บทที่ 6
ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น

วัตถุประสงค์

เพื่อให้นักศึกษารู้จักคำและประโยคต่าง ๆ ที่จะนำไปใช้กับความน่าจะเป็น รู้จักการคำนวณความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นร่วม ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข พร้อมทั้งนิยามและให้ตัวอย่างของเหตุการณ์ที่มีความอิสระกัน เหตุการณ์ที่ mutually exclusive และ exhuastive ต้องการให้นักศึกษารู้จักใช้กฎของการนับ เพื่อคำนวณจำนวนเหตุการณ์ความน่าจะเป็นให้รู้จักคำนวณการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่าง ๆ

ความน่าจะเป็น เป็นการศึกษาถึงโอกาสของการทดลองเชิงสุ่ม เพื่อจะช่วยให้เราเอาชนะความไม่แน่นอนจากการทดลองนี้ไม่มากก็น้อย ในการตัดสินใจต่าง ๆ และวิชาความน่าจะเป็นก็เป็นหัวใจของการศึกษาวิชาสถิติในขั้นต่อไปด้วย

ก่อนที่เราจะมาถึงการคำนวณความน่าจะเป็น ก็อยากให้ท่านทำความรู้จักคำและนิยามต่าง ๆ ที่จะนำไปใช้คำนวณหาความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้

การทดลองเชิงสุ่ม ได้แก่การทดลองใด ๆ ที่ไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ล่วงหน้าได้ ผลลัพธ์ดังกล่าวขึ้นอยู่กับองค์ประกอบบางประการ ซึ่งผู้ทดลองไม่สามารถควบคุมได้ อย่างเช่น การโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ผลลัพธ์ที่จะเกิดได้ 2 ทาง คือ หัวกับก้อย หากการโยนเหรียญของเราให้ดี เราจะไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ได้ล่วงหน้าว่าจะออกผลเป็นหัวหรือก้อย หรือถ้าเราดูอุบัติเหตุบนท้องถนนในกรุงเทพฯ เวลา 1 วัน อาจจะเป็นเลขใดเลขหนึ่งก็ได้ ตั้งแต่ $0,1,2...\infty$ แต่จริง ๆ แล้ว เราไม่สามารถทำนายผลได้ว่าเป็นกี่ครั้ง

Elementary unit หมายถึงหน่วยของครั้งที่เราทำการทดลอง อย่างเช่นเราทำการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง elementary unit ก็คือหน้าลูกเต๋าที่ปรากฏขึ้นประกอบกันในการทดลองนี้ 2 ครั้ง ก็มี 2 elementary units หรือ ถ้าเรานำหมูที่เลี้ยง 10 ตัว มาชั่งน้ำหนักทีละตัว elementary unit ของการทดลองนี้ คือ หมู ในที่นี้มี 10 elementary units

All Possible outcomes หมายถึงผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองใดทดลองหนึ่ง อย่างเช่น การโยนเหรียญบาท และเหรียญห้าสิบ อย่างละ 1 อัน พร้อม ๆ กัน 10 ครั้ง ก็จะมี 4 possible outcomes คือ (HH), (HT), (TH) และ (TT) หรือโยนเหรียญ 1 อัน และลูกเต๋า 1 ลูก พร้อม ๆ กัน 100 ครั้ง ก็จะมี 12 possible outcomes คือ (H1), (H2), (H3), (H4), (H5), (H6), (T1), (T2), (T3), (T4), (T5), (T6)

Sample Space หมายถึงกลุ่มหรือเซทของหนทาง ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองใดทดลองหนึ่ง เราใช้สัญลักษณ์ "S" ดังตัวอย่าง

1. การโยนเหรียญ 1 อัน หนึ่งครั้ง เราได้

   S = {H,T}

2. สับไพ่และดึงไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง 52 ใบ เราได้

   S = { ♠ A,K,Q,J,10,9,8,7,6,5,4,3,2,
   ♥ A,K,Q,J,10,9,8,7,6,5,4,3,2,
   ♦ A,K,Q,J,10,9,8,7,6,5,4,3,2,
   ♣ A,K,Q,J,10,9,8,7,6,5,4,3,2}

เหตุการณ์ (Event)

เป็นกลุ่มย่อย (subset) ของ sample space เหตุการณ์แบ่งออกเป็น 2 ชนิด

ชนิดที่ 1 เหตุการณ์เชิงเดี่ยว (simple event) เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกใน sample space เพียง 1 ตัว

ชนิดที่ 2 เหตุการณ์เชิงประกอบ (Compound event) เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกใน sample space อย่างน้อย 2 สมาชิก

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง เราได้

S = {HH,HT,TH,TT}

A = {HH} เป็นเหตุการณ์เชิงเดี่ยว

B = {HT,TH} เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ

C = {HH,TH,TT} เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ

เหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกใน Sample space ประกอบด้วยเลย นั่นคือ เป็นเซทที่ไม่มีสมาชิกเลย เขียนแทนได้ด้วย { } = ∅

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง เราได้

S = { HHH,HHT,HTH,HTT,,THH,,THT,TTH,TTT }

กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวมากกว่า 3 ครั้ง เราได้

A = { } เป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้

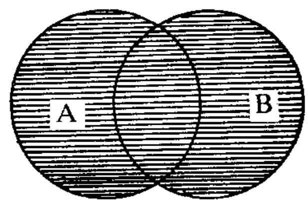
นิยาม หาก A และ B เป็นสองเหตุการณ์แล้ว ผลรวม (Union) ของ A กับ B หรือ A U B จะเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยเหตุการณ์เชิงเดี่ยวที่อยู่ในเหตุการณ์ A หรือ B หรือทั้ง A และ B นั่นคือ A U B = { X | X∊A or X∊B } ในเมื่อ X เป็นเหตุการณ์เชิงเดี่ยว

ตัวอย่าง กำหนดให้ S = { HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT }

A = { HHH,HHT,HTH,THH }   B = { HHT,HTH,THH }

C = { THH,THT,TTH,TTT }

จงหา A U B, B U C

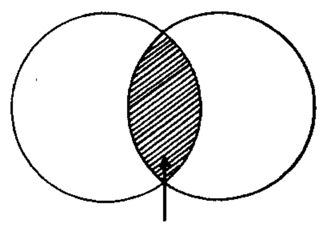


ดังนั้น A U B = { HHH,HHT,HTH,THH }

B U C = { HHT,HTH,THH,THT,TTH,TTT }

นิยาม หาก A และ B เป็นสองเหตุการณ์แล้ว ผลร่วมของ A และ B หรือ A ∩ B จะเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยเหตุการณ์เชิงเดี่ยวที่อยู่ทั้งใน A และ B นั่นคือ

A ∩ B = { X | X ∊ A and X ∊ B }



A ∩ B

ตัวอย่าง กำหนดให้ S = { 1,2,3,4,5,6 }

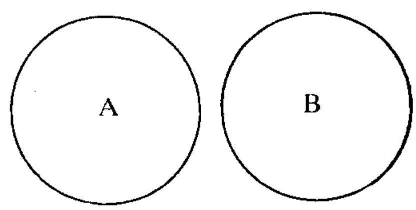
และ A = { 1,2,3,6 }

B = { 2,4,6 }

A ∩ B = { 2,6 }

นิยาม หาก A และ B เป็นสองเหตุการณ์ที่ไม่มีเหตุการณ์เกิดร่วมกัน (Mutually exclusive) นั่นคือ เหตุการณ์เชิงเดียวที่อยู่ใน A และ B ไม่เหมือนกันเลยแล้ว

A ∩ B = { } = ∅



ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เราได้

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าปรากฏหน้าคี่

$A = \{1,3,5\}$

B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าปรากฏหน้าคู่

$B = \{2,4,6\}$

ดังนั้น $A \cap B = \{\ \} = \varnothing$

นิยาม หาก A เป็นเหตุการณ์หนึ่ง Complementary ของ A, $\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่บรรจุเหตุการณ์เชิงเดียวทั้งหมดใน sample space ซึ่งไม่อยู่ในเหตุการณ์ A

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง เราได้

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

A เป็นเหตุการณ์ที่ปรากฏหัว 1 ครั้ง

และ $A = \{HTT, THT, TTH\}$

$\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ปรากฏหัว 1 ครั้ง

$\bar{A} = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\}$

ความน่าจะเป็น ความน่าจะเป็นมีความหมายได้ 2 แบบ

1. ในฐานะที่เป็นศาสตร์ ได้แก่ การศึกษาเกี่ยวกับการทดลองเชิงสุ่ม

2. ความน่าจะเป็นหมายถึงตัวเลขที่ใช้เป็นมาตราวัดหรือบอกโอกาสการเกิดของเหตุการณ์ว่าจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด จะต้องสอดคล้องตามคุณสมบัติดังต่อไปนี้

2.1 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ จะอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

2.2 ผลบวกของความน่าจะเป็นทุกค่าของเหตุการณ์ใน Sample space จะเท่ากับ 1

2.3 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดจะมีความหมายก็ต่อเมื่อ

(ก) เหตุการณ์นั้นยังไม่เกิดขึ้น

(ข) เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นแต่ยังไม่ทราบ หากทราบแล้ว หรือเกิดขึ้นแล้ว เราจะไม่กล่าวเรื่องความน่าจะเป็นเพราะหากเกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นก็เป็น 1 หากไม่เกิดก็เป็น 0

การคำนวณความน่าจะเป็น เราจำเป็นจะต้องทราบจำนวนหนทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดใน Sample space กับจำนวนหนทางของเหตุการณ์ที่เราสนใจ จากนั้นก็สามารถหาความน่าจะเป็นได้จากสูตร

$$\text{ค่าของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์} = \frac{\text{จำนวนหนทางของเหตุการณ์ที่เราสนใจ}}{\text{จำนวนหนทางที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดใน S}}$$

$$= \frac{n}{N}$$

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋าสีเขียว (g) กับสีแดง (r) อย่างละ 1 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหา

1. $P(r + g = 4)$
2. $P(r - g = 2)$
3. $P(r = g^2)$
4. $P(r < g)$

g \ r	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

วิธีทำ จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ในการทอดลูกเต๋าสีเขียวกับสีแดงอย่างละ 1 ลูก พร้อมกันหนึ่งครั้งเท่ากับ 36 หนทางใน S (ดูตาราง) แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/36

1. กลุ่มของเหตุการณ์ $(r + g = 4) = \{(13), (22), (31)\}$ มี 3 หนทาง

$$P(r + g = 4) = \frac{3}{36} = 1/12$$

2. กลุ่มของเหตุการณ์ $(r - g = 2) = \{(13), (24), (35), (46)\}$ มี 4 หนทาง

$$P(r - g = 2) = \frac{4}{36} = 1/9$$

3. กลุ่มของเหตุการณ์ $(r = g^2) = \{(11), (42)\}$ มี 2 หนทาง

$$P(r = g^2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

4. กลุ่มของเหตุการณ์ $(r < g) = \{(21), (31), (32), (41), (42), (43), (51), (52), (53), (54), (61), (62), (63), (64), (65)\}$

มี 15 หนทาง

$$P(r < g) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

กฎเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

1. กฎว่าด้วยการรวม ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ตัวอย่าง ให้ $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.60$

จงหา $P(A \cup B)$

จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.8 + 0.7 - 0.60 = 0.90$

จากกฎข้อที่ 1 หาก A และ B เป็นสองเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย นั่นคือ :-

$A \cap B = \varnothing \; (P(\varnothing) = 0)$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ตัวอย่าง โอกาสที่นาย ก. กลับบ้านทานอาหารเย็น เป็น 0.7 โอกาสที่เขาจะทานอาหารเย็นบ้านเพื่อน 0.2 และโอกาสที่เขาจะทานอาหารที่อื่น ๆ เป็น 0.1 โอกาสที่นาย ก. จะไม่ทานอาหารเย็นที่บ้านเป็นเท่าไร?

วิธีทำ ให้ H = นาย ก. ทานอาหารเย็นที่บ้าน

F = นาย ก. ทานอาหารเย็นกับเพื่อน

E = นาย ก. ทานอาหารเย็นที่อื่น ๆ

$\therefore$ E U E = นาย ก. จะไม่ทานอาหารเย็นที่บ้าน

$P(F \cup E) = P(F) + P(E) - P(E \cap F)$

$= 0.2 + 0.1 - 0 = 0.3$

เนื่องจากว่า $E \cap F = 0$, $P(0) = 0$

กฎว่าด้วยการรวม (กรณีสามเหตุการณ์)

หาก A, B และ C เป็นสามเหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

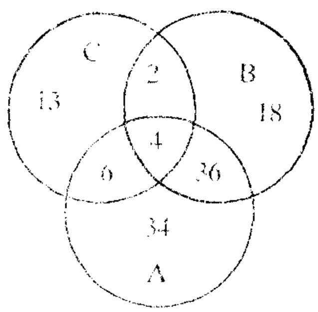
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ตัวอย่าง บริษัท ABC มีลูกค้า 200 คน เมื่อปีที่แล้ว มีอยู่ 80 คนได้ซื้อสินค้าทั่ว ๆ ไป 60 คน ได้ซื้อเครื่องไฟฟ้า และ 25 คนได้ซื้อของสัพเพเหระมูลค่าเกิน 1,000.– บาท ปัจจุบันจากลูกค้าซื้อสินค้าทั่ว ๆ ไป สมมุติว่ามีอยู่ 40 คน ซื้อเครื่องไฟฟ้า และ 10 คน ซื้อของสัพเพเหระมูลค่าเกิน 1,000.– บาท และอีก 4 คนซื้อเครื่องไฟฟ้าและซื้อของสัพเพเหระมูลค่าเกิน 1,000.– บาท 6 คนของลูกค้าที่ได้ซื้อเครื่องไฟฟ้าปีที่แล้วซื้อของสัพเพเหระมูลค่าเกิน 1,000.– บาท ถ้าหากว่าเลือกลูกค้าคนหนึ่งโดยสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าผู้นั้นได้ซื้อของจากบริษัทปีที่แล้ว หรือได้ซื้อเครื่องไฟฟ้า หรือได้ซื้อของสัพเพเหระมูลค่าเกิน 1,000.– บาท ปีที่แล้ว

วิธีทำ ให้ A แทนลูกค้าที่ได้ซื้อของจากบริษัท ABC ปีที่แล้ว

B เป็นลูกค้าที่ได้ซื้อเครื่องไฟฟ้าปีที่แล้ว

C เป็นลูกค้าที่ได้ซื้อของสัพเพเหระมูลค่าเกิน 1,000.– บาท



ความสัมพันธ์ระหว่าง A, B และ C สามารถแสดงได้โดยแผนภาพเวนน A มีลูกค้า 80 คน, $A \cap B$ มีลูกค้า 40 คน $A \cap C$ มีลูกค้า 10 คน และ $A \cap B \cap C$ มีลูกค้า 4 คน เนื่องจากว่า $A \cap B \cap C$ มีลูกค้า 4 คน ที่เหลืออีก 6 คน เป็นของ $A \cap C$, เหลือ 36 คน เป็นของ $A \cap B$ และ เหลือ 34 คน เป็นของ A เนื่องจากว่า $B \cap C$ มี 6 คน 2 คนที่อยู่ในส่วนของ $B \cap C$ ไม่ได้อยู่ใน $A \cap B \cap C$ จากรูปแผนภาพเวนน เราเห็นได้ว่า $A \cup B \cup C$ มีลูกค้า 113 คน เพราะฉะนั้น $P(A \cup B \cup C) = 113/200$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\frac{80}{200} + \frac{60}{200} + \frac{25}{200} - \frac{40}{200} - \frac{10}{200} - \frac{6}{200} + \frac{4}{200}$$

$$= \frac{113}{200}$$

กฎว่าด้วยการคูณ ถ้า A และ B เป็นสองเหตุการณ์ที่มีความอิสระกัน หมายความว่า การเกิดของเหตุการณ์ A จะไม่มีผลต่อเหตุการณ์ B แล้ว

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

ตัวอย่าง สลากกินแบ่งรัฐบาลแต่ละงวดจะมีจำนวนสลากทั้งหมด 5,000,000 ฉบับ หาก นาย ข. ซื้อสลาก 1 ใบ

จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ข. จะถูกรางวัลทั้งเลขท้าย 3 ตัว และเลขท้าย 2 ตัว

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่นาย ข. จะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว ซึ่งมีอยู่ 1 รางวัล ในจำนวน 100 หมายเลข

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่นาย ข. จะถูกรางวัลเลขท้าย 3 ตัว ซึ่งมีอยู่ 5 รางวัล ในจำนวน 1000 หมายเลข

$A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่นาย ข. จะถูกรางวัลทั้งเลขท้าย 3 ตัวและเลขท้าย 2 ตัว

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cap B) &= P(A)\ P(B) \\ &= \left(\frac{1}{100}\right)\left(\frac{5}{1000}\right) \\ &= \frac{1}{20000} \\ &= 0.00005 \end{aligned}$$

นิยาม ถ้า $\bar{A}$ เป็น Complementary ของเหตุการณ์ A แล้ว $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง เราได้

$$\begin{aligned} S &= \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \\ \text{ให้ } E &= \{HHT, HTH, THH\} \\ \therefore P(E) &= 3/8 \end{aligned}$$

ต้องการคำนวณ $P(\bar{E})$

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= 1 - P(E) \\ &= 1 - 3/8 \\ &= 5/8 \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

นิยาม ให้ A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ แล้ว ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข A เมื่อกำหนด B เกิดขึ้นแล้ว นิยามได้ดังนี้

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$; $P(B) \neq 0$

ในทางกลับกัน $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$; $P(A) \neq 0$

ตัวอย่าง 1 โยนลูกเต๋าลูกหนึ่ง 1 ครั้ง หากทราบว่าหน้าคู่เกิดขึ้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 4

วิธีทำ Sample space S = {1,2,3,4,5,6}

แต่ละหน้าความน่าจะเป็น 1/6

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ปรากฏหน้าคู่ B = {2,4,6} ; $P(B) = \frac{3}{6}$

A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ปรากฏหน้า 4 A = {4}

$\therefore A \cap B = \{4\}; P(A \cap B) = 1/6$

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = (1/6) / (3/6) = 1/3$

ตัวอย่าง 2 หากครอบครัวหนึ่งมีลูก 3 คน เป็นที่ทราบว่าครอบครัวนี้มีลูกคนโตเป็นลูกชาย ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกชาย 2 คน จะเป็นเท่าไร ?

วิธีทำ หากมีลูก 3 คน ลำดับการมีลูกอาจจะเป็นได้ 8 หนทาง ดังนี้

S = {ชชช, ชชญ, ชญช, ชญญ, ญชช, ญชญ, ญญช, ญญญ} แต่ละหนทางมีความน่าจะเป็น 1/8

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ลูกชายคนโต A มี 4 หนทางคือ

A = {ชชช, ชชญ, ชญช, ชญญ} และ P(A) = 1/2

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ครอบครัวมีลูกชาย 2 คน B = {ชชญ, ชญช, ญชช} ; P(B) = 3/8

AB = {ชชญ, ชญช} ; $P(A \cap B) = 2/8$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/8}{1/2} = 1/2$$

หากเราต้องการหาความน่าจะเป็นที่คนโตเป็นชาย โดยรู้ว่า 2 คนในจำนวนนี้เป็นชาย จากครอบครัวนี้มีลูก 3 คน เราได้

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/8}{3/8} = 2/3$$

หลักของการนับ

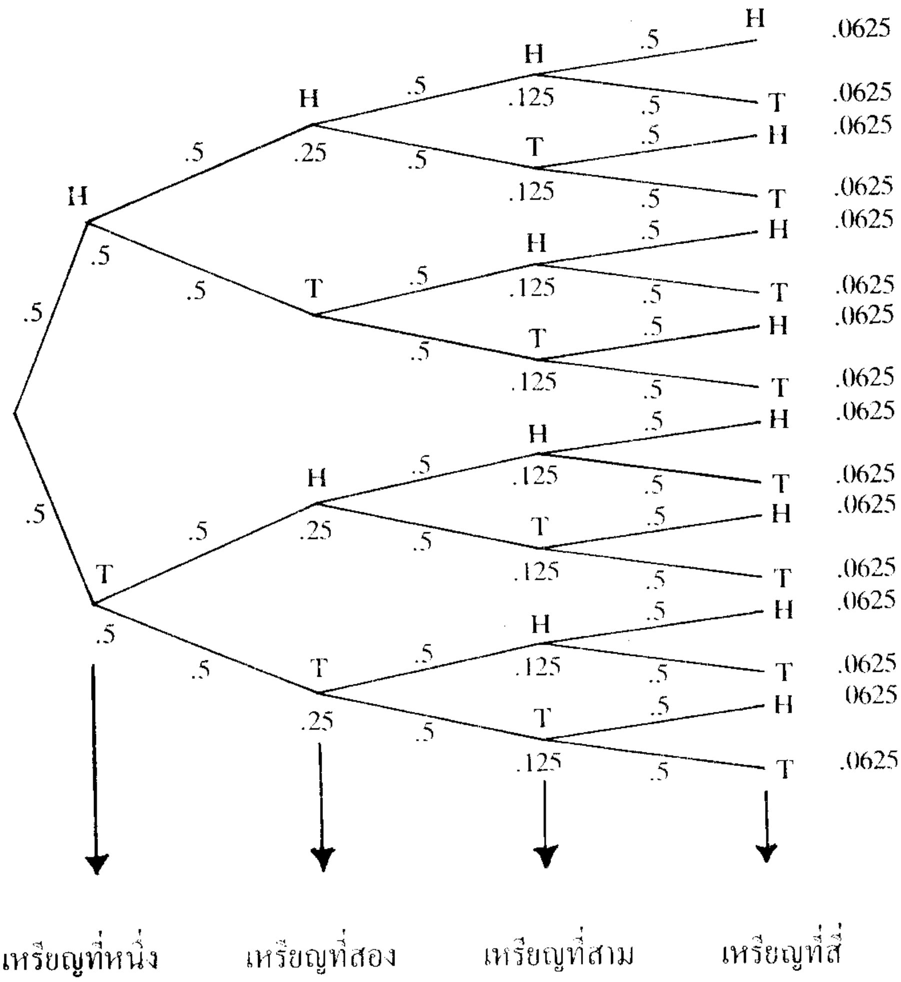
ในหัวข้อก่อน เราได้นิยามความน่าจะเป็นและคำจำกัดความเพื่อแก้ปัญหาง่าย ๆ ในหัวข้อนี้เราจะใช้หลักของการนับเพื่อคำนวณค่าของ n และ N ในการคำนวณ $P(E) = n/N$ ใน เมื่อ n คือจำนวนหนทางที่เราสนใจของเหตุการณ์ และ N คือจำนวนหนทางทั้งหมดใน sample space

วิธีหนึ่งที่เราใช้นับความเป็นไปได้ทั้งหมดของลำดับเหตุการณ์ คือ tree diagram

ตัวอย่าง

เราสามารถวิเคราะห์จำนวนของความเป็นไปได้ของเหตุการณ์ในการโยนเหรียญซ้ำ ๆ กันโดยการใช้ tree diagram ดังรูป โยนเหรียญหนึ่งอันหนึ่งครั้งจะมีสองหนทาง หัวหรือก้อย หากโยนเหรียญสองอัน จำนวนหนทางก็จะเพิ่มขึ้นเป็นสี่หนทาง HH, HT, TH, TT เนื่องจากว่าเหรียญแต่ละอันมีสองหนทาง สำหรับสามเหรียญ จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ คือ $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ สำหรับสี่เหรียญจะมี $2^4 = 16$ หนทางโดยทั่ว ๆ ไป หากโยนเหรียญอันหนึ่ง n ครั้ง (หรือโยนเหรียญ n อัน) จะมี 2^n หนทาง

การโยนเหรียญเป็นการแสดงที่ดีของเหตุการณ์ที่อิสระกัน ความน่าจะเป็นของการเกิดหัวหรือก้อยกำหนดได้ของแต่ละกิ่งก้าน ดังตัวอย่างความน่าจะเป็นของก้อย, ก้อยและก้อยคือ 0.125 (ผลคูณของ (0.5) (0.5) (0.5))



tree diagram

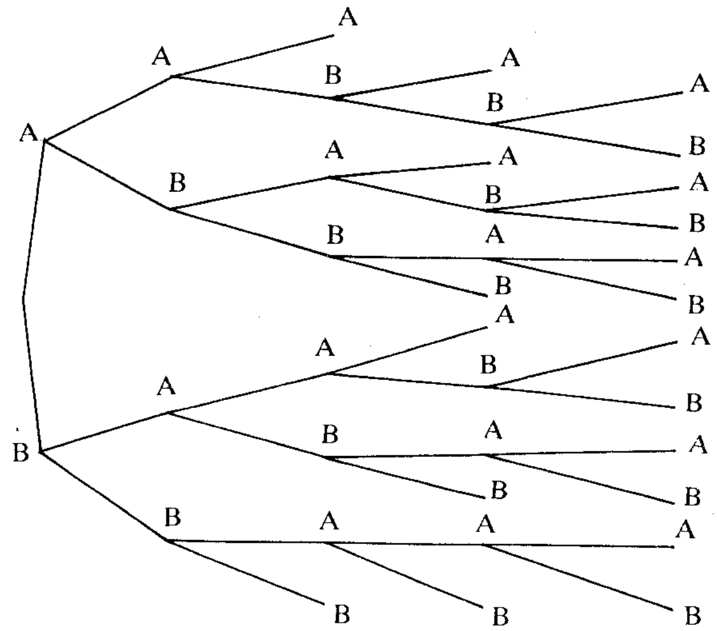
ตัวอย่าง

นาย ก. และนาย ข. แข่งขันปิงปองกัน จงเขียน tree diagram แสดงหนทางที่เป็นไปได้ในการแข่งขันที่สามารถเกิดขึ้น โดยผู้แข่งขันคนแรกชนะสามเกมเป็นผู้ชนะการแข่งขัน

วิธีทำ

การแข่งขันสามารถเล่นได้ยี่สิบหนทางเพื่อหาผู้ชนะสามเกม sample space คือ

{ AAA, AABA, AABBA, AABBB, ABAA, ABABA, ABABB, ABBAA, ABBAB, ABBB, BAAA, BAABA, BAABB, BABAA, BABAB, BABB, BBAAA, BBAAB, BBAB, BBB }



มีการทดลองจำนวนมากที่หนทางของการทดลองประกอบด้วยการทดลองย่อย ๆ หรือเหตุการณ์อาจได้มาเป็นคู่ที่ฟอร์มมาจากสองเหตุการณ์

ตัวอย่าง

โยนเหรียญหนึ่งอันและลูกเต๋าหนึ่งลูกพร้อม ๆ กัน จงเขียนหนทางที่เป็นไปได้

เนื่องจากว่าเหรียญอันหนึ่งสามารถเป็นได้สองหนทาง H หรือ T แต่ลูกเต๋าสามารถเป็นได้หกทาง 1, 2, 3, 4, 5, 6 sample space คือ {(H1), (H2), (H3), (H4), (H5), (H6), (T1), (T2), (T3), (T4), (T5), (T6)}

จากตัวอย่างข้างต้น สังเกตว่าจำนวนหนทางที่เป็นไปได้ของการทดลองสามารถพิจารณาได้เหมือนกับจำนวนหนทางของการโยนเหรียญหนึ่งอันคูณด้วยจำนวนหนทางของการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก นั่นคือ $2 \times 6 = 12$ หนทางซึ่งพอที่กล่าวเป็นหลักทั่ว ๆ ไปดังนี้

ถ้าหากว่าเหตุการณ์ A มี m หนทาง (และภายหลังเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว) เหตุการณ์ B มี n หนทาง ดังนั้น การทดลองซึ่งประกอบด้วย A และ B มี mn หนทาง

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋าสองลูก ลูกเต๋าลูกที่หนึ่งสามารถเป็นได้หกหนทางต่าง ๆ กัน ลูกเต๋าลูกที่สองก็สามารถเป็นได้หกหนทางต่าง ๆ กัน เพราะฉะนั้น จำนวนหนทางทั้งหมดเป็น $6 \times 6 = 36$

ตัวอย่าง พนักงานขายคนหนึ่ง มีโครงการเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปสงขลา แล้วต่อไปจังหวัดตรังจากกรุงเทพฯ ไปสงขลาเขาสามารถไปได้ด้วยรถยนต์, รถไฟ, เครื่องบิน หรือเรือ อย่างไรก็ตามจากสงขลาไปจังหวัดตรัง เขาสามารถไปด้วยรถยนต์หรือเครื่องบินเท่านั้น จะมีกี่หนทางที่เขาสามารถเดินทาง

เขาสามารถเดินทางจากกรุงเทพฯไปสงขลาได้สี่หนทาง และจากสงขลาไปจังหวัดตรังได้สองวิธี เพราะฉะนั้น เขาสามารถเดินทางได้ทั้งหมด $4 \times 2 = 8$ หนทาง

ในกรณีหนทางหนึ่งเกิดขึ้นแล้วมีผลต่อหนทางที่จะเกิดขึ้นต่อไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง เลือกพ่นสีรถให้มีสองสีจากสีดำ, แดงหรือขาว ที่ตัวถังรถหรือหลังคาอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้น จึงมีโอกาสเลือกสีสำหรับตัวถังรถ (หรือหลังคา) 3 หนทาง แต่เมื่อเลือกไปหนึ่งสีแล้ว ยังเหลือสองหนทางสำหรับหลังคา (หรือตัวถังรถ) ดังนั้น จำนวนหนทางที่เป็นไปได้มี 3×2 หนทาง สำหรับรถที่มีสองสี

คำจำกัดความ ผลคูณ $n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1$
แสดงได้ด้วย $n!$ เรียกว่า n แฟคเตอเรียล

ตัวอย่าง

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

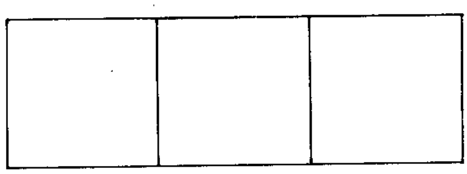
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

เพื่อให้คำจำกัดความข้างต้นสมบูรณ์ เรากำหนด $1! = 1$ และ $0! = 1$

เรามาพิจารณาหลักของการนับเฉพาะ ซึ่งเกี่ยวกับจำนวนของการจัดเรียงวัตถุ ดังตัวอย่าง เช่น ในการจัดวัตถุสามชนิดเป็นแถวได้กี่วิธี ให้ A, B และ C เป็นวัตถุสามชนิดซึ่งจัดได้ดังนี้
{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}
ดังนั้นวัตถุสามชนิดสามารถจัดได้หกหนทางต่าง ๆ กัน

เราพิจารณาวิธีการต่าง ๆ ที่จะใส่วัตถุต่าง ๆ ลงในกล่องสามใบเรียงกันเป็นแถว



กล่องแรกสามารถบรรจุวัตถุ A, B หรือ C อย่างใดอย่างหนึ่งได้สามวิธีต่าง ๆ กัน ภายหลังกล่องแรกได้บรรจุแล้ว กล่องที่สองก็สามารถบรรจุได้สองอักษรที่เหลือ หรือสองวิธี กล่องที่สามก็สามารถบรรจุได้หนึ่งตัวอักษรที่เหลือหรือหนึ่งวิธี ดังนี้ กล่องทั้งสามสามารถบรรจุได้ $3 \times 2 \times 1 = 3!$ วิธี ในทำนองเดียวกันหากเรามีวัตถุสี่ชนิดก็สามารถจัดเรียงได้เป็น $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ วิธี โดยทั่ว ๆ ไป หากเรามีวัตถุ n ชนิดมาจัดเรียงเป็นแถว จะได้ $n!$ วิธี

ในปัญหาเดียวกัน เลือกวัตถุสามชนิดจากห้าชนิด และจัดเรียงเป็นแถว จะได้กี่วิธี ครั้งนี้ กล่องแรกสามารถบรรจุได้ห้าวิธี ภายหลังกล่องแรกได้บรรจุแล้ว กล่องที่สองก็สามารถบรรจุได้ 4 วิธี กล่องสุดท้ายได้สามวิธี ดังนั้น โดยหลักการนับ ทั้งสามกล่องสามารถบรรจุได้ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี สังเกตว่า $5 \times 4 \times 3$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} \quad \text{หรือ} \quad \frac{5!}{2!}$$

โดยทั่ว ๆ ไป อาจเลือกวัตถุ r ชิ้น จากจำนวน n ชิ้น และเรียงเป็นแถวตามลักษณะดังนี้ ตำแหน่งด้านซ้ายมืออาจจัดได้ n หนทางต่าง ๆ กัน ภายหลังจัดตำแหน่งด้านซ้ายมือ ตำแหน่งที่สองจากซ้ายมืออาจจัดได้ $n - 1$ หนทางต่าง ๆ กัน ตำแหน่งทางขวาสามารถจัดได้ $n - (r - 1)$ หนทางต่าง ๆ กัน (วิธี) เท่านั้น เพราะว่าจำนวนวัตถุ $r - 1$ ของ n ชิ้น ได้ใช้จัดตำแหน่งอื่น ๆ ไปแล้ว $r - 1$ ตำแหน่ง ดังนั้น การใช้หลักของการนับซ้ำ ๆ กัน สามารถใช้ได้เหมือนกับจำนวนวิธีที่สามารถเลือกวัตถุ r ชิ้น จาก n ชิ้น และจัดเรียงเป็นแถวได้เป็น

$$n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots (n - |r-1|)$$

นี้สามารถแสดงได้เป็น

$$\frac{n(n-1) \ldots\ldots (n - |r-1|)(n-r) \ldots\ldots 3.2.1}{(n-r) \ldots\ldots 3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

คำจำกัดความ จำนวนวิธีการเลือกวัตถุ r สิ่งจากวัตถุ n สิ่ง และจัดเรียงเป็นแถว เรียกว่าจำนวนของการจัดลำดับวัตถุ r สิ่ง จากวัตถุ n สิ่ง ในครั้งหนึ่งแสดงได้เป็น P_r^n

สูตรสำหรับ P_r^n คือ

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง

$$P_3^{10} = \frac{10 \times 9 \times ..... 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times ..... 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

ตัวอย่าง สโมสรแห่งหนึ่งจะเลือกบุคคล 4 คน จาก 6 คน เพื่อเป็นประธาน รองประธาน เลขาธิการ และเหรัญญิก จงหาความน่าจะเป็นที่ นาย ก. นาย ข. นาย ค. และนาย ง. จะได้รับเลือกเป็น ประธาน รองประธาน เลขาธิการ และเหรัญญิก ตามลำดับชื่อ

วิธีทำ วิธีเลือกบุคคล 4 คน จาก 6 คนได้เป็น P_4^6 วิธี หรือ 6 ! / 2 ! = 360 วิธีหรือหนทาง มีอยู่หนึ่งวิธีเท่านั้นของจำนวนวิธีเหล่านี้ที่ต้องการ เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะเลือก 4 คนให้เป็นไปตามที่กำหนดให้คือ 1/360

สมมติว่าเราประสงค์เพื่อที่จะหาจำนวนหนทางหรือวิธีการจัดเรียงวัตถุ n สิ่งซึ่งวัตถุทั้งหมดไม่สามารถแบ่งได้ อย่างเช่น เราจัดลำดับอักษร SEEM หากอักษรแตกต่างกันทั้งหมด จำนวนวิธีการจัดก็จะมี 4 ! วิธีการ เนื่องจากว่ามี E 2 ตัว ซึ่งไม่สามารถแบ่งแยกออกได้ สมมติว่าเราให้ E 2 ตัวนั้นเป็น E_1 และ E_2 จำนวนวิธีการจัดเรียงอักษรสองตัวนี้คือ 2 ! ให้ P เป็นจำนวนวิธีการจัดเรียงอักษร SEEM เมื่อไรที่ค่าของ E ไม่สามารถแบ่งได้เป็นกี่ครั้งของจำนวนวิธีของการจัดเรียงของค่า E (เมื่อพิจารณาว่ามีความแตกต่าง) เท่ากับ จำนวนวิธีการของการจัดเรียงอักษรสี่ตัว ถ้าหากว่าอักษรทั้งหมดสามารถแบ่งได้ นั่นคือ

$$P \times 2\,! = 4\,! \quad \text{หรือ} \quad P = \frac{4\,!}{2\,!}$$

จำนวนของการจัดลำดับของอักษร AAABCD คือ 6 ! / 3 ! เพราะว่าอักษร A เกิดขึ้น 3 ครั้ง ถ้าหากว่าเรามีวัตถุอยู่ n สิ่ง และมีวัตถุ k_1 สิ่งที่เหมือนกัน จำนวนของการจัดลำดับที่เป็นไปได้ของวัตถุ n สิ่ง คือ $n\,! / k_1\,!$ ผลลัพธ์อันนี้สามารถขยายออกไปได้กรณีมี k_1 สิ่ง ที่เหมือนกัน k_2 สิ่งที่เหมือนกันและต่อ ๆ ไปแล้ว จำนวนของการจัดลำดับที่เป็นไปได้ของวัตถุ n สิ่ง คือ

$$\frac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,! \,..........\, k_s!}$$

ในเมื่อ $k_1 + k_2 \,..........\, + k_s = n$

ตัวอย่าง จะมีจำนวนกี่วิธีในการจัดเก้าอี้หกตัวเป็นแถว ถ้าหากว่ามีเก้าอี้สีแดงสามตัว สีเขียวสองตัว และสีน้ำตาลหนึ่งตัว

คำตอบก็คือ

$$\frac{6\,!}{3\,!\,2\,!\,1!} = 60 \text{ วิธี}$$

การจัดหมู่

ในหัวข้อก่อน เราได้กล่าวถึงสูตรสำหรับคำนวณหนทางหรือวิธีการของการเลือกวัตถุ r สิ่ง จากวัตถุ n สิ่ง และจัดเรียงเป็นแถว ต่อไปนี้เราสนใจจำนวนหนทางหรือวิธีการเลือกวัตถุ r สิ่ง จากวัตถุ n สิ่ง นั่นคือ เราสนใจการเลือกวัตถุ r สิ่ง โดยปราศจากการจัดเรียงลำดับ

จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกอักษรสองตัวจากอักษร a, b, c, d และ e เริ่มแรกเราหาจำนวนของการจัดลำดับอักษรสองตัวจากห้าตัวในหนึ่งครั้ง

$$P_2^5 = \frac{5\,!}{3\,!} = 20$$

ดังรายละเอียดคือ

{ ab, ac, ad, ae, ba, bc, bd, be, ca, cb, cd, ce, da, db, dc, de, ea, eb, ec, ed }

สังเกตว่า แต่ละคู่ของอักษรสามารถจัดเรียงได้ 2 วิธีด้วยกัน (แต่ในที่นี้เราถือว่าเหมือนกันเพราะเราไม่คำนึงถึงลำดับ) ให้จำนวนวิธีการที่เลือกอักษรสองตัว แสดงได้เป็น C_2^5 แล้วจำนวนวิธีการที่จัดเรียงวัตถุคือ $2C_2^5$ ดังนั้น

$$2C_2^5 = P_2^5 \text{ หรือ } C_2^5 = P_2^5 / 2 = \frac{5\,!}{2\,!\,3\,!}$$

พิจารณาจำนวนวิธีการที่เลือกอักษรสามตัวจากห้าตัว เรามาดูจำนวนของการจัดลำดับสิ่งของสามสิ่งจากห้าสิ่งในหนึ่งครั้ง

$$P_3^5 = \frac{5\,!}{2\,!} = 120 / 2$$

พิจารณากลุ่มย่อยของการจัดเรียงอักษรสามตัว สมมติให้เป็น a, b และ c จะมี 3 ! วิธีการ จำนวนวิธีการของการเลือกอักษรสามตัวจากห้าตัว (แสดงได้เป็น C_3^5) คูณด้วยจำนวนของการจัดเรียงสามอักษรควรเท่ากับจำนวนวิธีการจัดเรียงสิ่งของ 3 สิ่งจาก 5 สิ่งในหนึ่งครั้ง

$$C_3^5 . 3! = P_3^5 \text{ หรือ } C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!}$$

โดยทั่ว ๆ ไปการพิจารณาปัญหาการเลือกวัตถุ r สิ่งจาก n สิ่ง แสดงได้เป็น C_r^n จำนวนวิธีการเลือกวัตถุ r สิ่ง จาก n สิ่ง โดยเลือกแต่ละครั้งมีวัตถุ r สิ่ง สิ่งเหล่านี้อาจจัดเรียงได้ r ! วิธี เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีการของการเลือกวัตถุ r สิ่ง คูณด้วยจำนวนของการจัดเรียงแต่ละกลุ่มที่ประกอบด้วยวัตถุ r สิ่งเท่ากับจำนวนวิธีการของการเลือกวัตถุ r สิ่ง จาก n สิ่ง และจัดเรียงเป็นแถว ดังนั้น

$$C_r^n \; r! = P_r^n \text{ หรือ } C_r^n = \frac{P_r^4}{r!} \text{ หรือ } C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

คำจำกัดความ

จำนวนวิธีการของการเลือกวัตถุ r สิ่ง จาก n สิ่ง เรียกว่า การจัดหมู่ r สิ่ง จาก n สิ่งในหนึ่งครั้ง จำนวนนี้กำหนดได้โดย

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ตัวอย่าง จะมีจำนวนกี่วิธีในการเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง 3 คน จากบุคคล 5 คน ดังมีรายนามต่อไปนี้ ก, ข, ค, ง และ จ

วิธีทำ $C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10$

นี้อาจเขียนออกมาเป็นเซทได้

{ กขค, กขง, กขจ, กคง, กคจ, กงจ, ขคง, ขคจ, ขงจ, คงจ }

ตัวอย่าง จากโจทย์ตัวอย่างก่อน จะมีจำนวนกี่วิธีในการเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง 5 คน

วิธีทำ เลือกกรรมการ 5 คน จากบุคคล 5 คน ได้เพียงชุดเดียวเท่านั้น อย่างไรก็ตาม หากเราใช้สูตรตามคำจำกัดความ

$$C^5_5 = \frac{5!}{5!0!}$$

$$= 1 \text{ เนื่องจากว่า } 0! = 1$$

ตัวอย่าง

$$C^4_0 = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$C^4_1 = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$C^4_3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$C^4_4 = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

สังเกตว่า $C^4_0 = C^4_4$ และ $C^4_1 = C^4_3$ ท่านสามารถวางหลักข้อความนี้ได้หรือ

การจัดหมู่มีประโยชน์เกี่ยวกับปัญหาความน่าจะเป็นบางชนิดโดยเฉพาะ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กล่องใบหนึ่งมีบอลล์ขาว 7 ลูก และบอลล์แดง 3 ลูก สุ่มเลือกบอลล์ 3 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้บอลล์ขาว 2 ลูก และบอลล์แดง 1 ลูก

จำนวนหนทางในการทดลองควรเป็น C_3^{10} เนื่องจากว่า ต้องเลือกบอลล์ 3 ลูก จาก 10 ต้องเลือก บอลล์ขาว 2 ลูกจาก 7 ลูก นี้สามารถเป็นได้ C_2^7 วิธี ต้องเลือกบอลล์แดง 1 ลูกจาก 3 ลูก นี้สามารถเป็นได้ C_1^3 วิธี เพราะฉะนั้น

$$P\,(2\text{ ขาวและ } 1\text{ แดง}) = \frac{C_2^7 \times C_1^3}{C_3^{10}}$$

เนื่องจากว่า $C_2^7 = 21,\ C_1^3 = 3$ และ $C_3^{10} = 120$

$$P\,(2\text{ ขาว และ } 1\text{ แดง}) = \frac{21 \times 3}{120} = \frac{63}{120}$$

$$= \frac{21}{40}$$

ตัวอย่าง ใช้โจทย์ตัวอย่างข้างต้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้บอลล์ขาวสามลูก

$$P\,(\text{บอลล์ขาว } 3\text{ ลูก}) = \frac{C_3^7 \times C_0^3}{C_3^{10}}$$

$$= \frac{35 \times 1}{120}$$

$$= \frac{7}{24}$$

ตัวอย่าง มีพนักงาน 15 คน ในบริษัท ABC มีอยู่ 5 คน อัตราการขายยอดเยี่ยม 7 คน อัตราขายดี และ 3 คน อัตราขายใช้ได้ สุ่มเลือกพนักงานขาย 2 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. พนักงานขายยอดเยี่ยมทั้งสองคน
2. หนึ่งคนพนักงานขายใช้ได้ และหนึ่งคนพนักงานขายดี
3. ทั้งหมดเป็นพนักงานขายใช้ได้

1. $P(2 \text{ คน พนักงานขายยอดเยี่ยม}) = \dfrac{C_2^5 \times C_0^7 \times C_0^3}{C_2^{15}}$

$= \dfrac{10 \times 1 \times 1}{105} = \dfrac{2}{21}$

2. $P(1 \text{ คน พนักงานขายใช้ได้ และ } 1 \text{ คน ขายดี}) = \dfrac{C_1^7 \times C_1^3 \times C_0^5}{C_2^{15}}$

$= \dfrac{7 \times 3}{105} = \dfrac{21}{105}$

$= \dfrac{1}{5}$

3. $(2 \text{ คน พนักงานขายใช้ได้}) = \dfrac{C_0^7 \times C_0^5 \times C_2^3}{C_2^{15}}$

$= \dfrac{1 \times 1 \times 3}{105}$

$= \dfrac{1}{35}$

นิยาม ตัวแปรเชิงสุ่ม เป็นฟังก์ชั่นที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง ใน Sample space เราใช้อักษรตัวใหญ่ X, Y, Z แทนตัวแปรเชิงสุ่ม และใช้ x, y, z เป็นค่าของตัวแปร

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 3 อัน หนึ่งครั้ง ให้ X เป็นจำนวนหัวที่ได้ X จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่กำหนดจาก

ผลทดลอง	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	HTT	TTT
X	3		2			1		0

หรืออาจจะเขียนในทางคณิตศาสตร์ได้เป็นดังนี้

$$X(HHH) = 3, X(HHT) = 2, X(HTT) = 1, X(TTT) = 0$$

โดยทั่วไปเราจะเขียนได้เป็น $X(s) = x$ ในเมื่อ s เป็นผลทดลองใน S

ค่าคาดหวังและความแปรปรวน

ค่าคาดหวังมีความหมายเหมือนมัชฌิมเลขคณิต แต่คิดในความหมายของความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นเท่านั้นเอง

นิยาม ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งความน่าจะเป็น P (X) แล้วค่าคาดหวังของ X E (X) กำหนดได้ดังนี้

$$E(X) = \Sigma X P(X)$$

ตัวอย่าง ในการเล่นการพนันโดยทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง 1 ครั้ง ถ้าลูกเต๋าปรากฏหน้า 1 จะได้ 9 บาท ถ้าปรากฏหน้าอื่นจะเสีย 3 บาท จงหาค่าคาดหวังของเงินที่จะได้

ให้ X เป็นจำนวนเงินที่จะได้ X มีการแจกแจงดังนี้

X	9	− 3
P (X)	1/6	5/6

$$E(X) = \Sigma XP(X) = 9(1/6) + (-3)(5/6)$$

$$= \frac{9}{6} - \frac{15}{6} = -1 \text{ บาท}$$

ในการเล่นเกมส์นี้โดยเฉลี่ยแล้วจะเสีย 1 บาท ต่อหนึ่งเกมส์

หากจะให้เกมส์นี้ยุติธรรมขึ้น ค่าคาดหวังที่ได้กับเสียจะต้องเท่ากัน นั่นคือ $E(X) = 0$

ความแปรปรวน เป็นมาตราวัดการกระจายของค่าของตัวแปรเชิงสุ่มรอบค่าคาดหวังหรือมัชฌิมเลขคณิตของตัวแปรเชิงสุ่ม

นิยาม ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีความน่าจะเป็น P (X) ความแปรปรวนของ X V (X) กำหนดได้โดย

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$
$$= \Sigma (X - E(X))^2 P(X)$$

สำหรับการคำนวณเราใช้

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

ในเมื่อ $E(X^2) = \Sigma x^2 p(x)$

ตัวอย่าง กำหนดการแจกแจงของ X ได้

X	0	1	2	3	4
P (x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

(1) จงคำนวณหา E (X)

(2) จงคำนวณหา V (X)

วิธีทำ (1) จากสูตร $E(X) = \Sigma xp(x)$

$$= (0)(1/16) + (1)(4/16) + (2)(6/16) + (3)(4/16) + (4)(1/16)$$

$$= 2$$

(2) จากสูตร $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= (0^2)(1/16) + (1^2)(4/16) + (2^2)(6/16) + (3^2)(4/16) + (4^2)(1/16) - (2^2)$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{36}{16} + \frac{16}{16} - 4$$

$$= 5 - 4$$

$$= 1$$

หมายเหตุ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{V(X)}$

การแจกแจงทวินาม

ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงทวินาม จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. การทดลองหนึ่ง ซ้ำ ๆ n ครั้งเหมือนกันโดยตลอด

2. การทดลองของแต่ละครั้งแบ่งออกได้ 2 หนทางคือ สำเร็จกับไม่สำเร็จ อย่างเช่น โยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง หากเกิดหัวก็สำเร็จ เกิดก้อยก็ไม่สำเร็จ หรือทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง หากลูกเต๋าปรากฏหน้า 1 เราให้เป็นความสำเร็จ ปรากฏหน้าอื่น ๆ ก็ไม่สำเร็จ

3. ในการทดลอง n ครั้ง นั้น แต่ละครั้งจะต้องเป็นอิสระต่อกัน หมายความว่า ในครั้งที่ 1 ไม่มีผลสะท้อนถึงการทดลองครั้งที่ 2 หรือการทดลองครั้งที่สองไม่มีผลสะท้อนถึงครั้งที่ 3 หรือต่อ ๆ ไป

4. ความน่าจะเป็นของหนทางสำเร็จในแต่ละครั้งเป็น p และความน่าจะเป็นของหนทางไม่สำเร็จ $q = 1 - p$

5. X เป็นจำนวนครั้งของความสำเร็จจากจำนวนครั้งทั้งหมดที่ทำการทดลอง n ครั้ง $(x = 0, 1, \ldots n)$

ดังนั้นจะได้ว่า ความน่าจะเป็น $P(X)$ ของความสำเร็จ X ครั้ง มีค่าเท่ากับ

$$P(X) = {}^{n}c_{x} p^{x} q^{n-x} \qquad x = 0, 1, \ldots n$$

ในเมื่อ $${}^{n}c_{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}, \quad n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$
$$0! = 1$$

ตัวอย่าง ข้อสอบแบบปรนัยมีทั้งหมด 10 ข้อ แต่ละข้อมีคำตอบอยู่ 5 ข้อย่อย ใน 5 ข้อย่อยมีคำตอบที่ถูกอยู่ 1 คำตอบ จงหาความน่าจะเป็น

(1) ที่จะตอบถูก 3 ข้อโดยสุ่ม

(2) ที่จะตอบถูกอย่างมาก 6 ข้อโดยสุ่ม

วิธีทำ (1) $p = 1/5,\ q = 4/5,\ n = 10,\ x = 3$

จากสูตร $p(x) = {}^{10}c_{x} p^{x} q^{n-x}$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= {}^{10}c_{3}\,(1/5)^3\,(4/5)^{10-3} \\ &= \frac{10!}{3!\,(10-3)!}\,(1/5)^3\,(4/5)^7 \\ &= 120\,(1/5)^3\,(4/5)^7 \\ &= 0.201 \end{aligned}$$

วิธีทำ (2)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 6) &= 1 - P(X \geqslant 7) \\ &= 1 - P(X \geqslant 7) \\ &= 1 - ({}^{10}c_{7}\,(1/5)^7\,(4/5)^3 + {}^{10}c_{8}\,(1/5)^8\,(4/5)^2 \\ &\quad + {}^{10}c_{9}\,(1/5)^9\,(4/5) + {}^{10}c_{10}\,(1/5)^{10}) \\ &= 1 - 0.0009 \\ &= 0.9991 \end{aligned}$$

ค่ามัชฌิมเลขคณิตและความแปรปรวนสำหรับตัวแปรทวินาม

นิยาม หาก X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินามแล้ว ค่ามัชฌิมเลขคณิตค่าความแปรปรวนของ X กำหนดได้ดังนี้

$$\mu = E(X) = \Sigma xp(x) = np$$
$$\sigma^2 = V(X) = \Sigma (x - \mu)^2 p(x) = npq$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มทวินามมีมัชฌิมเลขคณิตเป็น 10 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3 จงคำนวณหาค่า p และ n

วิธีทำ จากสูตร $\mu = np$; $\sigma = \sqrt{npq}$

$$np = 10$$
$$\sqrt{npq} = 3$$
$$npq = 9$$
$$10q = 9$$
$$q = \frac{9}{10} = 0.9$$
$$p = 1 - 0.9 = 0.1$$
$$n(.1) = 10$$
$$n = 100$$

การแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นหนึ่ง ที่มีบทบาทสำคัญมากที่สุด ซึ่งกำหนดสมการได้เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu^2}{\sigma^2}\right)} \qquad -\infty < x < +\infty$$

ในเมื่อ μ = มัชฌิมเลขคณิต σ = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\pi = 3.1459\ldots$,
$e = 2.71828$

การแจกแจงนี้มีรูปร่างเหมือนรูประฆัง สมมาตรที่จุด $X = \mu$ พื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งมีค่าเท่ากับ 1 ด้วยเหตุนี้พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งระหว่าง $X = a$ กับ $X = b$ ในเมื่อ $a < b$ ใช้แทนความน่าจะเป็นที่ X วางอยู่ระหว่าง a และ b แสดงได้ด้วย $P(a < X < b)$

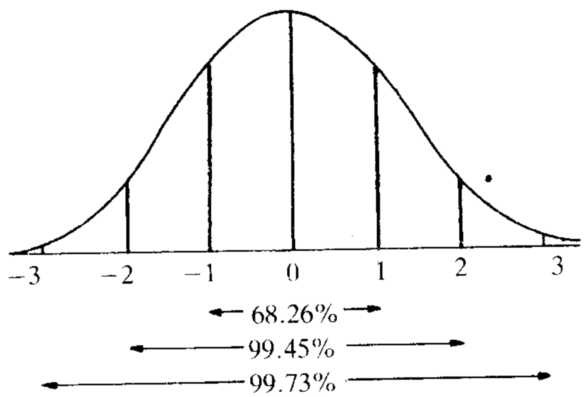
โดยปกติการคิดคำนวณหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติ เรายึดเอาเส้นโค้งปกติที่มีค่า $\mu = 0$ $\sigma = 1$ เป็นหลัก เส้นโค้งปกติที่มีค่า $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ เราเรียกว่า "การแจกแจงปกติมาตรฐาน" (Standard normal distribution)

เราสามารถเปลี่ยนตัวแปร X ที่มีการแจกแจงปกติใด ๆ มีมัชฌิมเลขคณิต μ และความแปรปรวน σ^2 ให้เป็นตัวแปร Z ที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐานได้โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

เพื่อคำนวณหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่เราต้องการ

พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานดังรูป ระหว่าง $z = -1$ กับ $z = +1$ เป็น 68.26% ระหว่าง $z = -2$ กับ $z = +2$ เป็น 95.45% และระหว่าง $z = -3$ กับ $z = +3$ เป็น 99.73%

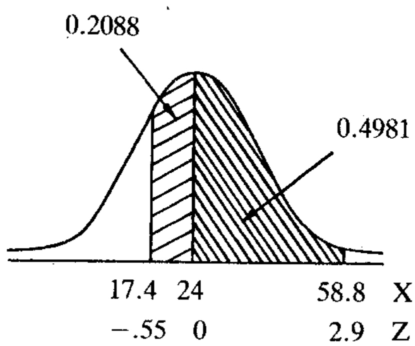


ตัวอย่าง กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมี $\mu = 24$ และ $\sigma = 12$ จงคำนวณหาพื้นที่ระหว่าง $x_1 = 17.4$ กับ $x_2 = 58.8$

วิธีทำ เราต้องแปลง x_1 กับ x_2 ให้เป็นสเกลมาตรฐานได้

จากสูตร $z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{17.4 - 24}{12} = -0.55$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{58.8 - 24}{12} = -2.9$$

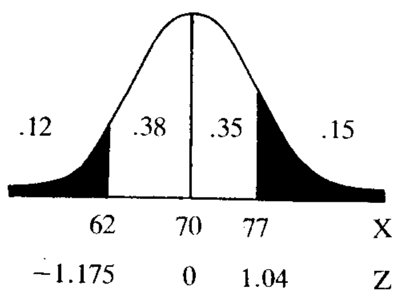


จากตารางเราพบว่า พื้นที่ระหว่าง $z = 0$ กับ $z = -.55$ เท่ากับ 0.2088 และพื้นที่ระหว่าง $z = 0$ กับ $z = 2.9$ เท่ากับ 0.4981

$\therefore$ พื้นที่ระหว่าง $x_1 = 17.4$ กับ $x_2 = 58.8$ ก็คือพื้นที่ระหว่าง $z_1 = -.55$ กับ $z_2 = 2.9$ เท่ากับ $0.2088 + 0.4981 = 0.7069$

z	.00	.....	.05
.10			
⋮			
.50			0.2088
⋮			
2.9	.4981		

ตัวอย่าง 2 ผลการสอบไล่วิชาสถิติ ซึ่งมีการแจกแจงปกติมีมัชฌิมเลขคณิต 70 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 6.3 ถ้าให้ 15 เปอร์เซนต์สูงสุดเป็นเกรด G และ 12 เปอร์เซนต์ต่ำสุดเป็นเกรด F จงหาคะแนนต่ำสุดของเกรด G และคะแนนสูงสุดของเกรด F



Z	.04	.....	.07	.08
1.0	.3508			
1.1			.3790	.3810

วิธีทำ หาค่า Z ที่พื้นที่ 0.35 จากตารางเราได้ 1.04 แล้วเอาไปแทนในสูตรได้

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$1.04 = \frac{x - 70}{6.3}$$

$$\begin{aligned} x &= 6.3 \times 1.04 + 70 \\ &= 6.552 + 70 \\ &= 76.552 \\ &= 77 \end{aligned}$$

∴ คะแนนต่ำสุดของเกรด G เท่ากับ 77 คะแนน

ในทำนองเดียวกันค่า Z ที่พื้นที่ 0.38 ได้ 1.175 แทนลงในสูตร (ต้องติดเครื่องหมายลบด้วยเพราะอยู่ในทางซ้ายของมัชฌิมเลขคณิต)

$$-1.175 = \frac{x - 70}{6.3}$$

$$\begin{aligned} x &= -1.175 \times 6.3 + 70 \\ &= -7.4025 + 70 \\ &= 62.5975 \\ &= 62 \end{aligned}$$

∴ คะแนนต่ำสุดของเกรด F เท่ากับ 62 คะแนน

การแจกแจงแบบพัวซอง

หาก n มีขนาดใหญ่มากและ p เข้าใกล้ศูนย์หรือหนึ่งแล้ว การแจกแจงทวินามสามารถประมาณด้วยการแจกแจงแบบพัวซองดังนี้

$$p(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^{x}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

ในเมื่อ μ = มัชฌิมเลขคณิต = ความแปรปรวน

ตัวอย่าง โดยเฉลี่ยรถยนต์ 1 คัน ใน 1,000 คัน จะยางแตกขณะที่ทัศนาจรบางแสน ถ้าหากว่า

มีรถยนต์ 10,000 คัน ทัศนาจรบางแสน จงหาความน่าจะเป็นที่รถยนต์ 8 คันจะยางแตก

วิธีทำ

$$\mu = np = (\frac{1}{1000})\ 10{,}000 = 10$$

$$P(X = 8) = \frac{e^{-10}\, 10^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-10}\, 10^{8}}{8!}$$

$$= 0.1116$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่รถยนต์ 8 คัน จะยางแตกเท่ากับ 0.1116

Hypergeometric Distribution ใช้ในการสุ่มตัวอย่างแบบหยิบแล้วไม่ใส่คืน เงื่อนไขของการแจกแจงนี้มีดังนี้

1. ประชากรประกอบด้วยสิ่งของสองชนิด หรือมากกว่าของการทดลองหนึ่ง ๆ
2. จำนวนของสิ่งของแต่ละชนิดจะต้องคงที่และจำนวนของการทดลองหรือขนาดตัวอย่างจะต้องคงที่ด้วย
3. ตัวแปรเชิงสุ่มที่ใช้แสดงจำนวนสิ่งของชนิดเดียวเท่านั้นในตัวอย่าง
4. โอกาสสำหรับการเลือกสิ่งของชนิดใดชนิดหนึ่งเปลี่ยนไปตามการทดลอง นั่นคือเหตุการณ์มีความสัมพันธ์กัน

ดังนั้น Hypergeometric probability (Function) rule คือ

$$P(X) = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}, \quad x = 0, 1, \ldots a$$

ในเมื่อ a = จำนวนสิ่งของทั้งหมดชนิดแรก

b = จำนวนสิ่งของชนิดที่สองหรืออื่น ๆ

n = ขนาดตัวอย่าง

x = จำนวนสิ่งของชนิดแรกในตัวอย่าง

$P(X)$ = ความน่าจะเป็นของจำนวนสิ่งของชนิดแรกในตัวอย่าง

ตัวอย่าง มีบอลล์อยู่ในกล่อง 5 ลูก เป็นบอลล์ขาว 3 ลูก บอลล์ดำ 2 ลูก สุ่มบอลล์มา 3 ลูก พร้อม ๆ กัน คำนวณความน่าจะเป็นที่จะได้บอลล์ขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก

วิธีทำ ให้ a = บอลล์ขาวทั้งหมด 3 ลูก

b = บอลล์ดำทั้งหมด 2 ลูก

n = ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 3 ลูก

x = จำนวนบอลล์ขาวในตัวอย่าง 2 ลูก

จากสูตร

$$P(X) = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}, \quad X = 0, 1, \ldots n$$

$$P(X) = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}$$

$$= \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{3-2}}{\binom{3+2}{3}} = \frac{\left(\frac{3!}{2!\,1!}\right)\left(\frac{2!}{1!\,1!}\right)}{\frac{5!}{3!\,2!}}$$

$$= \frac{3 \times 2}{10}$$

$$= 0.6$$

ความน่าจะเป็นที่จะได้บอลขาว 2 ลูก และดำ 1 ลูก เท่ากับ 0.6

การประมาณด้วยการแจกแจงปกติ

ตัวแปรทวินาม เราจำกัดปัญหาความน่าจะเป็นในกรณีที่ซึ่งตัวอย่างขนาด 25 หรือเล็กกว่า เราใช้ตารางที่ 5 หาความน่าจะเป็น สำหรับตัวอย่างที่ใหญ่กว่า เราจะใช้การแจกแจงปกติไปประมาณความน่าจะเป็นทวินาม อย่างเช่น เราต้องการความน่าจะเป็นของความสำเร็จเก้าครั้งหรือน้อยกว่า

ในการทดลองทวินาม n = 50 ครั้ง ด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จในหนึ่งครั้งเป็น 0.2 ความน่าจะเป็นจริง ๆ คือ

P (X = 0 หรือ 1... หรือ...9)

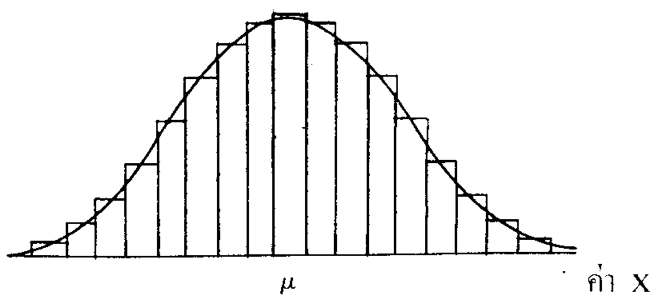
$$= \binom{50}{0}(.2)^0(.80)^{50} + \ldots + \binom{50}{9}(.2)^9(.8)^{41} = 0.4437$$

การคำนวณด้วยมือจะเป็นงานที่น่าเบื่อ เพราะใช้เวลาที่น่าเบื่อมาก เราสามารถคำนวณหาได้จากตารางที่ 1 เป็นทางเลือกหนึ่ง การแจกแจงปกติสามารถให้ค่าโดยประมาณ

การทดลองทวินามที่ให้ค่าทั้ง np และ nq มีค่าเท่ากับห้า หรือมากกว่า สามารถประมาณความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปกติ

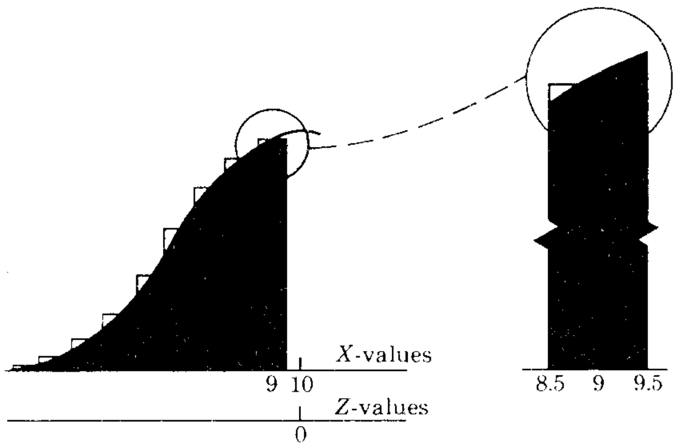
การประมาณด้วยการแจกแจงปกติค่อนข้างดีสำหรับ p เข้าใกล้ 1/2 ถึงแม้ว่าตัวอย่างจะเล็กขนาด n = 15 หรือ20 ก็ตาม แต่จะไม่ดีนักหรอก p เข้าใกล้ 0 หรือ 1 การประมาณดีขึ้นสำหรับค่าใด ๆ ของ p ขณะที่ n เพิ่มขึ้น

เส้นโค้งปกติประมาณพื้นที่บริเวณใต้การแจกแจงความน่าจะเป็นทวินามด้วยพื้นที่ตลอดช่วงที่กั้นด้วยเส้นโค้งปกติ ดังรูปข้างล่างเป็นตัวอย่างของการประมาณแผนภูมิใช้แทนความน่าจะเป็นเชิงทวินาม



การประมาณความน่าจะเป็นเชิงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

เส้นโค้งปกติ (เส้นเรียบ) ประมาณพื้นที่นี้ดังรูปข้างล่าง รวมส่วนของตัวแทนที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงทวินามที่ $n = 50$ และ $p = .20$ ความคลาดเคลื่อนของช่วงนี้กว้างหนึ่งหน่วย สาเหตุจากการประมาณด้วยการแจกแจงปกติ คือผลต่างในพื้นที่



การประมาณด้วยการแจกแจงปกติที่ $X = 9$ สำหรับการแจกแจงทวินามที่ $n = 50$ และ $p = .20$ ของสองส่วนแรเงาในวงกลม

ขั้นตอนสำหรับการประมาณด้วยการแจกแจงปกติ

1. กำหนดช่วงของค่า X ที่สนใจ แสดงเป็นค่าตัวเลขจำนวนเต็มซึ่งรวมอยู่ในเหตุการณ์
2. ตัดสินใจว่าจะรวมค่าปลายสุดที่ต่อกับค่าอื่น ๆ ในเหตุการณ์หรือไม่ ที่จะเกี่ยวข้องกับบวกอีก .5 หรือลบอีก .5 จากค่าตัวเลขจำนวนเต็ม เพื่อคำนวณคะแนน ดังรูปข้างต้น .5 เป็นการแก้ตัวแปรไม่ต่อเนื่องให้เป็นตัวแปรต่อเนื่อง
3. คำนวณมัชฌิมเลขคณิต $\mu = np$ และคำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

4. คำนวณคะแนน Z และดำเนินการเหมือนการแจกแจงปกติทุกอย่าง โดยใช้รูปการประมาณเชิงปกติ

$$Z = \frac{(X \pm .5) - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$$

ในกรณีที่เราต้องการหา $P(X \leq 9)$ ค่าที่เราสนใจจะรวม $X = 0, 1, 2, \ldots$ หรือ 9 ค่าตัวเลขจำนวนเต็มที่ปลายสุดคือ 9 ดังนั้น การที่ตัวเลขจากไม่ต่อเนื่องให้เป็นต่อเนื่องด้วยการบวก

อีก .5 เป็น 9.5 ในกรณี $n = 50, p = 0.2$

$$\mu = 50 \times .20 = 10 \text{ และ } \sigma = \sqrt{50 \times .2 \times .8} = 2.83$$

รูปการประมาณเชิงปกติให้

$$Z = \frac{(9.5) - 10}{2.83} = \frac{-.50}{2.83} = -0.18$$

ใช้ตารางที่ I นำไปสู่ $P(X \leq 9) = P(Z < -0.18) = .5000 - .0714 = .4286$ ค่าคลาดเคลื่อนระหว่างค่านี้กับค่าจริง (.4437) คือ .0151 ซึ่งมีค่าน้อยมาก สังเกตว่า $np = 10$ การประมาณนี้เข้าใกล้ค่าจริง โดยเฉพาะค่า n จำเป็นจะต้องมีค่ามากกว่า 25 จึงจะทำให้การประมาณค่าได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

จุดวิกฤติในการแก้ปัญหาโดยการประมาณเชิงปกติ คือการตัดสินใจว่า ควรจะบวกอีก .5 หรือ ลบอีก .5 เข้ากับค่าปลายสุด

ตัวอย่าง ในกรุงเทพฯ แปดสิบเปอร์เซ็นต์ของครอบครัวที่มีโทรศัพท์ มีสมาชิกครอบครัวอยู่ที่บ้านอย่างน้อยหนึ่งคนอยู่ที่ระหว่าง 17.00 – 19.00 น. ของวันทำงาน ถ้าหากว่าสุ่มตัวอย่างหนึ่งประกอบด้วยสมาชิก 100 คน และโทรศัพท์ในระหว่างระยะเวลานี้ จงหาโอกาสที่ 75 คน หรือมากกว่าในตัวอย่างจะมีใครคนหนึ่งอยู่ที่บ้าน

วิธีทำ ให้ X = จำนวนครอบครัวในกรุงเทพฯ ที่มีใครคนหนึ่งอยู่ที่บ้านในระยะเวลานี้ นี้เป็นการทดลองแบบทวินาม การประมาณด้วยการแจกแจงปกติได้อย่างเหมาะสมสำหรับ $np = 100 \times .8 = 80$ และ $nq = 100 \times .2 = 20$

1. ช่วงของค่า X ที่สนใจคือ 75 หรือมาก ดังนั้น $P(X \geq 75) = ?$
2. เพราะฉะนั้นการแก้ไขให้เป็นตัวแปรต่อเนื่องได้ด้วยการลบ 75 ด้วย .5 ค่าปลายสุดก็กลายเป็น $75 - .5 = 74.5$
3. มัชฌิมเลขคณิต $\mu = 100 \times .8 = 80$ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

   $$\sigma = \sqrt{100 \times .8 \times .2} = 4$$
4. ค่า Z คือ

   $$Z = \frac{(75 - .5) - 80}{4} = -1.38$$

ให้ความน่าจะเป็น (พื้นที่) = .4162 ดังนั้น

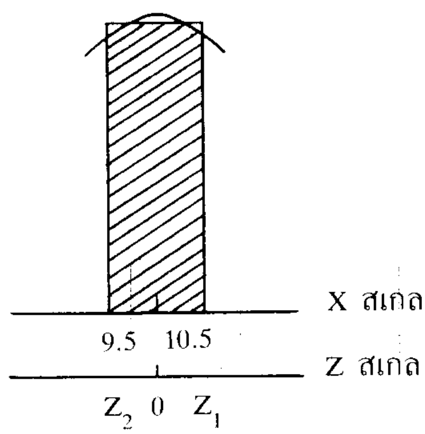
$$P(X \geqslant 75) = P(Z \geqslant -1.38) = .4162 + .5000 = .9162$$

มีโอกาสประมาณ 91.62% ที่ใครคนหนึ่งที่ควรจะตอบทางโทรศัพท์ในแต่ละครอบครัวของ 75 ครอบครัว หรือมากกว่าในตัวอย่างนี้

ตัวอย่าง ไข่มุกข์ที่ได้ขายตามชายทะเลเป็นไข่มุกข์ที่ได้มาจากหอยมุกข์ซึ่งมีหอยมุกข์หนึ่งในสิบบรรจุไข่มุกข์มีมูลค่าเกิน 200 บาท จงหาความน่าจะเป็นที่หอยมุกข์ 10 ตัว จาก 100 ตัว ที่บรรจุไข่มุกข์ที่มีมูลค่าสูง

วิธีทำ ตัวแปรคือ X = จำนวนหอยมุกข์ซึ่งบรรจุไข่มุกข์มูลค่าเกิน 200 บาท นี้เป็นการทดลองเชิงทวินาม มี $n = 100$, $p = .10$ การประมาณด้วยการแจกแจงปกติ มีความเหมาะสม ($np = 10$; $nq = 90$)

1. ต้องการความน่าจะเป็น $P(X = 10)$
2. การประมาณนี้ต้องการทั้งลบและบวกของตัวประกอบแก้ความถูกต้อง ดังนั้นค่า Z สองค่า เพื่อที่จะฟอร์มช่วงของการประมาณ นั่นคือ พื้นที่โดยประมาณอยู่บนช่วงจาก 9.5 ถึง 10.5 การประมาณเชิงปกติคือพื้นที่แรเงาในรูป



3. มัชฌิมเลขคณิตคือ 10 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\sigma = \sqrt{100 \times .1 \times .9} = 3$$

4. พื้นที่

$$Z_1 = \frac{(10 + .5) - 10}{3} = \frac{.5}{3} = .17 \quad .0675$$

$$Z_2 = \frac{(10 + .5) - 10}{3} = -\frac{.5}{3} = -.17 \quad \underline{.0675}$$

ดังนั้น $P(X = 10) = P(-.17 \leq Z \leq .17) = .1350$
มีโอกาสประมาณ $13\frac{1}{2}\%$ ที่การเลือกหอยมุกข์ 100 ตัว จากประชากรนี้ จะมีสิบตัวที่ผลิตไข่มุกข์มูลค่าเกิน 200 บาท

การประมาณเชิงปกติใช้กันอย่างกว้างขวางเกี่ยวกับการประมาณความน่าจะเป็นสำหรับการแจกแจงไม่ต่อเนื่องจำนวนมาก อย่างไรก็ตาม มันก็ไม่ได้ให้การประมาณต่อการแจกแจงไม่ต่อเนื่องไปทั้งหมด และไม่ควรใช้กับการแจกแจงที่แตกต่างไปจากรูประฆัง

คำและประโยคที่ควรจำ

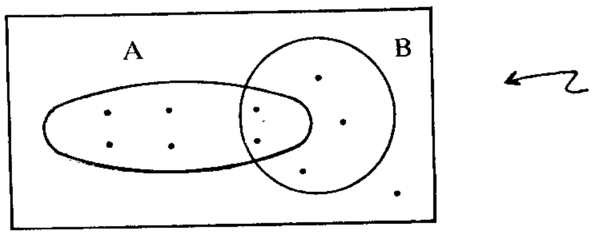
1. การทดลองเชิงสุ่ม
2. elementary unit
3. possible outcome
4. all possible outcomes
5. sample space
6. เหตุการณ์
7. เหตุการณ์เชิงเดี่ยว
8. เหตุการณ์ประกอบ
9. intersection
10. union
11. เหตุการณ์ที่เป็น mutually exclusive
12. Venn diagram
13. Complement
14. order pairs
15. ความหมายของคำความน่าจะเป็น
16. คุณสมบัติของความน่าจะเป็น
17. หนทางที่มีความน่าจะเป็นเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน
18. กฎของการรวม
19. กฎของการคูณ
20. ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข
21. เหตุการณ์ที่มีความอิสระ
22. การจัดลำดับ
23. การจัดหมู่
24. tree diagram
25. ตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง
26. ตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่อง
27. การทดลองแบบเบอร์นูนลี
28. การแจกแจงทวินาม
29. การแจกแจงปกติ
30. การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีโอเมตริก
31. การแจกแจงความน่าจะเป็น
32. มัชฌิมเลขคณิตจริง (ประชากร)
33. ความแปรปรวน

เติมคำลงในช่องว่างบทที่ 6

จงเติมคำลงในช่องว่างให้สมบูรณ์ โดยคำตอบที่ถูกต้องอยู่ด้านขวามือ ใช้ไม้บรรทัดปิดคำตอบสำหรับคำถามซึ่งท่านยังไม่ตอบ

เราสำรวจความน่าจะเป็นด้วยเหตุการณ์ธรรมดาที่สัมพันธ์กัน complement, union และ intersection สมมติว่า Sample space

ประกอบด้วยจุดต่าง ๆ แต่ละจุดมีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กันในการทดลอง ในแผนภาพเวนต่อไปนี้

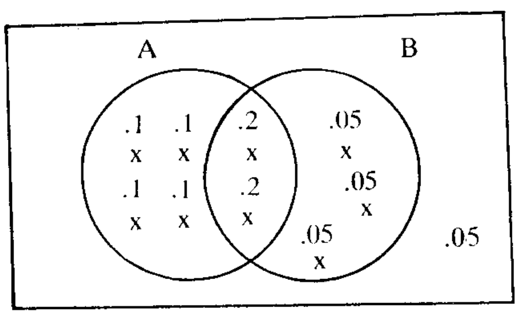


การนับจุดอย่างธรรมดาและหารด้วยจำนวนทั้งหมดของจุด (1) ..... จุดเราให้ความน่าจะเป็น P (A) = (2) ...., P (A และ B) (3) .... และ P (A หรือ B) (4) ....

โดยการกำหนด space ย่อย แสดงได้ด้วยตัวอักษรต่อไปนี้ เราสามารถคำนวณความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P (B/A) = (5)... ; P (B/$\bar{A}$) = (6) ...., และ P (A/B) = (7) ....

เราได้เห็นแล้วว่าสำหรับการทดลองจริง ๆ หลาย ๆ การทดลอง การกำหนดความน่าจะเป็นต่าง ๆ กับจุด (เหตุการณ์เชิงเดียว) ทำให้มีความหมายมากกว่า พิจารณาต่อไปนี้

(1) 10
(2) 6/10
(3) 2/10
(4) 9/10
(5) 2/6
(6) 3/4
(7) 2/5



เราสังเกตว่าความน่าจะเป็นทั้งหมดสำหรับจุดทั้งหมดเป็น (8)	(8) 1.0
ความน่าจะเป็นสำหรับบางเหตุการณ์ที่ได้บรรยายข้างต้น	(9) .8
P (A) = (9)	
P (A และ B) = (10) .... : P (A หรือ B) = (11)	(10) .4
และ P (B/A) = (12) .... โดยทั่ว ๆ ไปผลลัพธ์มีค่าแตกต่าง	(11) .95
กันสำหรับความน่าจะเป็นต่างกันกับเหตุการณ์เชิงเดียว มันมีความ	
สำคัญมากที่การกำหนดอย่างสมเหตุสมผลในการเปรียบเทียบ	(12) .4/.8
กับประสบการณ์หรือเหตุผลของเรา	

ในปัญหาเกี่ยวกับเหตุการณ์ และความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กันขณะแบบฝึกหัดหนึ่งในเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็น และการพรรณนาด้วยถ้อยคำแสดงว่าเหตุการณ์อะไร พรรณนาด้วยตัวเลขที่ทราบได้ ดังปัญหาต่อไปนี้

สองพี่น้อง ก. และ ข. เข้าเรียนวิทยาลัยต่างกัน แต่จะสมัครแข่งขันเป็นประธานนักศึกษา โอกาสที่นาย ก. จะชนะเป็น 0.5 โอกาสที่นาย ข. จะชนะเป็น .6 และโอกาสที่เขาทั้งสองจะชนะเป็น 0.3 ในปัญหานี้ 1 − .5 พรรณนาถึงโอกาสสำหรับเหตุการณ์ นาย ก. ไม่ชนะ .6 + .5 − .3

พรรณนาโอกาสสำหรับเหตุการณ์ (13)	(13) หนึ่งหรือทั้งสอง
.5 (1 − .6) พรรณนาโอกาสสำหรับเหตุการณ์ (14)	(14) ก.ชนะ และ
1 − .3 พรรณนาโอกาสสำหรับเหตุการณ์ (15)	ข. ไม่ชนะ
.5 (1 − .6) + (1 − .5) × .6 พรรณนาโอกาสสำหรับเหตุการณ์	(15) อย่างมากคน
(16)	หนึ่งชนะ
ในสถิติ เราใช้สัญลักษณ์เป็นเสมือนชื่อชวเลขสำหรับ	(16) คนหนึ่งชนะ
เหตุการณ์จากหัวข้อก่อนอาจใช้ ก. = นาย ก. ชนะ และ ข. = นาย ข.	แน่ ๆ
ชนะ	
เพื่อว่าเรากำหนด **P (fl) = .5, P** (ข) = .6 และ **P** (ก. และ ข.)	(17) ก. หรือ ข.
= .3 แล้วข้อความทีกำหนดข้างต้นกลายมาเป็น P ($\overline{\text{ก}}$) = **1 − .5 :**	(18) ก. และ $\overline{\text{ข}}$.
P | **(17)**.......... | = .6 + .5 .3; **P** | (18).......... |	**(19) (** $\overline{\text{ก. และ ข.}}$)
= .5 (1 − .6) ; **P** | **(19)**.......... | = **1 − .3 ;**	**(20) (fl.** และ $\overline{\text{ข}}$.)
และ **P** | **(20)**.......... | = .5 **(1 − .6)** + .6 **(1 − .5)**	หรือ ($\overline{\text{ก}}$. และ ข.)

มันสามารถช่วยให้ตั้งชื่อแต่ละเหตุการณ์ด้วยอักษรหรือสัญลักษณ์ที่เตือนท่านเกี่ยวกับการพรรณนาถ้อยคำยาวขึ้น

ให้เราทำตลอดปัญหาถ้อยคำที่ยุ่งยากอย่างตรงไปตรงมา ความน่าจะเป็นเป็น .6 ที่กลุ่มเสือพรานที่มีหน้าที่ทำอาหารเช้าจะตื่นนอนตามเวลากำหนด ตามที่เสือพรานจะตื่นนอนที่เวลากำหนด โอกาสที่อาหารเช้าจะเสร็จเรียบร้อยเวลา 7.00 น. เป็น 0.9 อีกนัยหนึ่งมีโอกาส .7 ที่อาหารเช้า จะเสร็จเรียบร้อยเวลา 7.00 น. เท่านั้น ความน่าจะเป็นที่อาหารเช้าของเสือพรานจะเสร็จเรียบร้อยเวลา 7.00 น. เป็นเท่าไร?

ขณะที่ท่านทบทวนปัญหา จงหาเหตุการณ์ที่สำคัญประกอบ (21) ด้วย D (สำหรับเวลาที่กำหนด) = (21) ....และ B (สำหรับอาหารเช้า) (22) ....

ตามเวลากำหนด

เหตุการณ์ที่สัมพันธ์และในรูปของความน่าจะเป็น คำถาม (22) คือ P[(23) ....] = ? ให้อ่านปัญหาทั้งหมดอีกครั้ง ในตารางความน่าจะเป็น สิ่งที่กำหนดให้คือ P[(24) ....]= .6 P[(25) ....] = .9 และ P[(26) ....] = .7 ที่จุดนี้ ให้เราลองพยายามทำ P (B) = P (B และ D) + P[(27) ....]

อาหารเช้าจะเสร็จเรียบร้อยเวลา 7.00 น.

วิธีทำโดยใช้ tree diagram

สำหรับ D :	P (D)	× P (B/D)	= P(B และ D)
	(28)	× (30)	= (33) ....
สำหรับ $\bar{D}$:	(29)	× (31)	= (34) ....
	P ($\bar{D}$)	× P[(32)...]	= P[(35)...]

P (B) ผลรวมของตัวเลขของท่านที่ (33) และ (34) เป็น (36).... ในวิธีทำนี้ เราใช้กฎของ (37) ....สองครั้งและ (38) กฎ .... หนึ่งครั้ง เราควรเข้าใจด้วยว่า เหตุการณ์ (39) .... และ (40) .... เป็น Mutually exclusive การตรวจสอบอย่างหยาบถือว่าคำตอบอยู่ระหว่างค่า (41) ....กับ (42) ....

(23) B
(24) D
(25) B/D
(26) B/$\bar{D}$
(27) B และ $\bar{D}$
(28) .6
(29) .4
(30) .9
(31) .7
(32) B/$\bar{D}$

นี้เป็นส่วนหนึ่งของตารางความน่าจะเป็นทวินามในภาคผนวกหน้าหลัง

		P			
n	X	.05	.10	.20	.25
1	0	$\boxed{.9500}$	.9000	.8000	.7500
	1	$\boxed{.0500}$	.1000	.2000	.2500
2	0	.9025	.8100	.6400	.5625
	1	.0950	.1800	.3200	.3750
	2	.0025	.0100	.0400	.0625
3	0	.8574	.2790	.5120	.4219
	1	.1354	.2430	.3840	.4219
	2	.0071	.0270	.0960	.1406
	3	.0001	.0010	.0080	.0156

แต่ละกรอบหนึ่งของตัวเลขในตารางเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็น สำหรับกรอบข้างต้น พื้นที่เป็นการพรรณนาถึงการแจกแจง มี n = 1 และ P (43) .... กรอบนี้บรรจุความน่าจะเป็นอยู่สองค่า $P(X = O) = \binom{1}{0}(.05)^0(1 - .05)^1 = (44)$ .... และ (45) .... = .0500 เราทราบว่านี้เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นหนึ่ง เพราะว่า P (0) + P (1) = .9500 + .0500 = (46) ....

ดังนั้นการคำนวณหาการแจกแจงทวินามภายในตารางต้องการค่าของ n และ (47) .... ขณะที่ตัวอย่างที่สองสำหรับ n = 3 และ P = .20

ความน่าจะเป็นเป็นของจุด P (0) + P (1) + P (2) + P (3) = .5120

+ (48) .... + (49) .... + .0080 = (50) ....

สังเกตว่าสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม X กำหนดค่า n ซึ่งมวลของจุด

นับค่าได้เป็น 0, 1, 2 ...., จนถึง (51) .... ตารางนี้เป็น

(33) .54
(34) .28
(35) B และ D
(36) .82
(37) การคูณ
(38) การรวม
(39) D
(40) $\bar{D}$
(41) 0
(42) 1
(43) .05
(44) .9500

ประโยชน์สำหรับตอบคำถามความน่าจะเป็นและสำหรับพรรณนาการแจกแจง
ความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มทวินาม พิจารณาการแจกแจงอีกครั้งหนึ่ง = $\binom{1}{1}(.05)(.95)^0$
โดยกำหนดตัวพารามิเตอร์ n = 3 และ p = .2 แล้ว สูตรการแจกแจง $\binom{1}{1}(.05)(.95)^0$
ทวินาม $P(X) = \binom{n}{x} p^X q^{n-X}$, X = 0, 1, ..., n เราควรจะตอบ
สำหรับตัวอย่าง $P(X \le 1) = P($0 หรือ 1$) = P(0) + P(1) = \binom{3}{0}(.2)^0(.8)^3$ + (52) .... = (53) .... + .3840 = (54) .... คำตอบจะสำเร็จลงง่ายขึ้นโดยการอ่านจากตาราง P (0) + P (1) = .5120 + (55) .... = .8960

เพื่อที่จะให้แน่ว่าท่านรู้จักใช้ตารางเป็นหรือไม่ โดยให้ท่านหาในกรณีที่ n = 2, p = .10, $P(X \ge 1)$; $X \geq 1$ ประกอบด้วย X = 1 กับ X = (56).......... ดังนั้น P (1) + P (2) = (57)....... + (58) .... = .1900 ให้เราเปิดไปดูตารางที่ 5 และหากรณี n = 5 และ p = .5, $P(X < 3)$ = (59) .... และกรณี n = 20 และ p = .8 คำนวณ P (X = 7,8,9 หรือ 10) ต้องการว่าเราเข้าใจ P (X = 7) นั้นมีความน่าจะเป็นน้อยกว่า .0001 ตารางที่ 5 จะแสดงด้วย (60) .... ด้วยเหตุนี้ P (X = 7, 8, 9 หรือ 10) = (61) .... จากตาราง 5 เนื่องจากว่าตารางมีค่า n และ p เท่าที่กำหนดเท่านั้น ท่านควรรู้จักคำนวณความน่าจะเป็นโดยใช้สูตร

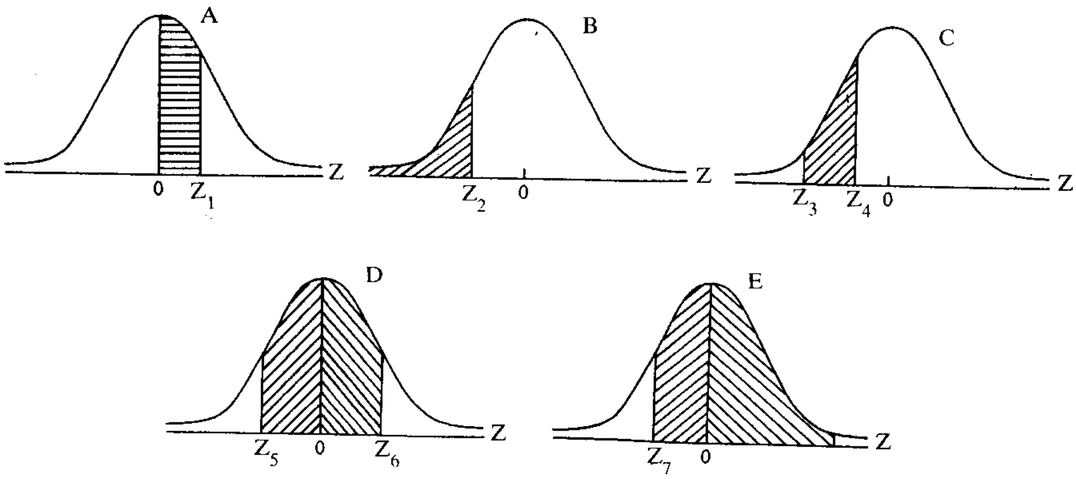
$$P(X) = \binom{n}{x} p^X q^{n-X}$$ ด้วย

(45) P (X = 1)
(46) 1.0000
(47) p
(48) .3840
(49) .0960
(50) 1.000
(51) n
(52) $\binom{3}{1}(.2)^1(.8)^2$
(53) $.8^3 = .5120$
(54) .8960
(55) .3840
(56) 2
(57) .1800
(58) .0100
(59) .5000
(60) เว้นช่องว่าง
(61) .0026

ตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง นอกจากใช้กับการแจกแจงทวินามยังใช้กับการแจกแจงอื่น ๆ การแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรไม่ต่อเนื่อง X แบ่งออกได้เป็น

X	P (X)
0	4/20
2	7/20
3	

ความน่าจะเป็นที่ขาดหายไปคือ P (3) = (62) .... เราทราบว่า นี้ไม่ใช่เป็นการแจกแจงทวินาม เพราะว่า ค่า X = 1 มี P (1) = (63)	(62) 9/20 (63) 0
เรายังหามัชฌิม $\mu = \Sigma xp(x) = 0 \times \frac{4}{20} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times$ (64) .... = (65) ...., และตอบคำถามความน่าจะเป็น อย่างเช่น P (X < 3) = (66)	(64) 9/20 (65) 41/20 = 2 (66) 11/20



เพื่อที่จะคำนวณพื้นที่แรเงา หรือความน่าจะเป็นในแต่ละรูป คำนวณค่า Z และแล้วหาพื้นที่จากตารางที่ I ตารางที่ I ให้พื้นที่หรือ (67)	(67) ความน่าจะเป็น
ตัดจากข้างในเส้นโค้งปกติมาตรฐาน (Z) และระหว่างค่า Z ที่กำหนด กับค่า Z = (68) ....พื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งคือ (69)	(68) 0 (69) 1
และเพราะว่าเส้นโค้งสมมาตรกัน (70) .... เป็นพื้นที่ข้างใดข้างหนึ่ง มัชฌิม (0)	(70) .5000
ในรูป A ข้างบน ความน่าจะเป็นหาได้จาก (71)	(71) การอ่านจากตำรา

ในรูป B ค่าตารางสำหรับ Z_2 ลบออกจาก (72) .... (72) .5000

ให้ความน่าจะเป็นที่ต้องการ ในรูป C ต้องการคะแนน Z มากกว่าหนึ่ง (73) 2

คือ (73) .... จะต้องหาพื้นที่สำหรับ Z_3 กับ Z_4 เราต้อง (74) ลบ

(74) ....

พื้นที่เหล่านี้ เพื่อเอาคำตอบ ในรูป D สองพื้นที่เอามา (75) .... (75) รวมหรือบวก

ให้พื้นที่ในส่วนกลางของการแจกแจงในรูป E พื้นที่ระหว่าง Z_7

กับ Z = 0

อ่านได้โดยตรงจากตารางที่ I แล้วเอามา (76) ....5000 (76) รวมหรือบวก

ก็จะได้พื้นที่แรเงา

เราได้พรรณนาถึงการหาพื้นที่เหล่านี้ ว่าได้มาอย่างไรแล้วให้เรามาหัดทำบางปัญหา สำหรับรูป A ให้ $Z_1 = 1.03$ แล้ว $P(0 < Z < 1.03)$

= (77) .... รูป B ให้ $Z_2 = -1.67$ แล้ว $P(Z < -1.67)$ (77) .3485

แล้ว $P(Z < -1.67) = .5000 -$ (78) .... = .0475 (78) .4525

สำหรับรูป C ให้ $Z_3 = -2.00$, $Z_4 = -.29$, $P(-2.00 < Z < -.29)$ (79) .4772

= (79) .... − (80) .... = .3631 สำหรับรูป D ให้ Z_5 = (80) .1141

−1.81, (81) $-1.81 < Z < 2.06$

$Z_6 = 2.06$ P | (81) .... | = .4649 + (82) .... = .9452 (82) .4803

สำหรับรูป E ให้ $Z_7 = -1.84$ แล้ว P | (83) ....| = .4671 + (83) $Z > -1.84$

(84) .... (84) .5000

= 85 .... (85) .9671

ปัญหาการศึกษาทั้งในหนังสือและคู่มือ A ถึง E รูปโค้งระฆังช่วยในการแก้ปัญหาในตารางที่ I และใช้การแจกแจงปกติมาตรฐาน

ในการเปลี่ยนคะแนน Z มีหลาย ๆ จุดต้องการทำให้หมดความสงสัยลงได้

1. เกี่ยวกับการแจกแจงปกติ X เป็น $N(\mu, \sigma^2)$ ในที่นี้ เมื่อไรค่า X ภายใต้คำถามอยู่ด้านซ้ายของ μ (สำหรับ $X < \mu$) ค่า Z ที่สมนัยกันจะมีเครื่องหมาย (86) .... แต่ไม่เกี่ยวกับพื้นที่หรือความน่าจะเป็น (86) ลบ

   พื้นที่จะต้องมีค่าเป็น (87) .... เสมอ หรืออย่างน้อยที่สุดเป็นศูนย์ (87) บวก

2. สำหรับคำถามความน่าจะเป็นแบบทวินาม คำตอบที่ดีที่สุดจะต้องมาจากการคำนวณได้จากสูตร $P(X) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ โดยการใช้ตารางที่ 5 (88) .... แต่สำหรับ n = 50 หรือ 100 หรือมากกว่า วิธีการเหล่านี้ไม่เหมาะสม ทางเลือกอีกทางหนึ่งคือ การประมาณด้วยการแจกแจงปกติ แต่เมื่อไรใช้การแจกแจงปกติ

(88) ความน่าจะเป็นแบบทวินาม

ประมาณความน่าจะเป็นแบบทวินาม สิ่งหนึ่งที่ต้องการ

ก. แก้ค่าที่วัดได้ (ค่า X) ในคำถามด้วยการบวกหรือลบค่า (89) .... นี้เป็นแบบการแก้ความต่อเนื่อง

ข. คำนวณมัชฌิม μ = (90) .... และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma = \sqrt{(91) ....}$

(89) 1/2

(90) $\mu = np$

(91) $\sigma = \sqrt{npq}$

คำถามบทที่ 6

ถูกหรือผิด

ให้เขียนวงกลมรอบตัว T ของแต่ละข้อความถ้าหากว่าข้อความนั้นเป็นจริง (ถูก) หรือเขียนวงกลมรอบตัว F ถ้าหากว่าข้อความนั้นไม่เป็นจริง (ผิด)

T F 1. การทดลองทางสถิติต้องการผลลัพธ์ของโอกาสกับบางกลุ่มหรือชุดของผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมด

T F 2. ordered pairs ของ (A,B) กับ (B,A) มีความหมายเหมือนกัน

T F 3. ช่วงของความน่าจะเป็นจะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เสมอ

T F 4. tree diagram มีประโยชน์ มากที่สุดสำหรับพรรณนาการทดลองไม่มีกฎเกณฑ์ของผลลัพธ์(outcomes) ที่เกิดขึ้นตามลำดับครั้ง

T F 5. แผนภาพเวนสามารถแสดงจุดความน่าจะเป็น แต่แผนภาพเวนนั้นต้องแสดงจุดทั้งหมด ความน่าจะเป็นทั้งหมด

T F 6. ถ้าหากว่าสองเหตุการณ์ A และ B เป็น mutually exclusive แล้ว $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ จะเป็น mutually exclusive ด้วย

T F 7. ความน่าจะเป็นที่ผลลัพธ์ที่หนึ่งหรือผลลัพธ์ที่สองของสองผลลัพธ์ไม่ร่วมกันจะเกิดขึ้น คือผลคูณของสองความน่าจะเป็นนั้น

T F 8. ความน่าจะเป็นเป็นศูนย์เมื่อลูกเต๋า (มีหกหน้า) ปรากฏหน้า 1 และ 4 ของการโยนหนึ่งครั้ง

T F 9. ความน่าจะเป็นที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน อาจพิจารณาเป็นกรณีพิเศษของความน่าจะเป็นของความถี่สัมพัทธ์ เมื่อไรการสังเกตเหตุการณ์เชิงเดียวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

T F 10. ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P (A/B) เป็นการกำหนดเหตุการณ์ B ด้วยเหตุการณ์ A

T F 11. การวัดความเร็วของรถ น้ำหนักของสัตว์ทดลอง และจำนวนนิโคตินในบุหรี่เป็นตัวอย่างของการวัดด้วยมาตราแบบต่อเนื่อง

T F 12. ค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่ได้เขียนลงในตารางแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง เป็น mutually exclusive

T F 13. $\binom{7}{2}$ มีค่ามากกว่า $\binom{7}{1}$

T F 14. ถ้าหากว่าทอดลูกเต๋าที่สมดุลหนึ่งลูกกับโยนเหรียญที่สมดุล 1 อัน พร้อม ๆ

กันผลลัพธ์หัวหรือก้อยสำหรับเหรียญ และ 1, 2, 3, ... 5 หรือ 6 สำหรับลูกเต๋ามีความอิสระกัน

T F 15. ความน่าจะเป็นที่สองเหตุการณ์มีความอิสระกัน จะมีผลลัพธ์เฉพาะ นั่นคือ P (A และ B) เท่ากับผลบวกของความน่าจะเป็นของสองผลลัพธ์เหล่านั้น

T F 16. เหตุการณ์ที่มีความอิสระกันไม่สามารถเป็น mutually exclusive

T F 17. การแสดง X = จำนวนหัวในการโยนเหรียญสมดุลซ้ำ ๆ กัน จะเท่ากับตัวแปรเชิงสุ่มแบบ hypergeometric

T **F** 18. การทดลองทวินามด้วย $n = 3$ และ $p = .7$ $(.3)^3 + 3(.3)^2(.7) + 3(.3)(.7)^2 + .7^3 = 1$

T F 19. ในทางสถิติ เกมนั้นจะยุติธรรมได้ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์ต้องเป็นศูนย์

T F 20. เส้นโค้งปกติมีความสำคัญในทางสถิติ เพราะว่ามันเกิดขึ้นบ่อย ๆ ในธรรมชาติ

T F 21. สำหรับ X มีการแจกแจงปกติ มีมัชฌิมเลขคณิต 10;$P(X < 10) = P(X \leq 10), = 1/2$

T F 22. เราทราบแล้วว่า เส้นโค้งปกติมาตรฐานสมมาตร รอบ $Z = 1$ ดังนั้น พื้นที่ด้านซ้ายและขวาต่างเท่ากับ 0.5000

T **F** 23. สำหรับการแจกแจงปกติมีมัชฌิมเลขคณิต 10.0 ส่วนเบี่ยนเบนมาตรฐาน 1.0 เปอร์เซ็นต์ของครั้งมากกว่า 15.0 จำเป็นต้องเป็น 0

T F 24. การคำนวณพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานเหนือ 2.5 ให้ดู $Z = 2.50$ ในตารางแล้วบวกพื้นที่ 0.5000 ที่กำหนดให้

T F 25. สำหรับการแจกแจงทวินาม มี $n = 25$ และ $p= .5$ การเข้าถึงที่ดีที่สุดเพื่อที่จะตอบ $P(12 < X < 15)$ ต้องใช้การประมาณเชิงปกติ (normal approximation)

T F 26. การประเมินเชิงปกติเหมาะสำหรับ X เป็นการแจกแจงทวินามมี $n = 30$, $p = .2$

T F 27. สำหรับ X เป็นการแจกแจงทวินาม มี $n = 100$, $p = .7$ แล้ว P (X = 65 หรือ 66 หรือ ..... หรือ 100) ประมาณด้วยตัวแปรเชิงสุ่มปกติโดยการคำนวณ

$$P(X \geqslant 65) \doteq P\left(Z \geqslant \frac{(65 + .5) - 70}{\sqrt{100 \times .7 \times .3}}\right)$$

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. เครื่องหมายของเหตุการณ์ไม่ได้รวม.–

(1) complement $\bar{A}$ (2) union, A or B (3) กลับ 1/B

(4) แบบมีเงื่อนไข A/B (5) ถูกทั้งหมด

2. วิธีการธรรมดาเพื่อที่จะแสดงเหตุการณ์เชิงเดียวลงบน space ไม่ได้รวม.–

(1) แผนภาพเวน (2) การจัดหมู่ (3) tree diagrams

(4) ordered pairs และ rectangular coordinates (5) ไม่มีข้อใดถูก

3. ความน่าจะเป็นสำหรับเหตุการณ์เชิงเดียวสามารถคำนวณหาได้โดย.–

(1) การกำหนดเหตุการณ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน (2) เดา

(3) การทำการทดลอง (4) ถูกทั้งหมด (5) ผิดทั้งหมด

4. ข้อไหนที่ไม่เป็นจริงเกี่ยวกับปัญหาความน่าจะเป็น

(1) ข้อเสนอแนะให้อ่านปัญหามากกว่าหนึ่งครั้ง

(2) แผนภาพหรือสิ่งที่ช่วยให้มองเห็นได้ สามารถช่วยให้เงื่อนไขของปัญหากระจ่างขึ้น

(3) การเข้าถึงเหตุผลสามารถใช้แทนหรือตรวจสอบกฎของต้นฉบับ

(4) เหตุผลธรรมดาสำหรับคำตอบที่ไม่ถูกต้อง คือว่า การกำหนดข่าวสารที่ไม่พอเพียงเพื่อแก้ปัญหา

(5) ผิดทั้งหมด

5. หมายเลขสูงสุดของแผ่นป้ายรถยนต์สามารถประกอบด้วยเลขหกตัวคือ

(1) 6.5.4.3.2.1 (2) 10.9.8.7.6.5 (3) 999,999

(4) ผิดทั้งหมด (5) ถูกทั้งหมด

6. ถ้าหากว่าอัตราส่วนที่ท่านจะผ่านวิชานี้เป็น 1 : 9 แล้วโอกาสที่ท่านจะผ่าน คือ.–

(1) 1/10 (2) 1/9 (3) 8/9 (4) 9/10 (5) 10/9

7. ถ้าหากว่า P (A) = .3 และ P (B) = .5 แล้วสำหรับ P (A หรือ B) เท่ากับ .8 ต้องการว่า

(1) A และ B = $\varnothing$ (2) A,B เป็น mutually exclusive

(3) A,B ไม่มีเหตุการณ์ร่วมกัน (4) ถูกทั้งหมด (5) ผิดทั้งหมด

8. ในการทอดลูกเต๋าสองลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมนอกเหนือจาก 11 คือ

(1) 1/36 (2) 2/36 (3) 34/36 (4) 35/36 (5) 3/36

9. ถ้าหากว่า P (A/B) = .6 และ P(B) = .8 แล้ว

(1) A,B เป็น mutually exclusive (2) P (A) < .4

(3) P ($\bar{A}$/B) = .4 (4) P (A และ B) = .6/.8 (5) P (A และ B) = 0

10. กำหนดให้ A = (A และ B) + (A และ $\bar{B}$), P (B) = .5, P (A/B) = .8, P (A/$\bar{B}$) = .6 แล้ว P (A และ B) เท่ากับ

(1) 0.3 (2) .4 (3) .48 (4) .5 (5) .1

11. การแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง X ต้องสอดคล้องกันทุกข้อ แต่มีอยู่ข้อหนึ่งดังนี้.–

(1) X ต้องเป็นหมายเลขทั้งหมด (0, 1, 2, ฯลฯ)

(2) $0 \le P(X) \le 1$ สำหรับ X ทั้งหมด (3) $\sum_{\text{ทุก}x} P(X) = 1$

(4) $P(X) \neq 0$ สำหรับ X มีค่ามาก (5) P (X) = 0 สำหรับ X มีค่าน้อย

12. สำหรับ A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระกันโดย P (A) = .5 และ P (B) = .4, P ($\bar{A}$และ $\bar{B}$) เท่ากับ

(1) .2 (2) .3 (3) .4 (4) .5 (5) .6

13. การแจกแจงทวินามมี n = 2, p = 1/2 แล้ว P (1/2 < X < 1/4) เท่ากับ

(1) 0 (2) 1/2 (3) 1 (4) P (1) (5) 1/4

14. กำหนดให้ว่า X มีการแจกแจงทวินาม

X	P (X)
0	1/4
1	1/2
2	1/4

แล้ว p เท่ากับ

(1) 1/8 (2) .2 (3) 1/4 (4) 1/2 (5) 1

15. จากโจทย์ข้อ 14. ค่ามัชฌิมเลขคณิต คือ

(1) 1/4 (2) 1/2 (3) 1 (4) 2 (5) 1.5

16. จากโจทย์ข้อ 14. ค่าส่วนเบี่ยนเบนมาตรฐาน คือ.–

(1) 1/4 (2) 1/2 (3) $\sqrt{1/2}$ (4) 1 (5) $\sqrt{1.5}$

17. ตัวแปรเชิงสุ่มแบบ hypergeometric มี a= 2, b = 3 และ n = 3 แล้วสำหรับ P (X)

(1) P(0) = 2 (2) P (1) = P (2)(3) $\mu = 3$ (4) P (3) = 0 (5) ผิดทั้งหมด

18. ตัวแปรเชิงสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องกับแบบต่อเนื่องแตกต่างกันในที่ซึ่ง.–

(1) ตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องมีการแจกแจงความน่าจะเป็น

(2) ตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องยอมให้หมายเลขทศนิยมเป็นค่าตัวแปร

(3) ตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่องไม่มีค่าเป็นศูนย์ที่ค่า X เดี่ยว ๆ

(4) ตัวแปรเชิงสุ่มต่อเนื่องมีความน่าจะเป็นไม่เป็นศูนย์ตลอดช่วง

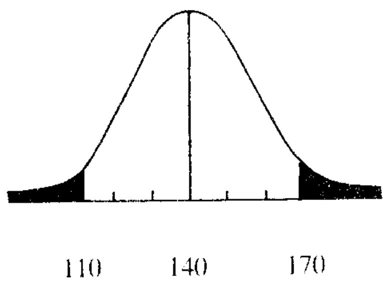
(5) ถูกทั้งหมด

19. การแจกแจงปกติ ความน่าจะเป็นที่ค่าจะตกอยู่ภายในระยะทางของสองส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมัชฌิมเลขคณิต เป็น.–

(1) 0.4772 (2) 0.9544 (3) .9772 (4) 0.990 (5)1.000

20. ในเส้นโค้งรูประฆัง ค่าไหนที่เป็นการประมาณค่าที่ดีที่สุดสำหรับ σ

(1) 5 (2) 10 (3) 15 (4) 20 (5) 30



21. ข้อใดที่ไม่เป็นจริงเกี่ยวกับตาราง Z

(1) ค่า Z อย่างเช่น –4.1 และ 3.2 อ่านพื้นที่ได้ 0.5000

(2) อ่านพื้นที่ (มาตราวัดความน่าจะเป็น) ได้จากขอบของตาราง

(3) เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 มีพื้นที่ = .75 คำนวณหาได้เหมือนค่า Z ซึ่งรวมพื้นที่ 0.25 เหนือมัชฌิมเลขคณิต

(4) ความน่าจะเป็นสำหรับการประมาณเชิงปกติอ่านได้จากตาราง Z

(5) ตาราง Z คำนวณหาได้จากตัวแปรเชิงสุ่ม Z ที่มีมัชฌิมเลขคณิตเป็นศูนย์ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นหนึ่ง

22. พิจารณาสองการแจกแจงปกติ I N $(62, 10^2)$ และ II N $(60, 12^2)$ ข้อใดเป็นจริง

(1) ค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 สำหรับ II มีจำนวนมากกว่า I

(2) I มีการแจกแจงกระจายกว้างกว่า

(3) ทั้งสองการแจกแจงต้องการแปลงรูปเป็นแบบปกติมาตรฐานสำหรับคำนวณหาความน่าจะเป็น

(4) $P(X < 60)$ ของ I มีค่ามากกว่าของ II

(5) ไม่มีข้อใดถูก

23. การประมาณเชิงปกติต่อความน่าจะเป็นเชิงทวินาม.–
(1) ไม่ควรใช้ถ้าสามารถใช้ตารางทวินาม
(2) ดีกว่าขณะ n เพิ่มขึ้น สำหรับค่าใด ๆ ของ p
(3) ให้ค่าใกล้เคียงถูกต้องกว่าขณะการแจกแจงทวินามกลายมาเป็นรูปสมมาตรยิ่งขึ้น
(4) ถูกทั้งหมด
(5) ผิดทั้งหมด

24. สำหรับการประมาณเชิงปกติของการแจกแจงความน่าจะเป็นทวินาม.–
(1) มัชฌิมเลขคณิตคือรูทสอง npq
(2) np และ nq ควรมีค่ามากกว่า 10
(3) 26 หรือน้อยกว่า หมายความถึงการรวมสิ่งที่เป็นไปได้ของ 25, 24, 23 ....1, 0
(4) เป็นการแก้ไขความถูกต้องสำหรับการประมาณการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องด้วยการแจกแจงแบบต่อเนื่อง
(5) ถูกทั้งหมด

25. การแจกแจง IQ สำหรับนักเรียนนายทหารเข้ารายการฝึกทางทะเล มีการแจงปกติ มีค่ามัชฌิมเลขคณิต 112.0 ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2.0 นักเรียนนายทหาร 100 คนต่อไปในรายการนี้ จำนวนคาดหวังที่จะมี IQ 114.0 หรือสูงกว่า คือ

(1) 0 (2) 2 (3) 8 (4) 16 (5) 10

26. สำหรับการแจกแจงปกติสะสม $\varnothing$ (Z)

(1) $\varnothing$ (o) = .5000 (2) $\varnothing(-2) = 1 - \varnothing(2)$
(3) $\varnothing$ (Zo) = 0.75 มีความหมายเหมือน P (Z < Zo) = .7500
(4) ถูกทั้งหมด (5) ผิดทั้งหมด

27. กำหนดให้การแจกแจงทวินามมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 20 และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4 จงคำนวณหาค่า n

(1) 4 (2) 16 (3) 20 (4) 25 (5) 100

28. จากโจทย์ข้อที่ 27 จงคำนวณหาค่า p

(1) 1/5 (2) 4/5 (3) 1/100 (4) 99/100 (5) $1/\sqrt{5}$

29. ถ้าหากว่าเลือกตัวอักษรหนึ่งตัวโดยสุ่มจากคำ MELEE และหนึ่งตัวจากคำ SEED จงหาความน่าจะเป็นที่สองตัวอักษรเหมือนกัน

(1) 1/10 (2) 3/20 (3) 1/20 (4) 3/10 (5) ผิดทั้งหมด

30. การทดลองแบบทวินาม 10 ครั้ง p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในหนึ่งครั้ง และ q เป็นความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จในหนึ่งครั้ง $\binom{10}{4} p^4 q^6$ คือความน่าจะเป็นของ

(1) ไม่สำเร็จ 4 ครั้ง (2) ไม่สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง (3) สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง
(4) สำเร็จ 4 ครั้ง (5) สำเร็จอย่างมาก 5 ครั้ง

31. จากโจทย์ข้อที่ 30 $\binom{10}{4} q^4 p^6$ คือความน่าจะเป็นของ

(1) ไม่สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง (2) ไม่สำเร็จ 4 ครั้ง (3) สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง
(4) สำเร็จ 4 ครั้ง (5) สำเร็จอย่างมาก 4 ครั้ง

32. จากโจทย์ข้อที่ 30 $\sum_{r=4}^{10} \binom{10}{r} p^r q^{10-r}$ เป็นความน่าจะเป็นของ

(1) สำเร็จอย่างมาก 4 ครั้ง (2) สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง (3) สำเร็จ 4 ครั้ง
(4) ไม่สำเร็จ 4 ครั้ง (5) ไม่สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง

33. จากโจทย์ข้อที่ 30 $\sum_{r=0}^{4} \binom{10}{r} p^r q^{10-r}$ คือความน่าจะเป็นของ

(1) สำเร็จอย่างมาก 4 ครั้ง (2) สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง (3) สำเร็จ 4 ครั้ง
(4) ไม่สำเร็จ 4 ครั้ง (5) ไม่สำเร็จอย่างน้อย 4 ครั้ง

34. กำหนดให้ตารางต่อไปนี้

r \ g	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

สมมติว่า outcomes ทั้งหมดมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน จงคำนวณหา $p(r = g)$

(1) 1/4 (2) 1/3 (3) 3/8 (4) 2/3 (5) 1/2

35. จากโจทย์ข้อ 34. จงคำนวณหา $p(r + g > 3)$

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 2/3 (4) 1/9 (5) 3/8

36. จากโจทย์ข้อที่ 34. จงคำนวณหา $p(r > g)$

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 2/3 (4) 1/9 (5) 3/8

37. จากโจทย์ข้อที่ 34. จงคำนวณหา $p(r \neq g)$

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 2/3 (4) 1/9 (5) 3/8

38. จากโจทย์ข้อที่ 34. จงคำนวณหา p (r = g^2)

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 2/3 (4) 1/9 (5) 3/8

39. จากโจทย์ข้อที่ 34. จงคำนวณหา p (r + g เป็นเลขคู่)

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 0 (4) 4/9 (5) 5/9

40. จากโจทย์ข้อที่ 34. จงคำนวณหา p (r + g เป็นเลขคี่)

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 0 (4) 4/9 (5) 5/9

41. จากโจทย์ข้อที่ 34. จงคำนวณหา p (r + g < 2)

(1) 1/3 (2) 1/2 (3) 0 (4) 4/9 (5) 5/9

42. พื้นที่ระหว่าง Z = o กับ Z = 1.645 เท่ากับ 0.45 ในเส้นโค้งปกติที่มีการแจกแจงข้อมูล 2,000 ข้อมูล จงคำนวณหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งต่ำกว่า Z = 1.645 คือ

(1) 90% (2) 95% (3) 97.5% (4) 98% (5) 99%

43. จากโจทย์ข้อที่ 42. จงคำนวณหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งต่ำกว่า Z =-1.645 คือ

(1) 90% (2) 95% (3) 97.5% (4) 99% (5) 5%

44. จากโจทย์ข้อที่ 42. จำนวนข้อมูลที่คาดหวังอยู่ระหว่าง Z =-1.645 กับ Z = 1.645 เท่ากับ

(1) 100 ข้อมูล (2) 1,900 ข้อมูล (3) 200 ข้อมูล

(4) 1,800 ข้อมูล (5) 1,950 ข้อมูล

45 จากโจทย์ข้อที่ 42. จำนวนข้อมูลที่คาดหวังอยู่เหนือ Z = −1.645 เท่ากับ

(1) 100 ข้อมูล (2) 1,900 ข้อมูล (3) 1,800 ข้อมูล

(4) 1,950 ข้อมูล (5) 200 ข้อมูล

46. จากโจทย์ข้อที่ 42. จงคำนวณหาพื้นที่เหนือ Z =1.645 กับพื้นที่ใต้ Z = −1.645 รวมกันเท่ากับ

(1) 5% (2) 10% (3) 90% (4) 95% (5) 97.5%

47. จากโจทย์ข้อที่ 42. จำนวนข้อมูลที่คาดหวังเหนือ Z = 1.645 เท่ากับ

(1) 100 ข้อมูล (2) 200 ข้อมูล (3) 1,700 ข้อมูล

(4) 1,800 ข้อมูล (5) 1,900 ข้อมูล

48. โยนเหรียญสมดุลอันหนึ่ง เราพูดว่าความน่าจะเป็นของเหรียญที่จะปรากฏเป็นหัว คือ .50 นี้เป็นตัวอย่างของ

(1) ความน่าจะเป็นที่ตั้งขึ้น (2) ความน่าจะเป็นในทางทฤษฎี

(3) ทฤษฎีขีดจำกัดเข้าสู่ส่วนกลาง (4) (ทฤษฎีเชิงซ้อน)

(5) คุณสมบัติความน่าจะเป็น

49. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่ง อาจคิดให้เป็นอัตราส่วนของครั้งที่เหตุการณ์เกิดขึ้นใน

(1) อนุกรมอนันต์ของการทดลอง (trials) (2) ตัวอย่างใหญ่ของการทดลอง (trials)

(3) การทดลองอย่างใดอย่างหนึ่ง (4) การทดลองเฉพาะ

(5) ตัวอย่างเล็กของการทดลอง (trials)

50. ความน่าจะเป็นของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง ของหลาย ๆ เหตุการณ์ คือ ผลบวกของแต่ละความน่าจะเป็นเมื่อ

(1) เหตุการณ์เหล่านั้นเป็นอิสระกัน

(2) เหตุการณ์เหล่านั้นเป็น mutually exclusive

(3) การเลือกตัวอย่างโดยวิธีสุ่ม

(4) ผลบวกไม่น้อยกว่าศูนย์

(5) ผลบวกไม่มากกว่าหนึ่ง

51. ความน่าจะเป็นของการเกิดร่วมกันของหลาย ๆ เหตุการณ์ คือ

(1) ผลบวกของความน่าจะเป็นของหลาย ๆ เหตุการณ์

(2) ผลบวกของความน่าจะเป็นของหลาย ๆ เหตุการณ์เมื่อเหตุการณ์เป็นอิสระกัน

(3) ผลคูณของความน่าจะเป็นของหลาย ๆ เหตุการณ์ เมื่อเหตุการณ์เป็น mutually exclusive

(4) ผลคูณของความน่าจะเป็นของหลาย ๆ เหตุการณ์ เมื่อเหตุการณ์เป็นอิสระกัน

(5) ข้อ (3) และข้อ (4) ถูก

52. สองเหตุการณ์เป็นอิสระกัน ถ้า.–

(1) เหตุการณ์หนึ่งเป็น Complement ของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

(2) สองเหตุการณ์เป็น mutually exclusive

(3) ฐานะของเหตุการณ์หนึ่งไม่มีความสัมพันธ์กับฐานะของอีกเหตุการณ์หนึ่ง

(4) เหตุการณ์หนึ่งต้องเกิดขึ้น ถ้าอีกเหตุการณ์หนึ่งไม่เกิดขึ้น

(5) ผลคูณของสองเหตุการณ์มีค่าเท่ากับหนึ่ง

53. ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนน

คะแนน	ความถี่
60–69	3
50–59	5
40–49	12
30–39	6
20–29	4
	30

ถ้าเลือกคะแนนโดยวิธีสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะเป็น 60 หรือมากกว่า คือ

(1) 10/30 (2) 8/30 (3) 3/30 (4) 1/30 (5) 5/30

54. จากโจทย์ข้อ 53. ถ้าเลือกคะแนนโดยวิธีสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะเป็น 50 หรือมากกว่า คือ

(1) 10/30 (2) 8/30 (3) 3/30 (4) 1/30 (5) 5/30

55. จากโจทย์ข้อที่ 53. ถ้าเลือกคะแนนโดยวิธีสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะเป็นระหว่าง 30 กับ 59 คือ

(1) 27/30 (2) 23/30 (3) 11/30 (4) 7/30 (5) 9/30

56. จากโจทย์ข้อ 53. ถ้าเลือกคะแนนโดยวิธีสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะเป็นคะแนนมากกว่า 59 หรือต่ำกว่า 30 คือ

(1) 23/30 (2) 11/30 (3) 9/30 (4) 7/30 (5) 4/30

57. เส้นโค้งปกติทั้งหมด

(1) มีฐานนิยมเดียวเท่านั้น (2) เป็นรูปสมมาตร

(3) เป็น asymptotic กับแกนนอน

(4) มีคุณสมบัติดังข้างต้นทั้งหมด (ทั้งสามข้อ)

(5) ไม่มีคุณสมบัติดังข้างต้นทั้งหมด (ทั้งสามข้อ)

58. ข้อใดที่ไม่เป็นคุณสมบัติของเส้นโค้งปกติ

(1) ต่อเนื่องกัน (2) ค่ามัชฌิมเลขคณิตอาจมีค่าต่าง ๆ กัน

(3) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานอาจมีค่าต่าง ๆ กัน

(4) ไม่มีข้อใดเป็นคุณสมบัติของเส้นโค้งปกติ

(5) ทุกข้อเป็นคุณสมบัติของเส้นโค้งปกติ

59. การเริ่มต้นเนื้อหาของทฤษฎีทางสถิติเกิดขึ้นในปี ค.ศ.

(1) 1500 (2) 1600 (3) 1700 (4) 1800 (5) 1900

60. ความเชื่อถือสำหรับการกำหนดเริ่มแรกสุดของเส้นโค้งปกติเป็นของ

(1) Gauss (2) La Place (3) Quetelet (4) De Meivre (5) Galton

61. เส้นโค้งปกติมีประโยชน์เหมือนตัวแบบ โดยเฉพาะสำหรับ.–

(1) ข้อมูลในที่ซึ่งมัชฌิมเลขคณิตกับมัธยฐานต่างกัน

(2) หลาย ๆ ประชากรของข้อมูลจิตวิทยากับการศึกษา ฯลฯ

(3) การแจกแจงของตัวสถิติของตัวอย่าง (sample statistics)

(4) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2)

(5) ทั้งข้อ (2) และข้อ (3)

62. เส้นโค้งปกติอาจแปลความหมายได้เหมือน.–

(1) การแจกแจงความถี่สัมพัทธ์ (2) การแจกแจงความน่าจะเป็น

(3) การแจกแจงความถี่สะสม (4) ทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2)

(5) ทั้งข้อ (1) และ ข้อ (3)

63. ข้อไหนไม่จำเป็นเพื่อที่จะคำนวณคะแนน Z (Z – score)

(1) มัชฌิมเลขคณิต (2) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (3) คะแนนดิบ

(4) ทั้งหมดเป็นสิ่งจำเป็น (5) ทั้งหมดไม่เป็นสิ่งจำเป็น

64. สูตรไหนเป็นสูตรไม่ถูกต้องสำหรับคะแนน Z (Z–score) (3) $(X - \mu)/\sigma$

(1) X/S (2) $(X - \bar{X})/s$

(4) ทั้งข้อ (2) และข้อ (3) เป็นสูตรที่ถูกต้อง

(5) ทั้งข้อ (1) ข้อ (2) และ ข้อ (3) เป็นสูตรที่ถูกต้อง

65. การแจกแจงหนึ่งมีมัชฌิมเลขคณิต 60 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8 สำหรับคะแนน 72 คะแนน Z

(1) เป็น + 12 (2) อยู่ระหว่าง 0 กับ + 1 (3) เป็น + 1.5

(4) อยู่ระหว่าง – 1 กับ 0

(5) ไม่สามารถคำนวณได้โดยปราศจากข้อความเพิ่มเติม

66. คะแนน Z ในการแจกแจงที่กำหนดให้เป็น –.5 ถ้าหากว่าส่วนเฉลี่ยเลขคณิตของการแจกแจงนี้เป็น 130 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 20 คะแนนดิบที่เท่ากันในการแจกแจง คือ

(1) 129.5 (2) 120 (3) 110 (4) 140

(5) ไม่สามารถคำนวณได้โดยปราศจากข้อความเพิ่มเติม

67. ถ้าการดำเนินการเป็นการแจกแจงปกติ และค่าของ A ถูกกำหนดต่อค่าเหล่านั้น ซึ่งมีคะแนนอยู่ที่ Z = +1 หรือดีกว่า จะมีประมาณอัตราส่วนเท่าไรของนักศึกษาเพื่อที่จะหาค่าของ A เท่าที่เราคาดหวัง

(1) 32% (2) 16% (3) 5% (4) $2\frac{1}{2}$% (5) 68%

68. ในการแจกแจงปกติ จะมีประมาณกี่เปอร์เซ็นต์ของคะแนนที่เราคาดหวังจะตกเหนือ Z = − 3

(1) มากกว่า 99% (2) 97.5% (3) 95%

(4) 84% (5) 99%

69. ในการแจกแจงปกติ จะมีประมาณกี่เปอร์เซ็นต์ของคะแนนที่เราคาดหวังจะตกต่ำกว่า Z = + 2

(1) 99% (2) 97.5% (3) 99.5% (4) 90% (5) 84%

70. ค่าไหนของคะแนน Z ที่ใกล้เคียงที่สุดกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 98 ของการแจกแจงปกติ

(1) + 1 (2) + 1.5 (3) + 2 (4) + 2.5 (5) + 3

71. ถ้าเซทหนึ่งของข้อมูลแสดงออกในรูปของคะแนน Z มัธยฐานของคะแนนอาจเป็น

(1) ค่าลบ (2) ค่าบวก (3) ศูนย์

(4) ถูกทั้งหมด (5) ไม่มีข้อใดถูก

72. พื้นที่ระหว่างมัชฌิมเลขคณิตกับ Z = −.20 เท่ากับ .08 ในเส้นโค้งปกติ พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติต่ำกว่า Z = −.20 คือ

(1) 58% (2) 42% (3) 30% (4) 20% (5) 8%

73. จากโจทย์ข้อ 72. พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติระหว่างส่วนเฉลี่ยเลขคณิต กับ Z = + .20 คือ

(1) 42% (2) 20% (3) 16% (4) 8% (5) 2%

74. จากโจทย์ข้อ 72. พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติเหนือ Z = −.20 คือ

(1) 40% (2) 42% (3) 58% (4) 70% (5) 92%

75. ถ้ามีการแจกแจงข้อมูล 200 ข้อมูลอย่างปกติ จำนวนผู้ซึ่งคาดหวัง กับข้อมูลเหนือ คือ Z =−.20

(1) 80 (2) 84 (3) 116 (4) 140 (5) 184

76. ถ้ามีการแจกแจงข้อมูล 200 ข้อมูลอย่างปกติ จำนวนผู้ซึ่งคาดหวังกับข้อมูลระหว่าง $Z = -.20$ กับ $Z = +.20$ คือ

(1) 40 (2) 32 (3) 16 (4) 8 (5) 4

77. การทดสอบ AGCT เกี่ยวกับความสามารถพิเศษ มีมัชฌิมเลขคณิต 100 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 และการแจกแจงของคะแนนจำเป็นจะต้องเป็นปกติ จะมีกี่เปอร์เซ็นต์ของคะแนน AGCT ควรจะตกต่ำกว่า 140

(1) 68% (2) 84% (3) 95% (4) 97.5% (5) 99%

78. จากโจทย์ข้อ 77. จะมีกี่เปอร์เซ็นต์ของคะแนน AGCT ควรจะตกอยู่ภายใน 80–120

(1) 50% (2) 68% (3) 84% (4) 95% (5) 99%

79. จากโจทย์ข้อ 77. ประมาณกี่เปอร์เซ็นต์ของคะแนน AGCT ควรจะตกอยู่ระหว่าง 60 กับ 80

(1) 16% (2) 14% (3) 11% (4) 8% (5) 5%

80. จากหลักความจริงที่ว่า ประมาณ 7% ของพื้นที่ของเส้นโค้งปกติวางอยู่เหนือ $Z = +1.5$ คะแนน Z จะเป็นเท่าไร ซึ่ง 93% ของคะแนนในการแจกแจงปกติจะตกอยู่เหนือกว่า

(1) +1.5 (2) +.5 (3) −.5 (4) −1.5 (5) −2

81. จากโจทย์ข้อ 80. ขีดจำกัดคะแนน Z เป็นเท่าไร ซึ่ง 86% ของคะแนนอาจตกอยู่ภายใต้

(1) ต่ำกว่า $Z = -1.5$ (2) ต่ำกว่า $Z = +1.5$ (3) เหนือกว่า $Z = -1.5$

(4) เหนือกว่า $Z = +1.5$

(5) ระหว่าง $Z = -1.5$ กับ $Z = +1.5$

82. จากโจทย์ข้อ 80. ถ้าหากว่าการแจกแจงคะแนน AGCT เป็นไปอย่างปกติ มีมัชฌิมเลขคณิต 100 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 คะแนน AGCT จะเป็นเท่าไร ซึ่ง 7% ของผู้สอบอาจเกิน

(1) 70 (2) 80 (3) 120 (4) 130 (5) 140

83. จากโจทย์ข้อ 80. ถ้าหากว่าการแจกแจงคะแนน AGCT เป็นไปอย่างปกติ มีมัชฌิมเลขคณิต 100 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 คะแนน AGCT ซึ่งสมนัยกับ P_7 เป็นเท่าไร

(1) 60 (2) 70 (3) 80 (4) 90 (5) 95

84. มัชฌิมเลขคณิตของเซทหนึ่งของคะแนน Z คือ

(1) −1 (2) 0 (3) 1

(4) ขึ้นอยู่กับรูปร่างของการแจกแจง

(5) ไม่สามารถหาคำตอบได้เพราะว่าเนื้อหาไม่เพียงพอ

85. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเซทหนึ่งของคะแนน Z คือ

(1) −1 (2) 0 (3) 1

(4) ขึ้นอยู่กับรูปร่างของการแจกแจง

(5) ไม่สามารถหาคำตอบได้เพราะว่าเนื้อหาไม่เพียงพอ

86. มีสามข้อมูลในการแจกแจงหนึ่งเป็น 20, 25, 35 คะแนน Z ที่เท่ากับสองข้อมูลแรก คือ −1 และ $-\frac{1}{2}$ ตามลำดับ คะแนน Z ที่เท่ากับข้อมูลตัวที่สามคือ

(1) 0 (2) $+\frac{1}{2}$ (3) +1 (4) $1\frac{1}{2}$

(5) คำนวณหาไม่ได้

87. ถ้าหากว่าเราไม่ทราบรูปร่างของการแจกแจง

(1) คะแนน Z สามารถคำนวณหาได้จากตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูลหรือคะแนน

(2) ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ของข้อมูลหรือคะแนนสามารถคำนวณหาได้จากตำแหน่งข้อมูล หรือคะแนน Z ของมัน

(3) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) เป็นจริง

(4) ไม่ข้อ (1) หรือข้อ (2) เป็นจริงอย่างหนึ่ง

(5) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ไม่เป็นจริง

88. ข้อมูลหนึ่งของ 32 น่าจะใช้แทนการดำเนินการที่เลวในการแจกแจงที่มีลักษณะของเซท ข้อใด

(1) $\bar{X} = 50,\ s = 20$ (2) $\bar{X} = 40,\ s = 2$ (3) $\bar{X} = 42,\ s = 10$

(4) $\bar{X} = 45,\ s = 13$ (5) $\bar{X} = 60,\ s = 30$

89. ข้อใดที่ไม่เป็นข้อเสียของคะแนน Z

(1) ประมาณครึ่งหนึ่งของมูลค่าจะเป็นลบ

(2) ต้องการทศนิยมเพื่อให้รู้ลักษณะแตกต่างได้อย่างพอเพียงระหว่างค่า

(3) คะแนน Z ยังไม่มีความหมายโดยตรง

(4) คะแนน Z ตอบยากสำหรับการติดต่อกับสาธารณะสามัญ

(5) เป็นจริงทุกข้อ

90. ถ้าหากว่าอ้างถึงคะแนน T ทุกคนควรจะหวังว่า

(1) มีมัชฌิมเลขคณิต 50 (2) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10(3) การแจกแจงเป็นปกติ

(4) เป็นจริงทุกข้อ (5) ไม่เป็นจริงทุกข้อ

91. คะแนน CEEB มีมัชฌิมเลขคณิต 500 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 100 เกี่ยวกับสเกลนี้

คะแนน 450 มีค่าเท่ากับของ.–

(1) $Z = -1$ (2) $Z = -\frac{1}{2}$ (3) $Z = 0$ (4) $Z = \frac{1}{2}$

(5) ไม่มีข้อใดถูก

92. สเกล IQ ของ Wechsler มีส่วนเฉลี่ยเลขคณิต 100 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 คะแนน Z ที่เท่ากับ IQ 130 คือ.–

(1) +1 (2) $+1\frac{1}{2}$ (3) +2 (4) +3

(5) ไม่สามารถคำนวณได้จากเนื้อหาที่กำหนดให้

93. คะแนน 85 จากการทดสอบในที่ซึ่งมี $\bar{X} = 100$ และ $s = 15$ คะแนนที่เท่ากันเกี่ยวกับคะแนนซึ่ง $\bar{X} = 50$ และ $s = 10$ คือ

(1) 35 (2) 40 (3) 45 (4) 50

(5) ไม่มีข้อใดถูก

94. คะแนน 85 จากการทดสอบในที่ซึ่งมี $\bar{X} = 500$ และ $s = 100$ คะแนนที่เท่ากันเกี่ยวกับคะแนนซึ่งมี $\bar{X} = 100$ และ $s = 10$ คือ

(1) 105 (2) 110 (3) 115 (4) 120

(5) ไม่มีข้อใดถูก

95. สูตรสำหรับคำนวณหาคะแนนในการแจกแจงใหม่ ซึ่งเท่ากับคะแนนที่กำหนดให้ในการแจกแจงอื่นขึ้นอยู่กับหลักซึ่งสองข้อมูลจะถูกพิจารณาให้เท่ากัน ถ้า.

(1) ตำแหน่งคะแนน Z ของคะแนนเหมือนกัน

(2) ตำแหน่งคะแนน Z ของคะแนนเหมือนกันและการแจกแจงเป็นปกติ

(3) เปอร์เซ็นต์เหมือนกันของคะแนนตกอยู่ใต้แต่ละการแจกแจงในการแจกแจงตามลำดับของคะแนน

(4) ทั้งหมดเป็นจริง (5) ทั้งหมดไม่เป็นจริง

96. กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น คือ

(1) เส้นหนึ่ง

(2) เส้นหนึ่งซึ่งอาจโค้ง แต่ในทิศทางเดียวเท่านั้น

(3) เส้นตรงเส้นหนึ่ง (4) เส้นโค้ง (5) ไม่มีข้อใดถูก

97. ชนิดไหนของคะแนนที่ได้มา (derived score) โดยจำเป็นที่การแปลงรูปเชิงเส้นของคะแนนดิบเดิม

(1) คะแนนมาตรฐาน (2) ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

(3) คะแนนมาตรฐานปกติ (4) ถูกทั้งหมด (5) ผิดทั้งหมด

98. เส้นตรงเส้นหนึ่งอาจใช้แทนผลของ

(1) การบวกค่าคงที่กัน, หรือลบค่าคงที่ออกจากแต่ละข้อมูลในการแจกแจง

(2) การคูณหรือการหารแต่ละข้อมูลในการแจกแจงด้วยค่าคงที่

(3) การเปลี่ยนคะแนนดิบกับคะแนนมาตรฐาน

(4) ถูกทั้งหมด (5) ผิดทั้งหมด

99. ในการแจกแจงปกติ ระยะทางระหว่างขอบเขต (interscope distance) ควร.-

(1) มากที่สุดสำหรับช่วงระหว่าง $P_5 - P_{10}$

(2) มากที่สุดสำหรับช่วงระหว่าง $P_{45} - P_{50}$

(3) มากที่สุดสำหรับช่วงระหว่าง $P_{50} - P_{55}$

(4) มากที่สุดสำหรับช่วงระหว่าง $P_{75} - P_{80}$

(5) เหมือนกันหมดสำหรับช่วงระหว่างข้างต้นทั้ง 4 ข้อ

100. สำหรับการแจกแจงปกติ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์.-

(1) มีแนวโน้มเข้าสู่ผลต่างที่คิดว่าใหญ่โตเกินความเป็นจริงระหว่างค่าที่อยู่ปลายข้างต่ำของสเกล

(2) มีแนวโน้มเข้าสู่ผลต่างที่คิดว่าใหญ่โตเกินความเป็นจริงระหว่างค่าที่อยู่ปลายข้างสูงของสเกล

(3) มีแนวโน้มเข้าสู่ผลต่างที่คิดว่าใหญ่โตเกินความเป็นจริงระหว่างค่าที่อยู่ส่วนกลางของสเกล

(4) เสนอผลต่างระหว่างคะแนนหรือข้อมูลที่เท่ากันโดยตลอดของสเกล

(5) ข้อ (1) และข้อ (2) ถูก

101. อาจารย์คนหนึ่งมีความประสงค์เพื่อที่จะเปรียบเทียบความสามารถพิเศษเฉลี่ยของนักศึกษาของเขาด้วยการแจกแจงของกลุ่มที่เกี่ยวข้อง วิธีที่ต้องการอย่างน้อยที่สุดเพื่อที่จะทำนี้คือ ต้องคำนวณ

(1) มัชฌิมเลขคณิตของคะแนนดิบของนักศึกษาของเขา

(2) มัชฌิมเลขคณิตของคะแนนมาตรฐานของนักศึกษาของเขา

(3) มัชฌิมเลขคณิตของตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ของนักศึกษาของเขา

(4) มัธยฐานของตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ของนักศึกษาของเขา

(5) มัธยฐานของคะแนนดิบของนักศึกษาของเขา

102. คะแนนมาตรฐานที่คำนวณได้มาจากการแจกแจงต่าง ๆ อาจเปรียบเทียบได้.–

(1) ถ้ากลุ่ม norm สามารถเปรียบเทียบได้

(2) ถ้ารูปร่างของการแจกแจงคล้ายคลึงกัน

(3) ไม่เป็นไปตามลำดับของกลุ่ม norm และรูปร่างของการแจกแจง

(4) ทั้งข้อ (1) และข้อ (3) เป็นจริง

(5) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) เป็นจริง

103. ส่วนเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน stanine ตามลำดับคือ

(1) 5 และ 2 (2) 5 และ 1 (3) 50 และ 10

(4) 100 และ 20 (5) ไม่มีข้อใดถูก

104. ข้อเสียที่สำคัญของคะแนน stanine คือ

(1) สามารถใช้เมื่อคะแนนดิบถูกแจกแจงอย่างปกติโดยประมาณเท่านั้น

(2) ยากที่จะคำนวณกว่าคะแนนที่ได้มาอื่น ๆ (derived scores)

(3) ดิฟเฟอเรนซิเอทระหว่างคะแนนที่ไม่สมบูรณ์ที่ปลายสุดของการแจกแจง

(4) ดิฟเฟอเรนซิเอทระหว่างคะแนนที่สมบูรณ์ใกล้ศูนย์กลางของการแจกแจง

(5) เป็นจริงทั้งหมด

105. สองชนิดไหนของคะแนนที่ได้มา (derived scores) ที่มีความสัมพันธ์ใกล้ชิดที่สุด

(1) คะแนน Z กับคะแนน T

(2) คะแนน Z กับตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

(3) ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์กับคะแนน T

(4) คะแนน stanines กับคะแนน T

(5) คะแนน stanines กับคะแนน Z

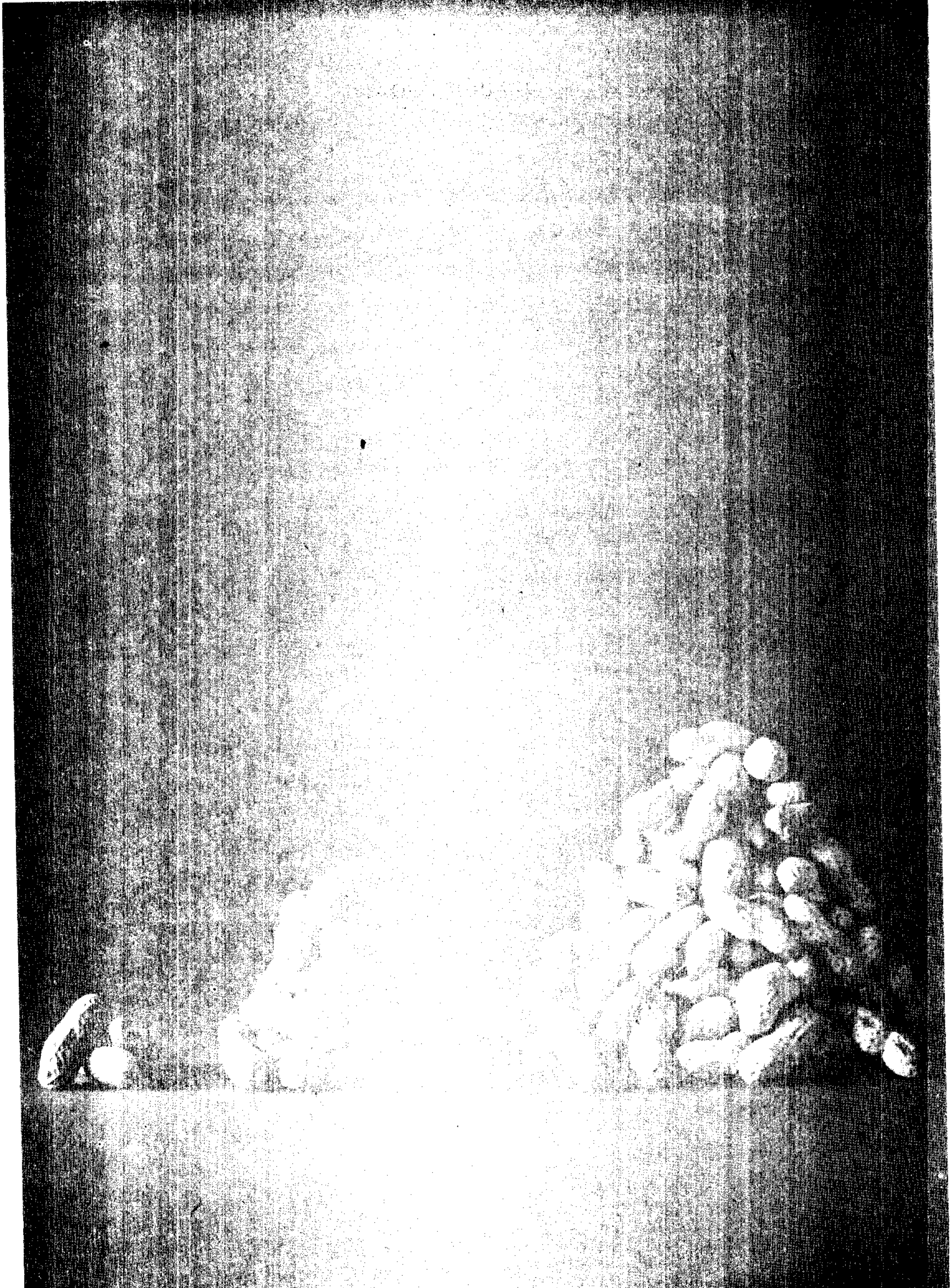
เฉลยคำถามบทที่ 6

ถูก – ผิด :–

1. T	2. F	3. T	4. T	5. T	6. F	7. F	8. T	9. T
10. F	11. T	12. T	13. T	14. T	15. F	16. T	17. T	
18. F	19. T	20. T	21. T	22. F	23. F	24. F	25. F	26. T
27. F								

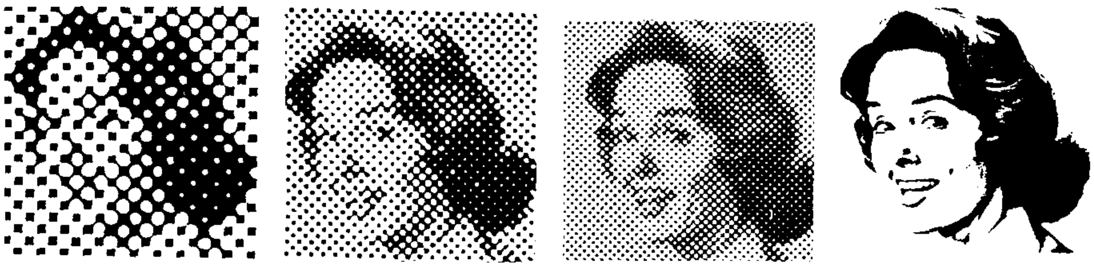
คำตอบที่ถูกต้องที่สุด : -

1. (3)	2. (2)	3. (4)	4. (4)	5. (3)
6. (1)	7. (4)	8. (3)	9. (3)	10. (2)
11. (1)	12. (2)	13. (1)	14. (4)	15. (3)
16. (3)	17. (4)	18. (3)	19. (2)	20. (2)
21. (2)	22. (3)	23. (4)	24. (4)	25. (4)
26. (4)	27. (5)	28. (1)	29. (4)	30. (4)
31. (2)	32. (2)	33. (1)	34. (2)	35. (3)
36. (1)	37. (3)	38. (4)	39. (5)	40. (4)
41. (3)	42. (2)	43. (5)	44. (4)	45. (2)
46. (2)	47. (1)	48. (2)	49. (1)	50. (2)
51. (4)	52. (3)	53. (3)	54. (2)	55. (2)
56. (4)	57. (4)	58. (5)	59. (2)	60. (4)
61. (5)	62. (4)	63. (4)	64. (5)	65. (3)
66. (2)	67. (2)	68. (1)	69. (2)	70. (3)
71. (4)	72. (2)	73. (4)	74. (3)	75. (3)
76. (2)	77. (4)	78. (2)	79. (2)	80. (4)
81. (5)	82. (4)	83. (2)	84. (2)	85. (3)
86. (2)	87. (5)	88. (2)	89. (3)	90. (4)
91. (2)	92. (3)	93. (2)	94. (5)	95. (1)
96. (3)	97. (1)	98. (4)	99. (1)	100. (3)
101. (3)	102. (5)	103. (1)	104. (3)	105. (4)



รูปที่ 1 ประกอบด้วยจุดหลายแสนจุด ให้เราพิจารณาจุดเหล่านี้เป็นเสมือนประชากรทั้งหมดของเรา และเลือกหลาย ๆ ตัวอย่าง อีกสามรูปใช้แทนตัวอย่างประกอบด้วย 250 จุด 1000 จุด และ 2000 จุด ตัวอย่างเหล่านี้ใช้แทนชนิดเฉพาะของการออกแบบเลือกตัวอย่าง เรียกว่า “พื้นที่น่าจะเป็นของการเลือกตัวอย่าง” เพราะว่าจุดดำและจุดขาวในตัวอย่างมีการแจงในสัดส่วนกับการแจกแจงของจุดในรูปเดิม ยิ่งมีจุดดำมากขึ้นในผม จุดขาวมากขึ้นที่หน้า ฯลฯ รูปภาพก็ยิ่งชัดเจนยิ่งขึ้น นี่แสดงให้เห็นว่า ขนาดตัวอย่างยิ่งโตเท่าไร ความคลาดเคลื่อนก็ยิ่งน้อยลงเท่านั้น

the hair. more white dots in the face, etc.(Think of homes) which add up to



250 dots | 1,000 dots | 2,000 dots | Picture No. 1