คนซึ่งคนที่ได้คะแนนต่ำสุดเป็นศูนย์และคนที่ได้คะแนนสูงสุดเป็น 100 ดังนั้นผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดก็มี 101 ผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้

$o_0 = 0,\ 0_1 = 1,\ 0_2 = 2 \ldots\ldots\ldots 0_{100} = 100$ sample space คือ

$$S = \{0_0,\ 0_1 \ldots\ldots\ldots 0_{100}\}$$

ข้อสังเกต ในตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าแต่ละผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้อาจจะประกอบด้วยหนึ่งค่าหรือมากกว่าแต่จำนวนค่าของผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดรวมกันจะต้องมี 500 ค่า

ถ้าเราให้เซ็ทของเหตุการณ์ประกอบด้วยคะแนน 95 หรือมากกว่า เซ็ทนั้นก็เขียนได้เป็น-

$A = \{ o_{95}, o_{96} \ldots\ldots o_{100} \}$

เป็นเหตุการณ์ประกอบ

ตัวอย่างที่ 3 ดึงไพ่ 1 ใบจากไพ่สำหรับซึ่งมี 52 ใบ ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดจะเป็นไพ่ใบใดใบหนึ่งมี 52 ผลลัพธ์ ที่เป็นไปได้ sample space ของการทดลองนี้เขียนได้เป็น

S = { ♠ A,K,G,J, 10,9,8,7,6,5,4,3,2,

♥ A,K,G,J, 10,9,8,7,6,5,4,3,2,

♦ A,K,G,J, 10,9,8,7,6,5,4,3,2,

♣ A,K,G,J, 10,9,8,7,6,5,4,3,2 }

ตัวอย่างที่ 4 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลล์อยู่ 10 ลูกเป็นลูกบอลล์สีขาว 3 ลูก ลูกบอลล์สีแดง 2 ลูก และลูกบอลล์สีดำ 5 ลูก คนลูกบอลล์ในกล่องให้เข้ากันดีแล้วหยิบลูกบอลล์ 1 ลูกโดยสุ่ม ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ ทั้งหมด 3 ผลลัพธ์ แต่ละผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ประกอบด้วยจำนวนค่าหรือหน่วยดังนี้

ผลลัพธ์ของลูกบอลล์สีขาวมี 3 หน่วย ผลลัพธ์ ของลูกบอลล์สีแดงมี 2 หน่วย ผลลัพธ์ของลูกบอลล์สีดำ 5 หน่วย sample space เขียนได้เป็น

S = { ขาว, แดง, ดำ }

เราจะเห็นว่า sample space ประกอบด้วยสามผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้ แต่ถ้าจะถามว่า sample space ประกอบด้วยกี่หน่วยแล้วก็สามารถบอกได้ว่ามี 10 หน่วย หรือหนทาง

ตัวอย่างที่ 5 เกรดของนักศึกษา 500 คนสำหรับวิชา ST 203 เป็น G,P และ F สุ่มเลือกเกรดนักศึกษามา 1 คน จำนวนผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด มี 3 ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ o_1 = G,o_2 = P

และ o_3 = F ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ของ o_1, o_2, และ o_3 อาจประกอบด้วย G,P และ F หลาย ๆ ตัว หรืออาจจะไม่มีเลยก็ได้ แต่จำนวน G,P และ F รวมกันแล้วจะต้องเท่ากับ 500 หน่วย sample space เขียนได้เป็น

$$S = \{ G,P,F \}$$

ตัวอย่างที่ 6 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 100 ครั้ง ผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นหน้า 1,2,3,4,5 หรือ 6 หน้าใดหน้าหนึ่งมีอยู่ 6 ผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด แต่จำนวนครั้งหรือหน่วยที่ปรากฏแต่ละหน้ารวมกันจะต้องเท่ากับ 100 ครั้งหรือ หน่วย sample space เขียนได้เป็น

$$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

แต่ถ้าจะกล่าวว่า sample space ประกอบด้วยกี่หนทางที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดก็จะตอบได้ว่ามีจำนวน $(6)^{100}$ หนทาง

ตัวอย่างที่ 7 มีลูกบอลล์หมายเลข 1 ถึง 10 อยู่ 10 ลูกในกล่อง หยิบลูกบอลล์ 1 ลูก บันทึกหมายเลขไว้แล้วใส่กลับลงไปในกล่อง ทำอยู่อย่างนี้สามครั้ง เอาหมายเลขมาบวกกัน อย่างเช่นหยิบได้ 2,3 และ 7 รวม 2 + 3 + 7 = 12 ผลบวกของการหยิบสามครั้งที่มีค่าน้อยที่สุดคือ 1 + 1 + 1 = 3 และผลบวกของการหยิบสามครั้งที่มีค่ามากที่สุดคือ 10 + 10 + 10 = 30 ทำอย่างนี้ซ้ำ ๆ กัน 100 ครั้ง ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดคือ 3,4,5, ... 30 มีอยู่ 28 ผลลัพธ์ แต่ละผลลัพธ์อาจจะมีได้หลายครั้งหรือไม่มีเลย จำนวนครั้งที่เกิดขึ้นของแต่ละผลลัพธ์ รวมกันจะต้องเท่ากับ 100 ครั้งหรือหน่วย sample space เขียนได้เป็น

$$S = \{ 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots, 30\}$$

ประกอบด้วย 28 ผลลัพธ์ ที่อาจเป็นไปได้ หรือ $(28)^{100}$ หนทางที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด

6.5 ความน่าจะเป็นคืออะไร

การทดลองเชิงสุ่มและ sample space เป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็น แต่ถ้าจะถามว่าความน่าจะเป็นหมายความว่าอะไร ก็จะได้ตอบว่า "ความน่าจะเป็นหมายถึงตัวเลขที่ใช้เป็นมาตรการในการวัดหรือบอกโอกาสการเกิดของเหตุการณ์ว่าจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด จะต้องสอดคล้องตามคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ก. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ จะอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

ข. ผลบวกของความน่าจะเป็นทุกค่าของเหตุการณ์ใน sample space เท่ากับ 1

ค. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดจะมีความหมายก็ต่อเมื่อ

1. เหตุการณ์นั้นยังไม่เกิดขึ้นหรือการทดลองนั้นยังไม่แล้วเสร็จ

2. เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นแต่ยังไม่ทราบ ถ้าทราบแล้วหรือเกิดขึ้นแล้ว (เมื่อเสร็จสิ้นการทดลองและทราบผลลัพธ์แล้ว) เราจะไม่กล่าวเรื่องความน่าจะเป็นเพราะถ้าเกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นก็เป็น 1 ถ้าไม่เกิดก็เป็น 0

การรู้ความน่าจะเป็นไม่ได้หมายความว่าเราจะสามารถทำนายผลลัพธ์ของการทดลองเชิงสุ่มได้ นอกจากว่าความน่าจะเป็นมีค่าเท่ากับ 1 เท่านั้น ผลลัพธ์หนึ่งอาจจะมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดเท่ากับ 0.99 แต่ในการทดลองผลลัพธ์นี้อาจจะเกิดหรือไม่เกิดขึ้นก็ได้ การรู้ความน่าจะเป็นเพียงแต่ทำให้เราทราบโอกาสที่จะเกิดของผลลัพธ์ หนึ่ง ๆ และทำให้มีความรู้สึกถึงความมากน้อยแห่งความมั่นใจที่ผลลัพธ์นั้น ๆ จะเกิดขึ้น

6.5.1 การกำหนดความน่าจะเป็นโดยอาศัยตัวแบบการทดลอง

มีการทดลองเชิงสุ่มบางชนิดที่เราสามารถกำหนดค่าของความน่าจะเป็นให้แก่เหตุการณ์ต่าง ๆ ของการทดลองได้โดยใช้เงื่อนไขบางประการเกี่ยวกับตัวแบบการทดลอง อย่างเช่น

6.5.2 การทดลองโดยหยิบลูกบอลล์จากกล่อง ถ้าในกล่องมีลูกบอลล์อยู่ 4 ลูกเป็นลูกบอลล์สีขาว 2 ลูก ดำ 1 ลูก และ แดง 1 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลล์ออกมา 2 ลูกโดยสุ่มแบบไม่ใส่ลูกแรกกลับคืน- sample space ของผลลัพธ์ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเขียนได้เป็น

$$S = \{ WW, BW, WB, WR, RW, BR, RB \}$$

W แทนลูกบอลล์สีขาว B แทนลูกบอลล์สีดำและ R แทนลูกบอลล์สีแดง ในตัวอย่างนี้ยังอ้างไม่ได้ว่าความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ มีค่าเท่ากัน ทั้งนี้เพราะมีลูกบอลล์สีขาวมากกว่าสีอื่น ๆ โอกาสที่ได้ผลลัพธ์ BW มากกว่าโอกาสที่จะได้ BR ในการกำหนดความน่าจะเป็นให้แต่ละผลลัพธ์จะต้องพิจารณาลูกบอลล์ทั้ง 4 ลูกเป็น W_1, W_2, B_1R การหยิบลูกบอลล์ 2 ลูกจะมีหนทางทั้งสิ้น 12 หนทางด้วยกันคือ

$$W_1W_2 \quad W_2W_1 \quad W_1B \quad BW_1 \quad W_2B \quad BW_2 \quad W_1R \quad RW_1 \quad W_2R \quad RW_2 \quad BR \quad RB$$

เรากล่าวได้ว่า แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี 12 หนทางนี้จะลดลงเหลือเพียง 7 หนทาง ในกรณีที่บอลล์ขาวสองลูกเหมือนกันทุกประการ จนเราไม่สามารถแยกบอลล์ขาวสองลูกออกจากกันได้ ทั้งผลลัพธ์ W_1W_2 และ W_2W_1 ทำให้เกิดผลลัพธ์ที่ได้บอลล์ขาวสองลูกคือ WW ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ WW จึงเท่ากับ 2/12 ผลลัพธ์ W_1B และ W_2B ทำให้เกิดผลลัพธ์ WB ความน่าจะเป็นของ WB จึงเท่ากับ 2/12 ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ WR และ RW ต่างเท่ากับ 2/12 ส่วนความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ BR และ RB ต่างเท่ากับ 1/12 ดังนั้นความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ต่าง ๆ ใน S จึงเขียนได้เป็น

$P(WW) = 2/12$, $P(BW) = 2/12$ $P(WB) = 2/12$

$P(WR) = 2/12$ $P(RW) = 2/12$ $P(BR) = P(RB) = 1/12$

6.5.3 การหยิบลูกบอลล์จากกล่องแบบใส่กลับคืน ในกรณีนี้จะหยิบลูกบอลล์จากกล่อง 2 ลูกโดยสุ่มแต่เมื่อหยิบลูกแรกแล้วให้ใส่ลูกแรกกลับคืนลงไปในกล่อง แล้วกวนลูกบอลล์ให้เข้ากันดีจึงหยิบลูกที่ 2 sample space ของการทดลองเขียนได้เป็น

$$S = \{ WW, BW, WB, WR, RW, BR, RB, BB, RR \}$$

เรามาพิจารณาหนทางที่จะหยิบลูกบอลล์ 2 ลูกจากลูกบอลล์ 4 ลูก มีทั้งหมด 16 หนทางดังนี้

W_1W_1, W_1W_2, W_2W_1, W_2W_2, W_1B, BW_1, W_2B, BW_2

W_1R, RW_1, W_2R, RW_2, BR, RB, RR, BB

ผลลัพธ์ ทั้ง 16 หนทางนี้เกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน ถ้าลูกบอลล์สีขาวสองลูกมีลักษณะเหมือนกันทุกประการ ผลลัพธ์ทั้ง 16 หนทางนี้จะลดลงเหลือเพียง 9 หนทางเท่านั้น อย่างเช่น W_1W_1, W_1W_2, W_2W_1 และ W_2W_2 แทนด้วยผลลัพธ์ WW ในทำนองเดียวกัน W_1B และ W_2B แทนด้วย WB เราสามารถกำหนดความน่าจะเป็นให้แก่ทุกผลลัพธ์ ใน S ได้ดังนี้

$$P(WW) = \frac{4}{16} \ ; P(WB) = P(BW) = P(WR) = P(RW) = 2/16$$

$$P(BR) = P(RW) = P(BB) = P(RR) = 1/16$$

6.5.4 การทดลองโยนเหรียญ 3 อันพร้อมกัน ผลลัพธ์ของการทดลองที่จะเป็นไปได้มีอยู่ 8 หนทางด้วยกัน sample space เขียนได้เป็น

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

HTT หมายถึง ผลลัพธ์ที่เหรียญอันแรกออกเป็นหัว เหรียญอันที่ 2 ออกเป็นก้อย และเหรียญอันที่สามออกเป็นก้อย ในตัวอย่างนี้แต่ละผลลัพธ์ มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ จึงเท่ากับ 1/8

6.5.5 การทดลองดึงไพ่ 1 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี 52 หนทาง sample space ของการทดลองนี้คือ (ก่อนดึงไพ่ได้มีการสับไพ่เป็นอย่างดี)

$$S = \{ \spadesuit\ A,K,Q,J,\ 10,9,8,7,6,5,4,3,2,$$
$$\heartsuit\ A,K,Q,J,\ 10,9,8,7,6,5,4,3,2,$$
$$\diamondsuit\ A,K,Q,J,\ 10,9,8,7,6,5,4,3,2,$$
$$\clubsuit\ A,K,Q,J,\ 10,9,8,7,6,5,4,3,2 \}$$

ผลลัพธ์หนึ่ง ๆ จะมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์เท่ากับ 1/52

ถ้าการทดลองเชิงสุ่มหนึ่งประกอบด้วยผลลัพธ์ทั้งหมด K หนทาง เกิดขึ้นได้ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน 1/K จากการทดลองนี้ เหตุการณ์ A ประกอบด้วย r หนทาง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนได้เป็น

$$P(A) = r/K$$

วิธีการประเมิน P (A) กล่าวได้ดังนี้

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนหนทางที่สามารถเกิดขึ้นแก่ A ในการทดลอง}}{\text{จำนวนหนทางทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้นในการทดลอง}}$$

สูตรนี้ใช้ได้ในกรณีที่ผลลัพธ์ทั้งหมดมีโอกาสหรือหนทางเกิดขึ้นเท่า ๆ กันเท่านั้น

ตัวอย่าง 1. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นในการดึงไพ่ใบหนึ่งเป็นสีดำโดยสุ่มจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งสับกันดีแล้ว

การทดลองคือการดึงไพ่ใบหนึ่ง ดังนั้นการทดลองมี 52 ผลลัพธ์ แต่ละผลลัพธ์ มีโอกาสได้รับเลือกเท่า ๆ กัน และเป็น mutually exclusive เหตุการณ์ที่เราสนใจคือการดึงไพ่สีดำหนึ่งใบ ในสำรับหนึ่งมีไพ่สีดำ 26 ใบ ดังนั้นจำนวนผลลัพธ์ที่ต้องการที่เกิดขึ้นแก่เหตุการณ์มี 26 ผลลัพธ์ ด้วยเหตุนี้

$$P(\text{ไพ่สีดำ 1 ใบ}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

6.6 เหตุการณ์และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

เมื่อมีการทดลองเชิงสุ่มซึ่งมี sample space S ก็จะมีเหตุการณ์หนึ่ง ๆ เกิดขึ้นในการทดลองเชิงสุ่มซึ่งเป็นเซ็ทใด ๆ ของผลลัพธ์ ที่เป็นเซ็ทย่อยของ S ซึ่งแทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษ A, B, C,..... เซ็ทย่อยใดที่มีเพียงผลลัพธ์เดียวก็ถือว่าเป็นเหตุการณ์ด้วยแต่เป็นเหตุการณ์ธรรมดาเหตุการณ์ที่เป็นเซ็ทประกอบด้วยผลลัพธ์มากกว่าหนึ่ง เรียกว่าเหตุการณ์ประกอบ

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เท่ากับผลของความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ของเหตุการณ์นั้น ๆ ถ้า A เป็นเหตุการณ์เราแทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ด้วย P(A) ในเมื่อ A เป็นเซทย่อยของ S เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้น หากผลลัพธ์ o_i อยู่ในเซทของ A ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เท่ากับ $P(A) = \sum_{o_i \in A} P(o_i)$

ตัวอย่าง 1 โยนเหรียญ 3 อันที่สมดุลหนึ่งครั้งให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ปรากฏเป็นหัวสองครั้ง และ B เป็นเหตุการณ์ที่ปรากฏเป็นหัวครั้งแรก จะคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งสอง

วิธีทำ sample space ของการทดลองเขียนได้เป็น

$$S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

แต่ละผลลัพธ์ มีความน่าจะเป็น 1/8 เซ็ทแสดงเหตุการณ์ A และ B เขียนได้

$$A = \{ HHT, HTH, THH \}, \quad B = \{ HHH, HHT, HTH, HTT \}$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และ B คำนวณหาได้

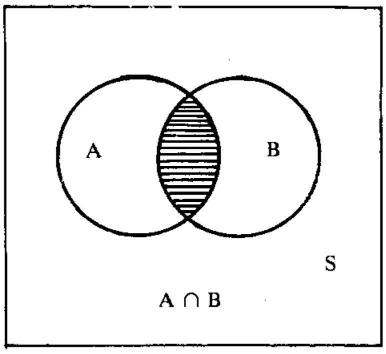
$$P(A) = \sum_{0_i \in A} p(0_i) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}$$ ตอบ

$$P(B) = \sum_{0_i \in A} p(0_i) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{4}{8}$$ ตอบ

6.7 การเกิดร่วมกันของสองเหตุการณ์

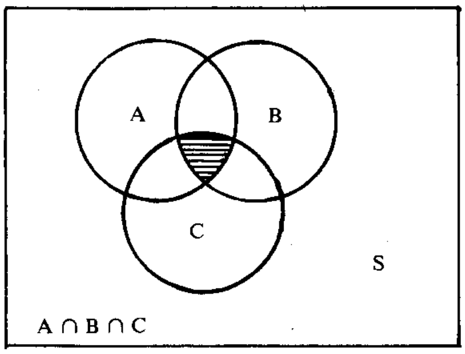
จะเห็นได้ว่าการทดลองเชิงสุ่มสิ้นสุดด้วยการเกิดเป็นผลลัพธ์เดี่ยว ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดใน sample space แต่การเกิดขึ้นของผลลัพธ์หนึ่ง ๆ อาจทำให้เกิดเหตุการณ์มากกว่าหนึ่ง พิจารณาเหตุการณ์ A และ B ของตัวอย่างข้างต้น ผลลัพธ์ HHT, HTH, ทำให้เหตุการณ์ A เกิดขึ้น (เป็นผลลัพธ์ของ A) และยังทำให้เหตุการณ์ B มากขึ้นด้วย (เป็นผลลัพธ์ของ B) ดังนั้น HHT, HTH จะทำให้เหตุการณ์ A และ B เกิดร่วมกันในการทดลองนี้ เซ็ทของผลลัพธ์ ที่เป็นเซ็ทร่วมของ A และ B เขียนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$

แผนภาพแสดง $A \cap B$



รูปที่ 6.1

แผนภาพแสดง $A \cap B \cap C$



รูปที่ 6.2

$A \cap B = \{HHT, HTH\}$

เราแทนความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของ A และ B ด้วย $P(A \cap B)$ หรือ $P(AB)$ มีค่าเท่ากับ 2/8

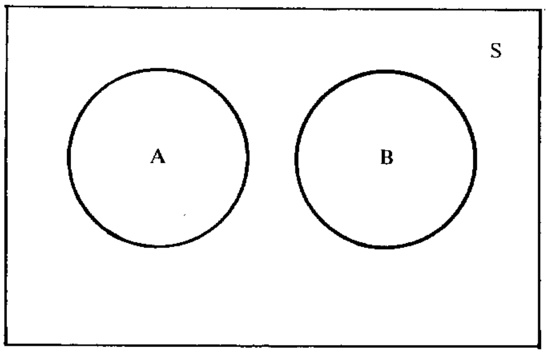
ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์ เซ็ทของผลลัพธ์ที่เป็นเซ็ทร่วมของ A, B, C เรียกว่าเซ็ทของ intersection ของ A, B, C เขียนได้เป็น $A \cap B \cap C$ ดูรูปที่ 6.2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A \cap B \cap C$ เขียนได้เป็น $P(A \cap B \cap C)$

ทฤษฎี 6.1 ถ้า $\varnothing$ เป็นเซ็ทว่างเปล่าแล้ว $P(\varnothing) = 0$ เราพิสูจน์ได้โดยให้เหตุการณ์ A ใด ๆ เขียนได้เป็น $A = A \cup \varnothing$ เนื่องจากว่า A และ $\varnothing$ ไม่มีผลลัพธ์ร่วมกันเลย ดังนั้น

$$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$$

$$\therefore P(\varnothing) = 0$$

ทฤษฎี 6.2 ถ้าหากว่าเหตุการณ์ A และ B ไม่มีผลลัพธ์ร่วมกันเลย ดังเช่น $A \cap B = \varnothing$ เป็นเซ็ทว่างเปล่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive กัน ดังนั้น $P(A \cap B) = 0$ แผนภาพที่แสดงให้เห็น A และ B ที่เป็น mutually exclusive เขียนได้เป็น



รูปที่ 6.3

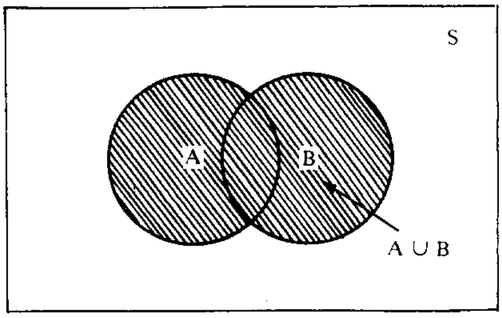
หมายเหตุ $\varnothing$ เป็นเซ็ทย่อยของ S และเป็นเซ็ทที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย $P(\varnothing) = 0$

เหตุการณ์ A หรือ B ถ้า A, B เป็นเหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่มซึ่งมี sample space S การใช้คำว่า "หรือ" อย่างเช่น A หรือ B มีได้สองรูปด้วยกัน

1. ในความหมายอย่างเดียว ซึ่งมีความหมายว่า A หรือ B แต่ไม่ใช่ทั้งสองอย่าง เช่น โยนเหรียญหนึ่งอันให้ปรากฏ "หัวหรือก้อย" อย่างใดอย่างหนึ่ง

2. ในความหมายสองอย่างซึ่งมีความหมายว่า A หรือ B หรือทั้งสองอย่าง เช่น ผมอาจจะไปเที่ยวประเทศฝรั่งเศสหรือเยอรมันในภาคฤดูร้อนนี้

เราใช้สัญลักษณ์ $A \cup B$ อ่านว่า A union B แผนภาพเขียนได้เป็น



รูปที่ 6.4

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่ม เซ็ทของผลลัพธ์ที่อยู่ใน S แต่อยู่นอก A เรียกว่า complement ของ A เขียนได้เป็น A'

ทฤษฎี 6.3 ถ้า A' **เป็นเหตุการณ์ที่** A **ไม่เกิด** (Complement event of A) แล้ว

$$P(A) = 1 - P(A')$$

พิสูจน์ เราอาจเขียนได้ $S = A \cup A'$ และคำนวณหาความน่าจะเป็นได้

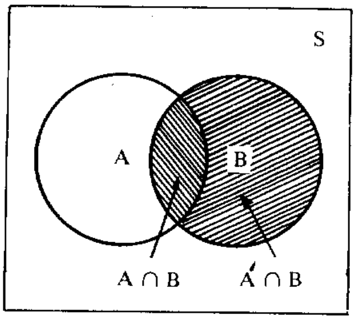
$$P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A')$$

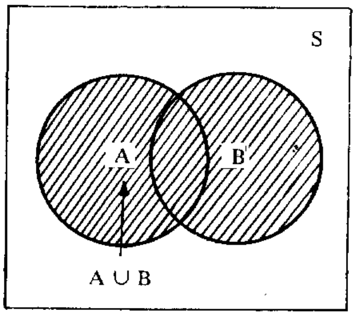
$$P(A) = 1 - P(A')$$

ทฤษฎี 6.4 ถ้า A และ B เป็นสองเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



รูปที่ 6.5



รูปที่ 6.6

พิสูจน์ จาก

$$A \cup B = A \cup (B \cap A')$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap A')$$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A')$ ....(1)

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A')$ ....(2)

(1) − (2)

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ทฤษฎี 6.5 ถ้า A, B และ C เป็นสามเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

พิสูจน์ $A \cup B \cup C$ เขียนเสียใหม่ได้เป็น $(A \cup B) \cup C$

$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C]$

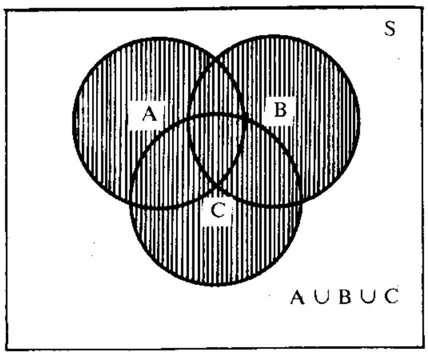
$= P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$ ....(1)

แต่ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$P[(A \cup B) \cap C] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$ ....(2)

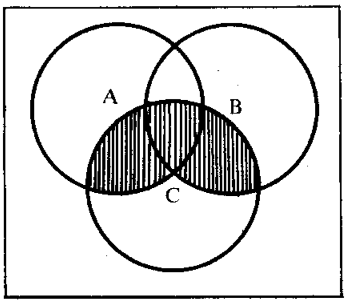
แทนค่าสมการ (2) ลงในสมการ (1) จะได้

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\quad + P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\
&\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$



รูปที่ 6.8

เราอาจจะขยายกฎแห่งการบวกออกไปได้ ในกรณีที่มีเหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots A_k$) ของการทดลองเชิงสุ่มความน่าจะเป็น



รูปที่ 6.7

$$
P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{K} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{K} P(A_i \cap A_j)
$$

$$
+ \sum_{i<j<r=3}^{K} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_k)
$$

ทฤษฎี 6.6 ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \leqslant P(B)$

พิสูจน์ เราอาจจะจำแนก B เป็นสองเหตุการณ์ที่ไม่มีผลลัพธ์เกิดร่วมกันได้ดังนี้ $B = A \cup (B \cap A')$ ดังนั้น $P(B) = P(A) + P(B \cap A') \geqslant P(A)$

เนื่องจากว่า $P(B \cap A') \geqslant 0$

ตัวอย่างที่ 6.7.1 การทดลองโยนลูกเต๋า 2 ลูก ลูกหนึ่งสีแดง (r) และอีกลูกหนึ่งสีเขียว (g) sample space คือ

$$S = \{ (r, g) : 1 \leqslant r \leqslant 6, 1 \leqslant g \leqslant 6 \}$$

หรือเขียนได้เป็น

หนทางของลูกเต๋าสีเขียว (g)

หนทางของลูกเต๋าสีแดง (r)	r \ g	1	2	3	4	5	6
	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ตารางที่ 6.1

(1) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นของ $P(g = r)$

(2) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นของ $P(g \geqslant r + 3)$

(3) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นของ $P(r + g = 10)$

วิธีทำ sample space ประกอบด้วยหนทาง 36 หนทางที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดด้วยกัน แต่ละหนทางจะมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/36

(1) เซ็ท $g = r$ ประกอบด้วย (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $g = r$ จะเท่ากับ

$$P(g = r) = \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ ตอบ}$$

(2) เซ็ทของเหตุการณ์ $g \geqslant r + 3$ ประกอบด้วย (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 6)
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $g \geqslant r + 3$ จะเท่ากับ

$$P(g \geqslant r + 3) = \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ ตอบ}$$

(3) เซ็ทของเหตุการณ์ $g + r = 10$ ประกอบด้วย (4, 6), (5, 5), (6, 4)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $g + r = 10$ จะเท่ากับ

$$P(g + r = 10) = \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.7.2 จากโจทย์ของตัวอย่าง 6.7.1 จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ $r \leqslant 3$ หรือ $g \leqslant 2$

วิธีทำ สำหรับ หนทาง $r \leqslant 3$ แสดงว่าลูกเต๋าสีแดงต้องปรากฏหน้า 1 หรือ 2 หรือ 3 อย่างใดอย่างหนึ่ง เราให้เป็นเซ็ท A ซึ่งมีจำนวนหนทาง 18 หนทาง ในสามแถวแรกของตาราง 6.1 สำหรับ $g \leqslant 2$ แสดงว่าลูกเต๋าสีเขียวปรากฏหน้า 1 หรือ 2 อย่างใดอย่างหนึ่ง เราให้เป็นเซ็ท B ซึ่งมีจำนวนหนทาง 12 หนทาง ในสองคอลัมน์แรก จำนวนหนทางใน union ของ A กับ B ที่สัมพันธ์กับเหตุการณ์ $r \leqslant 3$ หรือ $g \leqslant 2$ การคำนวณหาจำนวนหนทางใน $A \cup B$ เราไม่ต้องเอาจำนวนหนทางใน A กับ B มารวมกัน เพราะว่ามีอยู่ 6 หนทาง

ในเซ็ททั้งสองที่เราจะนับซ้ำกันไม่ได้ จำนวนหนทางที่ถูกต้องใน $A \cup B$ คือ

$$18 + 12 - 6 = 24 \qquad \text{.........(1)}$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นของ $r \leqslant 3$ หรือ $g \leqslant 2$ คือ $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

เราสังเกตว่าการคำนวณข้างต้น จำนวน 18 หนทาง ใน A 12 หนทาง ใน B และ 6 หนทาง ใน $A \cap B$ หารสมการ (1) ด้วย 36 เราได้

$$\frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} \qquad \text{..........(2)}$$

ด้วยเหตุนี้เราอาจกล่าวได้ว่า

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \qquad \text{.........(3)}$$

สำหรับ $P(A) = \frac{18}{36}, P(B) = \frac{12}{36}, P(A \cap B) = \frac{6}{36}, P(A \cup B) = \frac{24}{36}$

ตัวอย่างที่ 6.7.3 จากโจทย์ของตัวอย่างที่ 6.7.1 จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ผลบวก $r + g$ เป็น 7 หรือ 10

วิธีทำ มีจำนวน 6 หนทาง ที่ $r + g = 7$และ3 หนทาง ที่ $r + g = 10$ เนื่องจากว่าเซ็ททั้งสองไม่มีหนทางเกิดร่วมกันหรือเป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive มีจำนวนหนทางรวมกัน 9 หนทาง ดังนั้น ความน่าจะเป็นคือ $\frac{9}{36}$ หรือ $\frac{1}{4}$

ในรูปของเซ็ท ถ้า A เป็นเซ็ทของ $r + g = 7$ และ B เป็นเซ็ทของ $r + g = 10$ แล้วเราได้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36}$$ **ตอบ**

6.8 ความเป็นอิสระกันของเหตุการณ์

เมื่อไรที่เรากล่าวถึงสองเหตุการณ์ซึ่งไม่มีอะไรเลยที่จะกระทำซึ่งกันและกัน เราเรียกว่า "เหตุการณ์มีความอิสระกัน"

ตัวอย่าง 6.8.1 จากโจทย์ของตัวอย่างที่ 6.7.1 จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ $r \leqslant 3$ และ $g \geqslant 5$

วิธีทำ เหตุการณ์ที่เราต้องการคือว่าสองเงื่อนไขต้องเป็นไปพร้อม ๆ กัน ถ้า A เป็นเซ็ทของหนทาง ที่ $r \leqslant 3$ และ B เป็นเซ็ทที่ $g \geqslant 5$ แล้วเราต้องการที่จะทราบจำนวนหนทางที่เซ็ทเหล่านี้มีหนทางร่วมกัน $A \cap B$ 6 หนทาง ในสามแถวแรกกับสองคอลัมน์สุดท้ายของตารางที่ 6.1 ดังนั้น เราได้

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

โดยการคำนวณเราพบว่า

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

เนื่องจากว่า A มี 18 หนทาง และ B มี 12 หนทาง จากความน่าจะเป็นเหล่านี้ เราพิสูจน์ได้ว่า (สำหรับตัวอย่างนี้)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \text{.........(1)}$$

สูตรของผลคูณสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้ พิจารณาอนุกรมที่ยาวมาก ๆ ของการทอดลูกเต๋าสองลูก เราคาดหวังที่จะคำนวณหา $r \leqslant 3$ คือประมาณครึ่งหนึ่งของการทอดทั้งหมดให้เราติดตามครึ่งหนึ่งนี้ของการทอดทั้งหมด และจำนวนกี่ครั้งที่ $g \geqslant 5$ ของการทอดทั้งหมดเนื่องจากว่าผลที่เกิดขึ้นของลูกเต๋าสีแดงไม่มีผลต่อลูกเต๋าสีเขียว ซึ่งพอจะชี้แจงได้ว่าประมาณ 1/3 ของการทอดทั้งหมดที่ $r \leqslant 3$ และ $g \geqslant 5$ ด้วยเหตุนี้เศษส่วนของการทอดที่ทั้ง $r \leqslant 3$ และ $g \geqslant 5$ ประมาณ 1/3 ของ 1/2 หรือ 1/6

โดยทั่ว ๆ ไปสูตร (1) ไม่เป็นจริง จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อเหตุการณ์ A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่มีความอิสระกัน หมายความว่าการตกของลูกเต๋าสีแดงมีความอิสระกันกับการตกของลูกเต๋าสีเขียวหรือการตกของลูกเต๋าสีแดงไม่ได้ทำให้การตกของลูกเต๋าสีเขียว ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้น คำนวณหาได้ด้วยการคูณของความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ดังตัวอย่าง

คำจำกัดความของความอิสระของเหตุการณ์

เหตุการณ์ A และ B มีความอิสระก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad \text{.........(1)}$$

จากคำจำกัดความข้างต้นก็ให้ความหมายที่ชัดเจนสำหรับเหตุการณ์ที่มีความอิสระกัน ถ้าหากสองเหตุการณ์ A และ B ไม่สอดคล้องตามสมการ (1) เหตุการณ์เหล่านั้นก็ไม่มีความอิสระกัน

ทฤษฎีที่ 6.8.1 ถ้าหาก A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระกันที่มีความน่าจะเป็นไม่เป็นศูนย์แล้วเซ็ท A และ B มีหนึ่งหนทางร่วม

พิสูจน์ ให้ $\varnothing$ แทนเซ็ทว่างเปล่า ไม่ว่า $A \cap B = \varnothing$ หรือ $A \cap B \neq \varnothing$ อย่างใดอย่างหนึ่ง หาก $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $P(A \cap B) = \varnothing$ และจาก (1) พบว่า $P(A) \neq 0$ หรือ $P(B) = 0$ เนื่องจากว่านี้ตรงกันข้ามกับสมมติของทฤษฎีซึ่งพบว่า $A \cap B \neq \varnothing$

ตัวอย่าง 6.8.1

โยนเหรียญสองอัน จงแสดงว่าเหตุการณ์ "ที่เหรียญอันแรกปรากฏเป็นหัว" กับ เหตุการณ์ "ที่เหรียญทั้งสองปรากฏหน้าเหมือนกัน" มีความอิสระกัน

วิธีทำ sample space ของการทดลอง คือ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ให้เหตุการณ์ A เป็นเหตุการณ์ "ที่เหรียญอันแรกปรากฏเป็นหัว" และเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์ "ที่เหรียญทั้งสองปรากฏหน้าเหมือนกัน" เนื่องจากว่าสี่หนทางใน S มีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน คือ เท่ากับ 1/4 เพราะฉะนั้นเราได้

$$A = \{HH, HT\}, \quad P(A) = 2/4 = 1/2$$

$$B = \{HH, TT\}, \quad P(B) = 2/4 = 1/2$$

$$A \cap B = \{HH\} \quad P(A \cap B) = 1/4$$

ด้วยเหตุนี้

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

และเหตุการณ์ A และ B มีความอิสระกันตามคำจำกัดความ

ตัวอย่างที่ 6.8.2

สมมติว่าสำนักงานหนึ่งมีเครื่องคิดเลขอยู่ 100 เครื่อง บางเครื่องเป็นชนิดไฟฟ้า (E) ขณะที่เครื่องอื่น ๆ เป็นเครื่องกล (M) บางเครื่องใหม่ (N) บางเครื่องเก่า (U) ดังตารางที่ 6.2 พนักงานคนหนึ่งเข้าไปในสำนักงานหยิบเครื่องคิดเลขโดยสุ่ม จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่เครื่องนั้นเป็นเครื่องคิดเลขไฟฟ้าและใหม่

	E	M	
N	42	28	70
U	18	12	30
	60	40	100

ตารางที่ 6.2

วิธีทำ

จากตารางที่ 6.2 ความสัมพันธ์ไม่ปรากฏให้เห็นอย่างเช่น 60 เปอร์เซ็นต์ของเครื่องคิดเลขทั้งหมดเป็นเครื่องคิดเลขไฟฟ้า ในทำนองเดียวกัน 70 เปอร์เซ็นต์ ของเครื่องคิดเลขทั้งหมดเป็นเครื่องคิดเลขใหม่ ด้วยเหตุนี้ไม่มีอะไรแสดงให้เห็นว่าลักษณะแสดงออก "ว่าใหม่" กับเป็น "เครื่องไฟฟ้า" มีความเกี่ยวข้องซึ่งกันและกัน นั่นคือ $P(E) = \frac{60}{100}$ และ $P(N) = \frac{70}{100}$

$P(E \cap N) = \frac{42}{100}$ ดังนั้น

$$P(E \cap N) = P(E)\,P(N)$$

ให้เราพิจารณาสามเหตุการณ์ A, B และ C ของการทดลองหนึ่ง หาก A และ B, A และ C, B และ C เป็น pairwise independent ดังความหมายข้างต้นแล้ว โดยทั่ว ๆ ไปจะไม่มีความอิสระคงอยู่ระหว่างสามเหตุการณ์ A, B และ C ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 6.8.3

ทอดลูกเต๋าสองลูก ให้เหตุการณ์ A, B และ C เป็นดังนี้

A = ลูกเต๋าลูกแรกปรากฏหน้าคู่

B = ลูกเต๋าลูกที่สองปรากฏหน้าคี่

C = ลูกเต๋าสองลูกปรากฏหน้าคี่ทั้งสองลูกหรือหน้าคู่ทั้งสองลูก

จากเหตุการณ์ทั้งสามเราได้ $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ นอกจากนั้น $P(A \cap B) = P(A \cap C)$ $= P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ ด้วยเหตุนี้สามเหตุการณ์เป็น pairwise independent อย่างไรก็ตาม $P(A \cap B \cap C)$ $= 0 \neq P(A)\,P(B)\,P(C)$

จากตัวอย่างนี้นำไปสู่คำจำกัดความต่อไปนี้

คำจำกัดความที่ 6.8.1 สามเหตุการณ์ A, B และ C มีความอิสระกันต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B), \qquad P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C), \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

เราขยายความคิดนี้ไปจนถึง n เหตุการณ์ในคำจำกัดความต่อไปนี้

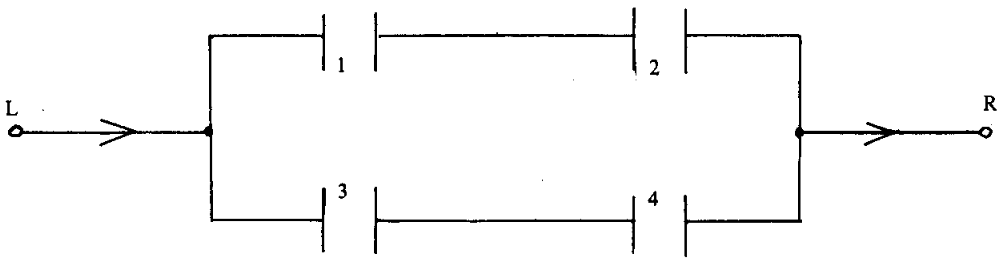
คำจำกัดความที่ 6.8.2 เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$ มีความอิสระกันก็ต่อเมื่อเรามี

$k = 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n$

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})\,P(A_{i2}) \ldots\ldots\ldots P(A_{ik})$$

มีเงื่อนไขทั้งหมด $2^n - n - 1$ ข้อ

ตัวอย่างที่ 6.8.4



รูปที่ 6.8

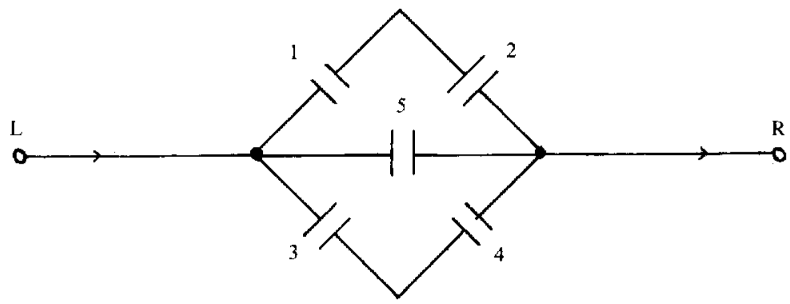
วิธีทำ

จากรูป 6.8 ความน่าจะเป็นของแต่ละ relay ของวงจรจะปิดมีค่าเท่ากับ p หาก relays ทั้งหมดทำหน้าที่อิสระกัน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่กระแสคงอยู่ระหว่างปลาย L กับ R ว่าเป็นเท่าไร

ให้ A_i แทนเหตุการณ์ (relay i ปิด) $i = 1, 2, 3, 4$ ให้ E แทนเหตุการณ์ (กระแสไหลจาก L ไป R) ดังนั้น $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$ เหตุการณ์

$A_1 \cap A_2$ กับ $A_3 \cap A_4$ ไม่ได้เป็น mutually exclusive ด้วยเหตุนี้

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= P(A_1)\,P(A_2) + P(A_3)\,P(A_4) - P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4) \\
&= p \times p + p \times p - p \times p \times p \times p \\
&= p^2 + p^2 - p^4 \\
&= 2p^2 - p^4
\end{aligned}
$$



รูปที่ 6.9

ตัวอย่างที่ 6.8.5

จากรูป 6.9 ความน่าจะเป็นที่แต่ละ relay ปิดเป็น p และ relays ทั้งหมดทำหน้าที่อิสระกัน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่กระแสคงอยู่ระหว่างขั้ว L กับ R

วิธีทำ ใช้แนวความคิดแบบเดียวกันกับตัวอย่างที่ 6.8.4 เราได้

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_5) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_5 \cap A_3 \cap A_4) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\
&= P(A_1)\,P(A_2) + P(A_5) + P(A_3)\,P(A_4) - P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_5) \\
&\quad - P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,P(A_4) - P(A_5)\,P(A_3)\,P(A_4) + P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) \\
&\qquad P(A_4)\,P(A_5) \\
&= p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 \\
&= p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัดที่ 6.1

1. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งปรากฏหน้าเป็นสองเท่าของหน้าลูกเต๋าอีกลูกหนึ่ง (1/6)

2. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าสีเขียวปรากฏหน้าน้อยกว่า 3 และลูกเต๋าสีแดงปรากฏหน้ามากกว่า 3 (1/6)

3. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นในการทอดลูกเต๋าสีแดงหนึ่งลูกกับสีเขียวหนึ่งลูก

   ก) $P(r + g = 6)$ ข) $P(r + g = 8)$ ค) $P(r + g < 5)$

   ง) $P(r + g > 9)$ จ) $P(r > g + 4)$ ฉ) $P(r > g)$

   ช) $P(r \neq g)$ ญ) $P(r = g^2)$

   (5/36, 5/36, 1/6, 1/6, 1/36, 5/12, 5/6, 1/18)

4. เครื่องจักร A และ B ทำงานอิสระกัน แต่ละเครื่องอาจเสียแต่ละวันดังตารางต่อไปนี้

จำนวนครั้งที่เสีย	0	1	2	3	4	5	6
A	0.1	0.2	0.3	0.2	0.09	0.07	0.04
B	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15

   จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่

   ก) A และ B เสียเท่ากัน (.1255)

   ข) จำนวนครั้งที่เสียทั้งหมดน้อยกว่า 4; น้อยกว่า 5 (สองคำถาม) (.34), (0.447)

   ค) A เสียมากกว่า B (0.417)

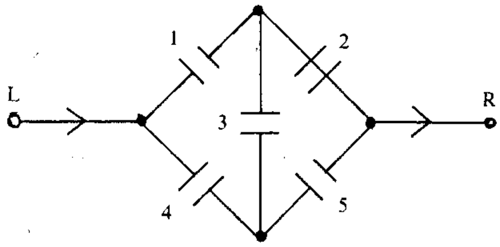
   ง) B เสียเป็นสองเท่าของ A (0.08)

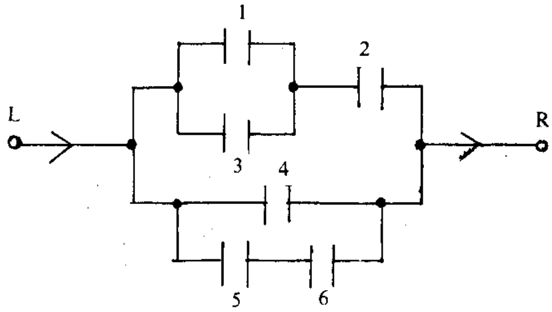
   จ) B เสีย 4 ครั้ง (0.1)

   ฉ) จำนวนครั้งที่เสียน้อยที่สุดของเครื่องจักรทั้งสองเป็น 3, มากกว่า 3 (สองคำถาม) (0.78; 0.72)

   ช) จำนวนครั้งที่เสียมากที่สุดของเครื่องจักรทั้งสองเป็น 3; มากกว่า 3 (0.28, 0.72)

5. สมมติว่าความน่าจะเป็นของแต่ละ relay จะปิดเป็น P และแต่ละ relay เปิดหรือปิดอิสระกันดังรูป ก. และ ข. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่กระแสไหลจาก L ไปยัง R ของแต่ละรูป





((ก) $2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$ (ข) $p + 3p^2 - 4p^3 - p^4 + 3p^5 - p^6$)

6. ถ้าเราสุ่มเลือกคน 3 คน ในชั้น จงคำนวณหาความน่าจะเป็น
   ก) ที่ทั้งสามคนเกิดวันศุกร์ (1/343)
   ข) ที่สองคนเกิดวันศุกร์และอีกหนึ่งคนเกิดวันอังคาร (3/343)
   ค) ที่ทั้งสามคนไม่ได้เกิดวันจันทร์ (216/343)
7. ให้ p เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นในการทดลองหนึ่ง จงแสดงว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นในแต่ละครั้งของ n การทดลองที่อิสระกันเป็น p^n
8. หาก p เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดในการทดลองหนึ่ง จงแสดงว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นอย่างน้อยหนึ่งครั้งในการทดลอง n ครั้งที่อิสระกันเป็น $1 - (1-p)^n$
9. ความน่าจะเป็นที่ นาย ก. กับ นาย ข. จะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า เป็น 0.025 และ 0.030 จงคำนวณหาความน่าจะเป็น
   ก) ที่ทั้ง นาย ก. และ นาย ข. จะตายภายใน 20 ปีข้างหน้า (0.00075)
   ข) ที่ นาย ก. จะตาย และ นาย ข. จะไม่ตาย (0.02425)
   ค) ที่ นาย ก. และ นาย ข. จะไม่ตาย (0.94575)
10. ตัวจักรหนึ่งมีส่วนประกอบ 3 ส่วน C_1, C_2 และ C_3 วางอยู่ในรูปอนุกรม (ในรูปเส้นตรง) สมมติว่าตัวจักรนี้จัดเรียงโดยสุ่มให้ R เป็นเหตุการณ์ {C_2 อยู่ทางขวาของ C_1} และให้ S เป็นเหตุการณ์ {C_3 อยู่ทางขวาของ C_1} อยากทราบว่าเหตุการณ์ R และ S มีความอิสระกันหรือ? ทำไม?

6.9 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

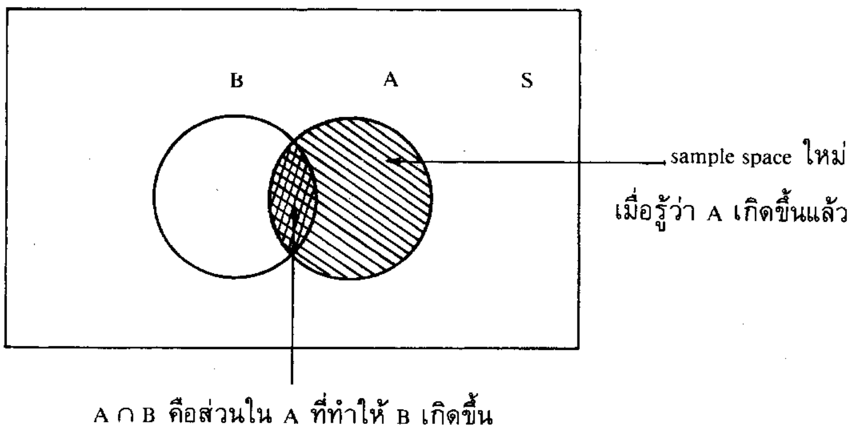
ให้เราพิจารณาความแตกต่างระหว่างการหยิบลูกบอลโดยสุ่มจากกล่องใบหนึ่งแบบหยิบแล้วใส่คืนหรือหยิบแล้วไม่ใส่คืน อย่างเช่น กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 80 ลูก และสีแดง 20 ลูก สมมติว่าเราหยิบลูกบอลสองลูกจากกล่องนี้ (ก) แบบหยิบแล้วใส่คืน (ข) แบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน (ในที่นี้หยิบครั้งละหนึ่งลูก) ให้

A = {บอลลูกแรกเป็นสีแดง}　　　B = {บอลลูกที่สองเป็นสีแดง}

ถ้าหากเราหยิบแล้วใส่คืน $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ สำหรับแต่ละครั้งเราหยิบจากกล่องมีลูกบอลสีแดง 20 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 100 ลูก อย่างไรก็ตาม หากเราหยิบแล้วไม่ใส่คืนผลจะไม่เท่ากัน แน่ละเราได้ $P(A) = \frac{1}{5}$ แต่ $P(B)$ จะเป็นเท่าไร ก่อนที่จะคำนวณ $P(B)$ เราควรทราบถึงส่วนประกอบของกล่องขณะที่หยิบลูกที่สอง นั่นคือ เราควรจะทราบว่า A ได้เกิดขึ้นหรือไม่ได้เกิดขึ้น ตัวอย่างนี้ต้องการเสนอแนะแนวความคิดที่สำคัญต่อไปนี้

ให้ A และ B เป็นสองเหตุการณ์สัมพันธ์กับการทดลอง เราให้ $P(B/A)$ เป็นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B กำหนดให้ A ได้เกิดขึ้นแล้วในตัวอย่างข้างต้น $P(B/A) = \frac{19}{99}$ (สำหรับ A ได้เกิดขึ้นแล้ว) การหยิบบอลครั้งที่สองมีบอลเหลืออยู่ในกล่อง 99 ลูก 19 ลูกเป็นบอลสีแดง

เมื่อไรเราคำนวณ $P(B/A)$ เราจำเป็นต้องคำนวณ $P(B)$ เทียบกับ sample space ที่เป็นเซ็ทของ A ไม่ใช่เทียบกับ sample space S นั่นคือ เมื่อรู้ว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เราถือเสมือนว่า A เป็น sample space ใหม่ของการทดลอง ความน่าจะเป็นของ B คำนวณโดยใช้ sample space ใหม่เป็นพื้นฐาน นั่นคือ ความน่าจะเป็นของ B ภายใต้เงื่อนไขของเหตุการณ์ A



รูปที่ 6.10

ก่อนที่จะให้คำจำกัดความ P(B/A) ลงไปก็ขอทำความเข้าใจความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข โดยพิจารณาตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 6.9.1

ทอดลูกเต๋าที่สมดุลสองลูก หนทางเขียนได้ เป็น (X_1,X_2) ในเมื่อ X_i เป็นหนทางของลูกเต๋าลูกที่ i $i = 1,2$ ดังนั้น sample space S ประกอบด้วย 36 หนทาง ที่มีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1) & (1,2)\ldots\ldots\ldots\ldots & (1,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (6,1) & (6,2)\ldots\ldots\ldots\ldots & (6,6) \end{array} \right\}$$

พิจารณาสองเหตุการณ์

$$A = \{ (X_1,X_2) \mid X_1 + X_2 = 10 \} \qquad B = \{ (X_1,X_2) \mid X_1 > X_2 \}$$

ด้วยเหตุนี้ $A = \{ (5,5), (4,6), (6,4) \}$ และ $B = \{ (2,1), (3,1), (3,2)..(6,5) \}$

เพราะฉะนั้น $P(A) = \dfrac{3}{36}$ และ $P(B) = \dfrac{15}{36}$ และ $P(B/A) = \dfrac{1}{3}$

เนื่องจากว่า sample space ประกอบด้วยหนทาง ของ A (มี 3 หนทาง) และมีหนึ่งหนทางจากสามหนทางเท่านั้นเป็นส่วนประกอบของเหตุการณ์ B ในทำนองเดียวกันเราอาจคำนวณ $P(A/B) = \dfrac{1}{15}$

ให้เราคำนวณ $P(A \cap B)$ มีหนึ่งหนทางเท่านั้นที่เหตุการณ์ $A \cap B$ เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อผลบวกของลูกเต๋าสองลูกเป็น 10 และลูกเต๋าลูกแรกปรากฏหน้ามีค่ามากกว่าลูกที่สอง ด้วยเหตุนี้ $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$ ถ้าเราสังเกตจำนวนตัวเลขต่าง ๆ ด้วยความระมัดระวังในกาลระยะยาวแล้วเราคำนวณดังข้างต้นเราจะได้ดังนี้

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{และ} \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้ไม่ได้เพียงเกิดขึ้นในตัวอย่างเฉพาะที่ยกขึ้นพิจารณานี้ มันเป็นหลักทั่ว ๆ ไปที่จะเป็นแนวทางให้เรานิยามความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

คำจำกัดความ 6.9.1

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{โดยให้ } P(A) > 0 \qquad (1)$$

ข้อสังเกต สูตรข้างต้นไม่ได้เป็นทฤษฎีเพราะเราไม่ได้พิสูจน์เลย เราเพียงเสนอแนะความเข้าใจความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและทำคำจำกัดความให้มีความหมายตามความเข้าใจนี้

คุณสมบัติของ $P(B/A)$ เมื่อ A คงที่ มีดังนี้

(1) $0 \leq P(B/A) \leq 1$

(2) $P(S/A) = 1$

(3) $P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A)$ ถ้า $B_1 \cap B_2 = \varnothing$

(4) $P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) + \ldots$ ถ้า $B_i \cap B_j = \varnothing$ สำหรับ $i \neq j$

(5) ถ้า $A = S$, $P(B/S) = P(B \cap S) / P(S) = P(B)$

ด้วยเหตุนี้เรามีวิธีการคำนวณความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $P(B/A)$ สองวิธีด้วยกัน

(ก) พิจารณาความน่าจะเป็นของ B เทียบกับ sample space ที่เป็นเซ็ทของ A

(ข) ใช้คำจำกัดความข้างต้น โดยคำนวณ $P(A \cap B)$ และ $P(A)$ เทียบกับ sample space S เดิม

ตัวอย่างที่ 6.9.2

สมมติว่าสำนักงานหนึ่งมีเครื่องคิดเลขอยู่ 100 เครื่องบางเครื่องเป็นชนิดไฟฟ้า (E) ขณะที่เครื่องอื่น ๆ เป็นเครื่องกล (M) บางเครื่องใหม่ (N) บางเครื่องเก่า (U) ดังตารางที่ 6.3 พนักงานคนหนึ่งเข้าไปในสำนักงาน หยิบเครื่องคิดเลขโดยสุ่มและพบว่าเป็นเครื่องใหม่ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่เครื่องนั้นเป็นเครื่องคิดเลขไฟฟ้า $P(E/N)$

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

ตารางที่ 6.3

พิจารณาถึงตารางที่ 6.3 sample space ที่เป็นเซ็ทของ N (70 เครื่องคิดเลขใหม่) เราได้

$$P(E/N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$$

ถ้าใช้คำจำกัดความของคำจำกัดความของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข เราได้

$$P(E/N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$$

$$= \frac{40/100}{70/100} = 4/7$$

จากคำจำกัดความข้างต้นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขมาเขียนเสียใหม่ได้

$$P(A \cap B) = P(B/A)\, P(A)$$

หรือ

$$P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B)$$

นี้บางทีเข้าใจกันในรูปของทฤษฎีผลคูณของความน่าจะเป็นเราอาจใช้ทฤษฎีนี้คำนวณหาความน่าจะเป็นของสองเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 6.9.3

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 20 ลูกและสีขาว 80 ลูก หากเราหยิบลูกบอลสองลูกโดยสุ่มแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่บอลทั้งสองลูกเป็นสีแดง

ให้ A = {ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดง}

B = {ลูกบอลลูกที่สองเป็นสีแดง}

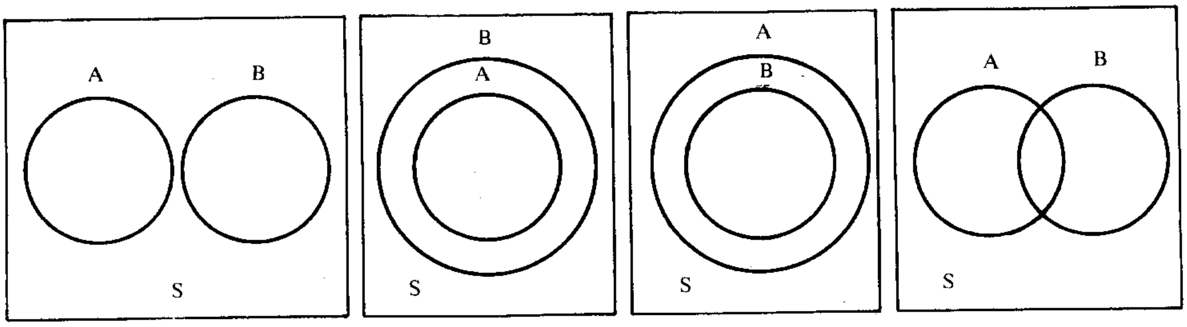
เราต้องการ $P(A \cap B)$ ซึ่งเราอาจคำนวณตามสูตรข้างต้น ดังเช่น $P(B/A)\,P(A)$ แต่ $P(B/A)\ \frac{19}{99}$,

$P(A) = \frac{1}{5}$ เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = \frac{19}{495}$

จากทฤษฎีผลคูณอาจขยายออกไปให้มากกว่าสองเหตุการณ์ได้ดังนี้

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1})$$

ให้มาพิจารณาว่าเราสามารถที่จะกำหนดหลักเกณฑ์เปรียบเทียบทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับขนาดของ $P(A/B)$ กับ $P(A)$ ได้หรือไม่ เรามาพิจารณาสี่กรณีด้วยกัน ซึ่งแสดงให้ด้วยแผนภาพเวนน์ดังรูปที่ 6.11



(ก) $A \cap B = \varnothing$ (ข) $A \subset B$ (ค) $B \subset A$ (ง) ไม่ได้อยู่ในกรณีเหล่านี้

รูปที่ 6.11

(ก) $P(A/B) = 0 \leqslant P(A)$ เนื่องจากว่า A ไม่สามารถเกิดขึ้นหาก B เกิดขึ้นแล้ว

(ข) $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = [P(A)/P(B)] \geqslant P(A)$ เนื่องจากว่า $0 \leqslant P(B) \leqslant 1$

(ค) $P(A/B), = P(A \cap B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1 \geqslant P(A)$

(ง) ในกรณีที่เราไม่สามารถกำหนดหลักเกณฑ์เปรียบเทียบเกี่ยวกับขนาดของ P(A/B) และ P(A)

สังเกตว่ามีอยู่สองกรณีข้างต้น หนึ่ง $P(A) \leqslant P(A/B)$ สอง $P(A) \geqslant P(A/B)$ ในกรณีที่สี่เราไม่สามารถเปรียบเทียบได้เลย

ตัวอย่างที่ 6.9.4

จัดลำดับจากอักษร a สองตัวกับอักษร b สองตัว โดยให้แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน กำหนดให้ตัวอักษรตัวสุดท้ายในการจัดลำดับเป็นอักษร b จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่อักษร a สองตัวอยู่ติดกันในการจัดลำดับ

วิธีทำ

sample space ของการจัดลำดับอักษรสี่ตัวที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

S = { aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa }

พิจารณา sample space ที่เป็นเซ็ทของ B ชื่อหนทาง ที่มีอักษร b ตัวสุดท้าย

B = { aabb,abab,baab }

เนื่องจากว่าเราต้องการทราบความน่าจะเป็นที่ b เป็นอักษรตัวสุดท้ายและอักษรสอง a อยู่ติดกัน เราหาหนทางใน B ที่มีสอง a ติดกัน หนทางที่ต้องการคือ intersection ของ B และ A ในเมื่อ A เป็นเซ็ทของหนทางทั้งหมดที่มีสอง a ติดกัน

A = { aabb,baab,bbaa }

เพราะฉะนั้น

$A \cap B$ = { aabb,baab }

หากเราทำให้หนทางทั้งหมดของเซ็ท B มีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กันและใช้เป็น sample space แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็น 1/3 เนื่องจากว่าเซ็ท B มีสองหนทาง ที่มีสอง a ติดกัน ดังนั้น

$$P(A/B) = 2/3$$

หากเราจะคำนวณความน่าจะเป็นจากคำจำกัดความ เราได้

$$P(B) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2/6}{3/6}$$

$$= 2/3$$

ทฤษฎี 6.9.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ที่มีความอิสระกัน ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระกันมีความน่าจะเป็นมากกว่าศูนย์แล้ว

$$P(A/B) = P(A) \text{ และ } P(B/A) = P(B)$$

พิสูจน์ เนื่องจากว่า A และ B มีความอิสระกันและ $A \cap B = B \cap A$

จาก $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)\,P(B)$

เนื่องจากว่า $P(A)$ และ $P(B)$ มีค่ามากกว่าศูนย์

เพราะฉะนั้น

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

ข้อดีของกระบวนการนี้คือว่า เงื่อนไข $P(A/B) = P(A)$ มีความเกี่ยวข้องโดยสัญชาติญาณกับแนวความคิดของความอิสระกันที่ได้ใช้ในโลกทุกวันนี้ อย่างเช่น เมื่อไรเราพูดว่าจำนวนของการตกตะกอนมีความอิสระกันวันต่อวันหรือสัปดาห์ต่อสัปดาห์

แบบฝึกหัดที่ 6.2

1. มีคนอยู่ 100,000 คนที่มีอายุถึง 20 ปี สถิติแสดงว่าจะมี 47,773 คน มีอายุถึง 70 ปี จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่บุคคลหนึ่งอายุ 20 ปี จะมีอายุถึง 70 ปี เป็นเท่าไร และที่บุคคลนั้นจะตายก่อนที่เขาจะมีอายุถึง 70 ปี เป็นเท่าไร (0.48; 0.52)
2. เลือกเลขสองจำนวนโดยสุ่มจากเลข 1,2,3..............10 จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของเลขสองจำนวนเป็นเลขคู่ (4/9)
3. เลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง 4 คน โดยสุ่มจาก 5 คู่สมรส จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนั้นจะไม่ประกอบด้วยสามีและภรรยา (8/21)
4. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลล์สีขาว x ลูกและสีแดง y ลูก กล่องใบที่สองมีลูกบอลล์สีขาว z ลูกและสีแดง u ลูก หยิบบอลล์ลูกหนึ่งโดยสุ่มจากกล่องใบที่หนึ่งและใส่ลงในกล่องใบที่สองแล้วหยิบบอลล์หนึ่งลูกโดยสุ่มจากกล่องใบที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่บอลล์นี้เป็นสีขาว
   $\left(\left(\frac{x}{x+y}\right)\left(\frac{z+1}{z+u+1}\right) + \left(\frac{y}{x+y}\right)\left(\frac{z}{z+u+1}\right) \right)$
5. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟเสีย 4 หลอดและดี 6 หลอด หยิบหลอดไฟสองหลอดโดยหยิบครั้งละหนึ่งหลอดขึ้นมาทดสอบ พบว่าเป็นหลอดไฟดี (ไม่ใส่คืน) จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบหลอดไฟดีหลอดที่สอง (5/9)
6. จากโจทย์ข้อที่ 5 ทดสอบหลอดไฟครั้งละหนึ่งหลอด (หยิบแล้วไม่ใส่คืน) และทำการทดสอบแบบเดียวกันจนกระทั่งได้ทั้งหลอดเสีย 4 หลอด จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟเสียหลอดที่สี่
   (ก) ในการทดสอบครั้งที่ห้า (2/105)
   (ข) ในการทดสอบครั้งที่สิบ (2/5)
7. ให้ A และ B เป็นสองเหตุการณ์ของการทดลองหนึ่ง สมมติว่า $P(A) = 0.4$ ขณะที่ $P(A \cup B) = 0.7$ ให้ $P(B) = p$
   (ก) p จะมีค่าเท่าไรที่จะทำให้ Aและ B เป็น mutually exclusive (0.3)
   (ข) p จะมีค่าเท่าไรที่จะทำให้ A และ B มีความอิสระกัน (0.5)

เราได้ใช้แนวความคิดเกี่ยวกับความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขเพื่อคำนวณหาความน่าจะเป็นของสองเหตุการณ์เกิดขึ้นร่วมกัน นอกจากนั้นเรายังสามารถประยุกต์แนวความคิดนี้กับวิธีการอื่น ๆ เพื่อคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เดียว ดังคำจำกัดความต่อไปนี้

คำจำกัดความ 6.9.2

ให้เหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots B_k$ แทนส่วนหนึ่งของ Sample space S ถ้า

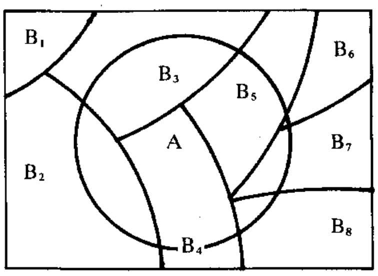
(ก) $B_i \cap B_j = \varnothing$ สำหรับ $i \neq j$ ทั้งหมด

(ข) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

(ค) $P(B_i) > 0$ สำหรับ i ทั้งหมด

ดังตัวอย่าง ทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$, และ $B_3 = \{6\}$ ใช้แทนส่วนหนึ่งของ sample space แต่ $C_1 = \{1,2,3,4\}$ และ $C_2 = \{4,5,6\}$ ใช้แทนไม่ได้

ให้ A เป็นเหตุการณ์หนึ่งเทียบกับ S และ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นส่วนหนึ่งของ S แผนภาพเวนน์ในรูปที่ 6.12 แสดงถึง K = 8 ด้วยเหตุนี้เราอาจเขียน



รูปที่ 6.12

เซ็ทบางเซ็ทของเซ็ท $A \cap B$ อาจเป็นเซ็ทว่างเปล่า แต่นี้ใช้ได้สำหรับการแยกออกเป็นส่วน ๆ ข้างต้นของ A ปัญหาที่สำคัญ คือว่า เหตุการณ์ทั้งหมดของ $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_k$ เป็น pairwise mutually exclusive ด้วยเหตุนี้เราอาจประยุกต์คุณสมบัติของการบวกสำหรับเหตุการณ์ mutually exclusive เราเขียนได้

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots\ldots + P(A \cap B_k)$$

อย่างไรก็ตาม แต่ละเทอม $P(A \cap B_j)$ อาจแสดงได้เป็น $P(A/B_j)\,P(B_j)$ ด้วยเหตุนี้ เราก็หาความน่าจะเป็นทั้งหมดได้

$$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2) \ldots\ldots + P(A/B_k)\,P(B_k)$$

ผลลัพธ์นี้ใช้แทนความสัมพันธ์ที่มีประโยชน์มาก เมื่อไรที่ต้องการคำนวณหา P (A) โดยตรงซึ่งคำนวณยาก อย่างไรก็ตาม การใช้หลักของการบวกที่ B_j ได้เกิดขึ้นแล้ว เราก็อาจสามารถคำนวณหา $P(A/B_j)$ และแล้วใช้สูตรข้างต้น

ตัวอย่างที่ 6.9.5

พิจารณากล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟเสีย 20 หลอด หลอดไฟดี 80 หลอด เราหยิบหลอดไฟสองหลอดแบบไม่ใส่คืนให้

A = { หยิบหลอดแรกเป็นหลอดเสีย }

B = { หยิบหลอดที่สองเป็นหลอดเสีย }

เราอาจคำนวณ $P(B)$ ได้ดังนี้

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$$

ในเมื่อ $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B/A) = \frac{19}{99}$, $P(\bar{A}) = \frac{4}{5}$, $P(B/\bar{A}) = \frac{20}{99}$

$$P(B) = \left(\frac{19}{99}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{20}{99}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}$$

ตัวอย่างที่ 6.9.6

มีโรงงานอยู่สามโรงงาน 1, 2 และ 3 ผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง เป็นที่ทราบกันว่า โรงงานที่ 1 ผลิตได้มากเป็นสองเท่าของโรงงานที่ 2 ส่วนโรงงานที่ 2 กับที่ 3 ผลิตได้เท่ากัน โดยใช้เวลาผลิตช่วงหนึ่งเท่านั้น โรงงานที่ 1 กับที่ 2 ผลิตสินค้าเสีย 2 เปอร์เซ็นต์ ขณะที่โรงงานที่ 3 ผลิตสินค้าเสีย 4 เปอร์เซ็นต์ จำนวนสินค้าทั้งหมดที่ผลิตเก็บไว้ในสต๊อคและแล้วสุ่มเลือกสินค้าชิ้นหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนั้นเป็นสินค้าเสีย

ให้เหตุการณ์ต่อไปนี้เป็น

A = { สินค้าเสีย } B_1 = { สินค้าที่ได้มาจากโรงงานที่ 1 }

B_2 = { สินค้าที่ได้มาจากโรงงานที่ 2 } B_3 = { สินค้าที่ได้มาจากโรงงานที่ 3 }

เราต้องการ $P(A)$ และใช้ผลลัพธ์จากข้างต้น เราอาจเขียนได้ $P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)$ ในเมื่อ $P(B_1) = \frac{1}{2}$, $P(B_2) = P(B_3) = 1/4$, $P(A/B_1) = P(A/B_2) = 0.02$, $P(A/B_3) = 0.04$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสูตรข้างต้น เราคำนวณได้

$$P(A) = (0.02)(1/2) + (0.02)(91/4) + (0.04)(1/4)$$

$$= 0.025$$

ตัวอย่างที่ 6.9.7

ทอดลูกเต๋าที่สมดุลหนึ่งครั้ง หากปรากฏหน้า 1 หรือ 3 หยิบบอลหนึ่งลูกจากกล่องที่หนึ่ง (I) ซึ่งมีบอลขาว 2 ลูก และบอลแดง 4 ลูก หากปรากฏหน้าอื่น ๆ ก็หยิบบอลหนึ่งลูกจากกล่องที่สอง (II) ซึ่งมีบอลขาว 3 ลูก บอลแดง 2 ลูก และบอลดำ 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่บอลลูกนั้นเป็นบอลขาว

I = { ลูกเต๋าปรากฏหน้า 1 หรือ 3 } ; = P (I) = 1/3

II = { ลูกเต๋าปรากฏหน้า 2, 4, 5, 6 } ; = P (II) = 2/3

W_1 = { บอลขาวที่ได้มาจากกล่องที่ I } ; = p (W_1/I) = 2/6

W_2 = { บอลขาวที่ได้มาจากกล่องที่ II } ; = P (W_2/II) = 3/7

W = { บอลขาว }

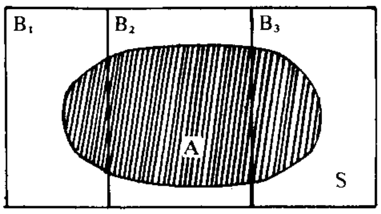
เราต้องการ P (W) ซึ่งคำนวณหาได้ยาก

$$
\begin{aligned}
P(W) &= P(W_1/I)\,P(I) + P(W_2/II)\,P(II) \\
&= (2/6)\,(1/3) + (3/7)\,(2/3) \\
&= (2/18) + (2/7) \\
&= 25/63
\end{aligned}
$$

6.10 ทฤษฎีของเบยส์

ให้ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นเหตุการณ์ที่ mutually exclusive หากเอามา union กันหมดจะได้เป็น sample space ของการทดลองหนึ่ง ให้ A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของ S และ P (A) $\neq 0$ แล้ว

$$
\left.
\begin{aligned}
&P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots\ldots P(B_n \cap A)} \\
\text{หรือ}\quad &P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2) + \ldots\ldots + P(A/B_k)\,P(B_k)} \\
\text{หรือ}\quad &P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\,P(B_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(A/B_j)\,P(B_j)} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots k
\end{aligned}
\right\} \ldots(6.10.1)
$$



รูปที่ 6.13

ในเมื่อ $K = 3, S = B_1 \cup B_2 \cup B_3, A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$

พิสูจน์

การพิสูจน์กำหนดให้กรณี $K = 3$ ดังรูป 6.13 และตาราง ก, ข, แสดงกรณีนี้สามเหตุการณ์ B_1, B_2 และ B_3 เป็น mutually exclusive กัน หากเอามา union กันจะได้เป็น S ส่วนของ A ที่อยู่ใน B_1 คือ $B_1 \cap A$ ส่วนใน B_2 คือ $B_2 \cap A$ และส่วนใน B_3 คือ $B_3 \cap A$ เหตุการณ์ A ทั้งหมดคือ union ของสามเหตุการณ์ที่ mutually exclusive ในทำนองเดียวกัน complementary ของเหตุการณ์ A คือ $\widetilde{A}$ ก็คำนวณหาได้จากวิธีการเดียวกัน แต่เราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้

จากตาราง ข. ให้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ร่วมในตาราง ก. เนื่องจากว่าเหตุการณ์ของ B_i เป็น mutually exclusive กัน ผลบวกของคอลัมน์แรกคือ P (A)

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

		เหตุการณ์ A	A′	Union ของแถว
	B_1	$B_1 \cap A$	$B_1 \cap A'$	B_1
เหตุการณ์	B_2	$B_2 \cap A$	$B_2 \cap A'$	B_2
	B_3	$B_3 \cap A$	$B_3 \cap A'$	B_3
union ของคอลัมน์		A	A′	S

ตาราง ก. การแบ่งส่วนของ sample space

		เหตุการณ์ A	A′	ผลบวกตามแถว
	B_1	$P(B_1 \cap A)$	$P(B_1 \cap A')$	$P(B_1)$
เหตุการณ์	B_2	$P(B_2 \cap A)$	$P(B_2 \cap A')$	$P(B_2)$
	B_3	$P(B_3 \cap A)$	$P(B_3 \cap A')$	$P(B_3)$
ผลบวกตามคอลัมน์		P (A)	P (A′)	

ตาราง ข. ความน่าจะเป็นสำหรับตาราง ก.

จากกฎของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)}$$

$$= \frac{P(A/B_1)\,P(B_1)}{P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2) + P(A/B_3)\,P(B_3)}$$

การพิสูจน์ก็เสร็จสมบูรณ์สำหรับ $K = 3$ การพิสูจน์ในกรณี $K = 2$ หรือ $K \geqslant 4$ ก็ใช้วิธีเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 6.10.1

ในโรงงานแห่งหนึ่ง เครื่องจักร A_1 ผลิตสินค้าได้ 30% เครื่องจักร A_2 ผลิตสินค้าได้ 25% และเครื่องจักร A_3 ผลิตสินค้าได้ 45% สินค้าที่ผลิตได้จากเครื่องจักร A_1 เสีย 1% เครื่องจักร A_2 1.2% และเครื่องจักร A_3 2% เครื่องจักรทั้งสามผลิตได้ 10,000 ชิ้น ในวันหนึ่ง สุ่มเลือกสินค้าเสียชิ้นหนึ่งจากการผลิตหนึ่งวัน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนั้นผลิตจากเครื่องจักร A_1 ? เครื่องจักร A_2 ? เครื่องจักร A_3 ?

วิธีทำ เราใช้ทฤษฎีของเบยส์ คำนวณหาได้โดยกำหนดเหตุการณ์ A, B_1, B_2 และ B_3 เป็นเหตุการณ์ต่อไปนี้

A = สินค้าเสีย

B_1 = สินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักร A_1

B_2 = สินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักร A_2

B_3 = สินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักร A_3

$P(B_1/A)$ เป็นความน่าจะเป็นที่สินค้าผลิตโดยเครื่องจักร A_1 กำหนดให้ว่าเป็นสินค้าเสีย $P(B_1 \cap A)$ เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ผลิตโดยเครื่องจักร A_1 และเป็นสินค้าเสียในทำนองเดียวกัน $P(B_2 \cap A)$ และ $P(B_3 \cap A)$ ก็มีความหมายลักษณะอย่างเดียวกัน แต่เป็นของเครื่องจักร A_2 และเครื่องจักร A_3 ความน่าจะเป็นสำหรับการเลือกสินค้าหนึ่งชิ้นโดยสุ่มจากการผลิตหนึ่งวันทั้งหมด ดังนี้

$$P(B_1) = 0.30, \quad P(A/B_1) = 0.010$$
$$P(B_2) = 0.25, \quad P(A/B_2) = 0.012$$
$$P(B_3) = 0.45, \quad P(A/B_3) = 0.020$$

จากข้อมูลเหล่านี้เราอาจคำนวณ

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1)P(A/B_1) = 0.003$$
$$P(B_2 \cap A) = P(B_2)P(A/B_2) = 0.003$$
$$P(B_3 \cap A) = P(B_3)P(A/B_3) = \underline{0.009}$$
$$\text{รวม} \quad P(A) = 0.015$$

ก่อนที่จะหยิบสินค้าชิ้นหนึ่งจากประชากรและตรวจสอบความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนั้นผลิตโดยเครื่องจักร A_1 A_2 และ A_3 คือ 0.30, 0.25 และ 0.45 ตามลำดับ ประโยชน์ทฤษฎีของเบยส์บอกให้เราทราบการเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็นเหล่านี้อย่างไรเมื่อไรที่เรามีข่าวสารเพิ่มเติมว่าสินค้าที่หยิบนั้นเป็นสินค้าเสีย ความน่าจะเป็นที่ได้มาใหม่ คือ

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{0.003}{0.015} = 0.20$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{0.003}{0.015} = 0.20$$

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{0.009}{0.015} = 0.60$$

สรุปผลเหล่านี้ได้

	เครื่องจักร		
	A_1	A_2	A_3
A priori probability (ความน่าจะเป็นก่อนที่จะทราบข่าวสารเพิ่มเติมว่าสินค้าชิ้นนั้นเป็นสินค้าเสีย)	0.30	0.25	0.45
A posterior probability ความน่าจะเป็นที่ทราบข่าวสารเพิ่มเติมว่าสินค้าชิ้นนั้นเป็นสินค้าเสีย)	0.20	0.20	0.60

ตัวอย่างนี้แสดงถึงการประยุกต์ทฤษฎีของเบยส์ เราเริ่มด้วยเซ็ทของ prior probabilities B_1, B_2, และ B_3 ต่อไปเราทำการทดลองและสังเกตว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว เราจึงใช้ข่าวสารนี้เปลี่ยนแปลงเซ็ทของ prior probabilities และแทนที่

$P(B_1)$ ด้วย $P(B_1/A)$

$P(B_2)$ ด้วย $P(B_2/A)$

$P(B_3)$ ด้วย $P(B_3/A)$

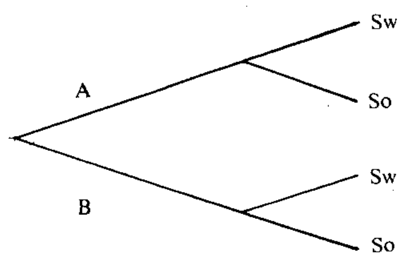
ได้จากสูตร (6.10.1)

หมายเหตุ

ความน่าจะเป็นเดิมของแต่ละ $B_i = P(B_i)$ นี้เราเรียกว่า a priori probability คือเป็นความน่าจะเป็นก่อนทราบการเกิดของเหตุการณ์ใด ๆ หรือก่อนทราบข่าวสารว่าเป็นสินค้าเสีย ส่วนความน่าจะเป็นซึ่งปรับแก้หลังการเกิดของ A แล้ว หรือภายหลังทราบข่าวสารว่าเป็นสินค้าเสีย เราเรียกว่า a posterior probability $p(B_i/A)$

ทฤษฎีของเบยส์ให้โอกาสเราเสนอแนะแนวความคิดของ tree diagram เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาได้ อย่างเช่น มีภาชนะจำนวนมากแบ่งออกเป็นสองชนิด A และ B สำหรับบรรจุลูกกวาด ภาชนะ A บรรจุลูกกวาดชนิดหวาน 70 เปอร์เซ็นต์ และชนิดเปรี้ยว 30 เปอร์เซ็นต์ ขณะที่ภาชนะ B บรรจุลูกกวาดชนิดหวาน 30 เปอร์เซ็นต์ ชนิดเปรี้ยว 70 เปอร์เซ็นต์ นอกจากนั้นสมมติว่าภาชนะเหล่านี้ 60 เปอร์เซ็นต์ เป็นชนิด A 40 เปอร์เซ็นต์ เป็นชนิด B

เราจะต้องพบกับปัญหาการตัดสินใจต่อไปนี้ การกำหนดชนิดองภาชนะที่ไม่ทราบแก่เรา เราได้หยิบลูกกวาดหนึ่งเมล็ดโดยสุ่ม จากข่าวสารนี้ทำให้เราต้องตัดสินใจที่จะเดาว่าชนิด A หรือชนิด B tree diagram จะช่วยให้เราวิเคราะห์ปัญหาได้ (Sw และ So ใช้แทนลูกกวาดหวานและเปรี้ยวที่หยิบตามลำดับ)



รูปที่ 6.14

เราคำนวณ

$P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4,\ P(Sw/A) = 0.7$

$P(So/A) = 0.3,\ P(Sw/B) = 0.3,\ P(So/B) = 0.7$

สิ่งที่เราต้องการจะทราบคือ $P(A/Sw)$, $P(A/So)$, $P(B/Sw)$ และ $P(B/So)$ นั่นคือ เราหยิบลูกกวาดหวานหนึ่งเมล็ดจริง ๆ เราควรจะทำการตัดสินใจมากเท่าไร ให้เราเปรียบเทียบ $P(A/Sw)$ และ $P(B/Sw)$ การใช้สูตรของเบยส์ เราได้

$$P(A/Sw) = \frac{(P(Sw/A)\,P(A)}{P(Sw/A)\,P(A) + P(Sw/B)\,P(B)}$$

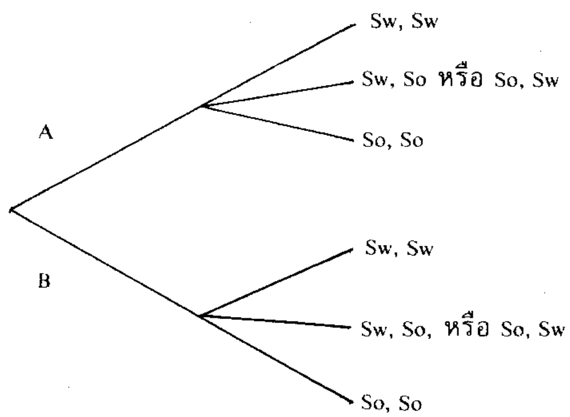
$$= \frac{(0.7)(0.6)}{(0.7)(0.6) + (0.3)(0.4)} = \frac{7}{9}$$

ในทำนองเดียวกันการคำนวณ $P(B/Sw) = 2/9$

จากการคำนวณ เรามีความสัมพันธ์กับภาชนะชนิด A มากกว่าชนิด B $2\frac{1}{2}$ เท่า ด้วยเหตุนี้เราควรตัดสินใจว่าภาชนะชนิด A ควรได้รับเลือก

ในรูปของ tree diagram สิ่งที่เราต้องการจริง ๆ ในการคำนวณเป็นการวิเคราะห์แบบถอยหลัง นั่นคือ กำหนดสิ่งที่เราได้สังเกตอย่างเช่นในกรณีนี้ Sw ภาชนะชนิด A น่าจะพัวพันอย่างไร

สิ่งที่น่าสนใจมากยิ่งขึ้น ถ้าหากว่าเราเลือกลูกกวาดสองเมล็ดก่อนการตัดสินใจว่า ภาชนะชนิด A หรือ B มีส่วนเข้ามาพัวพัน ในกรณีนี้ tree diagram ควรจะเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 6.15

ตัวอย่างที่ 6.10.2

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง X ลูก และเขียว 5 – X ลูก ค่าของ X (ซึ่งอาจเป็น 0, 1, 2, 3, 4 หรือ 5) ไม่ได้แสดงจำนวนต่อท่าน นาย ก. หยิบลูกบอลโดยสุ่มจากบอล 5 ลูกในกล่อง ท่านจะต้องเดาบอลที่ นาย ก. หยิบ ท่านจะชนะถ้าท่านเดาได้ถูกต้อง และเสียเมื่อเดาผิด ให้เราพิจารณาแต่ละอุบายต่อไปนี้ที่ท่านเดา

อุบายที่ 1 เดาว่า นาย ก. จะหยิบบอลแดง 1 ลูก

อุบายที่ 2 เดาว่า นาย ก. จะหยิบบอลเขียว 1 ลูก

อุบายที่ 3 หยิบบอล 1 ลูกครั้งแรกจากกล่อง ถ้าเป็นบอลแดงแล้วเดา นาย ก. จะหยิบบอลแดง ถ้าเป็นบอลเขียวแล้วเดา นาย ก. จะหยิบบอลเขียว

อุบายที่ 4 หยิบลูกบอล 1 ลูก จากกล่องและใส่คืน แล้วหยิบลูกที่สองและใส่คืน ถ้าบอลทั้งสองเป็นสีแดงแล้วเดา นาย ก. จะหยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก ถ้าบอลทั้งสองเป็นสีเขียวแล้วเดา นาย ก. จะหยิบลูกบอลสีเขียว 1 ลูก

อุบายที่ 5 เหมือนกับอุบายที่ 4 เว้นแต่บอลลูกแรกที่หยิบไม่ใส่คืนก่อนหยิบลูกที่สอง ถ้าต้องการหยิบครั้งที่สามก็ทำแบบเดียวกับสองครั้งแรก

เราสนใจการคำนวณความน่าจะเป็นที่ท่านชนะ ความน่าจะเป็นนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ X ที่ไม่ทราบและอุบายที่ท่านตัดสินจะใช้ อย่างเช่น ถ้าท่านเลือกอุบายที่ 1 แล้วท่านเดาบอลแดง นาย ก. จะหยิบบอลแดง 1 ลูก จากกล่องด้วยความน่าจะเป็น $X/5$, $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ความน่าจะเป็นที่เราจะชนะดังรายละเอียดในตาราง 6.4 ในคอลัมน์ของอุบายที่ 1 ในตาราง

ตาราง 6.4

จำนวนบอลในกล่อง	ความน่าจะเป็นที่ชนะด้วยอุบายที่				
X	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1
1	.20	.80	.68	.74	.80
2	.40	.60	.52	.53	.54
3	.60	.40	.52	.53	.54
4	.80	.20	.68	.74	.80
5	1	0	1	1	1

ตัวเลขความน่าจะเป็นของการชนะสำหรับแต่ละสิ่งที่ประกอบขึ้นของกล่องและแต่ละอุบายของห้าอุบายที่ใช้ ให้ดูความน่าจะเป็นเหล่านี้ว่าคำนวณหาได้อย่างไร พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

(ก) สมมติ X = 2 และให้ท่านใช้อุบายที่ 3 แล้วท่านชนะก็ต่อเมื่อท่านและ นาย ก. หยิบได้บอลแดงทั้งคู่หรือบอลเขียวทั้งคู่ ให้ R_1 เป็นเหตุการณ์ที่ท่านหยิบได้บอลแดงลูกแรก R_n เป็นเหตุการณ์ที่ นาย ก. หยิบได้เป็นบอลแดง G_2 เป็นเหตุการณ์ที่ท่านหยิบบอลลูกที่สองเป็นสีเขียว ฯลฯ เนื่องจากว่าเหตุการณ์ $R_1 \cap R_n$ กับ $G_2 \cap G_n$ เป็น mutually exclusive

$$\begin{aligned} P(\text{ชนะ}) &= P(R_1 \cap R_n) + P(G_2 \cap G_n) \\ &= P(R_1)\,P(R_n/R_1) + P(G_2)\,P(G_n/G_2) \end{aligned}$$

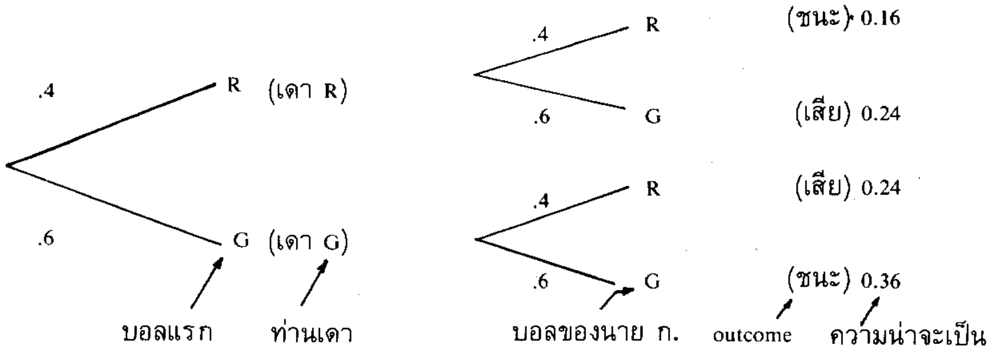
เนื่องจาก นาย ก. หยิบบอลจากกล่องซึ่งเราสมมติว่ามีบอลแดงสองลูกและบอลเขียวสามลูก (เหตุการณ์ R_1 กับ R_n มีความอิสระกันและเหตุการณ์ G_2 กับ G_n ก็มีความอิสระกัน)

$$P(R_n/R_1) = P(R_n) = 0.4,\ P(G_n/G_2) = P(G_n) = 0.6$$

$$P(R_1) = 0.4,\ P(G_2) = 0.6$$

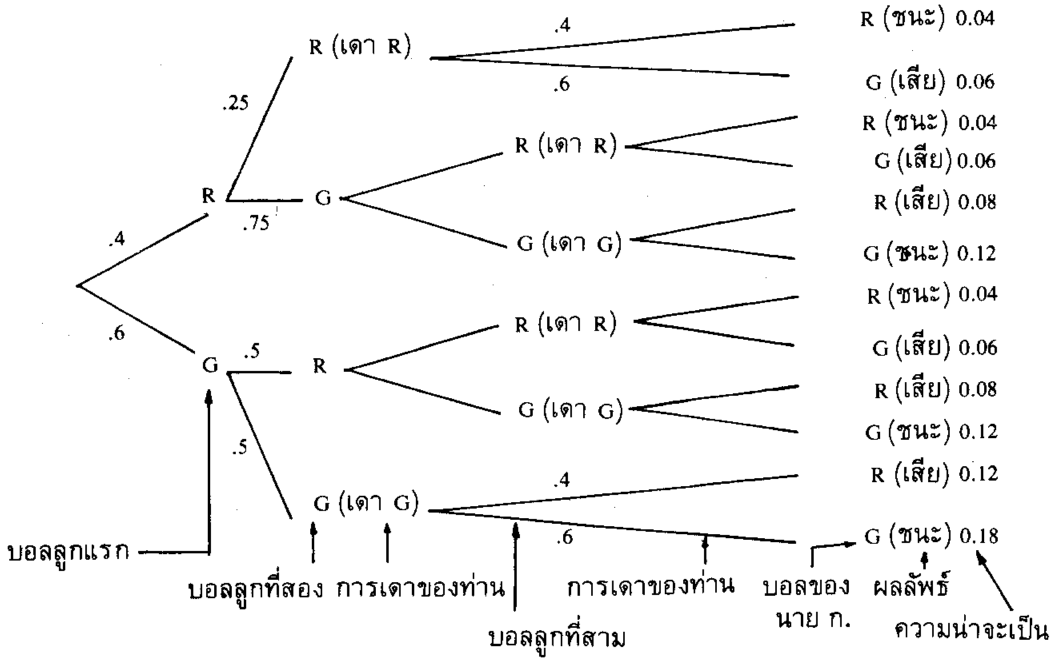
$$P(\text{ชนะ}) = (.4)(.4) + (.6)(.6) = 0.52$$

ความน่าจะเป็นนี้ปรากฏในตาราง 6.4 แถว X = 2 และคอลัมน์อุบายที่ 3 เราเขียน tree diagram ของการทดลองนี้เมื่อไรเราใช้อุบายที่ 3 ได้



รูปที่ 6.16

(ข) สมมติว่า X = 2 และท่านใช้อุบายที่ 5 tree diagram สำหรับอุบายที่ 5 มีความยุ่งยากมากกว่าดังรูปที่ 6.17 สังเกตว่ามีอยู่หกวิธีของการชนะที่ mutually exclusive กัน อย่างเช่น ท่านชนะหากผลการทดลองในเหตุการณ์ $R_1 \cap G_2 \cap R_3 \cap R_n$ ในที่ซึ่งครั้งแรกท่านหยิบได้บอลแดง แล้ว ต่อไปบอลเขียว, บอลแดง (เดาบอลแดง) และแล้ว นาย ก. หยิบได้บอลแดง เหตุการณ์นี้



รูปที่ 6.17

สัมพันธ์กับแขนงที่สามในรูป 6.17 เราคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ได้จากสูตร

$$P(R_1 \cap G_2 \cap R_3 \cap R_n) = P(R_1)\,P(G_2/R_1)\,P(R_3/R_1 \cap G_2)\,P(R_n/R_1 \cap G_2 \cap R_3)$$

เนื่องจากว่าเหตุการณ์ R_n กับ $R_1 \cap G_2 \cap R_3$ มีความอิสระกัน เพราะฉะนั้น

$$P(R_n/R_1 \cap G_2 \cap R_3) = P(R_n) = 0.4 = P(R_1)$$

กำหนดให้ว่าท่านหยิบบอลแดงครั้งแรกไม่ใส่คืน ในกล่องคงเหลือบอลสี่ลูกเป็นสีเขียวเสียสามลูก ดังนั้น

$$P(G_2/R_1) = 0.75$$

หากท่านได้บอลแดงกับบอลเขียวแล้ว การเลือกบอลลูกที่สามจากกล่องซึ่งมีบอลแดงหนึ่งลูก บอลเขียวสองลูก ดังนั้น

$$P(R_3/R_1 \cap G_2) = \frac{1}{3} = 0.33$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสูตร เราคำนวณได้

$$P(R_1 \cap G_2 \cap R_3 \cap R_n) = (.4)(.75)(.33)(.4) = 0.04$$

ความน่าจะเป็นนี้ปรากฏที่ปลายสุดของแขนงที่สามในรูป 6.17 บวกความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งหมด (ทุกแขนง) ที่ท่านชนะ เราพบว่าเมื่อไร $X = 2$ และท่านใช้อุบายที่ 5 ความน่าจะเป็นของการชนะของท่านเป็น 0.54 ดังตัวเลขปรากฏในตารางที่ 6.4

ท่านพอใจอุบายไหนที่ให้ความน่าจะเป็นของการชนะแก่ท่านสูงสุดก็ดูได้จากตารางที่ 6.4 เนื่องจากว่าความน่าจะเป็นในคอลัมน์ 4 อย่างน้อยที่สุดก็มีค่ามากเท่ากับในคอลัมน์ที่ 3 สำหรับสิ่งที่เกิดขึ้นทั้งหมดที่เป็นไปได้ของกล่อง ท่านพอใจอุบายที่ 4 มากกว่าอุบายที่ 3 สำหรับเหตุผลเดียวกัน อุบายที่ 5 ดีกว่าอุบายที่ 4 อย่างไรก็ตาม สำหรับบางเหตุผล ท่านเชื่อแน่ว่าในกล่องมีบอลแดงมากกว่าบอลเขียว (X = 3, 4 หรือ 5) แล้วท่านอาจมีเหตุผลพอใจอุบายที่ 1 มากกว่าอุบายอื่น

แบบฝึกหัด 6.3

1. ทดสอบหลอดไฟหลอดต่อหลอดจนกระทั่งพบว่าทั้งสองหลอดเป็นหลอดเสียจากหลอดดีสองหลอดซึ่งผสมอยู่กับหลอดเสียสองหลอด
   (ก) จงหาความน่าจะเป็นที่การทดสอบครั้งที่สองเป็นหลอดไฟเสียสุดท้าย (1/6)
   (ข) จงหาความน่าจะเป็นที่การทดสอบครั้งที่สามเป็นหลอดไฟเสียสุดท้าย (1/3)
   (ค) จงหาความน่าจะเป็นที่การทดสอบครั้งที่สี่เป็นหลอดไฟเสียสุดท้าย (1/2)
   (ง) รวมค่าที่คำนวณได้จาก (ก), (ข), และ (ค) ข้างต้น ผลลัพธ์จะเป็นเท่าไร (1)

2. ในโรงงานสกรู เครื่องจักร A, B และ C ผลิตสกรูได้ 25, 35 และ 40 เปอร์เซ็นต์ของสกรูทั้งหมดตามลำดับจากสกรูที่ผลิตได้ของเครื่องจักร A, B และ C เป็นสกรูเสีย 5, 4 และ 2 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ เลือกสกรูหนึ่งตัวโดยสุ่มและพบว่าเป็นสกรูเสีย จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่สกรูนั้นผลิตมาจากเครื่องจักร A ? B ? C ?

3. เครื่องอีเลคโทรนิคหนึ่งประกอบด้วยสองระบบย่อย A และ B จากกระบวนการทดสอบก่อน ๆ เราทราบความน่าจะเป็นของระบบย่อยดังนี้
   P (A เสีย) = 0.20
   P (B เสียอย่างเดียว) = 0.15
   P (A และ B เสีย) = 0.15
   จงประเมินความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้
   (ก) P (A เสีย/B ได้เสียแล้ว) (0.50)
   (ข) P (A เสียอย่างเดียว) (0.05)

4. พิสูจน์ ถ้า P (A/B) > P (A) แล้ว P (B/A) > P (B)

5. หนังสือพิมพ์สามฉบับ A, B, และ C ได้พิมพ์ขายในนครแห่งหนึ่ง จากการสำรวจผู้อ่านพบว่ามีผู้อ่านฉบับ A 20 เปอร์เซ็นต์ ฉบับ B 16 เปอร์เซ็นต์ และฉบับ C 14 เปอร์เซ็นต์ อ่านทั้งฉบับ A และ B 8 เปอร์เซ็นต์ อ่านทั้งฉบับ A และ C 5 เปอร์เซ็นต์ อ่านฉบับ B และ C 4 เปอร์เซ็นต์ และอ่านฉบับ A, B, และ C 2 เปอร์เซ็นต์ มีชายคนหนึ่งหยิบอ่านโดยสุ่ม คำนวณความน่าจะเป็นว่า
   (ก) เขาไม่ได้อ่านทั้งสามฉบับ (0.65)
   (ข) เขาอ่านหนึ่งฉบับเท่านั้น (0.22)
   (ค) เขาอ่าน A กับ B หากทราบว่าเขาอ่านอย่างน้อยหนึ่งฉบับที่พิมพ์ (8/35)

6. สมมติว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขในแต่ละกรณีเป็นจริง จงพิสูจน์กฎต่อไปนี้

(ก) $P(F/F) = 1$

(ข) $P(\emptyset/F) = 0$

(ค) ถ้า $E_1 \subseteq E_2$ แล้ว $P(E_1/F) \leqslant P(E_2/F)$

(ง) $P(\bar{E}/F) = 1 - P(E/F)$

(จ) $P(E_1 \cup E_2/F) = P(E_1/F) + P(E_2/F) - P(E_1 \cap E_2/F)$

(ฉ) $P(E/F') = \dfrac{P(E) - P(E \cap F)}{1 - P(F)}$

(ช) หาก $P(F) = 1$ แล้ว $P(E/F) = P(E)$

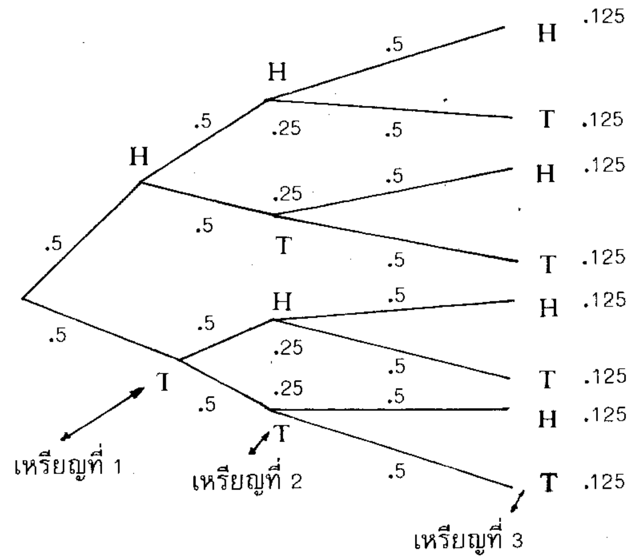
(ซ) หาก $P(F) > 0$ และ E กับ F เป็นเหตุการณ์ mutually exclusive แล้ว $P(E/F) = 0$

6.11 หลักของการนับ

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้นิยามความน่าจะเป็นและใช้คำจำกัดความเพื่อแก้ปัญหาง่าย ๆ ในหัวข้อต่อไปนี้เราจะใช้หลักของการนับเพื่อคำนวณค่าของจำนวนหนทางที่เราสนใจของเหตุการณ์ (n) กับค่าของจำนวนหนทางที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด (N) ใน sample space

วิธีหนึ่งที่เราใช้นับความเป็นไปได้ทั้งหมดของลำดับเหตุการณ์คือ tree diagram

ตัวอย่าง 6.11.1 การวิเคราะห์จำนวนหนทางของความเป็นไปได้ของเหตุการณ์ในการโยนเหรียญซ้ำ ๆ กัน โดยใช้ tree diagram ดังรูป 6.18

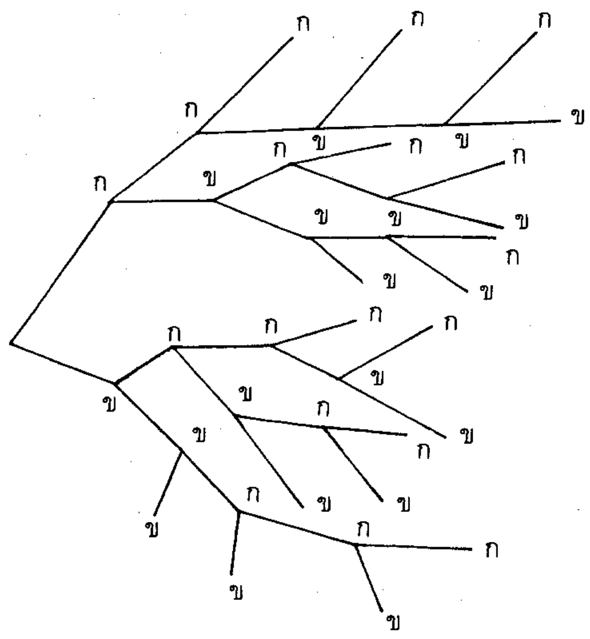


รูปที่ 6.18

โยนเหรียญหนึ่งอันหนึ่งครั้ง จะมีสองหนทาง หัวหรือก้อย หากโยนเหรียญสองอันจำนวนหนทางจะเพิ่มขึ้นเป็นสี่หนทาง HH,HT,TH,TT เนื่องจากว่าเหรียญแต่ละอันมีสองหนทาง ดังนั้น สำหรับสามเหรียญ จำนวนหนทางที่เป็นไปได้คือ $2\times2\times2 = 2^3 = 8$ สี่เหรียญก็จะมี $2^4 = 16$ หนทาง โดยทั่ว ๆ ไปหากโยนเหรียญอันหนึ่ง n ครั้งหรือโยนเหรียญ n อัน 1 ครั้ง จะมี 2^n หนทาง การโยนเหรียญเป็นการแสดงที่ดีของเหตุการณ์ที่อิสระกัน ความน่าจะเป็นของการเกิดหัวหรือก้อย กำหนดได้จากแต่ละกิ่งก้าน อย่างเช่นความน่าจะเป็นของก้อยและก้อยและก้อย คือ .125 (ผลคูณของ (.5) (.5) (.5))

ตัวอย่าง 6.11.2 นาย ก. และ นาย ข. แข่งขันปิงปองกัน จงเขียน tree diagram แสดงหนทางที่เป็นไปได้ในการแข่งขันโดยผู้แข่งขันคนใดชนะสามเกมเป็นผู้ชนะการแข่งขัน

วิธีทำ การแข่งขันสามารถเล่นได้ยี่สิบหนทาง เพื่อหาผู้ชนะสามเกม sample space คือ {กกก, กกขก, กกขขก, กกขขข, กขกก, กขกขก, กขกขข, กขขกก, กขขกข, กขขข, ขกกก, ขกกขก, ขกกขข, ขกขกก, ขกขกข, ขกขข, ขขกกก,ขขกกข, ขขกข, ขขข}



รูปที่ 6.19

มีการทดลองจำนวนมากที่หนทางของการทดลองประกอบด้วยการทดลองย่อยหรือเหตุการณ์อาจได้มาเป็นคู่ที่ฟอร์มจากสองเหตุการณ์

ตัวอย่าง 6.11.3 โยนเหรียญหนึ่งอันและลูกเต๋าหนึ่งลูกพร้อม ๆ กัน จงเขียนหนทางที่เป็นไปได้

วิธีทำ เนื่องจากว่าเหรียญอันหนึ่งมี 2 หนทาง H หรือ T ลูกเต๋ามี 6 หนทาง 1,2,3,5,6

$$S = \{ (H1), (H2), (H3), (H4), (H5), (H6), (T1), (T2), (T3), (T4), (T5), (T6) \}$$

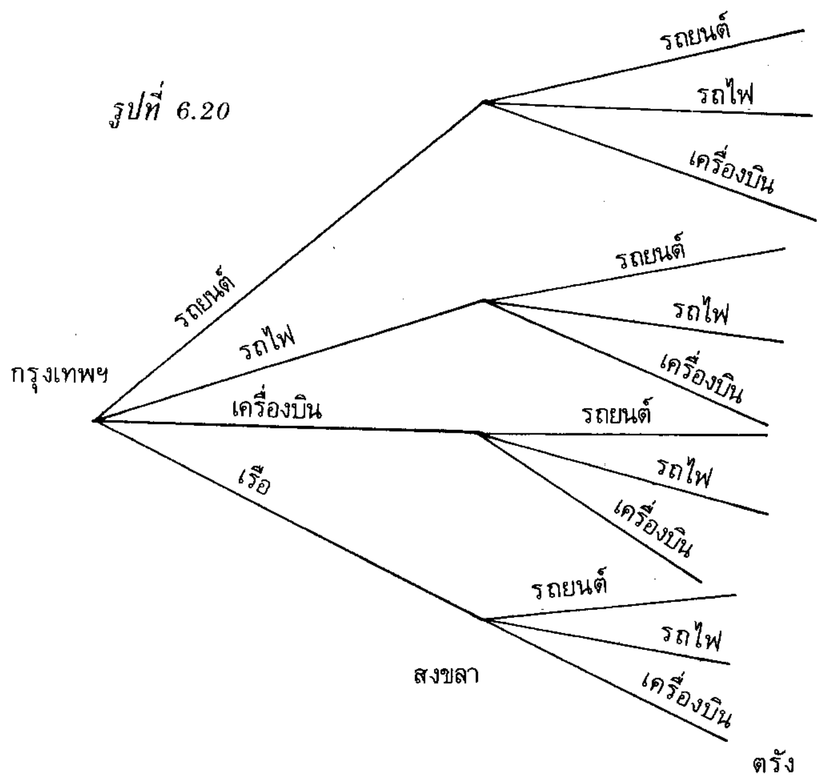
จากตัวอย่างข้างต้น จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ของการทดลองสามารถคำนวณหาได้จากจำนวนหนทางของการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก คูณด้วยจำนวนหนทางของการโยนเหรียญหนึ่งอันนั่นคือ $6 \times 2 = 12$ หนทางซึ่งพอที่จะกล่าวเป็นหลักทั่ว ๆ ไปได้

ถ้าหากว่าเหตุการณ์ A มี m หนทาง (และภายหลังเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว) เหตุการณ์ B มี n หนทาง ดังนั้นการทดลองซึ่งประกอบด้วย A และ B มี mn หนทาง

ตัวอย่าง 6.11.4 มีชายคนหนึ่งมีโครงการเดินทางจากกรุงเทพ ไปสงขลาแล้วต่อไปจังหวัดตรัง จากกรุงเทพไปสงขลาเขาสามารถไปได้ด้วยรถยนต์ รถไฟ เครื่องบิน หรือเรือจากสงขลาไปจังหวัดตรัง เขาสามารถไปด้วยรถยนต์ รถไฟหรือเครื่องบินเท่านั้นจะมีกี่หนทางที่เขาสามารถเดินทาง

วิธีทำ เขาสามารถเดินทางจากกรุงเทพไปสงขลาได้สี่หนทาง และจากสงขลาไปจังหวัดตรังได้สามหนทาง เพราะฉะนั้นเขาสามารถเดินทางได้ทั้งหมด $4 \times 3 = 12$ หนทาง

รูปที่ 6.20



คำจำกัดความ 6.11.1 ผลคูณ $n(n-1)(n-2) \ldots (3)(2)(1)$ แสดงได้ด้วย $n!$ หรือ $\underline{|n}$ เรียกว่า n แฟคเตอร์เรียล

ตัวอย่าง 6.11.5 $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$2! = 2 \times 1 = 2$

เพื่อให้คำนิยามข้างต้นสมบูรณ์ เรากำหนด $1! = 1$, และ $0! = 1$

เรามาพิจารณาหลักของการนับซึ่งเกี่ยวกับจำนวนหนทางของการจัดเรียงวัตถุลงในกล่องสามใบเรียงกันเป็นแถว อย่างเช่น เลือกวัตถุสามชนิดจากห้าชนิดและจัดเรียงเป็นแถวจะได้กี่วิธี

วิธีทำ กล่องแรกสามารถบรรจุได้ห้าหนทาง ภายหลังกล่องแรกได้บรรจุแล้ว กล่องที่สองก็สามารถบรรจุได้สี่หนทาง กล่องสุดท้ายได้สามหนทาง ดังนั้นโดยหลักการนับทั้งสามกล่องสามารถบรรจุได้ $5 \times 4 \times 3 = 60$ หนทาง $5 \times 4 \times 3$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!}$$

โดยทั่วไปอาจเลือกวัตถุ r ชิ้นจากจำนวน n ชิ้น และเรียงเป็นแถวตามลักษณะดังนั้น ตำแหน่งด้านซ้ายมืออาจจัดได้ n หนทางต่าง ๆ กัน ภายหลังจัดตำแหน่งด้านซ้ายมือ ตำแหน่งที่สองจากซ้ายมืออาจจัดได้ $(n-1)$ หนทางต่าง ๆ กัน ตำแหน่งทางขวามือหรือตำแหน่งที่ r จัดได้ $n-(r-1)$ หนทางต่าง ๆ กันเท่านั้น เพราะว่าจำนวนวัตถุ $(r-1)$ ของ n ชิ้นได้ใช้จัดตำแหน่งอื่น ๆ ไปแล้ว $r-1$ ตำแหน่ง ดังนั้น การใช้หลักของการนับซ้ำ ๆ กัน สามารถใช้ได้เหมือนกับจำนวนวิธีที่สามารถเลือกวัตถุ r ชิ้นจาก n ชิ้นและจัดเรียงเป็นแถวได้เป็น

$$n(n-1)(n-2) \ldots (n-(r-1))$$

ที่สามารถแสดงได้เป็น

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)(n-r) \ldots 3.2.1}{(n-r) \ldots (3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

6.11.1 การจัดลำดับ การจัดลำดับของวัตถุ หมายถึงการจัดวัตถุกลุ่มหนึ่งในลำดับที่แน่นอน

คำจำกัดความ 6.11.2 จำนวนหนทางการเลือกวัตถุ r สิ่งจากวัตถุ n สิ่งและจัดเรียงเป็นแถว เรียกว่าจำนวนหนทางของการจัดลำดับวัตถุ r สิ่งจากวัตถุ n สิ่ง ในครั้งหนึ่งแสดงได้เป็น P_r^n สูตรสำหรับ P_r^n คือ

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 6.11.6 สโมสรแห่งหนึ่งจะเลือกบุคคล 4 คนจาก 6 คนเพื่อเป็นประธาน รองประธาน เลขาธิการ และเหรัญญิก จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก. นาย ข. นาย ค. และ นาย ง. จะได้รับเลือกเป็นประธาน รองประธาน เลขาธิการและเหรัญญิก ตามลำดับชื่อ

วิธีทำ จำนวนหนทางเลือกบุคคล 4 คนจาก 6 คนได้เป็น P_4^6 หนทางหรือ $6!/2! = 360$ หนทาง มีอยู่หนึ่งหนทางเท่านั้นของจำนวนหนทางที่ต้องการเหล่านี้ เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะเลือก 4 คนให้เป็นตามที่กำหนดให้คือ 1/360 กรณีที่ต้องการหาหนทางจัดเรียงวัตถุ n สิ่งซึ่งไม่สามารถแบ่งได้อย่างเช่น เราจัดลำดับอักษร SEEM หากอักษรแตกต่างกันทั้งหมด จำนวนหนทางการจัดก็จะมี 4! หนทาง เนื่องจากว่า E 2 ตัว ซึ่งไม่สามารถแบ่งแยกออกได้ให้ E 2 ตัว เป็น E_1 และ E_2 จำนวนหนทางการจัดเรียงอักษรสองตัวนี้คือ 2! ให้ P เป็นจำนวนหนทางของการจัดเรียงกรณี E แบ่งแยกไม่ได้ (เมื่อพิจารณาว่ามีความแตกต่าง) เท่ากับจำนวนหนทางของการจัดเรียงอักษรสี่ตัว ถ้าหากว่าอักษรทั้งหมดสามารถแบ่งได้ นั้นคือ

$$2!P = 4! \text{ หรือ } P = \frac{4!}{2!}$$

จากผลลัพธ์สามารถขยายออกไปได้กรณีมีวัตถุ s ชนิด แต่ละชนิดมี K สิ่งที่เหมือนกัน แล้วจำนวนหนทางของการจัดลำดับที่เป็นไปได้ของวัตถุ n สิ่งคือ

$$\frac{n!}{K_1!\,K_2!\,\ldots\,K_s!} \text{ หรือ } \binom{n}{K_1, K_2, .., K_s}$$

ในเมื่อ $K_1 + K_2 + K_3 + \ldots. + K_s = n$

ตัวอย่าง 6.11.7 จะมีจำนวนกี่หนทางในการจัดเก้าอี้หกตัวเป็นแถว ถ้าหากว่ามีเก้าอี้สีแดงสามตัว สีเขียวสองตัวและสีน้ำตาลหนึ่งตัว คำตอบก็คือ

$$\frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60 \text{ หนทาง}$$

6.11.2 การจัดหมู่ ในกรณีที่เราสนใจจำนวนหนทางการเลือกวัตถุ r จากวัตถุ n สิ่ง นั่นคือ เราสนใจการเลือกวัตถุ r สิ่งโดยปราศจากการจัดเรียงลำดับ

เรามาพิจารณาหาหนทางที่จะเลือกอักษร 5 ตัวจากอักษร a,b,c,d และ e เริ่มแรกเราหาจำนวนหนทางของการจัดลำดับอักษรสองตัวจากห้าตัวในหนึ่งครั้ง

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

ดังรายละเอียดคือ { ab,ac,ad,ae,ba,bc,bd,be,ca,cb,cd,ce,da,db,dc,de,ea,eb,ec,ed }

จะเห็นได้ว่าแต่ละคู่ของอักษรสามารถจัดเรียงได้ 2 หนทาง ด้วยกัน แต่ในที่นี้เราถือว่าเหมือน เพราะเราไม่คำนึงถึงลำดับ ให้จำนวนหนทางที่เลือกอักษรสองตัวแสดงได้เป็น C_2^5 แล้วจำนวนหนทางที่จัดเรียงวัตถุคือ $2!\ C_2^5$ ดังนั้น

$$2!\ C_2^5 = P_2^5 \text{ หรือ } C_2^5 = P_2^5/2!$$

$$= \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

โดยทั่ว ๆ ไปการพิจารณาปัญหาการเลือกวัตถุ r สิ่งจาก n สิ่ง แสดงได้เป็น c_r^n โดยการเลือกแต่ละครั้งมีวัตถุ r สิ่งสามารถจัดเสียงได้ r! หนทาง เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีการของการเลือกวัตถุ r สิ่ง คูณด้วยจำนวนหนทางของการจัดเรียงแต่ละกลุ่มที่ประกอบด้วยวัตถุ r สิ่งจาก n สิ่งและจัดเรียงเป็นแถวดังนั้น

$$r!\ C_r^n = P_r^n$$

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

คำจำกัดความ 6.11.3 จำนวนหนทางของการเลือกวัตถุ r สิ่งจาก n สิ่ง เรียกว่า การจัดหมู่ r สิ่งจาก n สิ่งในหนึ่งครั้ง จำนวนนี้กำหนดให้โดย

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 6.11.8 จะมีจำนวนกี่วิธีในการเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง 3 คน จากบุคคล 5 คน ดังมีรายนามต่อไปนี้ ก,ข,ค,ง, และ จ

วิธีทำ

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$$

นี้อาจเขียนเป็นเซทได้

{ กขค, กขง, กขจ, กคง, กคจ, กงจ, ขคง, ขคจ, ขงจ, คงจ }

ข้อสังเกต

$$C_0^n = C_n^n$$
$$C_1^n = C_{n-1}^n$$
$$C_2^n = C_{n-2}^n$$
$$C_{n-1}^n = C_1^n$$
$$C_n^n = C_0^n$$

การจัดหมู่มีประโยชน์เกี่ยวกับการคำนวณหาความน่าจะเป็นบางชนิดโดยเฉพาะ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.11.9 มีพนักงาน 15 คนในบริษัท ก.มีอยู่ 5 คน อัตราการขายยอดเยี่ยม (E) 7 คน อัตราการขายดี (G) และ 3 คน อัตราการขายใช้ได้ (P) สุ่มเลือกพนักงานขาย 3 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. หนึ่งคนพนักงานขายใช้ได้และหนึ่งคนพนักงานขายดีและ อีกหนึ่งคนเป็นพนักงานขายยอดเยี่ยม

2. อย่างน้อยหนึ่งคนเป็นพนักงานขายยอดเยี่ยม

วิธีทำ

$$C_3^{15} = \frac{15!}{3!(15-3)} = \frac{15\times 14\times 13}{3\times 2\times 1} = 455$$

(1) $C_1^5 = 5;\ C_1^7 = 7;\ C_1^3 = 3$

$$C_1^5 \times C_1^7 \times C_1^3 = (5)(7)(3) = 105$$

$$P\,(1E, 1G, 1P) \quad \frac{C_1^5 \times C_1^7 \times C_1^3}{C_3^{15}} = \frac{105}{455} = .23$$

(2) P (อย่างน้อย 1 คนเป็นพนักงานขายยอดเยี่ยม)

= 1 − P (ไม่มีพนักงานขายยอดเยี่ยมเลย)

$$= 1 - \frac{C_3^{10}}{C_3^{15}} = 1 - \frac{\frac{10!}{3!7!}}{455} = 1 - \frac{120}{455} = .74$$

6.12 Sample Spaces **ที่มีหลาย ๆ สมาชิก**

เมื่อไรที่ sample space มีจำนวนสมาชิกมาก ๆ เป็นการยาก จะทำบัญชีรายชื่อหรือเขียนหนทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด แม้ว่าจะไม่มี บัญชีรายชื่อ วิธีการ นับก็สามารถทำให้เราคำนวณความน่าจะเป็นสำหรับ sample spaces ที่มีแต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กันได้ ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงวิธีการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 6.12.1

มีบอลอยู่ในหีบ 5 ลูก เป็นบอลขาว 3 ลูก เป็นบอลดำ 2 ลูก สุ่มบอลออกมา 3 ลูก คำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก

ก. หากการสุ่มทั้ง 3 ลูก ทำพร้อม ๆ กัน

ข. หากการสุ่ม ๆ ทีละลูกโดยไม่ใส่กลับ

ค. หากการสุ่ม ๆ ทีละลูกใส่กลับและกวนให้เข้ากันดีแล้วจึงสุ่มครั้งต่อไป

ก. วิธีทำ

หากสุ่มบอลพร้อมกันทั้ง 3 ลูก เราไม่คำนึงว่าจะได้บอลลูกไหนก่อนหรือผลลัพธ์หนึ่ง ๆ ขึ้นอยู่กับว่าในจำนวน 3 ลูก ที่สุ่มมาได้มีบอลลูกใดบ้าง โดยทฤษฎีว่าด้วยการจัดหมู่จำนวนหนทางหรือวิธีการที่จะสุ่มได้ทั้งหมดเท่ากับ C^5_3 หนทาง $= \frac{5!}{3!2!} = 10$ หนทางแต่ละหนทางมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันแทนบอลขาว 3 ลูก ด้วย W_1, W_2, และ W_3 และแทนบอลดำด้วย B_1, B_2 จำนวน 10 หนทาง อาจจะเขียนได้ดังนี้

$W_1W_2W_3$ $W_1W_2B_1$ $W_1W_2B_2$ $W_1W_3B_1$ $W_1W_3B_2$

$W_2W_3B_1$ $W_2W_3B_2$ $W_1B_1B_2$ $W_2B_1B_2$ $W_3B_1B_2$

จากจำนวน 10 หนทางนี้มีอยู่ 6 หนทาง ที่ได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก จึงเท่ากับ 6/10

เราอาจจะพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีการจัดหมู่ จำนวน 6 หนทาง ที่สุ่มได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก นั้นได้มาจากผลคูณ

[จำนวนหนทางที่จะสุ่มบอลขาว 2 ลูก จาก 3 ลูก ที่มีอยู่] × [จำนวนหนทางที่จะสุ่มบอลดำ 1 ลูก จาก 2 ลูก ที่มีอยู่]

ทั้งนี้ การสุ่มให้ได้บอลขาว 2 ลูก และบอลดำ 1 ลูก นั้น การสุ่มจะต้องทำเสมือนว่าเราแยกสุ่มบอลขาว 2 ลูก จาก 3 ลูก ที่มีอยู่แล้วจึงสุ่มบอลดำ 1 ลูก จาก 2 ลูก ที่มีอยู่

จำนวนหนทางที่จะสุ่มบอลขาว 2 ลูก เท่ากับ $C^3_2 = 3$ หนทาง

จำนวนหนทางที่จะสุ่มบอลดำ 1 ลูก เท่ากับ $C^2_1 = 2$ หนทาง

ดังนั้น จำนวนหนทางทั้งสิ้นจึงเท่ากับ $C^3_2 \times C^2_1 = 3 \times 2 = 6$ หนทาง เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก จึงเท่ากับ

$$(C^3_2 \times C^2_1)/C^5_3 = (3 \times 2)/10 = 6/10$$

ข. วิธีทำ

กรณีนี้ หนทางของการสุ่มต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลังของบอลที่สุ่มได้ด้วย เช่น หนทาง $W_1W_2B_1$ กับ $W_1B_1W_2$ จะต้องถือว่าเป็นหนทางที่แตกต่างกันเพราะลำดับแตกต่างกัน แม้ว่าการสุ่มทั้ง 2 กรณี จะได้บอล W_1, W_2 และ B_1

จำนวนหนทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองนี้จากการสุ่มบอล 3 ครั้งนี้ เป็น $5 \times 4 \times 3 = 60$ หนทาง ครั้งแรกจะได้บอลใน 5 หนทาง ครั้งที่สองจะได้บอล 4 หนทาง และครั้งที่สามจะได้บอลใน 3 หนทาง

ให้พิจารณาการสุ่มที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก ในลำดับ ขาว ขาวและดำ จำนวนหนทางที่จะเป็นไปได้มีอยู่ $3 \times 2 \times 2 = 12$ หนทาง ทั้งนี้เพราะมี 3 หนทาง ที่จะสุ่มได้บอลขาวลูกแรก 2 หนทาง ที่จะสุ่มได้บอลขาวลูกที่สองและมี 2 หนทาง ที่จะสุ่มได้บอลดำ หนทาง 12 หนทาง ดังแสดงได้ดังนี้

$W_1W_2B_1$	$W_2W_1B_1$	$W_1W_3B_1$	$W_3W_1B_1$	$W_2W_3B_1$	$W_3W_2B_1$
$W_1W_2B_2$	$W_2W_1B_2$	$W_1W_3B_2$	$W_3W_1B_2$	$W_2W_3B_2$	$W_3W_2B_2$

แต่ในเหตุการณ์ที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก นั้น เราจะต้องคำนึงถึงลำดับอื่น ๆ ที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก ด้วย ลำดับอื่นที่จะเป็นไปได้มี

ขาวดำขาว ดำขาวขาว

แต่ละลำดับมีหนทางที่เป็นไปได้ 12 หนทาง จำนวนหนทางในเหตุการณ์ที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก จึงเท่ากับ 12+12+12 = 36 หนทาง และความน่าจะเป็นที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก เท่ากับ 36/60 = 0.6

สรุป กรณี ก. กับ ข. จะให้คำตอบเหมือนกัน ไม่ว่าการสุ่มจะสุ่มบอลพร้อมกัน 3 ลูก หรือสุ่มทีละลูกโดยไม่ใส่กลับคืน

ค. วิธีทำ

กรณีแต่ละหนทางของการทดลองก็ยังคงต้องคำนึงถึงลำดับก่อนหลังของบอลที่สุ่มได้ แต่เมื่อมีการสุ่มแบบใส่คืนจำนวนหนทางที่จะสุ่มได้ทั้งหมด เท่ากับ

$5 \times 5 \times 5 = 125$ หนทาง

ทั้งนี้เพราะเมื่อสุ่มแบบใส่คืน ในการสุ่มแต่ละครั้งมีหนทางสุ่มได้ 5 หนทาง หากพิจารณาการสุ่มที่จะให้ได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก ในลำดับ ขาว ขาว ดำ จำนวนหนทางที่จะสุ่มได้เท่ากับ $3 \times 3 \times 2 = 18$ หนทาง ทั้งนี้ เพราะมีหนทางสุ่มได้บอลขาวลูกแรกได้ 3 หนทาง และ (เมื่อมีการใส่คืน) บอลขาวลูกที่สองก็สุ่มได้ 3 หนทาง ด้วย ส่วนบอลดำสุ่มได้ 2 หนทาง

จำนวน 18 หนทาง แสดงได้ดังนี้

$W_1W_2B_1$ $W_2W_1B_1$ $W_1W_3B_1$ $W_3W_1B_1$ $W_2W_3B_1$ $W_3W_2B_1$

$W_1W_2B_2$ $W_2W_1B_2$ $W_1W_3B_2$ $W_3W_1B_2$ $W_2W_3B_2$ $W_3W_2B_2$

$W_1W_1B_1$ $W_1W_1B_2$ $W_2W_2B_1$ $W_2W_2B_2$ $W_3W_3B_1$ $W_3W_3B_2$

หากพิจารณาหนทางที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก ในลำดับอื่นอีก 2 ลำดับ คือ

ขาว ดำ ขาว และ ดำ ขาว ขาว

ซึ่งต่างก็มีทางสุ่มได้ 18 หนทางด้วยกัน จำนวนหนทางที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก จึงเท่ากับ 18+18+18 = 54 หนทาง ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก จึงเท่ากับ $\frac{54}{125} = .432$

ตัวอย่างที่ 6.12.2

ปัญหาการสุ่มตัวอย่าง โรงเรียนหนึ่งมีอาจารย์ชาย 10 คน หญิง 20 คน สุ่มเลือกตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยอาจารย์ 5 คน คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ตัวอย่าง

(ก) ประกอบด้วยอาจารย์หญิงทั้งหมด

(ข) มีอาจารย์ชาย 2 คน

(ค) มีอาจารย์ชายมากกว่าอาจารย์หญิง

วิธีทำ

จำนวนตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

$$\binom{30}{5} = 142{,}506$$

ตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยอาจารย์หญิงทั้งหมดสามารถเลือกได้ $\binom{20}{5} = 15{,}504$ ดังนั้น 15,504 หนทาง ของ S สมนัยกับเหตุการณ์ "ตัวอย่างที่ประกอบด้วยอาจารย์หญิงทั้งหมด" ด้วยเหตุนี้

$$P(5 \text{ อาจารย์หญิง}) = \frac{\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{15{,}504}{142{,}506} = 0.109$$

(ข) ตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยอาจารย์ชาย 2 คน กับอาจารย์หญิง 3 คน

สามารถเลือกได้ใน

$\binom{10}{2} \times \binom{20}{3}$ หรือ 51,300 หนทาง

เพราะฉะนั้น

$$P(\text{อาจารย์ชาย 2 คน กับอาจารย์หญิง 3 คน}) = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}}{\binom{30}{5}} = \frac{51,300}{142,506}$$

$$= 0.360$$

ตอบ

จากตัวอย่างนี้ เราทำออกมาในรูปทั่ว ๆ ไปได้ สมมติว่าเรามีสิ่งของอยู่ n ชิ้น เป็นของชนิด A m ชิ้น กับ $\bar{A}$ (ไม่ใช่ A) w ชิ้น $(m + w = n)$ จากจำนวน n ชิ้น เราเลือกตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วย r ชิ้น คำนวณความน่าจะเป็นว่าตัวอย่างนั้นเป็นชนิดของ A เสีย x ชิ้น การรวบรวมข้อมูลดังในตารางที่ 6.5

	A	$\bar{A}$	รวม
อยู่ในตัวอย่าง	x	r − x	r
ไม่ได้อยู่ในตัวอย่าง	m − x	w − r + x	n − r
รวม	m	w	n

ตารางที่ 6.5

เรามี $\binom{n}{r}$ ตัวอย่างที่เป็นไปได้ จำนวนตัวอย่างที่เป็นชนิดของ A เสีย x ชิ้นเท่ากับ $\binom{m}{x}\binom{w}{r-x}$ เพราะฉะนั้น

$$P(\text{ที่เป็นชนิดของ A เสีย x ชิ้น}) = \frac{\binom{m}{x}\binom{w}{r-x}}{\binom{n}{r}} \quad \text{..........(6.12.1)}$$

สูตรนี้ใช้คำนวณความน่าจะเป็นว่ามีการแจกแจงอย่างไรระหว่างตาราง 2 × 2 ที่เป็นไปได้ แต่ละค่าของ X ให้ตารางแตกต่างกันไป การแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับเซ็ทของตาราง 2 × 2 เรียกว่า hypergeometric distribution

(ค) ความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างมีอาจารย์ชายมากกว่าอาจารย์หญิง อาจมีกรณีต่าง ๆ ดังนี้

(1) สุ่มได้อาจารย์ชาย 3 หญิง 2 (2) สุ่มได้อาจารย์ชาย 4 หญิง 1

(3) สุ่มได้อาจารย์ชาย 5

ความน่าจะเป็นของแต่ละกรณีคำนวณได้จากสูตรการแจกแจงแบบ hypergeometric ความน่าจะเป็นที่ต้องการคือ ผลรวมของความน่าจะเป็นแต่ละกรณี ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้อาจารย์ชายมากกว่าหญิงจึงเท่ากับ

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{20}{2}+\binom{10}{4}\binom{20}{1}+\binom{10}{5}\binom{20}{0}}{\binom{30}{5}} = \frac{27,252}{142,506}$$

$$= 0.1913 \quad \textbf{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 6.12.3

ในการเล่นบริดจ์สำหรับสี่คน คำนวณหาความน่าจะเป็นที่แต่ละคนมีไพ่เอสหนึ่งตัว

วิธีทำ

มีจำนวนวิธีการหรือหนทางจากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ แบ่งออกเป็นสี่ส่วน ๆ ละ 13 ใบ ได้

$$N = \binom{52}{13,\ 13,\ 13,\ 13} = \frac{52!}{(13!)^4} \text{ หนทาง}$$

ซึ่งเป็น sample space S แต่ละหนทางหรือหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน คือ 1/N เหตุการณ์ที่แต่ละผู้เล่นมีเอสหนึ่งตัวเป็น union ของหลาย ๆ sample events ของ S เราให้มีจำนวนเท่ากับ X ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ต้องการคือ x/N การคำนวณค่า x ได้ดังนี้

(1) จำนวนหนทางที่แต่ละผู้เล่นจะได้เอสหนึ่งใบจาก X เอสทั้งหมดสี่ใบ คือ

$$\binom{4}{1,\ 1,\ 1,\ 1} = \frac{4!}{(1!)^4} \text{ หนทาง}$$

(2) จำนวนหนทางที่แต่ละผู้เล่นจะได้ไพ่อื่น ๆ อีก 12 ใบ จากไพ่ที่เหลือ 48 ใบ คือ

$$\binom{48}{12,\ 12,\ 12,\ 12} = \frac{48!}{(12!)^4} \text{ หนทาง}$$

จากหลักพื้นฐานเกี่ยวกับการนับ จำนวนหนทางสำหรับแต่ละผู้เล่นมีเอสหนึ่งตัว คือ

$$x = \left(\frac{4!}{(1!)^4}\right)\left(\frac{48!}{(12!)^4}\right)$$

$$= \frac{4!\,48!}{(12!)^4}$$

และความน่าจะเป็นที่ต้องการกำหนดได้โดย

$$P\,(\text{แต่ละผู้เล่นมีเอสหนึ่งตัว}) = \frac{x}{N} = \frac{4!\,48!\,(13!)^4}{(12!)^4\,52!}$$

$$= 0.10$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.12.4

สุ่มเลือกตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วย 4 คน จาก 5 คู่สมรส คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างนั้นมีชาย 2 คน หญิง 2 คน

วิธีทำ

จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการเลือก 4 คน จาก 10 คน ได้ S เท่ากับ

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \text{ หนทาง}$$

แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน 1/210

เราเลือกชายสองคนจากชายห้าคนได้ $\binom{5}{2} = 10$ หนทาง ในทำนองเดียวกัน เลือกหญิงสองคนจากหญิงห้าคนได้ 10 หนทาง เพราะฉะนั้น จำนวนหนทางที่จะได้ชายสองคนหญิงสองคนเท่ากับ (10)(10) = 100 หนทาง ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ต้องการ คือ

$$\frac{100}{210} = \frac{10}{21}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.12.5

คำนวณความน่าจะเป็นที่นักเล่นโพคเกอร์คนหนึ่งจะมีไพ่หนึ่งคู่ที่มีหน้าเหมือนกัน

วิธีทำ

ในการเล่นโพคเกอร์ผู้เล่นคนหนึ่งจะมีไพ่อยู่ในมือ 5 ใบ ซึ่งเป็นเซ็ทย่อยของไพ่ 52 ใบ ดังนั้นจำนวนทางที่เป็นไปได้มี $\binom{52}{5}$ หนทางเราให้เป็น N ด้วยเหตุนี้ sample space S มี N หนทางที่แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน 1/N (N = 2,598,960) นักเล่นโพคเกอร์คนหนึ่งมีไพ่หนึ่งคู่ที่มีหน้าเหมือนกัน (เอสสองใบ, คิงสองใบ ฯลฯ) และอีกสามใบมีหน้าแตกต่างกันหมดและแตกต่างไปจากคู่นั้นด้วย เราคำนวณนักเล่นโพคเกอร์คนหนึ่งเท่านั้นที่มีหนึ่งคู่ได้ดังนี้

(1) เลือกหน้าของไพ่สำหรับคู่จากไพ่มี 13 หน้า นี้สามารถทำได้ $\binom{13}{1} = 13$ หนทางหรือวิธีการ

(2) เลือกไพ่สองใบจากหน้าที่เลือกในข้อ (1) นี้สามารถทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ หนทางหรือวิธีการ

(3) เลือกอีกสามหน้าสำหรับไพ่ 3 ใบอื่น ๆ เนื่องจากว่ามี 12 หน้าที่จะต้องเลือกนี้สามารถทำได้ $\binom{12}{3} = 220$ หนทางหรือวิธีการ

(4) เลือกไพ่หนึ่งใบของแต่ละหน้าที่เลือกในข้อ (3) นี้สามารถทำได้ $4^3 = 64$ หนทางหรือวิธีการ จากหลักของการนับ เราได้

(13) (6) (220) (64) = 1,098,240 หนทางหรือวิธีการที่นักเล่นโพคเกอร์คนหนึ่งจะมีไพ่หนึ่งคู่ที่มีหน้าเหมือนกัน เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ต้องการ คือ

$$\frac{1,098,240}{2,598,960} = 0.42 \text{ โดยประมาณ} \quad \textbf{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 6.12.7

ปัญหาวันเกิด มีคนอยู่ k คน ในห้องหนึ่ง คำนวณความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยสองคนจากคนเหล่านี้มีวันเกิดเหมือนกัน นั่นคือ วัน เดือน ปี เกิดของเขาเหมือนกัน? คำนวณค่าเล็กที่สุดของ k ที่ความน่าจะเป็น เป็น 1/2 หรือดีกว่าที่อย่างน้อยสองคนมีวันเกิดเหมือนกัน

วิธีทำ

เราจะละเดือนกุมภาพันธ์ที่มี 29 วัน และใช้ปีหนึ่งมี 365 วัน แต่ละคนมีวันเกิดที่จะเป็นไปได้ 365 วัน ด้วยเหตุนี้โอกาสของวันเกิดที่จะเป็นไปได้สำหรับ k คน คือ 365^k ดังนั้น sample space S ของเรามี 365^k หนทาง แต่ละหนทางเป็น ordered k-tuple

$$(x_1, x_2, \ldots.., x_k)$$

ในเมื่อ x_1 ใช้แทนวันเกิดของคนแรก x_2 แทนวันเกิดของคนที่สอง.....และ x_k แทนวันเกิดของคนที่ K เราสมมติว่าจำนวนทั้งหมดของ 365^k หนทาง ที่เป็นไปได้มความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน เท่ากับ $1/365^k$

จำนวนของคนในห้อง	5	10	20	23	30	40	60
ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยสองคนมีวันเกิดเหมือนกัน	0.027	0.117	0.411	0.507	0.706	0.891	0.994

ตารางที่ 6.6

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่สองคนในจำนวน k คนไม่มีวันเกิดเหมือนกัน ภายใต้ข้อกำหนดนี้ วันเกิดของคนแรกมีโอกาสได้ 365 วัน ที่เป็นไปได้ คนที่สองมีโอกาสได้ 364 วัน ที่เป็นไปได้ คนที่สามมีโอกาสได้ 363 วันที่เป็นไปได้.....และคนที่ K มีโอกาสได้ $365-(K-1)$ หรือ $365-K+1$ วันที่เป็นไปได้ เพราะฉะนั้น โดยหลักของผลคูณ จำนวนของเซ็ทที่เป็นไปได้ของ K วันเกิดที่สองวันเกิดไม่เหมือนกัน คือ

$$365.364.363 \ldots\ldots\ldots (365-k+1)$$

และจำนวนนี้คือ จำนวนของหนทางใน E

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ

$$P(E) = \frac{365.364.363 \ldots\ldots (365-k+1)}{365^k}$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยสองคนมีวันเกิดเหมือนกัน คือ

$$P\text{ (อย่างน้อยสองคนมีวันเกิดเหมือนกัน)} = 1 - P(E)$$

ในตารางที่ 6.6 ได้กำหนดค่า K ลงไปพร้อมด้วยความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยสองคนมีวันเกิดเหมือนกัน กรณี $K = 23$ จะมีโอกาส 1/2 หรือดีกว่าที่สองคนมีวันเกิดเหมือนกัน

6.13 การสุ่มจาก Sample space ที่มี K จำพวก

ในการสุ่มตัวอย่างบอล n ลูก จากกล่อง (แบบไม่ใส่คืน) ที่มีบอล N ลูก ในกล่องกรณีที่มีบอลอยู่ด้วยกัน K สี เช่น ขาว ดำ แดง ..... แต่ละสีมีจำนวน $N_1, N_2, \ldots N_k$ ลูก ตามลำดับ ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลสีแรก X_1 ลูก บอลสีที่สอง X_2 ลูก.....และบอลสีที่ K จำนวน X_k ลูก จะเป็นเท่าไร

วิธีทำ

ความน่าจะเป็นที่ต้องการคำนวณได้จากสูตร

$$P\text{ (สีแรก } X_1 \text{ ลูก, สีที่สอง } X_2 \text{ ลูก, ... สีที่ } KX_k \text{ ลูก)} = \frac{\binom{N_1}{X_1}\binom{N_2}{X_2} \ldots\ldots \binom{N_k}{X_k}}{\binom{N}{n}}$$

สูตรนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้วิธีเดียวกับกรณีที่มีบอลในกล่องเพียงสองสีหรือสองชนิด ประการแรกเมื่อจะสุ่มบอล n ลูก จากกล่องที่มีบอล N ลูก จำนวนหนทางที่จะเป็นไปได้ใน sample space ของการทดลองนี้เท่ากับ $\binom{N}{n}$ แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน ประการที่สอง

จำนวนหนทางในเหตุการณ์ที่จะได้บอลสีแรก X_1 ลูก บอลสีที่สอง X_2 ลูก ..... บอลสีที่ KX_k ลูก เท่ากับ

$$\binom{N_1}{X_1}\binom{N_2}{X_2}\cdots\cdots\binom{N_k}{X_k}$$

ทั้งนี้ เพราะเรามี $\binom{N_1}{X_1}$ หนทางหรือวิธีการที่จะหยิบบอลสีแรก X_1 ลูก จาก N_1 ลูก

เรามี $\binom{N_2}{x2}$ หนทางหรือวิธีการที่จะหยิบบอลสีที่สอง X_2 ลูก จาก N_2 ลูก

เรามี $\binom{N_k}{K_k}$ หนทางหรือวิธีการที่จะหยิบบอลสีที่ K X_k ลูก จาก N_k ลูก

จำนวนหนทางหรือวิธีการทั้งสิ้นจึงเท่ากับผลคูณของจำนวนเหล่านี้ ความน่าจะเป็นที่ต้องการจึงเท่ากับ

$$P\,(\text{สีแรก } X_1 \text{ ลูก, สีที่สอง } X_2, \ldots\ldots \text{ สีที่ K } X_k \text{ ลูก}) = \frac{\binom{N_1}{X_1}\binom{N_2}{X_2}\cdots\cdots\binom{N_k}{X_k}}{\binom{N}{n}}$$

ตัวอย่างที่ 6.13.1

แจกไพ่ 13 ใบ จากสำรับ ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ขึ้นมือเป็นโพดำ 5 ใบ โพแดง 4 ใบ ดอกจิก 2 ใบ และข้าวหลามตัด 2 ใบ เท่ากับเท่าไร

วิธีทำ

ในที่นี้ไพ่ 52 ใบ แบ่งออกเป็น 4 ประเภท คือ โพดำ โพแดง ดอกจิก และข้าวหลามตัด อย่างละ 13 ใบ นั่นคือ

$$N_1 = 13,\ N_2 = 13,\ N_3 = 13,\ N_4 = 13,\ \text{และ } n = 13,\ k = 4$$

จากสูตร

P (โพดำ 5 ใบ, โพแดง 4 ใบ, ดอกจิก 2 ใบ, ข้าวหลามตัด 2 ใบ)

$$= \frac{\binom{13}{5}\binom{13}{4}\binom{13}{2}\binom{13}{2}}{\binom{52}{13}}$$

$= 0.009$ **ตอบ**

สรุป

การทดลองเชิงสุ่มและ sample space เป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาความน่าจะเป็น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่งจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 ถ้าเหตุการณ์ A มีความน่าจะเป็น $P(A) = 1$ แล้ว A จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน หากเหตุการณ์ A มีความน่าจะเป็น $P(A) = 0$ แล้ว A จะไม่สามารถเกิดขึ้นได้เลย

แหล่งที่มาทั้งสามของความน่าจะเป็นคือ priori, impirical, subjective หากเหตุการณ์ทั้งหมดมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันแล้ว

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนหนทางที่สามารถเกิดขึ้นแก่ A ในการทดลอง}}{\text{จำนวนหนทางทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้นในการทดลอง}}$$

Complementary ของเหตุการณ์ของ A คือ $\bar{A}$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ความน่าจะเป็นร่วมของสองเหตุการณ์ A และ B คือ

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B) = P(BA)$$

โดยทั่ว ๆ ไปความน่าจะเป็นร่วมคำนวณหาได้จากการคูณของความน่าจะเป็น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B เกิดขึ้น คือ

$$P(A \text{ หรือ } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

สังเกตว่าคำว่าหรือโดยทั่ว ๆ ไปได้จากการบวกของความน่าจะเป็น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A_1 หรือเหตุการณ์ A_2 หรือ.....เหตุการณ์ A_n เกิดขึ้น คือ

$$P(A_1 \text{ หรือ } A_2 \text{ หรือ } A_3 \ldots\ldots \text{ หรือ } A_n) = \sum_{i=1}^{K} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{K} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i<j<r=3}^{K} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots\ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ภายใต้เงื่อนไขที่เหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว คือ

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขสามารถนำเอาไปประยุกต์กับทฤษฎีของเบยส์ได้

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\,P(B_i)}{\sum_{j=1}^{K} P(A/B_j)\,P(B_j)} \quad i = 1, 2, \ldots\ldots k$$

ในกรณีสองเหตุการณ์ A กับ B มีความอิสระกันก็ต่อเมื่อ P(AB) = P(A) P(B) หรือ P(A) = P(A/B) หรือ P(B) = P(B/A)

mutually exclusive เหตุการณ์ที่เป็น mutually exclusive กันก็ต่อเมื่อเหตุการณ์นั้นไม่มีเหตุการณ์เกิดร่วมกันเลย หากเอาเหตุการณ์เหล่านั้นมา intersection กันก็จะได้เซ็ทว่างเปล่าและความน่าจะเป็นของเซ็ทว่างเปล่ามีค่าเป็นศูนย์

Collectively exhaustive กลุ่มหนึ่งของเหตุการณ์จะเป็น collectively exhaustive หากกลุ่มของเหตุการณ์นั้นมีเหตุการณ์ร่วมกันสามารถเกิดขึ้น

Hypergeometric Distribution ใช้ในการสุ่มตัวอย่างแบบหยิบไม่ใส่คืน กรณีที่ประชากรมีเพียงสองชนิด

$$P(X) = \frac{\binom{m}{x}\binom{w}{r-x}}{\binom{n}{r}}$$

ปัญหาวันเกิด ต้องการคำนวณความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยสองคนจาก k คนมีวันเกิดเหมือนกัน E เป็นเหตุการณ์ที่สองคนในจำนวน k คน ไม่มีวันเกิดเหมือนกัน

$$P(E) = \frac{365.364 \,\ldots\ldots\ldots\, (365-k+1)}{365^k}$$

P (อย่างน้อยสองคนมีวันเกิดเหมือนกัน) = 1 − P(E)

การสุ่มจาก Sample space **ที่มี** k **จำพวก**

การสุ่มตัวอย่างบอล n ลูกจากกล่องมี N ลูก (แบบไม่ใส่คืน) ซึ่งมีบอลอยู่ด้วยกัน k สี แต่ละสีมีจำนวน $N_1, N_2 \ldots\ldots N_k$ ตามลำดับ ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลสีแรก X_1 ลูก บอลสีที่สอง X_2 ลูก ..... และบอลสีที่ k, X_k จะเป็น

$$P\,(\text{สีแรก } X_1, \text{ สีที่สอง } X_2, \ldots \text{ สีที่ } K\, X_k \text{ ลูก}) = \frac{\binom{N_1}{X_1}\binom{N_2}{X_2}\ldots\ldots\binom{N_k}{X_k}}{\binom{N}{n}}$$

6.14 ตัวแปรเชิงสุ่ม

แนวความคิดเกี่ยวกับ sample space เป็นที่คุ้นเคยกับนักศึกษามาแล้ว และเราจะใช้ตัวอย่างอยู่บนพื้นฐานของแนวความคิดนี้แสดงความเป็นมาของตัวแปรเชิงสุ่มและพังก์ชันน่าจะเป็นของ

ตัวแปรเชิงสุ่มสำหรับจุดมุ่งหมายของตัวอย่าง วิธีการที่จะเข้าถึงคำจำกัดความทั่ว ๆ ไป แล้วจึงไปศึกษาบางคุณสมบัติของตัวแปรเชิงสุ่ม อย่างเช่น โยนเหรียญ 3 อันหนึ่งครั้งจะปรากฏเป็นหัวกี่อันดังตาราง

ตารางที่ 6.7

เหตุการณ์เชิงเดียว	จำนวนหัว	ความน่าจะเป็น	
HHH	3	1/8	
HHT	2	1/8	3/8
HTH	2	1/8	
THH	2	1/8	
HTT	1	1/8	3/8
THT	1	1/8	
TTH	1	1/8	
TTT	0	1/8	

คำตอบก็คือ คำนวณหาจำนวนผลลัพธ์ของการทดลอง จำนวนอาจเป็น 0, 1, 2 หรือ 3 ถึงแม้ว่าเราไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ได้ถูกต้องแน่นอนนัก เราก็สามารถกล่าวได้ว่าความน่าจะเป็นควรจะเป็นเท่าไร sample space สำหรับการทดลองแสดงในคอลัมน์แรก คอลัมน์ที่สองแสดงจำนวนของหัวที่ปรากฏสำหรับแต่ละเหตุการณ์เชิงเดียว และคอลัมน์ที่สามแสดงความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์เชิงเดียว

รายละเอียดเกี่ยวกับจำนวนหัวที่เป็นไปได้และความน่าจะเป็นที่จะปรากฏหัวให้ดูได้ในตารางที่ 6.7 ความน่าจะเป็นที่จะปรากฏหัว 2 อัน คำนวณหาได้โดยการบวกความน่าจะเป็น HHT, HTH, THH และในทำนองเดียวกันสำหรับความน่าจะเป็นอื่น ๆ ก็ใช้วิธีการแบบเดียวกัน

ตารางที่ 6.8
ฟังก์ชันน่าจะเป็นที่ปรากฏเป็นหัว

จำนวนของหัว	0	1	2	3
ความน่าจะเป็น	1/8	3/8	3/8	1/8

ถ้าหากว่าเราให้ตัวแปร X ใช้แทนจำนวนหัวแล้วตารางที่ 6.6 แสดงค่า x ที่เป็นไปได้และความน่าจะเป็นของแต่ละค่าคือฟังก์ชันน่าจะเป็นของ X ดังตาราง

ตารางที่ 6.9

x	0	1	2	3
P (X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

เนื่องจากว่าค่าของ X คือหมายเลขที่คำนวณมาจากผลลัพธ์ของการทดลอง เรียก X ว่าตัวแปรเชิงสุ่ม

คำจำกัดความ 6.14.1 ตัวแปรเชิงสุ่มหมายถึง ฟังก์ชันที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริงซึ่งมีความสัมพันธ์กับแต่ละสมาชิกหรือหนทางใน sample space นั่นคือ มี sample space เป็นโดเมนและมีพิสัยเป็นเซทของเลขจำนวนจริง

เราใช้อักษรตัวใหญ่อย่างเช่น X, Y หรือ Z แทนตัวแปรเชิงสุ่มและใช้อักษรตัวเล็ก x, y, หรือ z เป็นค่าของตัวแปร

6.14.1 ค่าคาดหวัง

ความหมายของค่าคาดหวังก็เหมือนกับค่ามัชฌิมเลขคณิต แต่ในทางความน่าจะเป็น เขานิยมเรียกค่าคาดหวัง แนวความคิดต่อไปเราจะใช้คำว่าค่าคาดหวังนี้

สมมติว่า ท่านจะได้รับ 2 บาท ในการโยนเหรียญอันหนึ่งปรากฏเป็นหัวและได้รับ 3 บาท ถ้าหากว่าเป็นก้อย ท่านคาดหวังจะได้รับกี่บาทในการโยนเหรียญอันหนึ่งซ้ำ ๆ กัน สมมติว่าเกมนี้มีเพียง 10 ครั้ง และปรากฏเป็นหัว 4 ครั้ง และเป็นก้อย 6 ครั้ง จำนวนเงินทั้งหมดที่ท่านจะได้รับ

$$(2 \times 4) + (3 \times 6) = 26 \text{ บาท}$$

คิดเฉลี่ยต่อเกมหนึ่ง

$$\frac{(2 \times 4) + (3 \times 6)}{10} = 2 \times \frac{4}{10} + 3 \times \frac{6}{10} = 2.6 \text{ บาท}$$

ค่า $\frac{4}{10}$ และ $\frac{6}{10}$ ก็คือความถี่สัมพัทธ์ที่จะปรากฏเป็นหัวและก้อย เมื่อเกมนี้มีขึ้นหลาย ๆ ครั้ง ความถี่สัมพัทธ์ก็เข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ เราก็อาจกล่าวได้ว่า ถ้าเกมมีขึ้นจำนวนมากครั้ง จำนวนค่าเฉลี่ย

ของเงินที่ท่านจะได้รับก็มีค่าโดยประมาณ

$$2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2.5 \text{ บาท}$$

เราใช้สัญลักษณ์มาแทนค่าเหล่านี้โดยให้ตัวแปรค่า x เป็นจำนวนเงินที่ท่านได้รับ ค่าที่จะใช้แทนก็คือ $x_1 = 2$ บาท; $x_2 = 3$ บาท เมื่อจำนวนเกมมีมาก ๆ ครั้ง ค่า x_1 ก็ยังมีค่าเท่ากับ 2 บาท; x_2 ก็ยังมีค่าเท่ากับ 3 บาท; $P(H) = \frac{1}{2}$; $P(T) = \frac{1}{2}$ ผลลัพธ์ก็จะได้เป็น

$$x_1P(H) + x_2P(T) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2.5 \text{ บาท}$$

จากผลที่ได้กล่าวมาแล้ว เพื่อที่จะนำมาเป็นสูตรทั่ว ๆ ไปในกรณีที่มี n หนทางโดยให้ X เป็นตัวแปรค่าของหนทาง $x_1, x_2, x_3, \ldots.. x_n$ ซึ่งมีความน่าจะเป็น $P(x_1)$ $P(x_2)$, $P(x_3)$ .....$P(x_n)$ ตามลำดับ; $E(X)$ เป็นค่าคาดหวังของตัวแปรค่า X เราก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1P(x_1) + x_2P(x_2) + x_3P(x_3) + \ldots.. x_nP(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_iP(x_i) \qquad \ldots\ldots\ldots(6.14.1) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.14.1 ในการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง สมมติว่าท่านจะได้รับเงิน 1, 2, 3, 4, 5, 6 บาท เมื่อลูกเต๋าปรากฏหน้า 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6

วิธีทำ ตัวแปรค่า X มี 6 หนทาง $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$

และ $x_6 = 6$ บาท; $P(X = 1) = P(X = 2) = \ldots.. = P(X = 6) = \frac{1}{6}$; แล้ว

$$\begin{aligned} E(x) &= x_1P(X = 1) + x_2P(X = 2) + x_3P(X = 3) + \ldots.. + x_6P(X = 6) \\ &= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.14.2 ล็อตเตอรี่ 1,000 ฉบับ ฉบับละ 25 สตางค์ และรางวัล 100 บาท จงคำนวณหาค่าคาดหวัง

วิธีทำ เราจะเห็นได้ว่าตัวแปรค่าในที่นี้มีเพียง 2 หนทางเท่านั้น คือ ชนะ กับแพ้ ถ้าชนะก็จะได้เงินที่ชนะ (100 บาท - .25 บาท) เพราะว่าใน 100 บาท มีเงินของเราอยู่ 25 สตางค์ ด้วย แต่ถ้าแพ้เราก็เสีย 25 สตางค์ ดังนั้น $E(X)$ ก็จะมีค่าได้

$$E(x) = (100 \text{ บาท} - .25 \text{ บาท}) \times P(\text{ชนะ}) + (-0.25) \times P(\text{เสีย})$$

$$= (100 \text{ บาท} - .25 \text{ บาท}) \times \frac{1}{1000} + (-0.25) \times \frac{999}{1000}$$

$$= .10 - .25 = -.15 \text{ บาท}$$

นั่นคือ โดยเฉลี่ยแล้วผู้ซื้อล๊อตเตอรี่จะขาดทุนหรือเสียเปรียบแก่เจ้าของล๊อตเตอรี่ใบละ 15 สตางค์ ความจริงแล้วเจ้าของล๊อตเตอรี่ไม่ได้กำไรถึง 15 สตางค์ เพราะจะต้องเสียค่าใช้จ่ายแก่พนักงาน, ค่ากระดาษ, เครื่องไม้เครื่องมือทำล๊อตเตอรี่และเปอร์เซ็นต์ที่จะให้แก่ผู้ขายด้วย

ตัวอย่าง 6.14.3 ในกรณีที่ท่านซื้อ 500 ฉบับ ค่าคาดหวัง จะมีค่าเท่าใด เนื่องจาก 500 ฉบับ คิดเป็นเงินก็จะได้ 125 บาท เงินรางวัลที่ท่านจะได้รับ (100-125) เมื่อท่านถูก ถ้าหากท่านเสียท่านก็เสียไป 125 บาท ดังนั้นรางวัลที่คาดหวังจะได้โดยเฉลี่ยแล้วก็คือ

$$E(x) = (100 - 125) \times P(\text{ชนะ}) + (-125) \times P(\text{เสีย})$$

$$= (100 - 125) \times \frac{500}{1000} + (-125) \times \frac{500}{1000}$$

$$= -25 \times \frac{500}{1000} - 125 \times \frac{500}{1000}$$

$$= -12.5 - 62.5$$

$$= -75 \text{ บาท}$$

จะเห็นได้ว่าโดยเฉลี่ยแล้วท่านมีโอกาสเสียถึง 75 บาท ท่านไม่มีโอกาสที่ชนะเลย ถ้าหากว่าท่านชนะ ท่านก็ยังขาดทุน (125-100) = 25 บาทนั่นเอง

แบบฝึกหัดที่ 6.4

1. บางครั้งนายเขียวจะเดินจากที่ทำงานไปบ้านด้วยความน่าจะเป็น 0.15 บางครั้งเขานั่งรถเมล์ด้วยความน่าจะเป็น 0.62 และบางครั้งเขาขับรถส่วนตัวด้วยความน่าจะเป็น 0.23 จงหาความน่าจะเป็นที่เขาไม่ได้ขับรถส่วนตัว (0.77)

2. ถ้าหากความน่าจะเป็นในการจับเอซจากไพ่สำรับหนึ่งเท่ากับ $\frac{1}{13}$, ความน่าจะเป็นในการจับควีนแดง $\frac{1}{26}$, และความน่าจะเป็นในการจับเจ็ดข้าวหลามตัด $\frac{1}{52}$, จงหาความน่าจะเป็นในการจับไพ่เอซ, ควีนแดง, หรือเจ็ดข้าวหลามตัดอย่างใดอย่างหนึ่ง ($\frac{7}{52}$)

3. ถ้าหากความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในเดือนกันยายน 0.35 และความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในเดือนกันยายน ถ้าฝนตกก่อน 0.70 ความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในเดือนกันยายนติดต่อกัน 2 วัน จะเป็นเท่าไร (0.245)

4. ถ้าความน่าจะเป็นที่ชายสมรสแล้วจะออกเสียงเลือกตั้ง 0.50 และความน่าจะเป็นที่สตรีจะออกเสียงเลือกสามีของตน 0.90 อยากทราบว่า ความน่าจะเป็นที่ทั้งชายสมรสแล้วและสตรีจะออกเสียงเลือกตั้งเป็นเท่าไร (0.45)

5. สมาชิกของสโมสรแห่งหนึ่ง 10 เปอร์เซ็นต์ เป็นนายธนาคาร และ 20 เปอร์เซ็นต์ เป็นบุคคลที่มีรายได้มากกว่า 10,000 บาทต่อปี ถ้าเป็นที่ทราบกันว่า 80 เปอร์เซ็นต์ ของนายธนาคารมีรายได้มากกว่า 10,000 บาทต่อปี อยากทราบว่าสมาชิกที่มีรายได้มากกว่า 10,000 บาทเป็นนายธนาคารกี่เปอร์เซ็นต์ และอยากทราบว่าจำนวนสมาชิกที่เป็นนายธนาคารหรือบุคคลที่มีรายได้มากกว่า 10,000 บาทต่อปี (ใช้สูตร P (A และ B) = P (A) P (B/A) และ P (A หรือ B) = P (A) + P (B) − P (A และ B) เป็นกี่เปอร์เซ็นต์ (8%, 22%)

6. ในการโยนเหรียญอันหนึ่งและทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ปรากฏออกเป็นหัว และ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ปรากฏออกหน้า 3 หรือ 6 จงคำนวณหาความน่าจะเป็นของ E_1, E_2, E_1E_2, E_1/E_2, และ $E_1 \cup E_2$ (1/2, 1/3, 1/6, 1/2, 2/3)

7. มีกล่อง 2 กล่อง กล่องแรกมีลูกบอลสีขาว 4 และ สีดำ 2 อีกกล่องหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 3 และสีดำ 5 ถ้าหยิบลูกบอล 1 ลูก จากแต่ละกล่อง จงหาความน่าจะเป็น
   ก. ทั้งสองลูกเป็นสีขาว (1/4)
   ข. ทั้งสองลูกเป็นสีดำ (5/24)
   ค. ลูกหนึ่งสีขาวและอีกลูกหนึ่งสีดำ (13/24)

8. นาย ก. กับ นาย ข. เล่นหมากรุกกัน 12 เกม นาย ก. ชนะ 6 เกม นาย ข. ชนะ 4 เกม และ 2 เกมเสมอกัน เขาทั้งสองตกลงกันที่จะเล่น 3 เกม จงหาความน่าจะเป็นที่

   1) นาย ก. ชนะ 3 เกมรวด (1/8)
   2) นาย ก. และ นาย ข. ชนะสลับกัน (5/36)
   3) นาย ข. ชนะอย่างน้อย 1 เกม (19/27)
   4) เสมอกันสองเกม (15/216)

9. ชายคนหนึ่งซื้อบัตรยิงเป้าใบหนึ่ง โอกาสที่เขาจะได้รับรางวัลที่หนึ่ง 5,000 บาท รางวัลที่สอง 2,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.001 และ .003 ตามลำดับ อยากทราบว่าราคาที่ยุติธรรมที่จะซื้อบัตรยิงเป้าใบละกี่บาท (11 บาท)

10. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 8 ลูก สีขาว 3 ลูก สีน้ำเงิน 9 ลูก ถ้าหยิบลูกบอล 3 ลูกโดยวิธีสุ่ม จงคำนวณหาความน่าจะเป็น

   ก) ทั้งสามลูกเป็นสีแดง (14/285)
   ข) ทั้ง 3 ลูก เป็นสีขาว ($\frac{1}{1140}$)
   ค) 2 ลูก เป็นสีแดง และ 1 ลูก เป็นสีขาว (7/95)
   ง) อย่างน้อย 1 ลูก เป็นสีขาว ($\frac{23}{57}$)
   จ) ทั้ง 3 ลูก มีสีต่าง ๆ กัน (18/95)
   ฉ) ทั้ง 3 ลูก จะต้องเรียงลำดับกัน คือ สีแดง สีขาว สีน้ำเงิน (3/95)

11. ทอดลูกเต๋าสีเขียวและลูกเต๋าสีแดงอย่างละหนึ่งลูก

   ก) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ผลบวกมากกว่า 10 กำหนดให้ลูกเต๋าสีแดงปรากฏหน้า 5 (1/6)
   ข) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ผลบวกน้อยกว่า 6 กำหนดให้ลูกเต๋าสีแดงปรากฏหน้า 2 (1/2)
   ค) หาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขที่ผลบวกเท่ากับ 7 กำหนดให้ลูกเต๋าสีแดงปรากฏหน้าต่ำกว่า 4 (1/6)

12. สมมติว่าใครคนหนึ่งจะให้เงินเรา 2 บาท ต่อครั้งที่เราทอดลูกเต๋าปรากฏหน้า 6 อยากทราบว่าเราจะต้องจ่ายเขาเท่าใดเมื่อลูกเต๋าปรากฏหน้า 1, 2, 3, 4, หรือ 5 เกมนั้นจึงจะยุติธรรม (1/3)

13. ในการเล่นเกมชนิดหนึ่ง เราจะได้รับ 5 บาท ถ้าเราจับไพ่ได้เอซ และ 8 บาท ถ้าเราจับไพ่ได้คิง จากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ ถ้าเราจับไม่ได้ทั้ง เอซ หรือ คิง ทั้งสองอย่าง เราจะต้องจ่ายเขา 1.17 บาท ให้หาค่าคาดหวัง (0.01)

14. จับไพ่ 5 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ กำหนดให้เหตุการณ์ A และ B ดังนี้

    A : ไพ่ทั้ง 5 ใบ เป็นโพดำ

    B : ไพ่ทั้ง 5 ใบ เป็น เอซ, คิง, ควีน, แจ็ค, และสิบเป็นดอกเดียวกันหมด

    ก) จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ((13! 47!) / (8! 52!))

    ข) จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ((4 × 5! 47!) / 52!))

    ค) จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ AB (5! 47! / 52!)

    ง) จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A \cup B$

15. ชายคนหนึ่งต้องการซื้อรถใหม่ เขามีโอกาสเลือกเครื่องยนต์ได้ 3 ชนิด ตัวถังรถได้ 7 แบบ และสีได้ 14 สี อยากทราบว่าจะมีรถชนิดต่าง ๆ กี่ชนิดที่จะให้เขาเลือก (294)

6.15 การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

ประชากรทวินามแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะด้วยกัน อย่างเช่น ในการโยนสตางค์อันหนึ่งซึ่งปรากฏออกเป็นหัวและเป็นก้อย ในการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่งซึ่งปรากฏออกเป็นหน้า 1 กับปรากฏไม่ใช่หน้า 1 (หน้า 2, 3, 4, 5 และ 6) พลเมืองแบ่งออกเป็นเพศหญิงและเพศชาย หรือผู้รู้หนังสือและไม่รู้หนังสือ ความสำเร็จกับความไม่สำเร็จ เป็นต้น

คำจำกัดความในการทดลองแบบทวินามหนึ่งประกอบไปด้วยคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) การทดลองหนึ่งประกอบด้วย n ครั้ง หรือ n เหตุการณ์ ซึ่งเหมือนกันโดยตลอด

2) การทดลองของแต่ละครั้งหรือแต่ละเหตุการณ์หนึ่งในสองหนทาง เรียกว่าหนทางของความสำเร็จ ในทางตรงข้ามเรียกว่าหนทางของความไม่สำเร็จ

3) ความน่าจะเป็นของความสำเร็จในเหตุการณ์หนึ่งหรือครั้งหนึ่งเท่ากับ p และความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จเท่ากับ $(1-p) = q$

4) เหตุการณ์จะต้องอิสระซึ่งกันและกัน

5) ให้ x เป็นจำนวนครั้งของความสำเร็จในจำนวนเหตุการณ์ n

สำหรับ $n = 1$ หรือเหตุการณ์เกิดขึ้นครั้งเดียว เราก็จะมี 2 เหตุการณ์เชิงเดียว E_1 แทนความสำเร็จ S, และ E_2 แทนความไม่สำเร็จ F, ซึ่งมีความน่าจะเป็น p และ $q = (1-p)$ ตามลำดับ

ค่า $x = 1$ แทนความสำเร็จ $= 1$ และ $x = 0$ แทนความสำเร็จ $= 0$ หรือไม่มีความสำเร็จเลย การแจกแจงน่าจะเป็นสำหรับ x ดังดูได้จากตารางที่ 6.10 ทางขวามือ

ตารางที่ 6.10 $P(x)$ สำหรับการทดลองแบบทวินาม $n = 1$

เหตุการณ์เชิงเดียว		$P(E_i)$	x
E_1	S	p	1
E_2	F	q	0

x	$p(x)$
0	q
1	p

$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = q + p = 1$$

ตัวอย่าง 6.15.1 โยนเหรียญอันหนึ่ง สมมติว่าออกหัวเป็นความสำเร็จ $x = 1$ ไม่ออก เป็นความไม่สำเร็จ $x = 0$

เหตุการณ์เชิงเดียว		$P(E_i)$	x
E_1	S = H	$p = \frac{1}{2}$	1
E_2	F = T	$q = \frac{1}{2}$	0

x	$p(x)$
0	$q = \frac{1}{2}$
1	$p = \frac{1}{2}$

$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = q + p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

สำหรับการทดลองนี้ประกอบด้วย $n = 2$ หรือเหตุการณ์เกิดขึ้นสองครั้ง ก็จะมีสี่เหตุการณ์เชิงเดียว แต่สัญลักษณ์ SF หมายถึงเหตุการณ์ครั้งแรกเป็นความสำเร็จ ครั้งที่สองเป็นความไม่สำเร็จ ดังตารางที่ 6.11

ตารางที่ 6.11 $P(x)$ สำหรับการทดลองแบบทวินาม $n = 2$

เหตุการณ์เชิงเดียว		$P(E_i)$	x
E_1	SS	$p.p = p^2$	2
E_2	SF	$p.q$	1
E_3	FS	$q.p$	1
E_4	FF	$q.q = q^2$	0

x	$P(x)$
0	q^2
1	$2pq$
2	p^2

$$\sum_{x=0}^{2} p(x) = (q+p)^2 = (1)^2 = 1$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว คำนวณได้ง่าย เพราะแต่ละจุดเป็น intersection หนึ่งของสองเหตุการณ์ที่อิสระซึ่งกันและกัน อย่างเช่น หนทางของครั้งแรกกับครั้งที่สอง ดังนั้น $P(E_i)$ ก็สามารถคำนวณได้โดยใช้กฎของการคูณของความน่าจะเป็น

$$P(E_1) = P(SS) = P(S)P(S) = p^2$$
$$P(E_2) = P(SF) = P(S)P(F) = pq$$
$$P(E_3) = P(FS) = P(F)P(S) = qp$$
$$P(E_4) = P(FF) = P(F)P(F) = q^2$$

ค่าของ x เป็นความสำเร็จของแต่ละเหตุการณ์เชิงเดียว ดังเช่น $x = 0$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_4 ความสำเร็จ $= 0$ $x = 1$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_2 และ E_3 ซึ่งมีความสำเร็จ $= 1$ และ $x = 2$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_1 ซึ่งมีความสำเร็จ $= 2$ ส่วนการแจกแจงน่าจะเป็น $p(x)$ ดังจะเห็นได้จากตารางที่ 6.11 ขวามือ ความน่าจะเป็น $p(x)$ เป็นเทอมหนึ่ง ๆ ของ $(q+p)^2$ เมื่อกระจายออก

$$\sum_{x=0}^{2} p(x) = q^2 + 2pq + p^2 = (q+p)^2 = 1$$

ในกรณีการทดลองแบบทวินามที่มีจำนวนเหตุการณ์เกิดขึ้นสามครั้งหรือ $n = 3$ ก็มีลักษณะคล้ายคลึงกันเมื่อ $n = 2$ ดังตารางที่ 6.12

ตารางที่ 6.12 $P(x)$ **สำหรับการทดลองแบบทวินาม** $n = 3$

	เหตุการณ์เชิงเดียว	$P(E_i)$	x
E_1	SSS	p^3	3
E_2	SSF	p^2q	2
E_3	SFS	p^2q	2
E_4	SFF	pq^2	1
E_5	FSS	p^2q	2
E_6	FSF	pq^2	1
E_7	FFS	pq^2	1
E_8	FFF	q^3	0

x	P (x)
0	q^3
1	$3pq^2$
2	$3p^2q$
3	p^3

$$\sum_{x=0}^{3} p(x) = (q+p)^3 = 1$$

ความสำเร็จ $x = 0$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_8 ความสำเร็จ $x = 1$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_4, E_6 และ E_7 ความสำเร็จ $x = 2$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_2, E_3 และ E_5 ความสำเร็จ $x = 3$ เป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว E_1

เพื่อให้สะดวกในการคำนวณและรวดเร็วขึ้นจากเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นจำนวนมากครั้ง จึงมีสูตรคำนวณหาการแจกแจงน่าจะเป็นสำหรับการทดลองตามแบบทวินาม ได้คือ

$$p(x) = C^n_x p^x q^{n-x} \qquad \text{..........(6.15.1)}$$

เมื่อ x เป็นค่าของความสำเร็จอาจเป็น $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$

n เป็นจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมด

p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในเหตุการณ์ครั้งหนึ่ง

q เป็นความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จในเหตุการณ์ครั้งหนึ่ง จากสูตรข้างต้นสามารถหาความน่าจะเป็นของความสำเร็จ x ได้

$$p(x = 0) = C^n_0 q^n = q^n$$

$$p(x = 1) = C^n_1 p\, q^{n-1} = npq^{n-1}$$

$$p(x = 2) = C^n_2 p^2 q^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2}$$

....

....

....

$$p(x = n) = C^n_n p^n q^{n-n} = p^n$$

ถ้าหากเราเอา $p(x)$ มาบวกกันทั้งหมดก็จะได้

$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = C^n_0 p^0 q^n + C^n_1 pq^{n-1} + C^n_2 p^2 q^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + C^n_n p^n q^0$$

$$= q^n + npq^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + p^n$$

$$= (q+p)^n = 1$$

ตัวอย่าง 6.15.2 ในการโยนเหรียญสองอัน สมมติให้ออกหัวเป็นความสำเร็จ จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้งสองอันไม่ออกหัวเลย $(x = 0)$ ที่ออกหัวเพียงอันเดียว $(x = 1)$ ที่ออกหัวสองอัน $(x = 2)$

ให้ p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จหรือออกหัวของเหรียญอันหนึ่ง $= \frac{1}{2}$

q เป็นความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จหรือออกก้อยของเหรียญอันหนึ่ง $= \frac{1}{2}$

n เป็นจำนวนเหรียญหรือจำนวนครั้งของเหตุการณ์ = 2

จากสูตร $$p(x) = C^n_x p^x q^{n-x}$$

$$p(x = 0) = C^2_0 p^0 q^{2-0} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

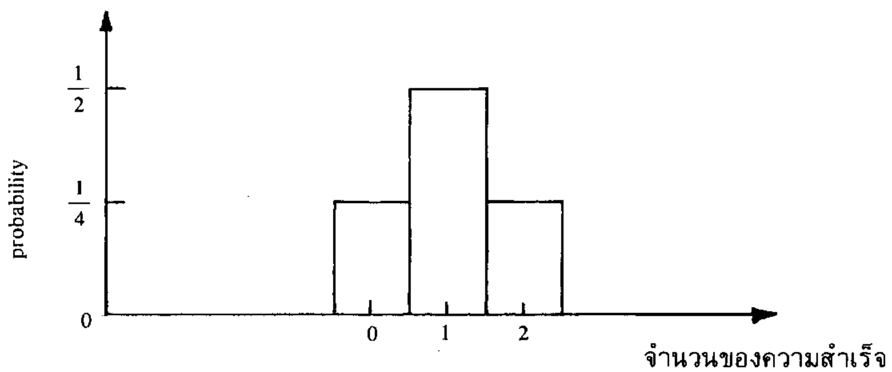
$$p(x = 1) = C^2_1 pq^{2-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$p(x = 2) = C^2_2 p^2 q^0 = (1)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

เราอาจแสดงได้ด้วยรูป

อันที่ 1	อันที่ 2	
H	H	} ความสำเร็จ (x = 2), ความน่าจะเป็น $= \frac{1}{4}$
H	T	} ความสำเร็จ (x = 1), ความน่าจะเป็น $= \frac{1}{2}$
T	H	
T	T	} ไม่มีความสำเร็จ (x = 0), ความน่าจะเป็น $= \frac{1}{4}$

นำเอาความน่าจะเป็นของความสำเร็จหรือการออกหัวจากข้างต้นมาสร้างแผนภูมิ จะได้รูปที่ 6.21



รูปที่ 6.21

ตัวอย่าง 6.15.3 ในการโยนเหรียญ 3 อัน

อันที่ 1	อันที่ 2	อันที่ 3
H	H	H
H	H	T
H	T	H
H	T	T
T	H	H
T	H	T
T	T	H
T	T	T

x	การแจกแจงน่าจะเป็น p(x)				
0	$C_0^3 p^0 q^3$	=	$(1)\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3$	=	$\frac{1}{8}$
1	$C_1^3 pq^2$	=	$3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$	=	$\frac{3}{8}$
2	$C_2^3 p^2 q$	=	$3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$	=	$\frac{3}{8}$
3	$C_3^3 p^3 q^0$	=	$(1)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0$	=	$\frac{1}{8}$

$$\sum_{x=0}^{3} p(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

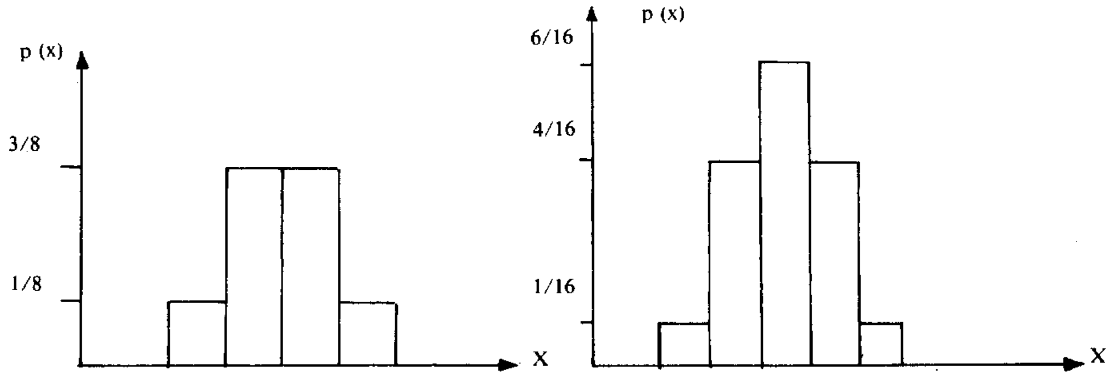
ตัวอย่าง 6.15.4 ในการโยนเหรียญ 4 อัน

อันที่ 1	อันที่ 2	อันที่ 3	อันที่ 4
H	H	H	H
H	H	H	T
H	H	T	H
H	H	T	T
H	T	H	H
H	T	H	T
H	T	T	H
H	T	T	T
T	H	H	H
T	H	H	T
T	H	T	H
T	H	T	T
T	T	H	H
T	T	H	T
T	T	T	H
T	T	T	T

x	การแจกแจงน่าจะเป็น p (x)				
0	$C_0^4 p^0 q^4$	=	$(1)\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4$	=	$\frac{1}{16}$
1	$C_1^4 pq^3$	=	$4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$	=	$\frac{4}{16}$
2	$C_2^4 p^2 q^2$	=	$6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$	=	$\frac{6}{16}$
3	$C_3^4 p^3 q$	=	$4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)$	=	$\frac{4}{16}$
4	$C_4^4 p^4 q^0$	=	$(1)\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$	=	$\frac{1}{16}$

$$\sum_{x=0}^{4} p(x) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

การสร้างแผนภูมิระหว่างความน่าจะเป็นกับความสำเร็จ (X) ของเหรียญ 3 อัน และ 4 อัน ได้ ดังรูปที่ 6.22



เหรียญ 3 อัน *รูปที่ 6.22* เหรียญ 4 อัน

ตัวอย่าง 6.15.5 นักยิงปืนคนหนึ่งสามารถยิงถูกเป้านัดหนึ่งด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ .8 ถ้าเขายิง 4 นัด

ก. เขาจะยิงถูกเป้าสองครั้งด้วยความน่าจะเป็นเท่าไร

ข. เขาจะยิงถูกเป้าอย่างน้อยสองครั้งด้วยความน่าจะเป็นเท่าไร

ค. เขาจะยิงถูกเป้าสี่ครั้งด้วยความน่าจะเป็นเท่าไร

วิธีทำ สมมติว่า เหตุการณ์เป็นอิสระซึ่งกันและกัน เป็นค่าคงที่จากเหตุการณ์หนึ่งไปยังเหตุการณ์หนึ่ง $n = 4$, $p = .8$ และ $q = 1 - .8 = .2$

ก)
$$p(x) = C^4_x p^x q^{4-x}$$
$$p(x = 2) = C^4_2 (.8)^2 (.2)^{4-2}$$
$$= \frac{4!}{2!\,2!} (.64)(.04) = .1536$$

ข)
$$p(x \geqslant 2) = p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$$
$$= 1 - p(x = 0) - p(x = 1)$$
$$= 1 - C^4_0 (.8)^0 (.2)^4 - C^4_1 (.8)(.2)^3$$
$$= 1 - .0016 - .0256 = .9728$$

ค)
$$p(x = 4) = C^4_4 (.8)^4 (.2)^0$$
$$= \frac{4!}{4!\,0!} (.8)^4 (1) = .4096$$

หมายเหตุ ความน่าจะเป็นเหล่านี้ อาจไม่ถูกต้องนัก ถ้านักยิงปืนสามารถที่จะพิจารณาการยิงถูกเป้าของแต่ละครั้งในกรณีเช่นนั้น เหตุการณ์ก็ไม่อิสระซึ่งกันและกันและ p ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นจากเหตุการณ์หนึ่งกับเหตุการณ์หนึ่ง

ตัวอย่าง 6.15.6 การทดลองสรรพคุณผลิตภัณฑ์เซรุ่มชนิดใหม่ ในการป้องกันหวัด โดยการฉีดเซรุ่มชนิดนี้เข้าไปในสิบคนและติดตามอาการเป็นระยะเวลาหนึ่งปี ผลของสรรพคุณปรากฏว่าแปดคนไม่มีอาการเป็นหวัดในฤดูหนาว ถ้าหากว่า สิบคนนั้นไม่ได้ฉีดเซรุ่มความน่าจะเป็นที่เขาเหล่านั้นจะไม่มีอาการเป็นหวัดในฤดูหนาวเท่ากับ .5 อยากทราบว่าความน่าจะเป็นที่คน 8 คนหรือมากกว่าไม่มีอาการเป็นหวัด สมมติว่า เซรุ่มนั้นไม่มีผลต่อการเพิ่มความต้านทานของร่างกาย

วิธีทำ ในที่นี้สมมติว่า วัคซีนไม่มีผลหรือสรรพคุณ ความน่าจะเป็นที่คนไม่มีอาการเป็นหวัดในฤดูหนาวเท่ากับ $p = .5$ ในทางตรงกันข้าม $q = .5$ และความน่าจะเป็นที่คน 8 คนหรือมากกว่าไม่มีอาการเป็นหวัด นั่นคือ $x = 8$, $x = 9$, และ $x = 10$ การแจกแจงน่าจะเป็นสำหรับจำนวน x คน ไม่มีอาการเป็นหวัด คือ

$$p(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$\begin{aligned}
p(\text{8 คน หรือมากกว่า}) &= p(x = 8) + p(x = 9) + p(x = 10) \\
&= C_8^{10}(.5)^8(.5)^2 + C_9^{10}(.5)^9(.5) + C_{10}^{10}(.5)^{10}(.5)^0 \\
&= C_8^{10}(.5)^{10} + C_9^{10}(.5)^{10} + C_{10}^{10}(.5)^{10} \\
&= \frac{10!}{8!\,2!}(.5)^{10} + \frac{10!}{9!\,1!}(.5)^{10} + \frac{10!}{10!\,0!}(.5)^{10} \\
&= 45(.5)^{10} + 10(.5)^{10} + (1)(.5)^{10} \\
&= (.5)^{10}(45 + 10 + 1) \\
&= \frac{56}{1024} = 0.055
\end{aligned}$$

มัชฌิมเลขคณิตและความแปรปรวนสำหรับตัวแปรทวินาม

จากคำจำกัดความของมัชฌิมเลขคณิตในกรณีที่มีการแจกแจงความถี่ (grouped data) ของประชากร อย่างเช่น

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}$$

ในเมื่อ x_i ค่าของจุดกลางชั้นที่ i, f_i ความถี่ของชั้นที่ i ถ้าเราเอาสูตรมัชฌิมเลขคณิตข้างต้นมาจัดรูปเสียใหม่ก็จะได้

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i f_i}{n}$$

จะเห็นได้ว่า สูตรนี้ ค่า x_i แต่ละค่าจะคูณด้วยสัดส่วน $\frac{f_i}{n}$ หรือเรียกว่าความถี่สัมพัทธ์ ถ้าจะพูดในรูปของความน่าจะเป็นก็เรียกว่า ความน่าจะเป็น, $P(x)$ อย่างเช่น ความน่าจะเป็นที่จะได้ค่า x_i ดังนั้น สูตรคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิตถ้าจะเขียนให้มี $P(x_i)$ มาเกี่ยวข้องด้วยก็เขียนได้

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i) \qquad \text{..........(6.15.2)}$$

(หมายเหตุ มัชฌิมเลขคณิต μ อาจใช้สัญลักษณ์ E(X) แทน ก็อ่านได้ว่า ค่าคาดหวัง)

ในกรณีของการแจกแจงแบบทวินาม x_i หมายถึง จำนวนของความสำเร็จ 0, 1, ..., 2 และ n ขณะเดียวกัน $P(x_i)$ ก็คือ ความน่าจะเป็นที่จะได้ x_i สำเร็จในจำนวน n เหตุการณ์

จากสูตรคำนวณหามัชฌิมเลขคณิตโดยความน่าจะเป็น เพื่อหาค่ามัชฌิมเลขคณิตของการแจกแจงแบบทวินาม เราก็สามารถหาค่าได้ ดังตัวอย่าง ในกรณี n = 1 จากตารางที่ 6.10 เราจะได้

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i p(x_i)$$
$$= (0)(q) + (1)(p) = p$$

ในกรณี n = 2 จากตารางที่ 6.11

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i p(x_i)$$
$$= (0)(q)^2 + (1)(2pq) + (2)(p^2)$$
$$= 2p(q + p) = 2p$$

ในทำนองเดียวกัน $n = 3, \mu = E(X) = 3p; n = 4, \mu = E(X) = 4p$ เพื่อที่จะให้เป็นสูตรทั่วไปขณะที่มีเหตุการณ์ n มัชฌิมเลขคณิตหรือค่าคาดหวังของการแจกแจงทวินามก็คือ

$$\mu = E(X) = np \qquad (6.15.3)$$

ค่าของความแปรปรวน (Variance) ในกรณีที่มีการแจกแจงความถี่ (grouped data) คำนวณได้จากสูตร

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 f_i}{n}$$

ถ้าเราจัดรูปเสียใหม่โดยใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่ามัชฌิมเลขคณิตเมื่อมีความน่าจะเป็นเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เราก็จะได้

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \frac{f_i}{n}$$

เราแทนค่าความถี่สัมพัทธ์ $\frac{f_i}{n}$ ได้โดยใช้ความน่าจะเป็นที่จะได้ f_i ก็สามารถจะให้คำจำกัดความของความแปรปรวน (Variance) ของการแจกแจงน่าจะเป็นได้

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p(x_i) \qquad (6.15.4)$$

หมายเหตุ ค่าของความแปรปรวน σ^2 สามารถใช้สัญลักษณ์ $V(X)$ หรือ $E(X-\mu)^2$ แทนก็ได้

จากสูตรข้างต้นสามารถที่นำไปหาสูตรความแปรปรวนสำหรับการแจกแจงทวินามได้ดังตัวอย่างในกรณีที่ $n = 1$ (จากตารางที่ 6.10) $\mu = p$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{x=0}^{1} (x-\mu)^2 p(x) \\
&= \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2 p(x) \\
&= (0-p)^2 p(x=0) + (1-p)^2 p(x=1) \\
&= (0-p)^2(q) + (1-p)^2(p) \\
&= p^2q + q^2p \\
&= pq(p+q) = pq
\end{aligned}$$

สำหรับ $n = 2$, $\mu = 2p$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{x=0}^{2} (x-\mu)^2 p(x) \\
&= (0-2p)^2 p(x=0) + (1-2p)^2 p(x=1) + (2-2p)^2 p(x=2) \\
&= (0-2p)^2(q)^2 + (1-2p)^2(2pq) + (2-2p)^2(p)^2
\end{aligned}$$

$$= \quad 4p^2q^2 + (1-4p+4p^2)(2pq) + 4(1-p)^2(p)^2$$

$$= \quad 4p^2q^2 + (1-4pq)(2pq) + 4p^2q^2$$

$$= \quad 8p^2q^2 + (1-4pq)(2pq)$$

$$= \quad 2pq(4pq+1-4pq) \quad = \quad 2pq$$

ในกรณีที่ $n = 3, n = 4$ ก็สามารถพิสูจนได้ว่า ความแปรปรวน σ^2 ก็จะมีค่าเท่ากับ- 3pq และ 4pq ตามลำดับ เพื่อที่จะให้ได้เป็นสูตรทั่วไป ๆ ในกรณีที่มีเหตุการณ์คำนวณ n ค่าของความแปรปรวน σ ก็เป็น

$$\sigma^2 = npq \qquad \text{..........(6.15.5)}$$

ตัวอย่าง 6.15.7 โยนเหรียญ 3 อัน จงคำนวณหา มัชฌิมเลขคณิต μ และค่าของความแปรปรวน σ^2

วิธีทำ ในที่นี้เราถือว่าเหรียญแต่ละอันมีความสมดุลย์กัน ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวหรือก้อยเท่ากับ $\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นของความสำเร็จ $p = \frac{1}{2}; n = 3$

จากสูตรมัชฌิมเลขคณิต $\mu = np$

$$= 3 \times \frac{1}{2} = 1.5$$

ค่าของความแปรปรวน $\sigma^2 = npq$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

ตัวอย่าง 6.15.8 ทอดลูกเต๋า 3 ครั้ง จงคำนวณหามัชฌิมเลขคณิต μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ที่จะปรากฏเลข 6

วิธีทำ ความน่าจะเป็นที่จะปรากฏเลข 6 $p = \frac{1}{6}; q = 1-p = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}; n = 3$

จากสูตร $\mu = np$

$$= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$= \sqrt{3 \times \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12}}$$

แบบฝึกหัดที่ 6.5

1. จงหาค่ามัชฌิมเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงทวินาม ดังต่อไปนี้

   ก. $n = 400$ และ $p = \frac{1}{2}$ $(\mu = 200, \sigma = 10)$

   ข. $n = 32$ และ $p = \frac{1}{9}$ $(\mu = \frac{32}{9}, \sigma = \frac{16}{9})$

   ค. $n = 100$ และ $p = \frac{1}{5}$ $(\mu = 20, \sigma = 4)$

   ง. $n = 900$ และ $p = \frac{1}{3}$ $(\mu = 300, \sigma = 14.14)$

2. ภาชนะใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 10 ลูก สีขาว 20 ลูก จงคำนวณหาการแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) ในการหยิบ 6 ครั้ง ที่จะเป็นลูกบอลสีแดง ถ้าสมมติว่าลูกบอลแต่ละลูกที่หยิบขึ้นมาแล้วใส่กลับลงไปอีก ก่อนที่จะหยิบครั้งต่อไป ($(2/3)^6$, $6(1/3)(2/3)^5$, $15(1/3)^2(2/3)^4$, $20(1/3)^3(2/3)^3$, $15(1/3)^4(2/3)^2$, $6(1/3)^5(2/3)$, $(1/3)^6$)

3. จงคำนวณการแจกแจงทวินามสำหรับ $n = 6$ และ $p = \frac{1}{4}$

4. จงหาความน่าจะเป็นที่จะออกหก 3 ครั้ง ในการทอดลูกเต๋า 5 ครั้ง (ลูกเต๋าที่มีความสมดุลย์) (0.03215)

5. จงหาค่า μ และ σ จากข้อที่ 2. $(\mu = 2, \sigma = 1.1547)$

6. จงหาความน่าจะเป็นที่จะออกหัว 7 ครั้ง ใน 10 ครั้ง ในการโยนเหรียญที่สมดุลย์กัน (.1172)

7. 50 เปอร์เซ็นต์ของเด็กที่คลอดในโรงพยาบาลเป็นผู้ชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ระหว่างเด็ก 8 คนที่คลอดในหนึ่งวันมีเด็กผู้ชาย 3 คน เด็กผู้หญิง 5 คนเป็นเท่าใด (0.21875)

8. การทดสอบแบบปรนัยมีทั้งหมด 10 ข้อ แต่ละข้อมีคำตอบอยู่ 4 ข้อย่อย ใน 4 ข้อย่อยมีคำตอบที่ถูกอยู่ 1 คำตอบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก 3 ข้อ, ตอบถูกอย่างมาก 8 ข้อ (0.08327, 0.99999)

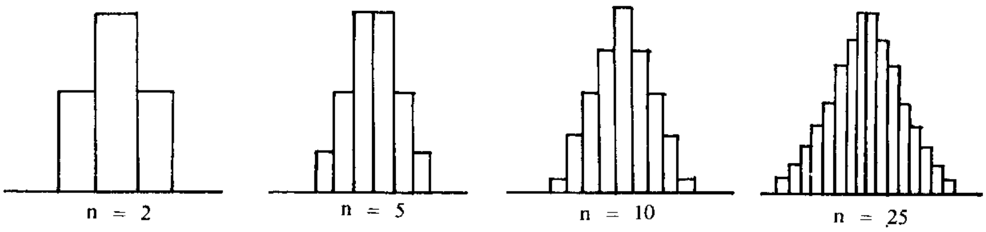
9. หาค่า μ และ σ^2 จากข้อ 8 (2.5, 1.875)

10. ถ้าความน่าจะเป็นที่คนไข้จะมีชีวิตอยู่รอดด้วยโรคชนิดหนึ่งเท่ากับ 0.90 จงหาความน่าจะเป็นที่คนไข้ 4 คน จะมีชีวิตรอดอยู่ด้วยโรคชนิดนี้ 0, 1, 2, 3 หรือ 4 คน

11. Salesman คนหนึ่ง สามารถติดต่อขายของกับลูกค้าไม่คนหนึ่งหรือสองคนต่อวันด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{3}$ และ $\frac{2}{3}$ ตามลำดับ ผลจากการติดต่อแต่ละครั้งขายไม่ได้เลยหรือขายได้ 50,000 บาท อย่างใดอย่างหนึ่งด้วยความน่าจะเป็น $\frac{9}{10}$ และ $\frac{1}{10}$ ตามลำดับ จงคำนวณหา μ (expected value) ของการขายประจำวันของเขา (8333 บาท)

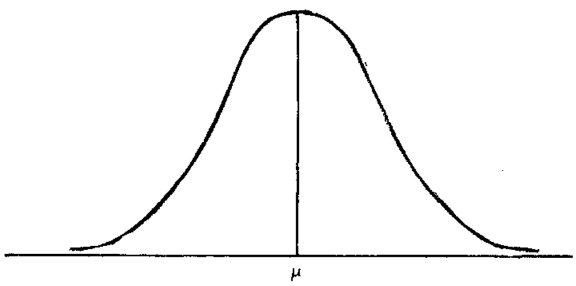
6.16 การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงทวินามที่ได้กล่าวมาแล้ว มีลักษณะเป็นแบบ discrete คือไม่ต่อเนื่องกัน (dis-continuous) สาเหตุก็มาจากจำนวนเหตุการณ์ที่นำมาแจกแจง มีจำนวนไม่มากพอ ดังรูปที่ 6.23 ประกอบด้วยแผนภูมิของการแจกแจงทวินาม ซึ่งมี $p = \frac{1}{2}$, $n = 2, 5, 10$ และ 25 ตามลำดับ



รูปที่ 6.23 การแจกแจงทวินามด้วย $p = \frac{1}{2}$

จะเห็นได้ว่า n เพิ่มขึ้น การแจกแจงเหล่านี้ ยิ่งมีลักษณะคล้ายรูประฆัง และเป็นเส้นโค้งติดต่อมากขึ้น จนกระทั่งเป็นเส้นโค้งปกติซึ่งส่วนมากเป็นไปได้ในทางทฤษฎีดังรูปที่ 6.24



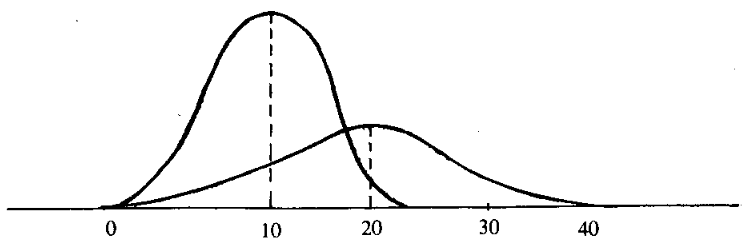
รูปที่ 6.24

เส้นโค้งปกติมีลักษณะเป็นรูประฆังปลายเส้นโค้งทั้งสองค่อย ๆ ลดลงไปยังแกนนอนแต่ก็ไม่มีโอกาสที่จะบรรจบแกน (บรรจบกันที่ $-\infty$ และ ∞) ส่วนพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งจะมีค่าน้อยมากละทิ้งได้ ถ้าคะแนนมาตรฐานมากกว่า 4 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน($Z > 4\sigma$)สมการของเส้นโค้งปกติซึ่งมีมัชฌิมเลขคณิต μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ คือ

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{..........(6.16.1)}$$

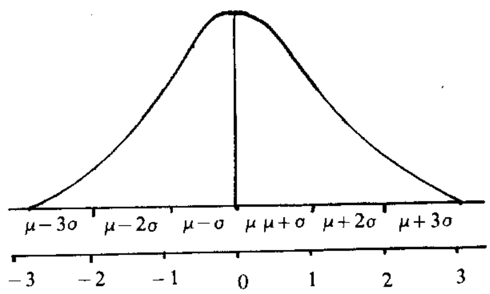
ในเมื่อ $\pi = 3.14159$; $e = 2.71828$ ถ้าเรารู้ค่า μ และ σ เราก็สามารถแทนค่าของ x ในสมการและหาค่า y ได้ ที่จะให้ค่าของความสูงของเส้นโค้งที่สมนัยกับค่าใด ๆ ของค่า x ที่กำหนดให้สูตรข้างต้นไม่ค่อยได้ใช้ เพราะเราสนใจแต่พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติสำหรับวิธีการทางสถิติ ที่จะได้ศึกษาในบทต่อไป พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งได้แสดงไว้ในในตารางที่ 3 ภาคผนวก

สมการของเส้นโค้งปกติขึ้นอยู่กับค่า μ และ σ เส้นโค้งจะมีรูปต่าง ๆ กัน ถ้าเราแทนค่าต่าง ๆ ของ μ และ σ ดังรูปที่ 6.25 แสดงถึงเส้นโค้งปกติสองเส้น เส้นหนึ่งมีค่า $\mu = 10, \sigma = 5$ และอีกเส้นหนึ่งมี $\mu = 20$ และ $\sigma = 10$ แต่พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่ได้จากตารางที่ 3 ในภาคผนวกนั้น มีความเกี่ยวข้องกับค่า μ และ σ น้อยมาก พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งนั้น คำนวณได้มาจากสมการเส้นโค้งปกติที่มี $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ ซึ่งเรียกว่าการแจกแจงปกติมาตรฐาน



รูปที่ 6.25

ถ้าเส้นโค้งปกติที่มีมัชฌิมเลขคณิต μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ เราสามารถเปลี่ยนเป็นการแจกแจงปกติมาตรฐาน ได้โดยการเปลี่ยนเสกล ดังรูปที่ 6.26 ในเมื่อเสกลเดิม (x เสกล) มีมัชฌิมเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ μ และ σ เสกลใหม่ (Z เสกล) มีมัชฌิมเลขคณิตเป็น 0



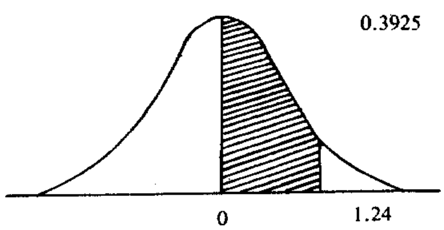
รูปที่ 6.26

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1 เราสามารถทดสอบได้โดยใช้สูตรเปลี่ยนจากเสกล x เป็นเสกล z โดยให้

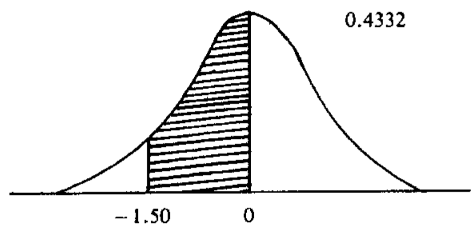
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad \text{..........(6.16.2)}$$

ก็สามารถเปลี่ยนจากการแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงปกติมาตรฐานตามบทที่ 4

ถ้าเราต้องการคำนวณหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติซึ่งมีมัชฌิมเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่เท่ากับ 0 และ 1 เราจะต้องเปลี่ยนให้เป็นเสกล z ก่อนแล้วจึงใช้ตารางที่ 3 ในภาคผนวก ตารางนี้ประกอบด้วยพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งสำหรับค่า z จาก 0.00 (หรือค่ามัชฌิมเลขคณิต) ถึง 3.00 ดังตัวอย่างพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่สมนัยกับค่า z = 1.24 เท่ากับ 0.3925 ค่าที่ได้นี้วัดจาก z = 0 ถึง z = 1.24 ดังรูปที่ 6.27 ก. และในตารางไม่ได้แสดงค่าพื้นที่ที่สมนัยกับค่า z เป็นลบ เนื่องจากเส้นโค้งปกติเป็นรูปสมมาตรกัน (symmetical) เราจึงสามารถหาพื้นที่ระหว่าง z = −1.50 และ z = 0 โดยดูพื้นที่ที่สมนัยกับ z = 1.50 ก็สามารถหาพื้นที่ได้เป็น 0.4332 ดังรูปที่ 6.27 ข.



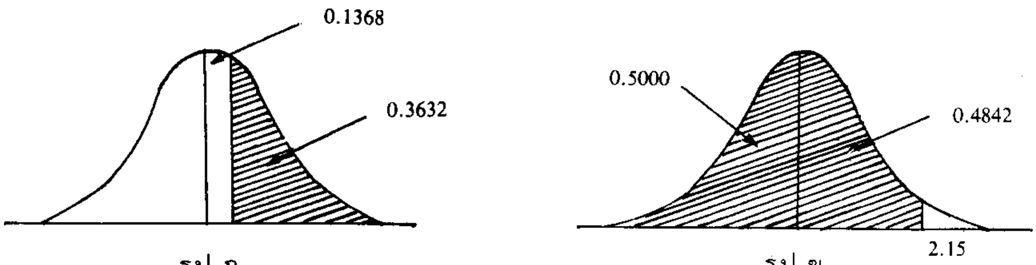
รูป ก.



รูป ข.

รูปที่ 6.27

ถ้าเราสนใจที่จะหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งทางขวามือของค่าบวกของ z ก็เอาค่าที่ได้จากตารางไปลบออกจาก 0.5000 เนื่องจากเส้นโค้งปกติเป็นรูปสมมาตร พื้นที่ทางขวาและซ้ายของมัชฌิมเลขคณิตด้านละเท่ากับ 0.5000 ดังตัวอย่าง จงหาพื้นที่ทางด้านขวาของ z = 0.35 จากตารางพื้นที่สมนัยกับค่า z ระหว่าง 0 ถึง 0.35 เท่ากับ 0.1368 เอาพื้นที่นี้ไปลบจาก 0.5000 ก็จะได้ 0.5000 − 0.1368 = 0.3632 ดูรูปที่ 6.28 ก. แต่ถ้าเราต้องการหาพื้นที่ทางด้านซ้ายของ z = 2.15 ดังรูปที่ 6.28 ข.

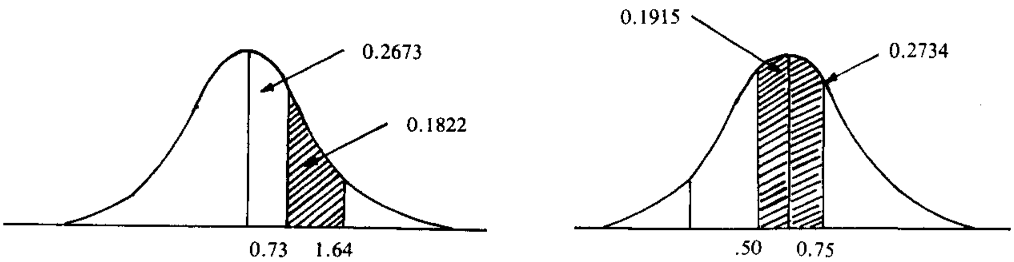


รูป ก. รูป ข.

รูปที่ 6.28

เราก็ดูตารางหาพื้นที่สมนัยกับค่า z = 2.15 ได้เท่ากับ .4842 แล้วนำไปบวกกับ 0.5000 ได้ 0.9842

มีบางปัญหาซึ่งเราต้องการหาพื้นที่อยู่ระหว่างค่า z สองค่าที่กำหนดให้ ถ้าค่า z ทั้งสองอยู่ข้างเดียวกันของมัชฌิมเลขคณิตและเป็นบวกหรือลบทั้งสองค่า พื้นที่ระหว่างค่าทั้งสองก็คือ ผลต่างระหว่างค่าพื้นที่ทั้งสองจากตาราง ดังตัวอย่าง พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งระหว่าง z = 0.73 และ z = 1.64 คือ 0.4495 − 0.2673 = 0.1822 (พื้นที่ระหว่าง z = 0 ถึง z = 0.73 เท่ากับ .2673 และพื้นที่ระหว่าง z = 0 ถึง z = 1.64 เท่ากับ .4495) ดูรูปที่ 6.29 ก. ถ้าค่าทั้งสองของ z อยู่คนละข้างของมัชฌิมเลขคณิต พื้นที่ระหว่างค่าทั้งสองก็คือ ผลรวมของพื้นที่ได้มาจากตารางทั้งสอง ดังตัวอย่าง พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งระหว่าง z = −0.50 และ z = 0.75 คือ 0.1915 บวก 0.2734 เท่ากับ 0.4649 ดูรูปที่ 6.29 ข.



รูป ก. รูป ข.

รูปที่ 6.29

ในบางปัญหากำหนดพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งมาแล้วให้คำนวณหาค่าสมนัย Z ดังตัวอย่าง จงหาค่า z ซึ่งพื้นที่ทางด้านขวาของ z เท่ากับ 0.1000 ดังปรากฏจากรูปที่ 6.30 ก. ซึ่งค่า z จะต้องสมนัยกับพื้นที่ 0.4000 เราหาค่าที่ใกล้เคียงที่สุดจากตาราง คือ $z = 1.28$

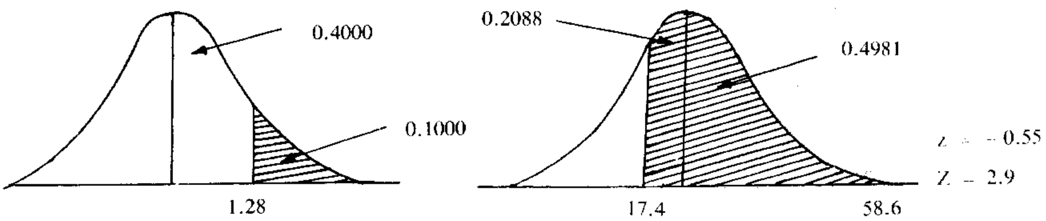
ในบางปัญหาที่เราเริ่มแรกจะต้องเปลี่ยนเป็นหน่วยมาตรฐาน (standard units) เสียก่อนจึงไปหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งจากตารางที่กำหนดให้ อย่างเช่น เส้นโค้งปกติ (normal curve) หนึ่งมี $\mu = 24, \sigma = 12$ และเราต้องการจะหาพื้นที่ระหว่าง $x_1 = 17.4$ และ $x_2 = 58.8$ (ดูรูป 6.30 ข.) จะได้

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{17.4 - 24}{12} = -0.55$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{58.8 - 24}{12} = 2.90$$

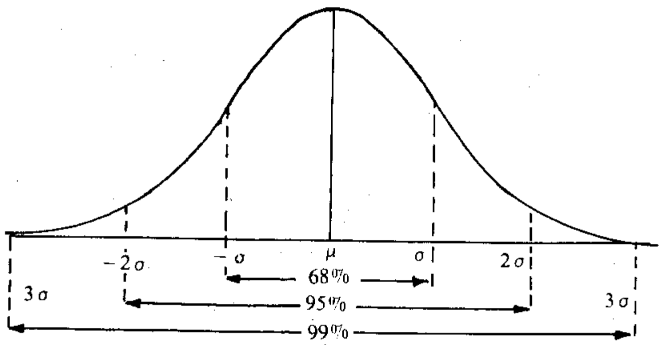
เราพบว่า พื้นที่สมนัยกับค่า z_1 และ z_2 จากตารางเท่ากับ 0.2088 และ 0.4981 นั่นเป็นความต้องการของพื้นที่ระหว่าง $x_1 = 17.4$ และ $x_2 = 58.8$ คือ 0.2088 บวก 0.4981เท่ากับ0.7069

ผลจากการวัดผลต่างระหว่างข้อมูลดิบกับมัชฌิมเลขคณิตเป็นหนึ่งเท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มากกว่าหรือน้อยกว่ามัชฌิมเลขคณิต ถ้าจะใช้หน่วยของ z ก็จะได้เท่ากับ 1 หรือ -1 พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งจากตารางระหว่าง $z = -1$ และ $z = 1$ เท่ากับ 0.3413 บวก 0.3413 เท่ากับ 0.6826 นี้หมายความว่า การแจกแจงประมาณ 68 เปอร์เซ็นต์ของข้อมูลหรือเหตุการณ์อยู่ภายใต้หนึ่งเท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จากมัชฌิมเลขคณิต ดังรูปที่ 6.31



รูป ก. รูป ข.

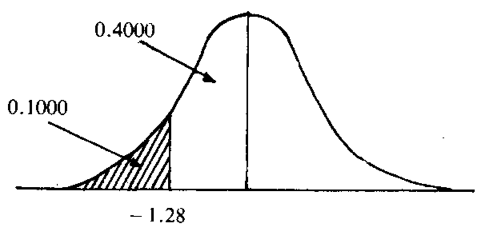
รูปที่ 6.30



รูปที่ 6.31

ในทำนองเดียวกันพื้นที่ 2 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากมัชฌิมเลขคณิต หรือระหว่าง $z = -2$ และ $z = 2$ เท่ากับ 0.4773 บวก 0.4773 เท่ากับ 0.9546 และระหว่าง $z = -3$ และ $z = 3$ เท่ากับ 0.4986 บวก 0.4986 เท่ากับ 0.9972 หรือประมาณ 95 และ 99% ของการแจกแจงข้อมูลอยู่ภายใน 2 เท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ 3 เท่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากมัชฌิมเลขคณิตตามลำดับ

ตัวอย่าง 6.16.1 คะแนนสอบไล่วิชาการบัญชีรัฐบาล ของนักศึกษาวิชาบัญชีมีมัชฌิมเลขคณิต 68 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8.2 สมมติว่า คะแนนเหล่านี้มีการแจกแจงปกติ จงหาคะแนนของ 10% น้อยที่สุดของชั้น (Lowest 10 percent of the class)



ปัญหานี้ต่างไปจากตัวอย่างก่อน โจทก์กำหนดเปอร์เซ็นต์มาให้ (พื้นที่เส้นโค้งปกติ) แทนที่จะกำหนดค่า x หรือ z เริ่มแรกจะต้องหาค่า z ซึ่งสมนัยกับพื้นที่ 0.5000 − 0.1000 = .4000 แล้วเปลี่ยนกลับเป็นคะแนน เนื่องจากว่าค่า z ที่สมนัยกับพื้ที่ .4000 คือ 1.28 แทนค่าลงในสูตรได้

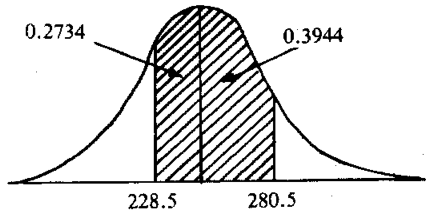
$$-1.28 = \frac{x - 68}{8.2}$$

$$-1.28 \times 8.2 = x - 68$$

$$x = 68 - 10.496 = 57.504$$

คะแนนของเปอร์เซ็นต์น้อยที่สุด คือ 57 หรือน้อยกว่า

ตัวอย่าง 6.16.2 จำนวนของการโทรศัพท์ในที่ชุมนุมชนเป็นประจำวันระหว่างบ่ายโมงกับบ่าย 2 โมง เฉลี่ย 248 ครั้ง และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 26 จะมีกี่เปอร์เซ็นต์ของเวลาที่โทรศัพท์ระหว่าง 229 ครั้ง และ 280 ครั้ง ในที่ชุมนุมชนระหว่างบ่ายโมงกับบ่าย 2 โมง สมมติว่าการแจกแจงเข้าใกล้เส้นโค้งปกติ



เนื่องจากตัวแปรค่าเป็นชนิดไม่ต่อเนื่อง จึงต้องใช้พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งระหว่าง 228.5 กับ 280.5 ดังรูป แทนค่า $x_1 = 228.5$ และ $x_2 = 280.5$ ลงในสูตรจะได้

$$z_1 = \frac{228.5 - 248}{26} = -0.75$$

$$z_2 = \frac{280.5 - 248}{26} = 1.25$$

พื้นที่สมนัยกับค่า z_1 และ z_2 คือ 0.2734 กับ 0.3944 ดังนั้น พื้นที่ระหว่าง z_1 กับ z_2 คือ 0.2734 บวก 0.3944 เท่ากับ 0.6678 หรือ 67% ของเวลาที่มีการโทรศัพท์จาก 229 ถึง 280 ครั้ง ในที่ชุมนุมชนระหว่างบ่ายโมงกับบ่าย 2 โมง ถ้าเราอยากทราบว่ามีกี่เปอร์เซ็นต์ของเวลาที่โทรศัพท์มากกว่า 280 ครั้ง หรือน้อยกว่า 229 ครั้ง ก็สามารถคำนวณได้คือ 0.5000 – 0.3944 เท่ากับ 0.1056 หรือ 10.56% ของเวลาที่มีการโทรศัพท์มากกว่า 280 ครั้ง และ .5000 – .2734 เท่ากับ 0.2266 หรือ 22.66% ของเวลามีการโทรศัพท์น้อยกว่า 229 ครั้ง

แบบฝึกหัดที่ 6.6

1. ถ้ามัชฌิมเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลกลุ่มหนึ่งเป็น 45.2 และ 2.6 นิ้ว ตามลำดับ จงเปลี่ยนหน่วย (นิ้ว) ให้เป็นหน่วยมาตรฐาน (standard units) ดังต่อไปนี้

   ก) 49.1 นิ้ว (1.5)
   ข) 40.0 นิ้ว (−2.0)
   ค) 90.18 นิ้ว (17.3)
   ง) 39.22 นิ้ว (−2.3)

2. จงหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติซึ่งอยู่

   ก) ทางขวาของ $z = 2.76$ (0.0029)
   ข) ทางซ้ายของ $z = 1.89$ (0.9706)
   ค) ทางขวาของ $z = -0.44$ (0.6700)
   ง) ทางซ้ายของ $z = -1.42$ (0.0776)
   จ) ระหว่าง $z = 1.22$ กับ $z = 1.84$ (0.0783)
   ฉ) ระหว่าง $z = 0.90$ กับ $z = -1.67$ (0.7684)
   ช) ระหว่าง $z = -1.39$ กับ $z = 1.75$ (0.8776)

3. จงหาค่า z ถ้า

   ก) พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง 0 กับ z เป็น 0.4850 (2.17)
   ข) พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติทางขวาของ z เป็น 0.3821 (0.30)
   ค) พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติทางซ้ายของ z เป็น 0.7734 (0.75)
   ง) พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติทางขวาของ z เป็น 0.9131 (−1.36)
   จ) พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $-z$ กับ z เป็น 0.9642 (±2.1)

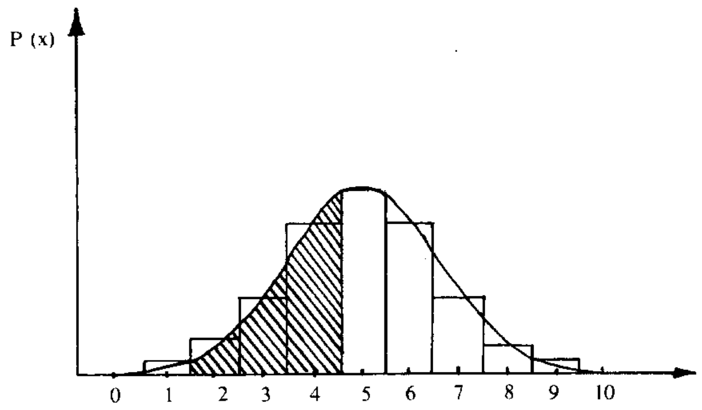
4. สมมติว่าความสูงเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของขนมเค้กทั้งหมดเท่ากับ 2.3 นิ้ว กับ 0.3 นิ้ว และให้การแจกแจงของความสูงของขนมเค้กเป็นแบบปกติ จงหา

   ก) เปอร์เซ็นต์ของขนมเค้กซึ่งมีความสูง 3.1 นิ้ว หรือมากกว่า (0.38%)
   ข) เปอร์เซ็นต์ของขนมเค้กซึ่งสูงระหว่าง 2.0 กับ 2.5 นิ้ว (58.99%)
   ค) ความสูงซึ่งขนมเค้กต่ำที่สุด 20 เปอร์เซ็นต์ (2.048)

5. ผลการสอบไล่วิชาสถิติซึ่งมีการแจกแจงเข้าใกล้ปกติที่มีมัชฌิมเลขคณิต 70 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 6.3 ถ้าให้ 15 เปอร์เซ็นต์ สูงสุดเป็นเกรด A 12 เปอร์เซ็นต์ ต่ำสุดเป็นเกรด F จงหาคะแนนต่ำสุดของเกรด A และคะแนนสูงสุดของเกรด F (77, 62)

6.17 ประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

ตามที่ได้กล่าวมาในหัวข้อการแจกแจงปกติว่า เมื่อ $p = \frac{1}{2}$ และ n มีค่ามาก การแจกแจงทวินามก็มีลักษณะใกล้เคียงเส้นโค้งปกติ พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติสามารถนำมาใช้คำนวณหาความน่าจะเป็นทวินาม (binomial probability) ได้ ถึงแม้ว่า n จะมีค่าน้อย และ p ต่างไปจาก $\frac{1}{2}$ ดังจะดูได้จากรูปที่ 6.32 แสดง



รูปที่ 6.32 เปรียบเทียบการแจกแจงปกติกับการแจกแจงทวินาม $n = 10, p = \frac{1}{2}$

การเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงทวินาม รูปที่ 6.32 ไม่อยู่ในลักษณะอย่างนี้เสมอไป เมื่อ n มีค่าน้อย และ p มีค่าเข้าใกล้ 0 หรือ 1 การแจกแจงทวินามจะไม่อยู่ในลักษณะสมมาตร นั่นหมายความว่า มัชฌิมเลขคณิตจะอยู่ใกล้กับ 0 หรือ n

ตัวอย่าง 6.17.1 การแจกแจงทวินามในเมื่อ $n = 10, p = .5$ จงหาความน่าจะเป็นที่ $x = 2, 3,$ หรือ 4 เปรียบเทียบกับความน่าจะเป็น คำนวณโดยวิธีปกติ

โดยการแจกแจงทวินาม

$$p(2 \leqslant x \leqslant 4) = P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4)$$

$$= C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_3^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_4^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= 45\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 120\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 210\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}(45 + 120 + 210) = \frac{375}{1024} = 0.3662$$

โดยการแจกแจงปกติ (Normal approximation)

ดูได้จากรูปที่ 6.32 ต้องการหาพื้นที่อยู่ระหว่าง $x_1 = 1.5$ กับ $x_2 = 4.5$ ในเมื่อ $\mu = np = 10(\frac{1}{2}) = 5$ และ $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 1.58$ จะได้ว่า

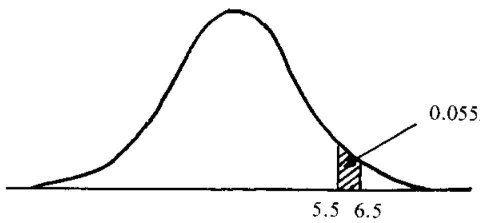
$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1.5 - 5}{1.58} = -2.22$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{4.5 - 5}{1.58} = -0.32$$

พื้นที่ระหว่าง $z = 0$ กับ $z = 2.22$ เท่ากับ 0.4868 และพื้นที่ระหว่าง $z = 0$ กับ $z = 0.32$ เท่ากับ 0.1255 ดังนั้น ความน่าจะเป็นหรือพื้นที่ระหว่าง z_1 กับ z_2 ก็จะได้เท่ากับ 0.4868 − .1255 = 0.3613

จะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นที่คำนวณได้จากการแจกแจงทวินามกับการแจกแจงปกติมีค่าใกล้เคียงกันมาก

ตัวอย่าง 6.17.2 คำนวณหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 6 ครั้ง ใน 16 ครั้ง เมื่อความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จครั้งหนึ่งเท่ากับ $\frac{1}{5}$ ให้คำนวณหาแบบการแจกแจงปกติ



ความน่าจะเป็นนี้เราจะต้องคำนวณหาพื้นที่ระหว่าง 5.5 กับ 6.5

เนื่องจาก $\mu = np = 16(\frac{1}{5}) = 3.2$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{16(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})} = 1.6$$

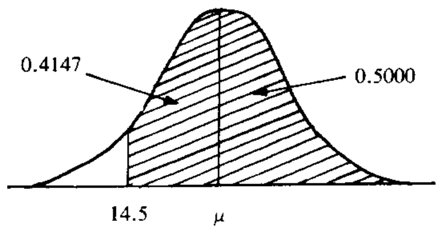
เราหาว่า $z_1 = \frac{5.5 - 3.2}{1.6} = 1.44$

$$z_2 = \frac{6.5 - 3.2}{1.6} = 2.06$$

พื้นที่หรือความน่าจะเป็นระหว่าง $z = 0$ กับ z_1 เท่ากับ 0.4251 และ $z = 0$ กับ z_2 เท่ากับ 0.4803 ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 6 ครั้ง เท่ากับ $0.4803 - 0.4251 = 0.0552$

ตัวอย่าง 6.17.3 ความน่าจะเป็นที่คน ๆ หนึ่งจะตอบคำถามข้อหนึ่งทางไปรษณีย์เท่ากับ 0.20 อยากทราบว่าคน ๆ นั้นจะตอบคำถามอย่างน้อย 15 ถึง 100 คำถาม

อธิบาย ถ้าเราจะคำนวณหาโดยใช้สูตรของการแจกแจงทวินาม เราก็ต้องคำนวณหาความน่าจะเป็นของ $x = 15,16,17,\ldots\ldots\ldots.$ และ 100 หรือผลบวกของ $x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots.$ และ 14 แล้วเอาไปลบเสียจากหนึ่ง วิธีการตามที่กล่าวข้างต้นจะต้องใช้เวลามาก มีความยุ่งยากและเป็นการเพิ่มงานมากขึ้นด้วย ถ้าเราใช้วิธีการแบบการแจกแจงปกติ เพียงแต่หาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งทางขวาของ 14.5 ดังรูป



วิธีทำ เนื่องจาก

$$\mu = np = 100(\frac{1}{5}) = 20; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})} = 4$$

จงหาค่าของ z ที่สมนัยกับ 14.5 ได้

$$z = \frac{14.5 - 20}{4} = -1.38$$

พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่สมนัยกับค่า $z = 1.38$ เท่ากับ 0.4147 ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ต้องการคือ $0.4147 + 0.5000 = 0.9147$ นั่นก็คือเราสามารถหวังจะได้คำตอบอย่างน้อย 15 ถึง 100 คำถามประมาณ 91 เปอร์เซ็นต์

แบบฝึกหัดที่ 6.7

1. จงหาความน่าจะเป็นที่จะปรากฏหัว 6 ครั้ง ในการโยนเหรียญ 10 ครั้ง โดย

   ก. วิธีการแจกแจงทวินาม (0.205) ข. โดยวิธีการแจกแจงปกติ (0.2034)

2. จงหาความน่าจะเป็นที่ปรากฏเลขหก 2 ครั้ง ในการทอดลูกเต๋า 8 ครั้ง โดยวิธี

   ก. การแจกแจงทวินาม (0.2605) ข. การแจกแจงปกติ (0.3029)

3. ผู้ผลิตสินค้าสำเร็จรูปทราบว่า ผลิตภัณฑ์ของเขามีขาดตกบกพร่องเฉลี่ย 2 เปอร์เซ็นต์ อยากทราบว่าความน่าจะเป็นที่ 3 ชิ้นจะขาดตกบกพร่องใน 100 ชิ้น ใช้วิธีการแจกแจงปกติ (0.2171)

4. ถ้าความน่าจะเป็นที่ผู้ออกเสียงเลือกตั้งจะออกเสียงให้ผู้เข้าแข่งขัน X เท่ากับ 0.60 จงหาความน่าจะเป็นจากตัวอย่างผู้ออกเสียงเลือกตั้ง 100 คน ซึ่งน้อยกว่า 50 คน ออกเสียงให้ผู้เข้าแข่งขัน X โดยวิธีการแจกแจงปกติ (0.0162)

5. ประชาชน 65 เปอร์เซ็นต์ชอบสีแดง จงหาความน่าจะเป็นในตัวอย่าง 1000 คน มีมากกว่า 680 คนชอบสีแดง ใช้วิธีการแจกแจงปกติ (0.0217)

6. จงหาความน่าจะเป็นที่จะปรากฏหัวระหว่าง 185 ถึง 215 ครั้ง ในการโยนเหรียญ 400 ครั้งใช้การแจกแจงปกติ (0.8788)

7. จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จระหว่าง 50 ถึง 65 ครั้ง ในจำนวน 200 ครั้ง ในเกมอย่างหนึ่งถ้าความน่าจะเป็นของความสำเร็จในหนึ่งครั้งเท่ากับ 0.30 (0.7497)

6.18 การปรับเส้นโค้งปกติให้เข้ากับข้อมูล (Fitting a Normal Curve to the Data)

มีวิธีอยู่หลายวิธีที่เราจะทดสอบการแจกแจงข้อมูลให้ปรับอยู่ในรูปของเส้นโค้งปกติ วิธีที่ง่าย ก็คือใช้กระดาษกราฟชนิดพิเศษเรียกว่า probability graph paper หรือกระดาษเส้นโค้งปกติ ถ้า plot การแจกแจงความถี่สะสมแบบน้อยกว่าเป็นเปอร์เซ็นต์ของข้อมูลซึ่งปรับให้เข้ากับเส้นโค้งปกติลงบนกระดาษชนิดนี้ จุดที่อยู่บนกระดาษจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง ดังการแจกแจงน้ำหนักของทหาร 300 คน

น้ำหนักเป็นปอนด์	ความถี่	ความถี่เป็นเปอร์เซ็นต์
150-158	9	3
159-167	24	8
168-176	51	17
177-185	66	22
186-194	72	24
195-203	48	16
204-212	21	7
213-221	6	2
222-230	3	1
	300	100

เปลี่ยนการแจกแจงนี้ให้เป็นการแจกแจงความถี่สะสมเป็นเปอร์เซ็นต์ได้

น้ำหนักเป็นปอนด์	ความถี่สะสม
น้อยกว่า 149.5	0
น้อยกว่า 158.5	3
น้อยกว่า 167.5	11
น้อยกว่า 176.5	28
น้อยกว่า 185.5	50
น้อยกว่า 194.5	74
น้อยกว่า 203.5	90
น้อยกว่า 212.5	97
น้อยกว่า 221.5	99
น้อยกว่า 230.5	100

ก่อนที่เราจะเขียนกราฟ การแจกแจงความถี่สะสม มาพิจารณาเสกลของกระดาษเส้นโค้งปกติ ดูจากรูปที่ 6.33 เสกลเปอร์เซ็นต์ของความถี่สะสมได้หมายไว้ในแบบซึ่งทำไว้พอเหมาะกับกระดาษ ส่วนเสกลอื่น ๆ มีขนาดเท่า ๆ กันใช้แสดงขอบเขตของชั้นของ 149.5, 158.5 และต่อ ๆ ไป

ถ้าเราเขียนกราฟจุดที่สมนัยระหว่างเปอร์เซ็นต์ของความถี่สะสมกับแต่ละค่าของขอบเขตของชั้น ก็จะได้จุดวางอยู่ในรูปของเส้นตรง (ดังรูปที่ 6.33) ให้สังเกตไว้ด้วยว่า เราไม่ได้เขียนกราฟจุด

แรกและจุดสุดท้ายของขอบเขตของชั้น เพราะที่ปลายทั้งสองข้างของเส้นโค้งปกติไม่มีโอกาสที่จะบรรจบกับแกนนอน

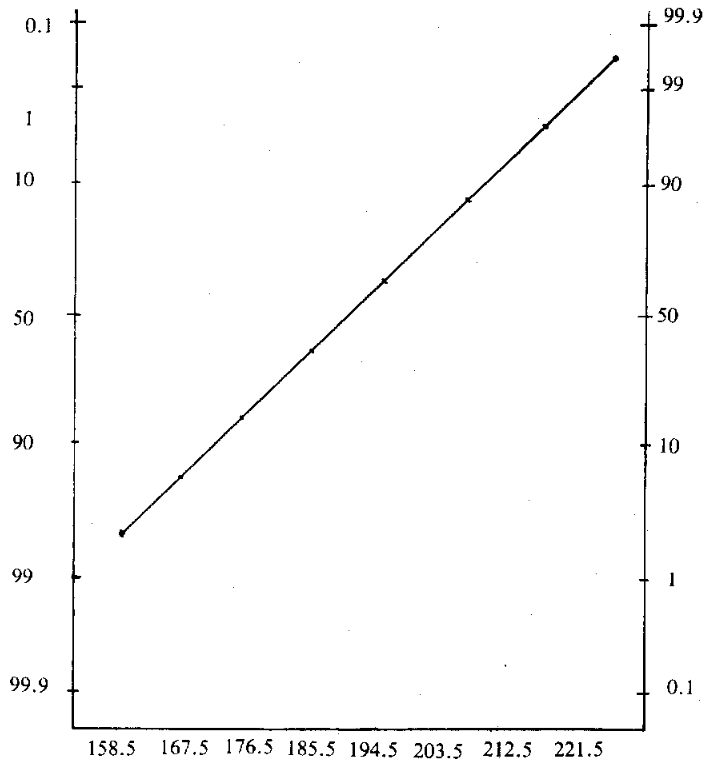
ข้อเสียของวิธีการนี้พอที่จะกล่าวได้ก็คือจุดที่เขียนกราฟลงไปนั้นจะอยู่ใกล้ชิดกับเส้นตรงอย่างสมเหตุผลหรือไม่โดยเอาความเห็นของเราเป็นหลัก และแปลกใจที่จะเห็นจุดเหล่านั้นจะอยู่ใกล้แค่ไหนกับเส้นตรงถึงแม้ว่าการแจกแจงจะเบ้

ถ้าเรามีการแจกแจงปกติที่มีมัชฌิมเลขคณิตกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตามข้อมูลของเรา แล้วเราต้องการเปรียบเทียบความถี่ที่คาดหวังจะได้เส้นโค้งปกติกับการแจกแจงที่แท้จริง การคำนวณความถี่ที่คาดหวังจะได้จากเส้นโค้งปกติของการแจกแจงน้ำหนักของทหารที่ได้กล่าวมาข้างต้น ซึ่งมีมัชฌิมเลขคณิตเป็น 184.3 กับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 14.54 เราต้องการคำนวณความถี่ที่คาดหวังจะได้จากเส้นโค้งปกติของชั้นจาก 204 ถึง 212 วิธีการก็คือหาพื้นที่ของเส้นโค้งปกติระหว่างเลขสองจำนวน เราใช้ค่าขอบเขตของชั้นของ 204 กับ 212 คือ 203.5 กับ 212.5 ตามลำดับ ค่า z ที่ต้องการคือ

$$z_1 = \frac{203.5 - 184.3}{14.54} = 1.32$$

$$z_2 = \frac{212.5 - 184.3}{14.54} = 1.94$$

พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติที่สมนัยกับ z_1 กับ z_2 คือ 0.4066 กับ 0.4738 พื้นที่ระหว่าง 203.5 กับ 212.5 คือ $0.4738 - 0.4066 = 0.0672$ นี่หมายความว่า 6.72% ของน้ำหนักสามารถที่อยู่ในชั้นที่กำหนดให้ ถ้าการแจกแจงเข้าใกล้เส้นโค้งปกติจริง เนื่องจาก 6.72 เปอร์เซ็นต์ของ 300 (จำนวนทั้งหมดของน้ำหนัก) คือ 20.16 เราสามารถพูดได้ว่าความถี่ที่คาดหวังจะได้จากเส้นโค้งปกติของชั้นที่กำหนดให้ประมาณ 20.2 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันกับความถี่จริงของ 21



รูปที่ 6.33 Probability Graph Paper

ถ้าเราต้องการใช้วิธีการนี้เพื่อหาความถี่ที่คาดหวังจะได้เส้นโค้งปกติของการแจกแจงทั้งหมด เราก็สามารถเรียบเรียงการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

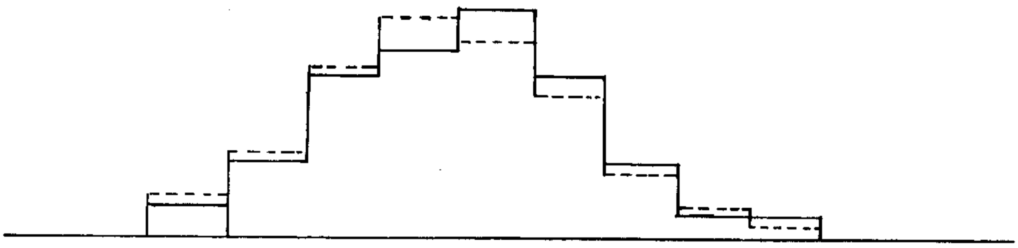
ตารางที่ 6.13

ช่วงระหว่างชั้น	class boundary	Z	พื้นที่เส้นโค้งปกติ		ผลต่างของพื้นที่ระหว่างชั้น	ความถี่ที่ได้จากเส้นโค้งปกติ	ความถี่จริง
	149.5	−2.39	0.4916				
150-158				−	0.0300	9.0	9
	158.5	−1.77	0.4616				
159-167				−	0.0846	25.4	24
	167.5	−1.16	0.3770				
168-176				−	0.1716	51.5	51
	176.5	−0.54	0.2054				
177-185				+	0.2373	71.2	66
	185.5	0.08	0.0319				
186-194				−	0.2261	67.8	72
	194.5	0.70	0.2580				
195-203				−	0.1486	44.6	48
	203.5	1.32	0.4066				
204-212				−	0.0672	20.2	21
	212.5	1.94	0.4738				
213-221				−	0.0210	6.3	6
	221.5	2.56	0.4948				
222-230				−	0.0045	1.4	3
	230.5	3.18	0.4993				

ในคอลัมน์ที่ 5 แต่ละผลต่างของพื้นที่ระหว่างชั้นคูณด้วยจำนวนความถี่ทั้งหมด 300 ก็จะได้ความถี่ที่คาดหวังของเส้นโค้งปกติ ซึ่งแสดงไว้ในคอลัมน์ที่ 6

เราสามารถเปรียบเทียบความถี่ที่คาดหวังจะได้ของเส้นโค้งปกติกับความถี่จริง ๆ ในคอลัมน์ที่ 7

ถ้าเราสร้างแผนภูมิลงในฐานเดียวกันของการแจกแจงของคอลัมน์ 6 กับ 7



———————— ความถี่จริง

- - - - - - - - ความถี่ที่คาดหวังจะได้ของเส้นโค้งปกติ

รูปที่ 6.34

จากรูปที่ 6.34 จะเห็นว่า กลุ่มทั้งสองของความถี่มีลักษณะใกล้เคียงกัน เพราะฉะนั้นการแจกแจงของข้อมูลจริง สามารถปรับให้เข้ากับแบบของเส้นโค้งปรกติได้

6.19 การแจกแจงแบบพัวซอง (Poisson Distribution)

เราได้เห็นแล้วว่าการแจกแจงแบบปกติอยู่ในรูปที่จำกัดอย่างไรของการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อ n มีค่ามากและ p เข้าใกล้ 0.5 ถ้าหากว่า p เข้าใกล้ 0 หรือ 1 การแจกแจงแบบปกติก็ไม่สามารถใช้เป็นค่าประมาณของการแจกแจงแบบทวินามได้แม้ว่า n จะมีค่าใหญ่มาก แต่ในกรณีที่ n มีค่ามากและ p มีค่าน้อยมาก ก็ยังมีลักษณะที่จำกัดของการแจกแจงทวินามที่ใช้คำนวณให้ง่ายเข้า นั่นก็คือการแจกแจงแบบพัวซอง สูตรของการแจกแจงนี้คือ

$$P(x) = \frac{\mu^x . e^{-\mu}}{x!} \qquad \text{.........(6.19.1)}$$

ในเมื่อ $x! = x.(x-1).(x-2) ..... 2.1$ และ e เป็นจำนวนที่ไม่สามารถทอนลงได้ซึ่งก็ได้ปรากฏในสูตรของเส้นโค้งปกติด้วย x เป็นจำนวนของความสำเร็จ P(x) คือความน่าจะเป็นของความสำเร็จ x และ μ คือมัชฌิมเลขคณิต

ตัวอย่างแสดงการใช้การแจกแจงแบบพัวซอง สมมติว่าได้ประกาศขายเปียโนลงในหนังสือพิมพ์ซึ่งมีผู้อ่าน 100,000 คน และสมมติว่าความน่าจะเป็นที่ผู้อ่านคนใดคนหนึ่งตอบรับการประกาศขายเท่ากับ 1/50,000 ให้เราคำนวณหาความน่าจะเป็น ของการตอบรับ 0, 1, 2, 3, 4, ... คนต่อการประกาศขาย

ปัญหาของการคำนวณหาความน่าจะเป็นที่จะได้ความสำเร็จ x ในจำนวน 100,000 เมื่อความน่าจะเป็นของความสำเร็จรายบุคคลเป็น $p = 1/50,000$ เนื่องจาก p มีค่าน้อยมากที่จะใช้การประมาณค่าแบบเส้นโค้งปกติ (Normal curve approximation) เราจึงใช้สูตรของการแจกแจงแบบพัวซอง เพื่อที่จะใช้สูตรเราจึงต้องคำนวณค่า μ ตามสูตร (6.15.3) คือ

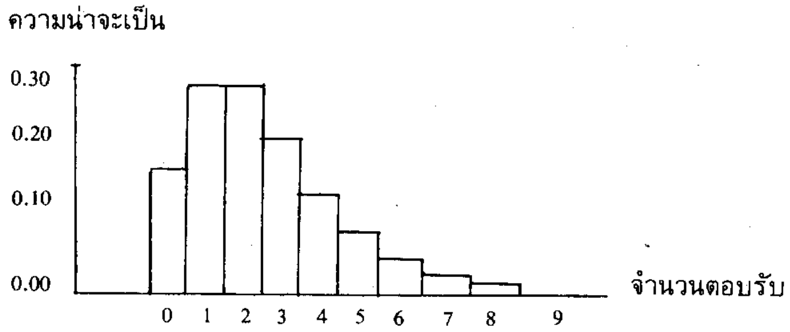
$$\mu = np = 100,000.\frac{1}{50,000} = 2$$

(โดยเฉลี่ยแล้วเราสามารถคาดหวังได้ 2 คนที่ตอบรับการประกาศขาย) แทนค่า $\mu = 2$ และ $x = 0, 1, 2, \ldots$ ลงในสูตร (6.19.1) ได้ความน่าจะเป็น ดังนี้

จำนวนของการตอบรับ	**ความน่าจะเป็น**
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.0120
7	0.0034
8	0.0009
9	0.0002

เราสามารถคำนวณจำนวนของการตอบรับได้มากกว่า 9 คน ต่อการประกาศขาย แต่ความน่าจะเป็นของการอุบัติขึ้นนี้น้อยมาก (ประมาณ 0.000046) แผนภูมิของการแจกแจงแบบพัวซองนี้ก็ได้แสดงในรูปที่ 6.35

การแจกแจงแบบพัวซองมีการประยุกต์ที่สำคัญมาก ดังตัวอย่างเช่น การประกันวินาศภัยที่ความน่าจะเป็นบ้านหลังใดหลังหนึ่งจะเกิดอัคคีภัยมีน้อยมาก ขณะที่ n เป็นจำนวนบ้านที่เอาประกันมีจำนวนมาก ในทำนองเดียวกันความน่าจะเป็นที่คนจะประสบอุบัติเหตุตายด้วยรถยนต์มีน้อยมาก ขณะที่ n เป็นจำนวนผู้คนที่ขับรถยนต์มีจำนวนมาก การแจกแจงแบบพัวซองยังใช้ในปัญหาเกี่ยวกับการตรวจสอบผลิตภัณฑ์สำเร็จรูปเมื่อความน่าจะเป็นที่ชิ้นใดชิ้นหนึ่งที่เกิดเสียมีน้อยมากและจำนวนทั้งหมดมีจำนวนมาก เนื่องจากการใช้ของสูตร (6.19.1) เกี่ยวกับเลขคณิตก็เป็นการง่ายที่จะอ้างถึงตารางของความน่าจะเป็นแบบพัวซอง



รูปที่ 6.35

แบบฝึกหัดที่ 6.8

(1) เครื่องจักรผลิตสกรูโดยเฉลี่ยแล้วสกรูจะผิดขนาดไปหนึ่งตัว ทุก ๆ 100 ตัว ถ้าบรรจุสกรูลงในกล่อง 300 กล่อง จะมีกี่เปอร์เซ็นต์ของกล่องเหล่านี้ที่ท่านคาดหวังว่าไม่มีสกรูผิดขนาด (ใช้ $e^{-3} = 0.0498$, $0! = 1$) (4.98%)

(2) สมมติว่าโดยเฉลี่ยรถยนต์ 1 คัน ใน 1,000 คัน จะยางแตกขณะที่ทัศนาจรบางแสน ถ้าหากว่ามีรถยนต์ 10,000 คัน ทัศนาจรบางแสน จงหาความน่าจะเป็นที่รถยนต์ 8 คันจะยางแตก (ใช้ $e^{-10} = 0.000045$) (0.1116)

(3) นายหน้าคนหนึ่งโดยเฉลี่ยขายบ้านได้ 2 หลังต่อสัปดาห์ ใช้สูตร (6.19.1) กับ $\mu = 2$ เพื่อคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ในสัปดาห์ที่กำหนดเขาจะขายบ้านได้หนึ่งหลังเท่านั้น (ใช้ $e^{-2} = 0.135$) (0.27)

(4) จากประสบการณ์เกี่ยวกับโรงงานแห่งหนึ่ง มีประสบอุบัติเหตุอุตสาหกรรมเฉลี่ย 4 ครั้งต่อเดือน ใช้สูตร (6.19.1) คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ในเดือนที่กำหนดให้จะมีประสบอุบัติเหตุอุตสาหกรรมน้อยกว่า 4 ครั้ง (คำนวณหา ความน่าจะเป็นสำหรับ $x = 0, 1, 2$ และ 3 แล้วเอามาบวกกัน ใช้ $e^{-4} = .0183$) (0.4331)