บทที่ 3
การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

3.1 คำนำ

ถ้ามีคำถามขึ้นว่าผลการสอบวิชาเศรษฐศาสตร์ของนักศึกษาเป็นอย่างไร คำตอบที่จะได้มาก็ต้องเริ่มต้นจากการรวบรวมข้อมูลดิบมาเป็นตารางแจกแจงความถี่ซึ่งแสดงถึงการแจกแจงความถี่ของคะแนนเพื่อที่จะนำไปเสนอด้วยอีกต่อหนึ่ง การแจกแจงความถี่และการนำเสนอด้วยกราฟนี้แหละที่เป็นคำตอบให้เราทราบเกี่ยวกับผลการสอบวิชาเศรษฐศาสตร์ของนักศึกษา แต่ก็เป็นเพียงวิธีการสถิติขั้นแรก เพราะขั้นต่อไปเราจะต้องนำข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้วไปย่อลงอีกให้เหลือจำนวนน้อยที่สุด เพื่อแสดงแต่ลักษณะที่สำคัญที่สุดของกลุ่มนั้น

การแจกแจงความถี่ของข้อมูลในเรื่องต่าง ๆ มักมีส่วนคล้ายคลึงกันอยู่ 2 ประการ คือ 1. ค่าของข้อมูลในกลุ่มมีค่าแตกต่างกันออกไป (Variation) 2. แม้ว่ามีค่าแตกต่างกันออกไป ค่าเหล่านี้ก็ยังมีแนวโน้มเอียงเข้าสู่ส่วนกลาง ดังจะเห็นได้จากข้อมูลส่วนใหญ่ตามข้อเท็จจริง เมื่อมีการแจกแจงโดยทั่ว ๆ ไปมักจับกลุ่มรวมกันอยู่ในแถบค่ากลาง ๆ เพราะฉะนั้นถ้าจะให้เราเลือกค่าของข้อมูลค่าหนึ่ง เพื่อใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งกลุ่มก็เป็นธรรมดาที่เราควรจะเลือกใช้ค่ากลางหรือค่าที่ข้อมูลเกิดบ่อยที่สุด หรือค่าเฉลี่ย เพราะเป็นค่าที่ถือได้ว่า ใช้แทนข้อมูลทั้งกลุ่มได้ดีที่สุด ตัวอย่างคะแนนผลการทดสอบของนักศึกษา 20 คนเป็น 9,4,7,6,10,10,5,10,7,10,3,10,9,8,9,10, 6,8,4,6 ตามลำดับ ถ้าต้องการจะให้เลือกผลการสอบของนักศึกษาว่าส่วนใหญ่ หรือตัวแทนได้คะแนนเท่าใด เราก็จะเลือกเอานักศึกษาที่ได้คะแนน 10 เพราะนักศึกษาในกลุ่มได้เกรดนี้มากที่สุด

3.2 มัชฌิมเลขคณิต (Arithmetic mean)

ตารางที่ 2.2 แสดงถึงการแจกแจงความถี่ของเกรดของนักศึกษา 50 คน (สมมุติว่ากลุ่ม A) สมมุติว่ามีอีกกลุ่มหนึ่งให้เป็นกลุ่ม B และมีจำนวนนักศึกษาเท่ากัน การแจกแจงเกรดก็เช่นเดียวกัน นั่นคือ ลักษณะของเส้นโค้งความถี่ (Frequency curve) ดูคล้ายกัน ท่านอาจจะเปรียบเทียบเกรดของสองกลุ่มนี้ ที่อาจจะเป็นการเปรียบเทียบโดยตรงของการแจกแจงความถี่ทั้งสอง อย่างไรก็ตามเนื่องจากการแจกแจงทั้งสองคล้ายคลึงกัน เราอาจจะเลือกเอาค่าเฉพาะ

บางค่า (Parameters) ของการแจกแจงและเปรียบเทียบค่าเฉพาะเหล่านี้แทนที่จะใช้การแจกแจงความถี่ไม่ได้หรือ คำตอบก็คือได้

ถ้าการแจกแจงความถี่สามารถจะใช้ค่ากลางบางค่าแทน เราอาจจะเปรียบเทียบค่ากลางของการแจกแจงทั้งสองได้ ค่ามัชฌิมเลขคณิตก็เป็นค่าหนึ่งของค่ากลาง เราจะมาให้คำจำกัดความของค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนที่จะดำเนินการพิจารณาปัญหาของเราต่อไป

คำจำกัดความ ให้ X เป็นตัวแปรค่าและ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_N$ เป็นค่าสังเกตหรือข้อมูลของ X ค่าของมัชฌิมเลขคณิตก็คำนวณได้จาก

$$\mu = \frac{\text{ผลบวกของค่าสังเกต (หรือข้อมูล) N ค่า}}{N} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.1)$$

ในเมื่อ μ แทนค่ามัชฌิมเลขคณิต ถ้าเราใช้สัญลักษณ์แทน คำจำกัดความก็แสดงออกมาในรูปของ

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.2)$$

(ดูรายละเอียดได้ในหัวข้อ 1.7 เครื่องหมายของสัญลักษณ์)
มัชฌิมเลขคณิตนิยมเรียกสั้น ๆ ว่ามัชฌิม

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ให้ X เป็นตัวแปรค่าของน้ำหนัก (ปอนด์) ของนักศึกษา 3 คน ค่าสังเกตหรือข้อมูลคือ

$$x_1 = 120,\ x_2 = 130,\ x_3 = 140$$

มัชฌิมก็จะได้ $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} x_i$

$$= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= \frac{1}{3}(120 + 130 + 140) = 130 \text{ ปอนด์}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 คำนวณหามัชฌิมของคะแนนจากตารางที่ 2.1 ได้

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

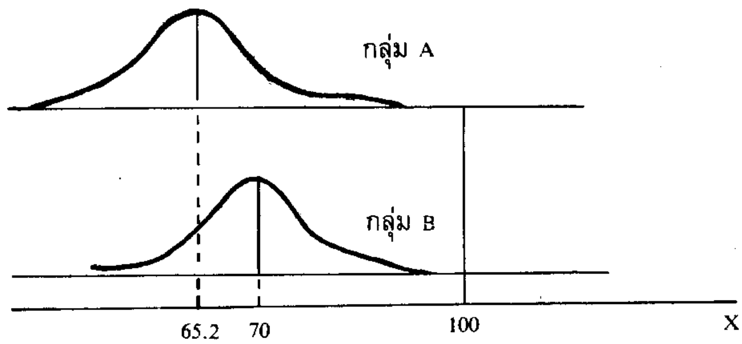
$$= \frac{1}{50} (60 + 33 + \ldots\ldots\ldots + 89 + 88)$$

$$= 65.2 \text{ คะแนน}$$

∴ มัชฌิมของคะแนนมีค่าเท่ากับ 65.2

(หมายเหตุ $n = 50, x_1 = 60, x_2 = 33, x_3 = 85, \ldots\ldots\ldots x_{49} = 89, x_{50} = 88$)

สมมุติว่ามัชฌิมของเกรดของนักศึกษา 50 คนในกลุ่ม B เป็น 70 เนื่องจากการแจกแจงของกลุ่มทั้งสองเหมือนกันดังที่ได้กล่าวข้างต้นเราอาจจะเปรียบเทียบการแจกแจงความถี่ของเกรดกลุ่ม A และกลุ่ม B โดยใช้มัชฌิม 65.2 กับ 70 คะแนนเพียงค่าเดียว

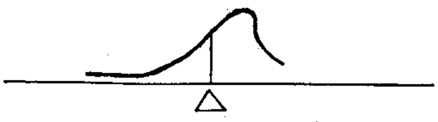


รูปที่ 3.1

เราทำการแจกแจงความถี่ของกลุ่ม A และกลุ่ม B มาแสดงด้วยกราฟ รูปที่ 3.1 แกนนอนเป็นสเกลของตัวแปรค่า X ของเส้นโค้งความถี่ทั้งสอง เส้นโค้งทั้งสองมีลักษณะเหมือนกันและกัน (เพราะมีการกระจายหรือความแปรปรวนเหมือนกัน) ต่างกันก็แต่มัชฌิมของคะแนน 65.2 และ 70

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรามีกลุ่ม A,B,C,O,E และการแจกแจงของเกรดเป็นแบบปกติของแต่ละกลุ่ม ความแตกต่างของการแจกแจงปกติทั้ง 5 กลุ่มก็คือมัชฌิมของการแจกแจง

โดยหลักเรขาคณิตแล้ว มัชฌิมของการแจกแจงความถี่ก็คือจุดศูนย์ถ่วง ถ้าเราพิจารณาเส้นโค้งความถี่คล้ายกับแผ่นโลหะบางอย่าง จุดสมดุลย์ของแผ่นโลหะก็อยู่ที่มัชฌิม ดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2

ลักษณะที่สำคัญของมัชฌิมเพื่อวัตถุประสงค์ที่จะนำไปประยุกต์ก็คือจะต้องเป็นค่าที่ได้จากค่าสังเกตหรือข้อมูลที่แท้จริง เพราะจะเป็นสาเหตุให้ผลลัพธ์เปลี่ยนไป ดังตัวอย่าง ถ้ามีนักศึกษาอยู่ 5 คน สอบได้คะแนน 60,60,60,60,100

มัชฌิม คือ

$$\mu = \frac{1}{5}(60 + 60 + 60 + 60 + 100)$$

$$= 68$$

จะเห็นได้ว่าคะแนน 100 ของนักศึกษาคนหนึ่งสามารถเพิ่มค่ามัชฌิมได้ 8 คะแนน แต่ถ้ามีใครคนหนึ่งถามว่า มัชฌิมของนักศึกษาทั้ง 5 เป็นเท่าใด คำตอบก็คือ 68 ซึ่งสมมุติว่ามีคะแนนหรือข้อมูลกระจายอยู่ รวมคะแนน 68 แต่จากคำนวณข้างต้น คะแนน 68 จะเป็นตัวแทนของการแจกแจงของเกรดหรือคะแนนหาเพียงพอไม่ จะต้องคำนึงถึงการกระจายเข้ามาพิจารณาด้วย

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหามัชฌิมแบบไม่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม (Ungrouped data)

มัชฌิมเลขคณิต (มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม)

การคำนวณหามัชฌิมเลขคณิตแบบนี้แบ่งออกได้เป็น

(ก) แบบไม่มีอันตรภาคชั้น สมมุติว่าผลการสอบสามครั้งของนักศึกษาคนหนึ่งได้คะแนน 50,80 และ 70 โดยใช้เวลาสอบ 1,2 และ 3 ชั่วโมงตามลำดับ นักศึกษาคนนี้อาจจะมีแนวความคิดถึงความสำคัญของการสอบทั้งสามครั้งต่างกัน เขาอาจจะคิดว่าการสอบครั้งแรกและครั้งที่สามไม่มีความสำคัญ (เพราะว่าเขาได้คะแนนไม่สู้จะดี) ครั้งที่สองเท่านั้นที่สำคัญ เขาจึงอยากให้ใช้คะแนนครั้งที่สองเป็นเครื่องวัดผลแทนที่จะใช้คะแนนเฉลี่ยของผลการสอบ 3 ครั้ง

อย่างไรก็ตามมีนักศึกษาอีกคนได้คะแนน 90,50,70 อาจจะคัดค้านและให้ถือผลการสอบครั้งแรกเป็นเครื่องวัดผลและมีความสำคัญ

ในการตัดสินว่าการสอบครั้งใดจะสำคัญกว่ากัน เราต้องหาเหตุผลเพื่อที่จะให้ความยุติธรรมทั้งสองฝ่าย หลักที่จะให้ความยุติธรรมและเป็นที่ยอมรับกันแล้วในชนส่วนใหญ่ก็คือ การสอบจะต้องขึ้นอยู่กับระยะเวลา นั่นคือ 1:2:3 (หมายความว่าสอบครั้งแรก, ครั้งที่สอง, ครั้งที่สามใช้เวลา 1,2 และ 3 ชั่วโมง) เราก็หามัชฌิมของคะแนนที่สอบทั้งสามครั้งเป็นเครื่องวัดผลดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1

(1) คะแนน	(2) ความถี่	(3) (1) × (2)	(1) คะแนน	(2) ความถี่	(3) (1) × (2)
50	1	50	90	1	90
80	2	160	50	2	100
70	3	210	70	3	210
	6	420		6	400

มัชฌิม $= \frac{420}{6} = 70$ คะแนน　　　　มัชฌิม $= \frac{400}{6} = 66.67$ คะแนน

เราใช้เครื่องหมายของสัญลักษณ์แทนก็จะได้ว่า

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{3} f_i} \qquad \text{..........(3.2.3)}$$

ในเมื่อ $x_1 = 50, x_2 = 80, x_3 = 70$ และความถี่ $f_1 = 1, f_2 = 2$ และ $f_3 = 3$

ในที่นี้ข้อมูลมีอยู่เพียง 3 ชั้น ผลบวกก็เริ่มตั้งแต่ 1 ถึง 3 แต่ถ้าข้อมูลมีอยู่ K ชั้น ผลบวกก็เริ่มตั้งแต่ 1 ถึง K อย่างเช่น

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \qquad \text{..........(3.2.4)}$$

(ข) แบบมีอันตรภาคชั้น เมื่อกำหนดข้อมูลอยู่ในรูปของตารางความถี่เราก็ไม่ทราบค่าของข้อมูลแต่ละค่าได้ ดังนั้นเราจะใช้สูตรที่กล่าวข้างต้นมาคำนวณหามัชฌิมไม่ได้ แต่เราสามารถจะคำนวณหาค่ามัชฌิมของการแจกแจงซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับค่ามัชฌิมจริงได้ โดยการตั้งเงื่อนไขขึ้นว่า เงื่อนไขที่เราตั้งขึ้นก็คือให้จุดกลางของชั้นแทนค่าของข้อมูลของแต่ละชั้น ดังตัวอย่างจากตารางที่ 3.2 ถ้าค่าจริงของข้อมูลในชั้น 30-40 ปอนด์ คือ 32, 33 และ 37 ค่ามัชฌิมจริงก็คำนวณได้ (32+33+37)/3 = 34 ปอนด์ แต่จุดกลางที่ได้จากเราตั้งเงื่อนไขมีค่าเท่ากับ 30+40/2 = 35 ปอนด์ ซึ่งใกล้เคียงกับค่ามัชฌิมจริง จากเงื่อนไขที่ตั้งขึ้นทำให้เราสามารถคำนวณหาค่าผลบวกของชั้นได้ใกล้เคียงกับผลบวกจริง ดังเช่น ผลบวกของชั้น 30-40 มีค่า 3 × 35 = 105 ปอนด์ ค่าผลบวกจริงคือ 32+33+37 = 102 ปอนด์ ค่าที่ผิดไป 105-102 = 3 ปอนด์

ตารางที่ 3.2

ปอนด์	ความถี่ f	จุดกลาง X	fX	ค่าจริงของข้อมูล	ค่ามัชฌิมจริง	ค่าจริง fX
30-40	3	35	105	32,33,37	34	102
40-50	2	45	90	44,48	46	92
	5		19.5	194		194

จากเหตุผลเหล่านี้ เราก็สามารถหาค่าผลบวกของแต่ละชั้นได้จากตารางข้างบน 105 และ 90 ต่อไปเราก็คำนวณหาผลบวกของแต่ละชั้นมาบวกกันได้ 105+90 = 195 ส่วนค่าจริง 194 (ดูตารางที่ 3.2)

มัชฌิม (μ) ที่ต้องการทราบก็คำนวณหาได้โดยเอาผลบวกทั้งหมดหารด้วยจำนวนความถี่ทั้งหมดก็จะได้

$$\mu = \frac{195}{5} = 39 \text{ ปอนด์}$$

ค่ามัชฌิมจริงเราได้ $= \frac{194}{5} = 38.8$ ปอนด์

เงื่อนไขที่ตั้งขึ้น ถ้ามีการแจกแจงที่ถูกต้องและจำนวนความถี่มีมาก ๆ ค่าของมัชฌิมก็จะมีความถูกต้องมากขึ้น

เรานำเอาสูตรมาคำนวณหามัชฌิมได้ จุดกลาง $x_1 = 35$ และ $x_2 = 45$ ความถี่ $f_1 = 3$, $f_2 = 2$

$$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2}{f_1 + f_2} = \frac{3 \times 35 + 2 \times 45}{3 + 2}$$

$$= \frac{195}{5} = 39 \text{ ปอนด์}$$

ถ้าเราใช้เครื่องหมายของสัญลักษณ์ได้

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{2} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} f_i}$$

โดยทั่ว ๆ ไปจะมีถึง K ช่วงระหว่างชั้น

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

ตัวอย่าง 3.2.3 จงคำนวณหามัชฌิมของคะแนนจากตารางที่ 2.3

ชั้นคะแนน	ความถี่ f	จุดกลาง X	fX
30 – 39	4	34.5	138.0
40 – 49	6	44.5	267.0
50 – 59	8	54.5	436.0
60 – 69	12	64.5	774.0
70 – 79	9	74.5	670.5
80 – 89	7	84.5	591.5
90 – 99	4	94.5	378.0
	50		3255.0

มัชฌิมของคะแนน $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$

ในเมื่อ i = 1,2, ...7 (K = 7) $\sum_{i=1}^{K} f_i x_i = 3255$, $\sum_{i=1}^{k} f_i = 50$

แทนค่าลงในสูตร $\mu = \dfrac{3255}{50} = 65.1$ คะแนน

การคำนวณหามัชฌิมโดยวิธีลัด การคำนวณอาจจะง่ายขึ้นถ้าเราเอาจำนวนค่าคงที่ตัวใดตัวหนึ่งที่สมมุติขึ้นมาลบออกและบวกเข้าทุก ๆ ข้อมูล ค่าของข้อมูลนั้นก็ยังไม่เปลี่ยนแปลง ตัวอย่าง (แบบไม่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม) มีเลขอยู่สามจำนวน 1,2 และ 3 เราจะได้ค่ามัชฌิม $\mu = 2$ ให้ A = 5 เป็นจำนวนค่าคงที่ที่จะเอาไปลบและบวกเลขสามจำนวนนี้

$1-5+5,\ 2-5+5,\ 3-5+5$

มัชฌิมก็คือ

$$\mu = \frac{(1-5+5) + (2-5+5) + (3-5+5)}{3}$$

$$= \frac{(5+5+5) + (1-5) + (2-5) + (3-5)}{3}$$

$$= \frac{15 + (1-5) + (2-5) + (3-5)}{3}$$

$$= \frac{15}{3} + \frac{(1-5) + (2-5) + (3-5)}{3}$$

$$= 5 + (2-5)$$

$$= 2$$

เราอาจจะเขียนได้โดยใช้สัญลักษณ์อย่างเช่น

$$\mu = \frac{(A+A+A) + (X_1-A) + (X_2-A) + (X_3-A)}{3}$$

$$= \frac{3A + (X_1-A) + (X_2-A) + (X_3-A)}{3}$$

$$= \frac{3A}{3} + \frac{(X_1 - A) + (X_2 - A) + (X_3 - A)}{3}$$

$$= A + \frac{(X_1 - A) + (X_2 - A) + (X_3 - A)}{3}$$

$$= A + \frac{d_1' + d_2' + d_3'}{3}$$

$$= A + \frac{\sum_{i=1}^{3} d_i'}{3}$$

ในเมื่อ $d_1' = (X_1 - A)$, $d_2' = (X_2 - A)$, $d_3' = (X_3 - A)$ เป็นค่าของผลต่างระหว่างแต่ละข้อมูลกับจำนวนค่าคงที่สมมุติขึ้น ในกรณีที่ค่าของผลต่างมีจำนวน K จำนวน เราก็จะได้ค่าของมัชฌิมดังสูตร

$$\mu = A + \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i'}{K} \qquad \text{..........(3.2.5)}$$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาค่ามัชฌิมของเลขจำนวนต่อไปนี้ 76, 54, 73, 45 และ 37 ให้จำนวนค่าคงที่ A = 37 (ค่า A จะเป็นเลขจำนวนอะไรก็ได้) เราจะได้

$$d_1' = x_1 - A = 76 - 37 = 39$$

$$d_2' = x_2 - A = 54 - 37 = 17$$

$$d_3' = x_3 - A = 73 - 37 = 36$$

$$d_4' = x_4 - A = 45 - 37 = 8$$

$$d_5' = x_5 - A = 37 - 37 = 0$$

มัชฌิมเลขคณิต μ คือ

$$\mu = A + \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i'}{K} = 37 + \frac{39+17+36+8+0}{5}$$

$$= 37 + \frac{100}{5} = 37 + 20 = 57$$

จากคุณสมบัตินี้เรานำไปประยุกต์ในการหามัชฌิมแบบที่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่มดังสูตร

$$\mu = A + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} \times I \qquad .....(3.2.6)$$

ในเมื่อ A เป็นจำนวนค่าคงที่ d_i เป็นส่วนเบี่ยงเบนของชั้น (d_i คำนวณได้จาก $(x_i - A)/I$ และต่างกับค่า d_i') I เป็นค่าอันตรภาคชั้น ดังตัวอย่าง

ตารางที่ 3.3

ชั้นคะแนน	ความถี่ f_i	จุดกลาง X	$d_i = (X - A)/I$	fd
30 - 39	4	34.5	(34.5 − 64.5)/10 = −3	−12
40 − 49	6	44.5	(44.5 − 64.5)/10 = −2	−12
50 − 59	8	54.5	(54.5 − 64.5)/10 = −1	−8 (−32)
60 − 69	12	A = 64.5	(64.5 − 64.5)/10 = 0	0
70 − 79	9	74.5	(74.5 − 64.5)/10 = 1	9
80 − 89	7	84.5	(84.5 − 64.5)/10 = 2	14
90 − 99	4	94.5	(94.5 − 64.5)/10 = 3	12 (+35)
	50			3

ในที่นี้เราเลือกเอาค่าจุดกลาง 64.5 มาเป็นค่า A โดยที่จริงแล้วค่าจุดกลางอาจจะเลือกจุดหนึ่งจุดใดก็ได้ แต่เลือกจุดกลาง 64.5 นั้น ก็เพื่อความสะดวกในการคำนวณและเป็นจุดกึ่งกลางของการแจกแจง เพื่อว่าค่าของ + fd กับ − fd เมื่อนำมาบวกกันจะได้ค่าน้อย ๆ ดังตารางคอลัมน์สุดท้าย +fd = +35, −fd = −32 (+fd − fd = 35 − 32 = 3) ส่วนเบี่ยงเบนของชั้น d_i หมายถึงค่าของผลต่างระหว่างจุดกลางกับจำนวนค่าคงที่ A ว่าเป็นกี่เท่าของค่าอันตรภาคชั้น

มัชฌิมเลขคณิตเราคำนวณได้จากสูตรที่ 3.2.6

$$\mu = 64.5 + \frac{3}{50} \times 10$$

$$= 64.5 + .6$$

$= 65.1$ คะแนน

ในเมื่อ $A = 64.5$, $\sum_{i=1}^{K} f_i d_i = (35-32) = 3$, $\sum_{i=1}^{K} f_i = 50$, $I = 10$

คำตอบที่ได้จะมีค่าเท่ากับการคำนวณโดยใช้สูตรที่ 3.2.4

3.3 มัธยฐาน (Median)

ในกรณีที่การแจกแจงความถี่เบ้ไปข้างใดข้างหนึ่งและมีค่าสูงไม่เป็นแบบการแจกแจงปกติ เพราะฉะนั้นการหามัชฌิมเลขคณิตจึงเป็นการไม่เหมาะสมอย่างเช่นรายได้ของร้านค้าแห่งหนึ่งมีดังนี้

6,000 , 6,000 , 6,000 , 42,000 บาท

มัชฌิม ก็คือ

$$\mu = \frac{1}{4}(6{,}000 + 6{,}000 + 6{,}000 + 42{,}000)$$

$$= 15{,}000 \text{ บาท}$$

จะเห็นได้ว่ามัชฌิมของรายได้สามจำนวนแรกคือ 6,000 บาท แต่ถ้ารวมรายได้จำนวนหลัง 42,000 บาท ซึ่งมีค่าสูงมาก ค่าของมัชฌิมก็จะเปลี่ยนไปเป็น 15,000 บาท ต่างไปจากเดิมมาก จึงไม่เหมาะที่จะใช้แจกแจงความถี่รายได้ ยังมีวิธีอื่นดีกว่าคือการหามัธยฐาน

ก. มัธยฐาน (กรณีที่ไม่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม) หมายถึงข้อมูลตัวกลางเมื่อเอาข้อมูลที่มีอยู่มาเรียงลำดับตามขนาดมากน้อยถ้าจำนวนข้อมูลที่มีอยู่เป็นเลขคี่ ข้อมูลตัวกลางก็คือค่าของมัธยฐาน ดังตัวอย่าง

กำหนดให้จำนวนเลข

5, 8, 10, 12, 2

เราเรียงลำดับข้อมูลตามขนาดมากน้อย

2, 5, 8, 10, 12

มัธยฐานก็คือ 8 ซึ่งเป็นข้อมูลตัวกลาง กำหนดให้จำนวนเลข

2, 4, 9, 9, 9, 9, 15

มัธยฐานก็คือ 9

ในกรณีแรกข้อมูลทั้งหมดมี 5 ข้อมูล มัธยฐานก็คือค่าข้อมูลตัวที่สาม ในกรณีหลังข้อมูลทั้งหมด 7 ข้อมูล มัธยฐานคือค่าข้อมูลตัวที่สี่ ถ้ามีข้อมูลทั้งหมด N จำนวน และเป็นเลขคี่ มัธยฐาน

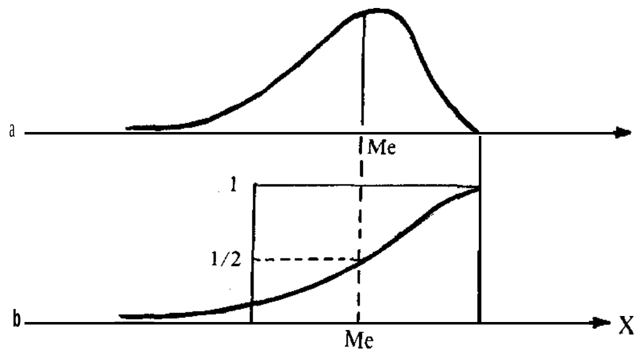
คือ ค่าข้อมูลตัวที่ (N + 1)/2 อย่างเช่น N เท่ากับ 17 มัธยฐาน ก็คือค่าข้อมูลตัวที่ (17 + 1)/2 = 9 (จำนวนข้อมูล N จะต้องเรียงลำดับขนาดมากน้อย) ถ้าข้อมูลหลายจำนวนมีค่าเท่ากัน การเรียงลำดับข้อมูลจะถือเอาข้อมูลจำนวนไหนก่อนหลังก็ได้ อย่างเช่นเลข 9 มีถึงสี่จำนวน

ถ้าเรามีจำนวนข้อมูลทั้งหมดเป็นเลขคู่ จะหาตัวกลางของข้อมูลไม่ได้ แต่จากคำจำกัดความค่ามัธยฐานจะหาได้จากค่าเฉลี่ยของจำนวนข้อมูลตัวกลางสองจำนวน ตัวอย่างเช่น มีเลขอยู่จำนวนหนึ่ง

3, 6, 8, 10, 12, 20

เราพบว่าค่ามัธยฐานก็คือ (8 + 10)/2 = 9 เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลจำนวนที่ 3 และ 4 สูตร (N + 1)/2 จะเป็นตัวเลขบอกตำแหน่งของค่ามัธยฐาน อย่างเช่น เรามีข้อมูล 40 จำนวน ค่ามัธยฐานก็คือ จำนวนข้อมูลตัวที่ (40 + 1)/2 หรือ 20.5 คืออยู่ระหว่างจำนวนที่ 20 และ 21 (หมายเหตุเราใช้สัญลักษณ์ Me แทนมัธยฐาน)

มัธยฐานของการแจกแจงความถี่เป็นค่าที่แบ่งการแจกแจงความถี่ออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน ดังแสดงในรูปที่ 3.3

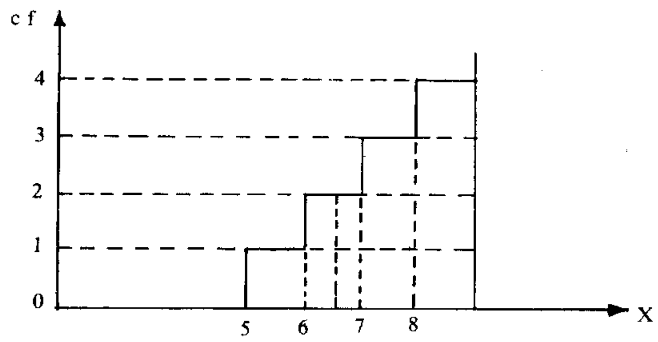


รูปที่ 3.3

รูปที่ 3.3 (a) มัธยฐานเป็นค่าที่แบ่งพื้นที่ของเส้นโค้งความถี่ รูปที่ 3.3 (b) เป็นเส้นโค้งความถี่สะสม ค่าของ X จะสมนัยกัน ไปยังจุดที่เส้นโค้งสูง 1/2 ก็คือ มัธยฐาน

สมมุติเรามีรายรับอยู่ 4 ค่า (รูปที่ 3.4)

5, 6, 7, 8 บาท

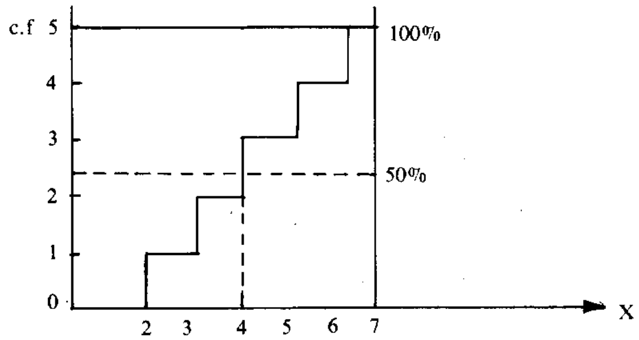


รูปที่ 3.4

กราฟความถี่สะสมแสดงถึงทุก ๆ ค่าระหว่าง 6 และ 7 บาท เป็นค่ามัธยฐาน ในกรณีเช่นนั้น ค่ากลาง (6 + 7)/2 = 6.5 บาท เราใช้เป็นค่ามัธยฐาน

สมมุติเรามีรายรับอยู่ 5 ค่าของบุคคล คน 5 คน (รูปที่ 3.5)

2, 3, 4, 5, 6 บาท

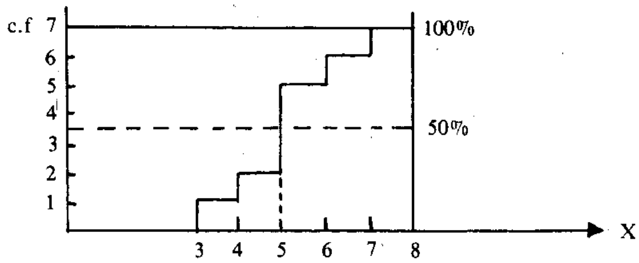


รูปที่ 3.5

ค่ามัธยฐานของบุคคลกลุ่มนี้คือ 4 บาท ถึงแม้ว่าบุคคลไม่สามารถจะแบ่งแยกออกเป็นครึ่งจำนวนได้ แต่เราอาจจะคิดว่า 4 บาทของครึ่งคนเป็นของการแจกแจงของส่วนครึ่งที่ต่ำกว่าและส่วนครึ่งที่สูงกว่า

สมมุติเรามีรายรับของบุคคลอยู่ 7 คน (รูปที่ 3.6)

3, 4, 5, 5, 5, 6, 7 บาท

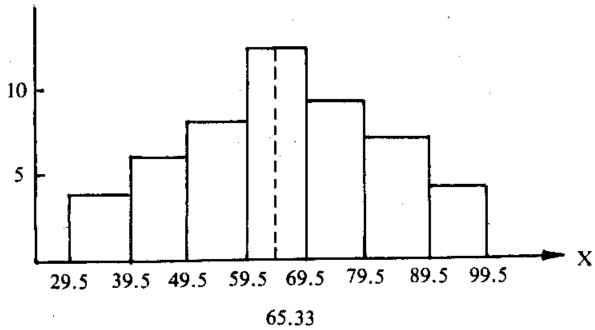


รูปที่ 3.6

กราฟแสดงถึงค่ามัธยฐานคือ 5 บาท เป็นจำนวนที่สองของ 5 บาท การแจกแจงแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน เราอาจจะคิดว่าจำนวนที่สองของ 5 บาท เป็นของการแจกแจง ส่วนครึ่งที่ต่ำกว่าและส่วนครึ่งที่สูงกว่า

ข. มัธยฐาน (กรณีที่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม)

คำจำกัดความของมัธยฐานที่มีการแจกแจงความถี่คือ จำนวนค่าที่สมนัยกับจุดของสเกลในแนวนอน ซึ่งเกิดจากเส้นตั้งฉาก แบ่งครึ่งพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมแผนภูมิ ดังรูปที่ 3.7



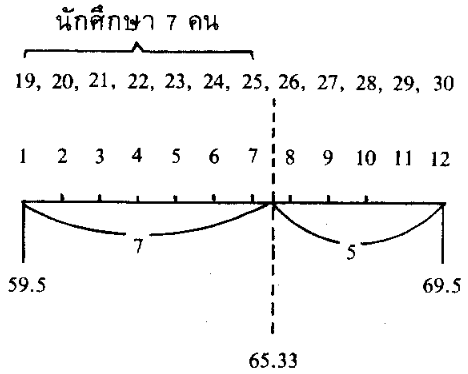
รูปที่ 3.7

เพื่อที่จะคำนวณหามัธยฐานแบบมีการแจกแจงความถี่ประกอบด้วย N ข้อมูลได้จำนวนข้อมูลที่ N/2 โดยเริ่มจากข้างใดข้างหนึ่งของการแจกแจง ต่างกับการคำนวณหามัธยฐานแบบไม่มีการแจกแจง ซึ่งหาได้จากจำนวนข้อมูลที่ (N + 1)/2

ค่ามัธยฐานเราคำนวณหาได้โดยเทียบบัญญัติไตรยางศ์ ดังตัวอย่างจากตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4

ชั้นคะแนน	ความถี่ f	ความถี่สะสม c.f.
30 - 39	4	4
40 - 49	6	10
50 - 59	8	18
60 - 69	12 = fm	30
70 - 79	9	39
80 - 89	7	46
90 - 99	4	50
	50	



จากตารางที่ 3.3 เราเพิ่มช่องความถี่สะสม ค่าของมัธยฐานจะอยู่ระหว่างนักเรียนคนที่ 25 และ 26 คือคนที่ 25.5 ต้องการหาคนที่ 25.5 เริ่มแรกต้องหาชั้นของคนที่ 25 และ 26 อยู่เสียก่อน เนื่องจากมีนักเรียน 18 คน อยู่ตั้งแต่ชั้น 50-59 ลงมา และ 30 คน อยู่ตั้งแต่ชั้น 60-69 ลงมา นักศึกษาคนที่ 25 และ 26 อยู่ในชั้น 60-69 สำหรับการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ เราใช้นักศึกษาคนที่ 25 (ดูรูปในตารางที่ 3.3 ประกอบ) เนื่องจากมีนักศึกษาที่มีคะแนนสูงกว่าคนที่ 18 ไปจนถึงคนที่ 25 มีอยู่ 7 คน (25 - 18 = 7) ในชั้น 60-69 ถ้าเราสมมุติว่าคะแนนของนักศึกษาในชั้นมีการแจกแจง (มีนักศึกษาในอันตรภาคชั้น 12 คน) แล้วคะแนนของนักศึกษาคนที่ 25.5 จะสมนัย (Correspond) ต่อคะแนน นั่นคือ นักศึกษาต่างกัน 12 คน คะแนนต่างกัน 69.5 - 59.5 = 10 คะแนน นักศึกษาต่างกัน 7 คน คะแนนต่างกัน $10 \times \frac{7}{12} = 5.83$ คะแนน เพราะฉะนั้นค่ามัธยฐานก็คือ $59.5 + 10 \times \frac{7}{12} = 65.33$ คะแนน

(หมายเหตุ ผลต่างระหว่าง 69.5 - 59.5 = 10 ก็คือค่าอันตรภาคชั้น) เพื่อสะดวกในการคำนวณมัธยฐานเราอาจจะใช้สูตรได้

$$\text{(มัธยฐาน) } Me = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f}{f_m}\right] I \qquad \text{.....(3.3.1)}$$

ในเมื่อ L หมายถึงค่า lower boundary ของชั้นที่ต้องการคำนวณหามัธยฐาน

Σf หมายถึงผลบวกของความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าชั้น ที่ต้องการคำนวณหามัธยฐานลงไปหรือความถี่สะสมของชั้นต่ำกว่าชั้นที่ต้องการคำนวณมัธยฐาน

fm หมายถึงความถี่ของชั้นที่ต้องการคำนวณหามัธยฐาน

I หมายถึงค่าอันตรภาคชั้น

N หมายถึงข้อมูลทั้งหมด

$\frac{N}{2}$ หมายถึงจำนวนข้อมูลตัวที่ต้องการคำนวณหามัธยฐาน

ตัวอย่าง 3.3.1 คำนวณหามัธยฐานจากตารางที่ 3.3

$$\text{สูตร} \quad Me = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f}{f_m}\right] I$$

ในเมื่อ $N/2 = 50/2 = 25$

$L = 59.5$

$\Sigma f = 4 + 6 + 8 = 18$

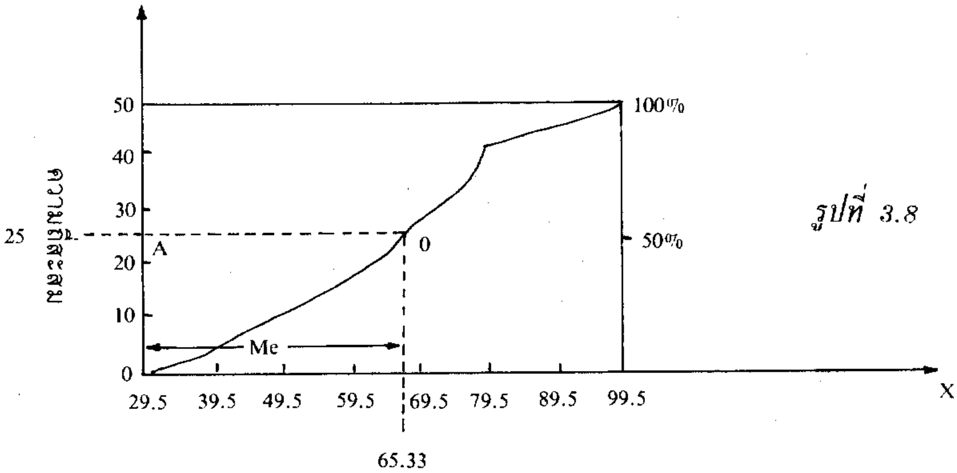
$f_m = 12, \; I = 10$

แทนค่า $Me = 59.5 + \left(\frac{25 - 18}{12}\right) 10$

$= 59.5 + \frac{7}{12} \times 10 = 59.5 + 5.83$

$= 65.33$ คะแนน

ค่ามัธยฐานที่ได้นี้อาจหาได้โดยวิธีกราฟจากรูปการแจกแจงความถี่สะสม ถ้านำข้อมูลในตารางข้างบนมาเขียนกราฟจะได้รูปการแจกแจงความถี่ดังรูป 3.8



รูปที่ 3.8

ก่อนอื่นเราต้องหาจำนวนข้อมูลตัวที่จะให้ค่ามัธยฐาน ในที่นี้ข้อมูลจำนวนนั้นก็คือ $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$ เราก็ไปดูแกนของความถี่สะสมของเลขจำนวนที่ 25 ให้เป็นจุด A ต่อไปเราลากเส้น AO ให้ขนานกับแกนนอน X ไปตัดเส้นกราฟที่จุด O จากจุด O ลากเส้นตั้งฉากกับแกนนอน X และตัดกันที่จุด X เราก็จะได้ค่ามัธยฐาน

3.4 ฐานนิยม (Mode)

การวัดมัชฌิมอีกแบบหนึ่งเรียกว่าแบบฐานนิยม ซึ่งหมายถึงค่าของจำนวนข้อมูลที่เกิดบ่อยที่สุด ฐานนิยมได้ถูกนำไปประยุกต์กับปริมาณ และคุณภาพของข้อมูล ตัวอย่างเช่น ถ้าหากว่าธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยในการฝากแบบออมทรัพย์มากกว่าอัตราการฝากแบบอื่นอยู่ $2\frac{1}{2}$ เปอร์เซ็นต์ เรากล่าวได้ว่า $2\frac{1}{2}$ เปอร์เซ็นต์ เป็น Modal rate ถ้าหากว่าประชาชนส่วนมากตายด้วยโรคหัวใจวายมากกว่าสาเหตุอื่น เราก็กล่าวได้ว่าโรคหัวใจวายเป็น Modal cause ของการตาย หรือประชาชนส่วนใหญ่อาศัยบ้านพัก 4 ห้องนอน มากกว่าบ้านพักชนิดอื่นเราก็กล่าวได้ว่าบ้านพัก 4 ห้องนอน เป็น Modal size

การหาฐานนิยมแบ่งออกได้เป็น 2 อย่าง คือ

ก) ฐานนิยมแบบไม่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม (Ungrouped data) ในกรณีนี้การหาฐานนิยมไม่มีปัญหาใด ๆ ทั้งสิ้น เราเพียงแต่เลือกเอาค่าของข้อมูลที่เกิดบ่อยที่สุดอย่างเช่น มีข้อมูลอยู่ 13 จำนวน

4, 8, 5, 6, 8, 6, 7, 7, 9, 7, 6, 7, 5

ค่าของฐานนิยม คือ 7

บางกรณีเกิดมีข้อมูลที่เกิดบ่อยที่สุดอยู่สองจำนวน ค่าฐานนิยมก็คือมัชฌิมของข้อมูลทั้งสองจำนวน

ตัวอย่าง มีจำนวนข้อมูลอยู่ 13 จำนวน

2, 6, 6, 9, 9, 7, 5, 6, 3, 9, 6, 9, 1

โจทย์ข้อนี้มีข้อมูลอยู่ 2 จำนวนที่เกิดบ่อยที่สุด คือ 6 และ 9 แต่ละข้อมูลก็มีอยู่ 4 จำนวน เพราะฉะนั้นค่าฐานนิยมจึงต้องใช้ค่าเฉลี่ยของ 6 และ 9 ได้เท่ากับ (6+9) /2=7.5

(หมายเหตุ ถ้าหากว่าจำนวนข้อมูลไม่มีจำนวนหนึ่งจำนวนใดที่เกิดบ่อยที่สุด ในที่นี้ก็ไม่มีฐานนิยม)

ข) ฐานนิยมแบบมีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม (Grouped data) ใช้ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนนักศึกษา 50 คน ในตารางที่ 3.4 เราจะเห็นว่าอันตรภาคชั้น 60-69 มีความถี่มากที่สุด อันตรภาคชั้นนี้เรียกว่า modal class เราจึงพูดได้ว่า ค่าฐานนิยมจะต้องอยู่ระหว่าง 60 และ 69 แต่นั่นแหละค่าอะไรที่อยู่ระหว่าง 60 และ 69 ที่เราจะให้เป็นค่าฐานนิยม โดยทั่ว ๆ ไปเขามักนิยมใช้ค่าจุดกลางนั่นคือ 64.5 โดยวิธีที่ถูกต้องแล้วเขามีสูตรคำนวณหา สูตรนั้นเขียนได้ดังนี้

$$Mo = L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) I \qquad \text{..........(3.4.1)}$$

ตารางที่ 3.5

ชั้นคะแนน	ความถี่ f	
30-39	4	
40-49	6	
50-59	8	
60-69	Δ_1 12 Δ_2	modal class
70-79	9	
80-89	7	
90-99	4	
	50	

ในเมื่อ

L = lower boundary ของชั้น modal class

I = ความกว้างของชั้น

Δ_1 = ผลต่างของความถี่ระหว่าง modal class กับชั้นก่อนหน้า modal class

Δ_2 = ผลต่างของความถี่ระหว่าง modal class กับชั้นถัดจาก modal class

ตัวอย่าง 3.4.1 คำนวณหาฐานนิยมจากตารางที่ 3.5

จากสูตรฐานนิยม $Mo = L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) I$

ในเมื่อ $L = 59.5$

$I = 10$

$\Delta_1 = 12\text{-}8 = 4$; $\Delta_2 = 12\text{-}9 = 3$

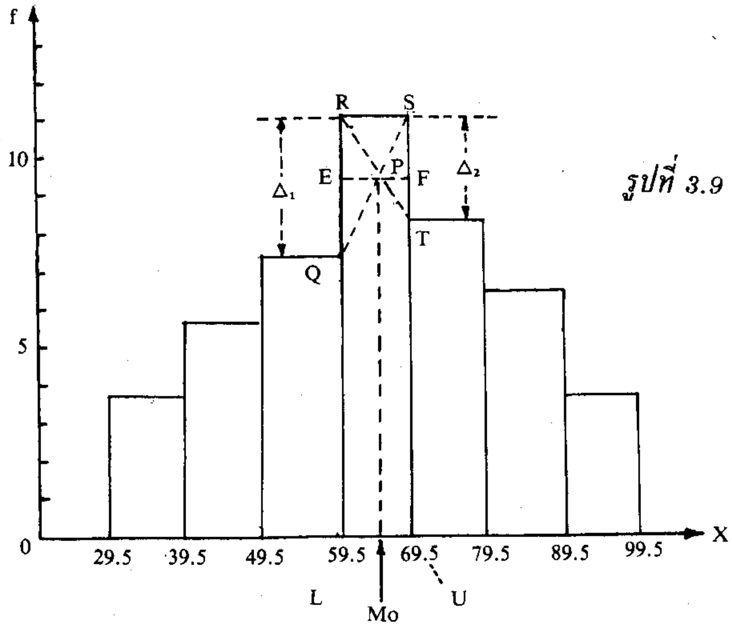
แทนค่าลงในสูตร

$$Mo = 59.5 + \left(\frac{4}{4+3}\right) \times 10$$

$$= 59.5 + \frac{4}{7} \times 10 = 59.5 + 5.71$$

$= 65.21$ คะแนน

การคำนวณหาสูตรฐานนิยม เราหาได้จากรูปที่ 3.9 โดยการเขียนกราฟจากตารางที่ 3.5



รูปที่ 3.9

L = lower boundary ของ modal class

U = upper boundary

Δ_1 = ผลต่างของความถี่ระหว่าง modal class กับชั้นที่อยู่ทางซ้าย

Δ_2 = ผลต่างของความถี่ระหว่าง modal class กับชั้นที่อยู่ทางขวา

Mo = ค่าฐานนิยม

จากรูปสามเหลี่ยม PQR กับ PST เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายคลึงกัน

$$\therefore \frac{EP}{RQ} = \frac{PF}{ST}$$

$$\frac{Mo - L}{\Delta_1} = \frac{U - Mo}{\Delta_2}$$

$$\Delta_2(Mo - L) = \Delta_1(U - Mo)$$

$$\Delta_2 Mo - \Delta_2 L = \Delta_1 U - \Delta_1 Mo$$

$$\Delta_1 Mo + \Delta_2 Mo = \Delta_1 U + \Delta_2 L$$

$$Mo(\Delta_1 + \Delta_2) = \Delta_1 U + \Delta_2 L$$

$$Mo = \frac{\Delta_1 U + \Delta_2 L}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

เนื่องจาก U = L+I เมื่อ I ก็คือความกว้างของชั้น

$$\text{Mo} = \frac{\Delta_1(L+I)+\Delta_2 L}{\Delta_1+\Delta_2}$$

$$\text{Mo} = \frac{\Delta_1 L+\Delta_1 I+\Delta_2 L}{\Delta_1+\Delta_2}$$

$$= \frac{L(\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_1 I}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$= \frac{L(\Delta_1 + \Delta_2)}{\Delta_1 + \Delta_2} + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right) I$$

$$\text{Mo} = L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right) I$$

3.5 เปรียบเทียบมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยม

ความสัมพันธ์ระหว่างมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมเมื่อมีการแจกแจงความถี่ในรูปต่าง ๆ ดังรูป 3.10

เมื่อการแจกแจงเป็นลักษณะที่สมมาตรกัน มัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมจะทับกันสนิท หรือมีค่าเดียวกันถ้าการแจกแจงเบ้ไปทางขวา (รูปที่ 3.10 ข.) จะได้

มัชฌิมเลขคณิต > มัธยฐาน > ฐานนิยม

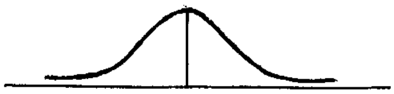
แต่ถ้าการแจกแจงเบ้ไปทางซ้าย (รูปที่ 3.10 ค.) จะได้

ฐานนิยม > มัธยฐาน > มัชฌิมเลขคณิต

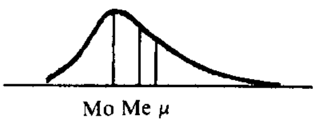
ในกรณีการแจกแจงเบ้ไปขวาหรือซ้ายเราอาจจะประมาณค่าใดค่าหนึ่งได้ ถ้าทราบค่าเฉลี่ยอีก 2 ค่า แต่โดยทั่วไปการประมาณหาค่าเฉลี่ยโดยวิธีนี้ มักจำกัดเฉพาะการหาค่าฐานนิยม เพราะค่าของมัธยฐานและมัชฌิมเลขคณิต หาโดยวิธีอื่นจะได้ถูกต้องกว่า

จากความสัมพันธ์ที่ได้กล่าวมานี้ อาจจะประมาณค่าของฐานนิยมได้โดยใช้สูตร

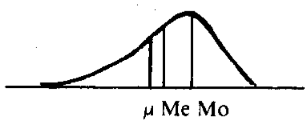
$$Mo = 3Me - 2\mu \qquad \text{..........(3.5.1)}$$



(ก) การแจกแจงแบบสมมาตร



(ข) การแจกแจงเบ้ไปขวา



(ค) การแจกแจงเบ้ไปซ้าย

รูปที่ 3.10

3.6 มัชฌิมเรขาคณิต (Geometric mean)

มัชฌิมเรขาคณิตเป็นการหาค่ามัชฌิมอีกวิธีหนึ่ง ที่มีความสำคัญมากเพื่อที่จะนำไปใช้คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอัตราเฉลี่ย และสร้างจำนวนเลขดัชนี วิธีหาค่ามัชฌิมเรขาคณิตมีอยู่สองวิธีคือ

ก. ข้อมูลที่ไม่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม (Ungrouped data)

กำหนดให้มีข้อมูลอยู่ $x_1, x_2, \ldots\ldots x_N$ มัชฌิมเรขาคณิตก็จะมีค่าเท่ากับรูท ที่ N ของผลคูณของข้อมูล N จำนวน เขียนเป็นสูตรได้

$$G = \sqrt[N]{x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots\ldots x_N} \qquad \text{.......(3.6.1)}$$

ตัวอย่าง 3.6.1 ถ้ามีเลขอยู่ 3 จำนวน 3, 1, 9

$$G = \sqrt[3]{1 \times 3 \times 9} = 3$$

การคำนวณหามัชฌิมเรขาคณิตตามวิธีนี้ จะต้องใช้เวลามากเพราะต้องคูณตัวเลขทั้งหมดก่อน แล้วนำผลคูณนั้นมาถอดรูทอีกครั้งหนึ่ง โดยปกติเวลาคำนวณเราใช้ค่า log แทน

$$\log G = \log \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_N}$$
$$= \log (x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_N)^{1/N}$$
$$= \frac{1}{N} \log(x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_N)$$
$$= \frac{1}{N} (\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots\ldots + \log x_N)$$
$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \log x_i}{N} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.2)$$

ข. ข้อมูลที่มีการจัดข้อมูลเป็นกลุ่ม (Grouped data)

ในกรณีนี้จะมีความถี่เข้ามาเกี่ยวข้องด้วยในการหาค่ามัชฌิมเรขาคณิตมีสูตรดังนี้

$$G = \sum_{i=1}^{k} \sqrt[f_i]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots\ldots x_k^{f_k}}$$

$$= \sqrt[N]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots\ldots x_k^{f_k}} \text{ เมื่อ } \sum_{i=1}^{k} f_i = N \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.6.3)$$

การคำนวณหาโดยใช้ค่า log แทน

$$\log G = \log \sqrt[N]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots\ldots x_k^{f_k}}$$
$$= \log (x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots\ldots x_k^{f_k})^{1/N}$$
$$= \frac{1}{N} \log (x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots\ldots x_k^{f_k})$$
$$= \frac{1}{N} (\log x_1^{f_1} + \log x_2^{f_2} + \ldots\ldots + \log x_k^{f_k})$$
$$= \frac{1}{N} (f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots\ldots + f_k \log x_k)$$
$$\log G = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \log x_i}{N}$$

ประโยชน์ของมัชฌิมเรขาคณิต

ประโยชน์ที่จะนำไปใช้กับการเปลี่ยนแปลงของอัตราเฉลี่ย และสูตรดอกเบี้ยเชิงประกอบ ตัวอย่างเช่น ร้านค้าหนึ่งได้กำไร 5,000, 10,000 และ 80,000 ในปี 2500, 2501 และ 2502 ตามลำดับ เราต้องการหาอัตราเฉลี่ยกำไรที่เพิ่มขึ้นของร้านค้าจากปี 2500 ถึง 2501 เป็น 2 เท่า และจาก

2501 ถึง 2502 เป็น 8 เท่า ถ้าเราคำนวณหามัชฌิมเลขคณิตของเลขสองจำนวนเราได้ (2+8)/2 = 5 และเราก็สามารถพูดได้ว่ากำไรเฉลี่ยของร้านแต่ละปีเป็น 5 เท่าของปีก่อนหน้า 1 ปี ผลลัพธ์นี้ผิดไปจากความจริงมาก ซึ่งดูได้จากปี 2500 ร้านได้กำไร 5,000 บาท และกำไรเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 5 เท่าของแต่ละปี เพราะฉะนั้นปี 2501 และปี 2502 ร้านได้กำไร 5000x5 = 25,000 บาท และ 25,000x5 = 125,000 บาท ตามลำดับ จำนวนกำไรนี้สูงเกินที่เป็นจริง (เพราะปี 2501 ได้กำไร 10,000 บาท ปี 2502 ได้กำไร 80,000 บาท)

แต่ถ้าเราคำนวณโดยวิธีมัชฌิมเรขาคณิตของอัตราเพิ่มขึ้นเราจะได้

$$G = \sqrt{2\times 8} = \sqrt{16} = 4$$

เราก็สามารถพูดได้ว่ากำไรเฉลี่ยของร้านแต่ละปีเป็น 4 เท่าของปีก่อนหน้า 1 ปี ถ้าเรานำอัตราเพิ่มขึ้นไปใช้กับร้านค้าดูว่าในปี 2500 ได้กำไร 5,000 บาท ในปี 2501 และ 2502 ได้กำไร 5,000x4 = 20,000 บาท, 20,000x4 = 80,000 บาท ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า ปี 2501 จะได้ค่าสูงเกินไป แต่ปี 2502 ได้ค่าถูกต้อง แสดงว่าการหาแบบมัชฌิมเรขาคณิตดีกว่าแบบมัชฌิมเลขคณิต

ตัวอย่าง 3.6.2 สมมุติว่าอัตราของผลิตภัณฑ์เพิ่มขึ้น 25 เปอร์เซ็นต์ จากปีแรกไปปีที่สอง และ 40 เปอร์เซ็นต์จากปีที่สองไปปีที่สามดังต่อไปนี้

ปีแรก 100
ปีที่สอง 125 25 เปอร์เซ็นต์เปลี่ยนไป (เพิ่มขึ้น)
ปีที่สาม 175 40 เปอร์เซ็นต์เปลี่ยนไป (เพิ่มขึ้น)

อัตราเฉลี่ยเพิ่มขึ้นระหว่าง 2 ปี (เราจะเห็นว่าปีที่สอง 125 เปอร์เซ็นต์ของปีแรกและปีที่สาม 140 เปอร์เซ็นต์ของปีที่สอง) ได้

$$G = \sqrt{125\times 140} = 132.3$$

หรืออัตราเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 132.3 เปอร์เซ็นต์

ถ้ายกกำลังของทั้งสองข้างของสมการข้างบนจะได้

$$\begin{aligned}(\sqrt{125\times 140})^2 &= (132.3)^2\\ 125\times 140 &= (100+32.3)^2\\ 17500 &= 100^2(1+.323)^2\\ 175 &= 100(1+.323)^2\end{aligned}$$

ให้ $P_2 = 175, P_0 = 100$ และ $r = .323$

แทนค่าลงในสมการข้างบน ก็จะได้

$$P_2 = P_0(1+r)^2 \qquad \text{.........(3.6.5)}$$

ซึ่งเป็นสูตรดอกเบี้ยเชิงประกอบ

ถ้าเราต้องการให้เป็นสูตรทั่ว ๆ ไป โดยให้เงินต้นทุนเป็น P_0 บาท ภายหลังลงทุนไปแล้ว N ปี เงินต้นทุนพร้อมด้วยอัตราเพิ่มขึ้นเป็น P_N มัชฌิมเรขาคณิตของอัตราเพิ่มขึ้น r คำนวณได้จาก

$$P_N = P_0(1+r)^N \qquad \text{..........(3.6.6)}$$

$$(1+r)^N = \frac{P_N}{P_0}$$

$$1+r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}}$$

$$r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}} - 1 \qquad \text{..........(3.6.7)}$$

ตัวอย่าง 3.6.3 GNP เพิ่มขึ้นจาก \$ 400,000,000,000 ในปี 1956 เป็น \$ 500,000,000,000 ในปี 1960 จงคำนวณหาอัตราเฉลี่ยเพิ่มขึ้น

จากสูตร

$$r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}} - 1$$

$$= \sqrt[N]{\frac{500}{400}} - 1$$

ในที่นี้เราตัดศูนย์ออกเสีย 9 ตัว

ให้ $x = \sqrt[4]{\frac{500}{400}} = \sqrt[4]{\frac{5}{4}}$

$$\log x = \log\sqrt[4]{\frac{5}{4}} = \log\left(\frac{5}{4}\right)^{1/4}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}(\log 5 - \log 4)$$

$$= \frac{1}{4}(.699 - .6021)$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.0969 = 0.0242$$

$$x = 1.0573$$

$$r = 1.0573 - 1$$

$$= .0573$$

นั่นคือ อัตราเฉลี่ยเพิ่มขึ้นเป็น 5.7 เปอร์เซ็นต์

3.7 มัชฌิมฮาร์โมนิค (Harmonic mean : H)

สมมุติว่าเรามีเงินอยู่ 12 บาท สำหรับซื้อไข่ชนิดโหลละ 40 สตางค์ และ 12 บาท สำหรับซื้อไข่โหลละ 60 สตางค์ เราต้องการทราบว่าไข่เหล่านี้ราคาเฉลี่ยโหลละเท่าไร เราอาจจะหาได้โดย (40+60)/2 = 50 สตางค์ต่อโหล ซึ่งได้ค่าที่ผิด เพราะว่า 12 บาทแรก เราสามารถซื้อได้ 30 โหลในราคาโหลละ 40 สตางค์ 12 บาทหลังเราซื้อได้ 20 โหลในราคาโหลละ 60 สตางค์ ดังนั้นเราซื้อได้ 50 โหลในราคา 24 บาท เฉลี่ยแล้วโหลละ 2,400/50 = 48 สตางค์ เท่านั้น แต่ถ้าเราหาโดยวิธีมัชฌิมฮาร์โมนิคของ 40 และ 60 เราจะได้ค่าที่ถูกต้อง

$$\frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48$$

มัชฌิมฮาร์โมนิค มีวิธีคำนวณอยู่ 2 วิธี

ก. ข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่ ถ้ามีข้อมูลอยู่ N จำนวน $x_1, x_2, \ldots x_N$ **มัชฌิมฮาร์โมนิค** จะมีค่าเท่ากับ จำนวนข้อมูล N หารด้วยผลบวกของส่วนกลับของข้อมูล x_i นั่นคือ

$$\text{มัชฌิมฮาร์โมนิค (H)} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}} \qquad \text{..........(3.7.1)}$$

ข. ข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

$$\text{มัชฌิมฮาร์โมนิค (H)} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}} \qquad \text{..........(3.7.2)}$$

ตัวอย่าง 3.7.1 จงคำนวณหามัชฌิมฮาร์โมนิคของเลขจำนวน 3, 4 และ 6

จากสูตร

$$(H) = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{x_i}}$$

ในเมื่อ $N = 3, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6$

แทนค่าลงในสูตร

$$H = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{4+3+2}{12}}$$

$$= \frac{3 \times 12}{9} = 4$$

มัชฌิมฮาร์โมนิคเท่ากับ 4

3.8 ควอร์ไทล์ (Quartiles)

แทนที่เราจะแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กันโดยที่ข้อมูลได้เรียงลำดับตามขนาดมากน้อยแบบมัธยฐาน เราอาจแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กันโดยให้ค่าของข้อมูล 3 ค่าด้วยกันเรียกว่าควอร์ไทล์ เศษหนึ่งส่วนสี่ของข้อมูลจะมีค่าต่ำกว่า Q_1 (ควอร์ไทล์ที่ 1) เศษหนึ่งส่วนสองของข้อมูลมีค่าต่ำกว่า Q_2 (ควอร์ไทล์ที่ 2) และเศษสามส่วนสี่ของข้อมูลมีค่าต่ำกว่า Q_3 (ควอร์ไทล์ที่ 3) การวางเงื่อนไขก็เช่นเดียวกับในกรณีมัธยฐาน เราต้องคำนวณหาลำดับที่จำนวนข้อมูลที่ $N/4$ ในกรณีหา Q_1 และ $3N/4$ ในกรณีหา Q_3 แต่ถ้าเราต้องการหา โดยเริ่มจากอีกข้างหนึ่งของการแจกแจง เราต้องคำนวณหา $\frac{3N}{4}$ ในกรณีหา Q_1 และ $N/4$ ในกรณีหา Q_3

สูตรการคำนวณหาควอร์ไทล์

$$Qr = L + \frac{\left(\frac{N \times r}{4} - \Sigma f \right)}{f_Q} \times I \qquad \text{..........(3.8.1)}$$

ในเมื่อ

L = lower boundary ของชั้นที่ต้องการหาควอร์ไทล์

Σf = ผลบวกของความถี่ของชั้นก่อนหน้าชั้นควอร์ไทล์หรือความถี่สะสมของชั้นก่อนหน้าชั้นควอร์ไทล์

f_Q = ความถี่ของชั้นควอร์ไทล์

$\frac{N \times r}{4}$ = จำนวนข้อมูลหรือความถี่ที่ต้องการคำนวณหาควอร์ไทล์

(N = จำนวนข้อมูลทั้งหมด, r = ตำแหน่งควอร์ไทล์)

I = อันตรภาคชั้น หรือความกว้างของชั้น

ตัวอย่าง 3.8.1 คำนวณหาควอร์ไทล์ที่ 1 และที่ 3 จากตารางที่ 3.4

หาควอร์ไทล์ที่หนึ่ง

จากสูตร

$$Qr = L + \frac{\left(\frac{N \times r}{4} - \Sigma f\right)}{f_Q} I$$

ในเมื่อ $\frac{N \times r}{4} = \frac{50 \times 1}{4} = 12.5$

$$L = 49.5$$

$$\Sigma f = 6 + 4 = 10$$

$$f_Q = 8, I = 10$$

แทนค่าลงในสูตรได้

$$Q_1 = 49.5 + \left(\frac{12.5 - 10}{8}\right) 10$$

$$= 49.5 + \frac{2.5}{8} \times 10$$

$$= 49.5 + \frac{25}{8} = 49.5 + 3.125 = 52.625$$

$\therefore$ ควอร์ไทล์ที่หนึ่งเท่ากับ 52.625 คะแนน

หาควอร์ไทล์ที่สาม

$$\frac{N \times r}{4} = \frac{50 \times 3}{4} = \frac{150}{4} = 37.5$$

$$L = 69.5$$

$$\Sigma f = 4 + 6 + 8 + 12 = 30$$

$$f_Q = 9$$

แทนค่าลงในสูตรได้

$$Q_3 = 69.5 + \left(\frac{37.5 - 30}{9} \right) 10$$

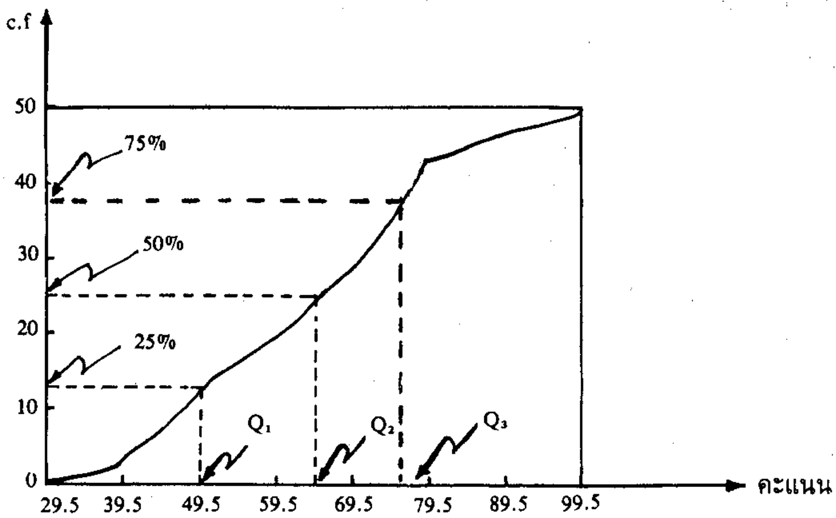
$$= 69.5 + \frac{7.5}{9} \times 10$$

$$= 69.5 + \frac{75}{9} = 69.5 + 8.322 = 77.822$$

$\therefore$ ควอร์ไทล์ที่ 3 มีค่าเท่ากับ 77.822 คะแนน

ในกรณีที่เราต้องการจะทราบว่า จำนวนนักศึกษาจะอยู่ระหว่าง Q_1 และ Q_3 กี่คน เราคำนวณหาได้โดยเอาจำนวนที่ $\frac{N \times r}{4}$ ของ Q_3 ลบด้วยจำนวนที่ $\frac{N \times r}{4}$ ของ Q_1 อย่างเช่น $\frac{N \times r}{4}$ ของ Q_3 เท่ากับ 37.5 ของ Q_1 เท่ากับ 12.5 เพราะฉะนั้นจำนวนนักศึกษาอยู่ระหว่าง Q_1 และ Q_3 เท่ากับ 37.5-12.5 = 25 คน

การคำนวณหาค่าควอร์ไทล์โดยวิธีกราฟก็หาได้เช่นเดียวกับวิธีหามัธยฐาน คือหาจำนวนข้อมูลตัวที่ต้องการทราบควอร์ไทล์ เมื่อทราบค่าแล้วก็ให้ไปดูค่าที่แกนของความถี่สะสมจากจุดนั้นให้ลากเส้นขนานกับแกนนอนไปตัดเส้นความถี่สะสมจากจุดตัดลากเส้นขนานกับแกนความถี่สะสม ไปตัดแกนนอนที่จุดใด จุดนั้นก็เป็นค่าของควอร์ไทล์ดังรูป 3.11



รูปที่ 3.11

3.9 เดไซล์ (Deciles)

มีอยู่ทั้งหมด 9 ค่า ร่วมกันแบ่งการแจกแจงออกเป็น 10 ส่วน แต่ละส่วนมีจำนวนข้อมูลเท่า ๆ กัน โดยให้ D_1 เป็นเดไซล์ที่ 1, D_2 เป็นเดไซล์ที่ 2, Dr เป็นเดไซล์ที่ r

เพื่อที่จะหาค่าหนึ่งค่าใดของ Dr (r = 1, 2 ... 9) เราจะต้องนับ $(N \times r)/10$ ของจำนวนข้อมูลทั้งหมดโดยเริ่มจากข้างใดข้างหนึ่งของการแจกแจง เช่นเดียวกับวิธีหาค่ามัธยฐานหรือควอร์ไทล์

สูตรในการหาค่าเดไซล์ $$Dr = L + \frac{\left(\frac{N \times r}{10} - \Sigma f\right)}{f_D} I \qquad \text{..........(3.9.1)}$$

ในเมื่อ

$N \times r$	=	จำนวนข้อมูลหรือความถี่ที่ต้องการคำนวณหาเดไซล์ (N = จำนวนข้อมูลทั้งหมด, r = ตำแหน่งเดไซล์)
L	=	lower boundary ของชั้นที่ต้องการหาเดไซล์
Σf	=	ผลบวกของความถี่ของชั้นก่อนหน้าชั้นเดไซล์หรือความถี่สะสมของชั้นก่อนหน้าชั้นเดไซล์
f_D	=	ความถี่ของชั้นเดไซล์
I	=	ความกว้างของชั้น

ตัวอย่าง 3.9.1 หาเดไซล์ที่ 1 และที่ 6 จากตารางที่ 3.4

หาเดไซล์ที่ 1

ในเมื่อ $\frac{N \times r}{10} = \frac{50 \times 1}{10} = 5$

$$L = 39.5$$

$$\Sigma f = 4$$

$$f_D = 6$$

$$I = 10$$

แทนค่าลงในสูตรข้างต้นได้

$$D_1 = 39.5 + \left(\frac{5-4}{6}\right)10$$

$$= 39.5 + \frac{10}{6} = 39.5 + 1.67 = 41.17 \text{ คะแนน}$$

หาเดไซล์ที่ 6

ในเมื่อ $\frac{N \times r}{10} = \frac{50 \times 6}{10} = 30$, $L = 59.5$, $\Sigma f = 4 + 6 + 8 = 18$

$f_D = 12$, $I = 10$ แทนค่าลงในสูตรได้

$$D_6 = 59.5 + \left(\frac{30-18}{12}\right)10$$

$$= 59.5 + \frac{12 \times 10}{12} = 59.5 + 10 = 69.5 \text{ คะแนน}$$

3.10 เปอร์เซ็นต์ไทล์

ระบบเปอร์เซ็นต์ไทล์ใช้กันอย่างกว้างขวางเกี่ยวกับการวัดผลการศึกษาเพื่อรายงานตำแหน่งของแต่ละกลุ่มเปรียบเทียบกับการกระทำของกลุ่มที่ทราบ เปอร์เซ็นต์ไทล์เป็นค่าที่แบ่งข้อมูลทั้งหมดที่จัดลำดับจากน้อยไปหามากหรือจากมากไปหาน้อยหรือแบ่งการแจกแจงออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน โดยมีค่าอยู่ 99 ค่า ให้ Pr เป็นเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ r (r = 1, 2, ... 99) และมีค่าของข้อมูลจำนวน $r(\cdot N)$ เปอร์เซ็นต์ ค่าต่ำกว่า ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถคำนวณเปอร์-เซ็นต์ไทล์เพื่อว่าสัดส่วนที่กำหนดใด ๆ ของ N ข้อมูลมีค่าต่ำกว่า ตัวอย่างเช่น เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 6 (P_6 ก็คือค่าของข้อมูลนั้นที่ 6% ของข้อมูล (.06 N) มีค่าต่ำกว่า P_{75} (เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75) ก็คือว่าค่าของข้อมูลนั้นที่ 75% ของข้อมูล (.75 N) มีค่าต่ำกว่า การคำนวณหาเปอร์เซ็นต์ไทล์ก็คล้ายกับการคำนวณหามัธยฐาน, ควอร์ไทล์ หรือเดไซล์

สูตรการคำนวณหาเปอร์เซ็นต์ไทล์

$$Pr = L + \frac{\left(\frac{N \times r}{100} - \Sigma f\right) I}{f_p} \qquad \text{..........(3.10.1}$$

ตัวอย่าง 3.10.1 จงหาค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 15 และที่ 85 จากตารางที่ 3.4

หาเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 15

ในเมื่อ $\frac{N \times r}{100} = \frac{50 \times 15}{100} = 7.5,\ \Sigma f = 4,\ f_p = 6$

$L = 39.5,\ I = 10$

แทนค่าลงในสูตรข้างต้นได้

$$P_{15} = 39.5 + \left(\frac{7.5-4}{6}\right) 10$$

$$= 39.5 + \frac{3.5}{6} \times 10$$

$$= 39.5 + 5.83 = 45.33 \text{ คะแนน}$$

หาเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 85

ในเมื่อ $\frac{N \times r}{100} = \frac{50 \times 85}{100} = 42.5,\ L = 79.5,\ \Sigma f = 39$

$f_p = 7$, และ $I = 10$

แทนค่าลงในสูตร

$$P_{85} = 79.5 + \left(\frac{42.5-39}{7}\right)10$$

$$= 79.5 + \frac{3.5}{7} \times 10$$

$$= 79.5 + 5 = 84.5 \text{ คะแนน}$$

ถ้าต้องการทราบว่านักศึกษาจะอยู่ระหว่างเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 15 และที่ 85 มีอยู่กี่คนก็ให้เอา $\frac{N\times r}{100}$ ของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 85 ลบด้วย $\frac{N\times r}{100}$ ของเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 15 (42.5-7.5 = 35 คน) หรือเราอาจจะใช้แบบวิธีเทียบบัญญัติไตรยางศ์ก็ได้ (ใน 100 คน มีนักศึกษาอยู่ระหว่างเปอร์-เซ็นต์ไทล์ที่ 15 และที่ 85 อยู่ 85-15 = 70 คน ถ้านักศึกษา 50 คน จะมีนักศึกษาอยู่ (70×50)/100 = 35 คน

ในกรณีที่โจทย์บอกคะแนนดิบมาให้แล้วให้คำนวณหาตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ เราก็คำนวณได้จากสูตร

$$r = \frac{f_p \dfrac{(X-L)}{I} + \Sigma f}{N} \times 100 \qquad \text{.........(3.10.2)}$$

ในเมื่อ

X = คะแนนดิบที่ต้องการทราบตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์
r = ตำแหน่งของเปอร์เซ็นต์ไทล์
f_p = ความถี่ในชั้นซึ่งคะแนนดิบตกอยู่
L = ขีดจำกัดล่างจริงของชั้นซึ่งคะแนนดิบตกอยู่
Σf = ผลบวกของความถี่ของชั้นก่อนชั้นซึ่งคะแนนดิบตกอยู่หรือความถี่สะสมของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นซึ่งคะแนนดิบตกอยู่
I = ความกว้างของชั้น

ตัวอย่าง 3.10.2 จงหาว่านักศึกษาที่สอบได้คะแนน 65 อยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่เท่าไรจากตารางที่ 3.4

ในที่นี้เราทราบค่า $X = 65, L = 59.5, f_p = 12, \Sigma f = 18, I = 10$

แทนค่าในสูตรข้างต้น

$$r = \frac{\frac{12(65-59.5)}{10} + 18}{50} \times 100$$

$$= \frac{\frac{12 \times 5.5}{10} + 18}{50} \times 100$$

$$= \frac{6.6+18}{50} \times 100$$

$$= \frac{246}{50} \times 100 = 49.2$$

$\therefore$ เขาสอบได้คะแนน 65 อยู่ในเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 49

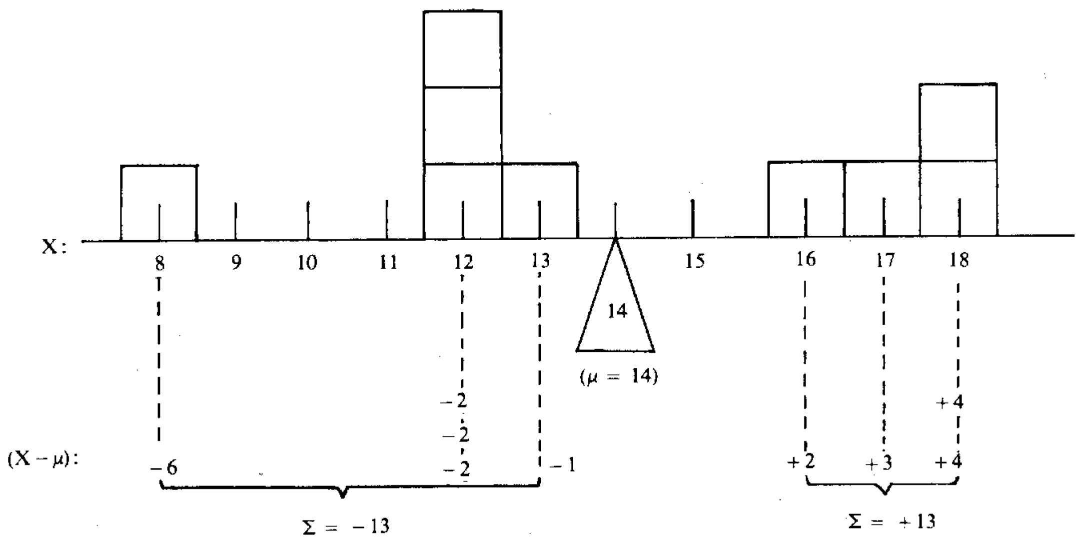
เพื่อพิจารณาค่าทั้งหมดที่กล่าวมาแล้วจะเห็นได้ว่ามัธยฐานก็คือควอร์ไทล์ที่ 2 หรือเดไซล์ที่ 5 หรือเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ควอร์ไทล์ที่ 1 ก็คือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ควอร์ไทล์ที่ 3 ก็คือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 เดไซล์ที่ 3 ก็คือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30

3.11 คุณสมบัติของมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม

คุณสมบัติของมัชฌิมเลขคณิต

มัชฌิมเลขคณิตมีคุณสมบัติไม่เหมือนมาตราวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางอื่น ๆ มีการแสดงตอบต่อตำแหน่งที่แน่นอนของแต่ละค่าสังเกตในการแจกแจง ทดสอบได้จากสูตร $\Sigma X/N$ แสดงว่า ถ้าค่าสังเกตเพิ่มหรือลดด้วยจำนวนใด ๆ ค่าของมัชฌิมเลขคณิตจะสะท้อนโอกาสนั้น

มัชฌิมเลขคณิต อาจเป็นเสมือนจุดสมดุลหรือฟัลครัมของการแจกแจง ใช้เปรียบเทียบเหมือนทางกลศาสตร์ ดังรูป 3.12 ประกอบด้วยฟัลครัม (จุดสมดุล) ไม้คาน (ไม้คานซึ่งไร้น้ำหนัก) และค่าสังเกตของการแจกแจงกระจายตามไม้คาน มัชฌิมเลขคณิตสมนัยกับตำแหน่งของฟัลครัมเมื่อระบบอยู่ในลักษณะสมดุล ถ้าหากว่าเปลี่ยนค่าสังเกตหนึ่ง จุดสมดุลจะเปลี่ยนด้วย



รูปที่ 3.12 มัชฌิมเลขคณิตเป็นเสมือนจุดสมดุลของการแจกแจง

มีวิธีการทางพีชคณิตแสดงว่ามัชฌิมเลขคณิต คือ จุดสมดุลสำหรับการแจกแจง $\Sigma(X-\mu) = 0$ นี้หมายความว่าถ้าคะแนนแสดงออกในรูปของส่วนเบี่ยงเบนไปจากมัชฌิมเลขคณิต ผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าเป็นลบและบวกจะมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ ผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าเป็นลบจะมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าเป็นบวก รูปที่ 3.12 แสดงว่า $\Sigma(X-\mu) = 0$ สำหรับข้อมูลที่กำหนดให้

พิสูจน์ $\Sigma(X-\mu) = \Sigma X - \Sigma\mu$

$= \Sigma X - N\mu$ เนื่องจากว่า μ เป็นค่าคงที่

$$= \Sigma X - N\frac{\Sigma X}{N}$$

$$= \Sigma X - \Sigma X$$

$$= 0$$

หมายเหตุ เป็นไปได้ทุก ๆ การแจกแจง

คุณสมบัติของมัธยฐาน

มัธยฐานเป็นจุดหนึ่งซึ่งแบ่งครึ่งค่าสังเกตที่จัดลำดับจากมากไปน้อยหรือจากน้อยไปมาก มัธยฐานสนองตอบต่อค่าสังเกต จำนวนมากที่มีค่าน้อยกว่า (หรือมากกว่า) ค่ามัธยฐาน แต่ก็เป็นค่าสังเกตที่ไม่อยู่ห่างไกลค่ามัธยฐานมากนัก มัธยฐานจึงมีความไวน้อยกว่ามัชฌิมเลขคณิต ในกรณีสองสามค่าสังเกตที่มีค่าน้อย ๆ หรือมาก ๆ ดังตัวอย่าง

X : 5, 6, 7, 8, 24

มัธยฐาน คือ 7 มัชฌิมเลขคณิต คือ 10 ค่าสังเกตที่มีค่าสูงสุด 24 เป็นค่าที่มีความแตกต่างมากจากค่าสังเกตอื่น ๆ และมีผลต่อผลรวมซึ่งจะกระทบต่อมัชฌิมเลขคณิตมาก แต่จะเป็นค่าสังเกตที่มีค่ามากกว่ามัธยฐานเท่านั้น ดังตัวอย่างเช่น ค่าสังเกต 24 นี้เปลี่ยนเป็น 9 มัธยฐานก็ยังมีค่าคงเดิมอยู่นั่นเอง

การแจกแจงที่ไม่สมมาตร มัธยฐานจะเป็นตัวแทนของการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางของกลุ่มค่าสังเกตดีกว่าและไม่ให้การถ่วงน้ำหนักที่ไม่เหมาะสมต่อค่าส่วนเบี่ยงเบนบางตัว มัธยฐานก็ยังเป็นรองจากมัชฌิมเลขคณิตในความสามารถที่จะกันอิทธิพลของการสุ่มตัวอย่างที่มีการเปลี่ยนแปลงเสมอในพฤติการณ์ธรรมดา สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ที่สุ่มมาจากการแจกแจงปกติ มัธยฐานจะแปรประมาณเศษหนึ่งส่วนสี่จากตัวอย่างไปอีกตัวอย่างมากกว่ามัชฌิมเลขคณิต สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก มัธยฐานมีความสัมพันธ์กันดีกว่า แต่ก็ยังอยู่ล้าหลังมัชฌิมเลขคณิต มัธยฐานใช้ในการอนุมานทางสถิติน้อยกว่ามัชฌิมเลขคณิต

ในบางครั้งจะพบกับปัญหาการแจกแจงปลายเปิด (open-ended) ดังแสดงข้างล่างนี้

คะแนน	ความถี่
155 - ขึ้นไป	5
150 - 154	8
145 - 149	12
140 - 144	10
135 - 139	4
130 - 134	2

ในการแจกแจงนี้ ขีดจำกัดบนของชั้นบนสุดไม่ได้ระบุคะแนนเฉพาะ ดังนั้น จุดกลางของชั้นจึงไม่ทราบ จึงไม่สามารถคำนวณหามัชฌิมเลขคณิต แต่มัธยฐานยังคงหาได้ การแจกแจงนี้ไปอุดทางการวิเคราะห์ทางสถิติที่เป็นประโยชน์ไป สิ่งสำคัญของการคิดวางแผนเพื่อศึกษาก่อนการรวบรวมข้อมูลจึงปรากฏขึ้น

ความสะดวกในการคำนวณหามัชฌิมเลขคณิต มัธยฐาน จากข้อมูลที่จัดเป็นหมวดหมู่หรือคะแนนดิบ ด้วยเครื่องคำนวณก็เหมือนกัน แต่อย่างไรก็ตาม การคิดคำนวณด้วยมือจากกลุ่มคะแนนที่จัดลำดับอย่างง่าย ๆ หาค่ามัธยฐานได้ง่ายกว่ามาก

คุณสมบัติของฐานนิยม

การคำนวณหาฐานนิยมไม่ยาก แต่ฐานนิยมตั้งอยู่อย่างไม่แน่นอน เมื่อใดจัดข้อมูลให้อยู่เป็นกลุ่ม ฐานนิยมอาจจะมีผลมาจากความกว้างและที่ตั้งของอัตรภาคชั้น ปัญหาอื่น ๆ ก็คืออาจจะมีมากกว่าหนึ่งฐานนิยม สำหรับกลุ่มของคะแนนโดยเฉพาะ ในรูปการแจกแจงแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุก ๆ คะแนนมีส่วนร่วมกัน

บางครั้งฐานนิยมเป็นเพียงอะไรอย่างหนึ่งที่เราต้องการ ถ้าเลือกคะแนนโดยสุ่ม คะแนนที่เป็นค่าฐานนิยมจะเป็นค่าพนันที่ดีที่สุดที่เราต้องเลือกค่าหนึ่งที่เกิดบ่อยที่สุด นี้เป็นคำตอบของปัญหา สิ่งหนึ่งที่บังเกิดบ่อยที่สุดคืออะไร และสิ่งนั้นเป็นมาตราวัดซึ่งสามารถใช้สำหรับข้อมูลซึ่งมีคุณลักษณะของสเกลที่เป็นตัวเลข (nominal scale) ดังตัวอย่าง ไม่มีมาตราวัดอื่นใดของแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่จะเหมาะสมสำหรับการแจกแจงของสีของลูกตา

3.12 มัชฌิมเลขคณิตรวมของกลุ่มย่อย

ในบางครั้งเราทราบมัชฌิมเลขคณิตของกลุ่มย่อยหลาย ๆ กลุ่ม แต่สิ่งที่เราต้องการหาคือ มัชฌิมเลขคณิตของค่าสังเกตทั้งหมดโดยคำนวณมาจากกลุ่มย่อย เราควรเริ่มจากวิธีการใหม่โดยการรวมคะแนนทั้งหมดและหารด้วยจำนวนทั้งหมด อย่างไรก็ตาม ผลบวกของคะแนนสามารถแสดงได้เหมือนผลบวกของกลุ่มย่อยทั้งหมด และผลบวกของจำนวนทั้งหมดสามารถแสดงได้เหมือนผลบวกของจำนวนของคะแนนในหลาย ๆ กลุ่มย่อย ด้วยเหตุนี้

$$\mu_c = \frac{\overset{\text{ทุกกลุ่ม}}{\Sigma X}}{N_{\text{ทุกกลุ่ม}}} = \frac{\Sigma X + \Sigma Y + \ldots\ldots}{N_x + N_y + \ldots\ldots}$$

ในเมื่อ μ_c เป็นมัชฌิมเลขคณิตของการแจกแจงรวม

X และ Y เป็นคะแนนจากกลุ่มย่อยที่หนึ่งและที่สอง

N_x และ N_y เป็นจำนวนของคะแนนในกลุ่มย่อยที่หนึ่งและที่สอง

เนื่องจากว่า $\mu_x = \Sigma X/N_x$ หรือ $\Sigma X = \mu_x N_x$ ในทำนองเดียวกัน $\Sigma Y = \mu_y N_y$ แทนค่าเหล่านี้สำหรับ ΣX และ ΣY สำหรับตัวตั้งของสูตรข้างต้น เราได้ มัชฌิมเลขคณิตของกลุ่มย่อยรวม

$$\mu_c = \frac{\mu_x N_x + \mu_y N_y + \ldots..}{N_x + N_y + \ldots..}$$

ตัวอย่าง 3.12.1 สมมติมีนักศึกษาสองกลุ่มโดยใช้ข้อสอบเดียวกัน มัชฌิมเลขคณิตของแต่ละกลุ่มเป็น

$$\mu_x = 40 \qquad \mu_y = 30$$

$$N_x = 50 \qquad N_y = 25$$

$$\mu_c = \frac{\mu_x N_x + \mu_y N_y}{N_x + N_y} \qquad \ldots\ldots\ldots.(3.12.1)$$

$$= \frac{(50)(40) + (30)(25)}{50 + 25}$$

$$= 36.7$$

สังเกตว่า มัชฌิมเลขคณิตของกลุ่มรวมมีค่าใกล้เคียงกับมัชฌิมเลขคณิตของกลุ่มแรกมากกว่ากลุ่มที่สอง เพราะว่ามีคะแนนมากกว่า ถ้าหากว่ากลุ่มย่อยทั้งหมดมีจำนวนเท่ากันและคะแนนเหมือนกัน สูตรที่ 3.12.1 ก็ไม่จำเป็นต้องใช้ มัชฌิมเลขคณิตที่ต้องถ่วงน้ำหนักของมัชฌิมเลขคณิตของกลุ่มย่อยจะให้ค่าที่ถูกต้อง

คุณสมบัติของมาตราวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางโดยย่อ

มัชฌิมเลขคณิต

1. มีผลตอบสนองต่อตำแหน่งที่แน่นอนของแต่ละคะแนนในการแจกแจง
2. เป็นจุดสมดุลของการแจกแจง
3. เป็นจุดที่ซึ่งผลบวกของส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าเป็นลบเท่ากับผลบวกของส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าเป็นบวก

4. มีความไวต่อคะแนนหรือค่าสังเกตมาก ๆ มากกว่ามัธยฐานและฐานนิยม

5. เป็นตัวแสดงของความเบ้เมื่อใช้ในการร่วมกับมัธยฐาน

6. เป็นมาตราวัดซึ่งสะท้อนถึงคะแนนทั้งหมดได้ดีที่สุด

7. ใช้กันอย่างกว้างขวางในกระบวนการทางสถิติขั้นสูง

8. มีความไวน้อยที่สุดต่อการเปลี่ยนแปลงจากการสุ่มตัวอย่างภายใต้พฤติกรรมธรรมดา

มัธยฐาน

1. เป็นจุดคะแนนซึ่งแบ่งค่าสังเกตหรือคะแนนออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน

2. มีผลตอบสนองต่อจำนวนของค่าสังเกตหรือคะแนนที่อยู่เหนือหรือล่างค่ามัธยฐาน แต่ไม่มีผลต่อตำแหน่งที่แน่นอนของคะแนน

3. มีผลต่อคะแนนปลาย ๆ น้อยกว่ามัชฌิมเลขคณิต

4. เป็นตัวแทนที่ดีกว่ามัชฌิมเลขคณิตในกรณีการแจกแจงที่เบ้มาก ๆ

5. ไม่มีประโยชน์เหมือนมัชฌิมเลขคณิตสำหรับวัตถุประสงค์ที่นอกเหนือระดับภาคพรรณนา

6. คำนวณหาได้ง่ายกว่ามัชฌิมเลขคณิตในกลุ่มของคะแนนที่จัดลำดับ

7. เป็นมาตรวัดที่มั่นคงซึ่งสามารถคำนวณได้สำหรับการแจกแจงปลายเปิด

ฐานนิยม

1. เป็นค่าที่เกิดบ่อยที่สุดของคะแนนหรือค่าสังเกต หรืออันตรภาคชั้นที่บรรจุจำนวนคะแนนหรือค่าสังเกตมากที่สุด

2. มีผลดี โดยการเลือกสรรของอัตรภาคชั้นมากกว่ามาตราวัดอื่น ๆ

3. บางครั้งไม่ได้เป็นค่าเดียวเท่านั้นของการแจกแจง

4. ขึ้นอยู่กับการสุ่มตัวอย่างที่มีการเปลี่ยนแปลงที่มั่นคง

5. มีประโยชน์สำหรับงานเบื้องต้นหรืองานหยาบ

6. คำนวณหาง่าย

7. มีการใช้น้อย นอกเหนือจากระดับภาคพรรณนา

8. เป็นมาตราวัดที่เหมาะสมกับข้อมูลที่มีคุณลักษณะตามตัวเลข

3.13 การใช้เครื่องหมายทางพีชคณิต

นิยาม 1 กำหนดให้กลุ่มค่าสังเกตหนึ่งมี N ค่า $X_1, X_2, \ldots X_N$ พร้อมด้วยมัชฌิมเลขคณิต μ ถ้าหากว่าบวกค่าคงที่ k เข้ากับแต่ละค่าสังเกต เพื่อว่าแต่ละค่าสังเกตกลายเป็น $X_i + k$ หรือลบค่าคงที่ k ออกจากแต่ละค่าสังเกต เพื่อว่าแต่ละค่าสังเกตกลายเป็น $X_i - k$ มัชฌิมเลขคณิตของค่าสังเกตรูปใหม่กลายเป็น

$$\left.\begin{aligned} \mu_{(x+k)} &= \mu + k \\ \mu_{(x-k)} &= \mu - k \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots.3.13.1$$

พิสูจน์

มัชฌิมเลขคณิต $\mu_{(x+k)}$ ของกลุ่มหนึ่งของ N ค่าสังเกต (X_i+k) คำนวณหาค่าได้

$$\mu_{(x+k)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i+k)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}X_i + \sum_{i=1}^{N}k}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N}k}{N}$$

$$= \mu + \frac{Nk}{N} = \mu + k$$

$$\mu_{(x-k)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-k)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}X_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{N}k}{N}$$

$$= \mu - \frac{Nk}{N} = \mu - k$$

นิยาม 2 กำหนดให้กลุ่มหนึ่งของ N ค่าสังเกต $X_1, X_2, \ldots X_N$ พร้อมด้วยมัชฌิมเลขคณิต μ ถ้าหากว่าแต่ละค่าสังเกตคูณด้วยค่าคงที่ g เพื่อว่าแต่ละค่าสังเกตกลับกลายเป็น gX_i หรือหารค่าสังเกตด้วยค่าคงที่ g เพื่อว่าแต่ละค่าสังเกตกลายเป็น X_i/g มัชฌิมเลขคณิตของค่าสังเกตรูปใหม่กลายเป็น

$$\left.\begin{aligned} \mu_{gx} &= g\mu \\ \mu_{x/g} &= \frac{\mu}{g} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........(3.13.2}$$

พิสูจน์ $\mu_{gx} = g\mu$

มัชฌิม μ_{gx} ของกลุ่ม N ค่าสังเกต gX_i สามารถคำนวณหาได้โดยตรง จากการแทน X_i ด้วย gX_i ในสมการ $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$ ได้

$$\mu_{gx} = \frac{\sum_{i=1}^{N} gX_i}{N}$$

เนื่องจากว่า g เป็นค่าคงที่

$$\mu_{gx} = \frac{g\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = g\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}\right]$$

$$= g\mu$$

พิสูจน์ $\mu_{x/g} = \frac{\mu}{g}$

มัชฌิม $\mu_{x/g}$ ของกลุ่ม N ค่าสังเกต X_i/g สามารถคำนวณได้โดยแทน X_i ด้วย X_i/g ในสมการ $\mu = \sum_{i=1}^{N} X_i/N$ ได้

$$\mu_{x/g} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{g}}{N}$$

$$= \frac{1}{g} \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

$$= \frac{\mu}{g}$$

ในบางครั้งเราต้องการแปลงกลุ่มค่าสังเกตทั้งโดยการเลื่อนจุดศูนย์และเปลี่ยนหน่วยมาตราวัดดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3 กำหนดให้กลุ่ม N ค่าสังเกต $X_1, X_2, \ldots X_N$ พร้อมด้วยมัชฌิม μ การแปลงสองครั้งโดยเริ่มจากลบแต่ละค่าสังเกตด้วยค่าคงที่ k และแล้วหารด้วยค่าคงที่ g ที่สอง ดังนั้น แต่ละค่าสังเกตกลับกลายเป็น $(X_i - k)/g$ โดยใช้สัญลักษณ์ μ_i แทนค่าสังเกต จากการแปลงสองครั้งได้

$$\mu_i = \frac{X_i - k}{g}$$

กระบวนการแปลงสองครั้งนี้มีประโยชน์ในการลดงานเกี่ยวกับการคำนวณมัชฌิมเลขคณิต μ ในหลาย ๆ สภาวะดังตัวอย่าง

ตารางที่ 3.6

การคำนวณมัชฌิมเลขคณิต คะแนนทดสอบความสามารถพิเศษ

	คะแนน x_i	$u_i = \frac{x_i - 100}{3}$
	115	5
	124	8
	130	10
	118	6
	127	9
	106	2
	124	8
	121	7
รวม	965	55

คำนวณมัชฌิมของ u_i (μ_u) กำหนดได้ดังนี้

$$\mu_u = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N} = \frac{55}{8}$$

$$= 6.88$$

นิยาม 4 กำหนดให้มีค่าสังเกต X_i กับ Y_i สองชุดจับคู่กัน N คู่ $X_1, X_2, \ldots X_N$ มีมัชฌิม μ_x และ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ มีมัชฌิม μ_y ในเมื่อ X_i กับ Y_i เป็นค่าสังเกตตัวที่ i ให้ S_i เป็นผลบวกของค่าสังเกต

$(X_i + Y_i)$ และ D_i เป็นผลต่างระหว่างค่าสังเกต $(X_i - Y_i)$ แล้ว μ_S เป็นมัชฌิมของผลบวก และ μ_D เป็นมัชฌิมของผลต่าง สามารถคำนวณหาได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \mu_S &= \mu_X + \mu_Y \\ \mu_D &= \mu_X - \mu_Y \end{aligned}\right\} \qquad \text{..........3.13.3}$$

พิสูจน์

$$\mu_S = \mu_X + \mu_Y$$

มัชฌิม μ_S ของกลุ่ม N ค่าสังเกต $S_i = X_i + Y_i$ สามารถคำนวณได้โดย

$$\mu_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i + Y_i)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

$$= \mu_X + \mu_Y$$

พิสูจน์

$$\mu_D = \mu_X - \mu_Y$$

$$\mu_D = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - Y_i)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}$$

$$= \mu_X - \mu_Y$$

ตารางที่ 3.7

การคำนวณมัชฌิมของผลบวกหรือผลต่างของคะแนนทดสอบสองส่วนสำหรับสี่วิชา

วิชา	คะแนนส่วนที่ 1 X_i	คะแนนส่วนที่ 2 Y_i	$S_i = X_i + Y_i$	$D_i = X_i - Y_i$
ก	62	36	98	26
ข	69	28	97	41
ค	58	42	100	16
ง	53	31	84	22
รวม	242	137	379	105

ในตารางเราสามารถคำนวณมัชฌิมของคะแนนส่วนที่ 1 $\mu_X = 60.50$ และมัชฌิมของคะแนนส่วนที่ 2 $\mu_Y = 34.25$ เพราะฉะนั้นเราอาจคำนวณมัชฌิมของคะแนนทดสอบได้

$$\mu_S = 60.50 + 34.25 = 94.75$$

หรือ $= \dfrac{379}{4} = 94.75$

เราอาจคำนวณมัชฌิมของผลต่างระหว่างคะแนนส่วนที่ 1 กับส่วนที่ 2 ได้

$$\mu_D = 60.50 - 34.25 = 26.25$$

หรือ $= \dfrac{105}{4} = 26.25$

นิยาม 5 ผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนสัมบูรณ์จากค่าคงที่ k ของกลุ่มค่าสังเกตหนึ่ง ซึ่งมี N ค่า จะมีค่าน้อยที่สุดถ้าหากว่า k คือค่ามัธยฐานของกลุ่มค่าสังเกตนั้น นั่นคือ

$\sum_{i=1}^{N} |X_i - k|$ มีค่าน้อยที่สุดถ้าหากว่า $k = Me$

ตัวอย่าง พิจารณา 5 ค่าสังเกต 105, 110, 95, 107, 112 มัธยฐานคือ 107 ค่าส่วนเบี่ยงเบนสัมบูรณ์จากมัธยฐานคือ 2,3,12,0,5 ตามลำดับ ผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนคือ 22 ให้เรามาพิจารณาคำนวณหาผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนจากมัชฌิมเลขคณิต (หรือค่าอื่น ๆ) $\mu = 105.8$ ค่าส่วนเบี่ยงเบนสัมบูรณ์จาก 105.8 คือ 0.8, 4.2, 10.8, 1.2, 6.2 ตามลำดับ ผลบวกของค่าส่วนเบี่ยงเบนเหล่านี้คือ 23.2 ซึ่งมีค่ามากกว่า 22

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่ามัชฌิมเลขคณิตและมัธยฐานของเลขจำนวนต่อไปนี้

(ก) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9, (ข) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 16.7, 20.0,

คำตอบ (ก) มัชฌิมเลขคณิต = 5.4, มัธยฐาน = 5

(ข) มัชฌิมเลขคณิต = 19.54, มัธยฐาน = 19.65

2. จงคำนวณหา (ก) มัชฌิมเรขาคณิต (G) (ข) มัชฌิมเลขคณิต (μ) ของเลขจำนวน 2, 4, 8, 16, 32 (ก. G = 8, ข. μ = 12.4)

3. จงหาค่า (ก) มัชฌิมเลขคณิต, (ข) มัชฌิมเรขาคณิตและ (ค) มัชฌิมฮาร์โมนิคของเลขจำนวน 0, 2, 4 และ 6 (ก. μ = 3, ข. G = O, ค. H = O)

4. ถ้านักขับรถยนต์คนหนึ่งขับรถเที่ยวระยะทาง 10 ไมล์แรกด้วยความเร็ว 30 ไมล์ต่อชั่วโมง และใน 10 ไมล์ต่อมาด้วยความเร็ว 60 ไมล์ต่อชั่วโมง และใน 10 ไมล์ต่อมาด้วยความเร็ว 120 ไมล์ต่อชั่วโมง ให้คำนวณความเร็วเฉลี่ยสำหรับระยะทาง 30 ไมล์นี้ว่าเป็นเท่าไร? ผลจากการคำนวณแบบส่วนเฉลี่ยฮาร์โมนิคถูกต้องหรือไม่? (70)

5. ถ้าหากว่าเราใช้เงินไป 60 บาทในการซื้อหนังสือราคาเล่มละ 1 บาท, 60 บาท ในราคาเล่มละ 2 บาท, 60 บาท ในราคาเล่มละ 3 บาท และ 60 บาทในราคา 4 บาท จงแสดงว่ามัชฌิมฮาร์โมนิคของ 1, 2, 3 และ 4 จะให้ราคาเฉลี่ยที่จ่ายไปถูกต้องสำหรับหนังสือเหล่านี้ (1.92 บาท)

6. ถ้า นาย ก. ลงทุน 1,000 บาท ใน 2 เปอร์เซ็นต์, 800 บาท ใน 3 เปอร์เซ็นต์ และ 3,200 บาท ใน 5 เปอร์เซ็นต์ ใช้สูตร $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$

แสดงว่าเขาได้รับดอกเบี้ยเฉลี่ยของ 4.08 เปอร์เซ็นต์ในการลงทุนของเขา

7. จากตารางการแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบปลายเทอมของนักศึกษา 120 คน จงหา

คะแนน	จำนวนนักศึกษา
90-100	9
80-89	32
70-79	43
60-69	21
50-59	11
40-49	3
30-39	1
	120

ก. ควอร์ไทล์ที่ 1 และที่ 3 (66.64,82.94)

ข. มัธยฐาน (75.08)

ค. ฐานนิยม (76.17)

ง. เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30 และที่ 72 (65.5,81.81)

จ. นักศึกษาที่อยู่ระหว่าง $P_{30} - P_{72}$ (50)

ฉ. นักศึกษาคนหนึ่งสอบได้คะแนน 81 คะแนน จะอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่เท่าใด? (70)