

บทที่ 11

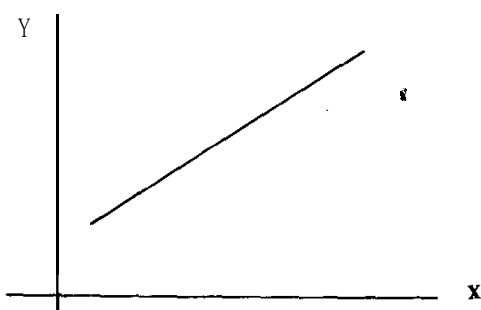
อนุกรมเวลาและเส้นแนวโน้ม

วัตถุประสงค์

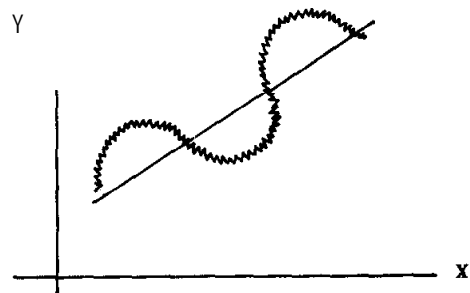
เพื่อให้ นักศึกษามีความรู้เกี่ยวกับความหมายของอนุกรมเวลา ประเภทการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลา วิธีการคำนวณหาเส้นแนวโน้มแบบต่างๆ การเปลี่ยนหน่วยมูลค่าและการเปลี่ยนจุดกำเนิด

อนุกรมเวลาเป็นชุดหรือกลุ่มหนึ่งของค่าสังเกตที่ได้มา ณ เวลาที่กำหนดขึ้น (โดยทั่วไป ในช่วงเวลาเท่า ๆ กัน) อย่างเช่น ผลการผลิตเหล็กกล้ารายปีในสหรัฐ การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิรายชั่วโมงตามประกาศของกรมอุตุนิยม และยอดรวมรายเดือนของใบเสร็จรับเงินของห้างร้าน เป็นต้น

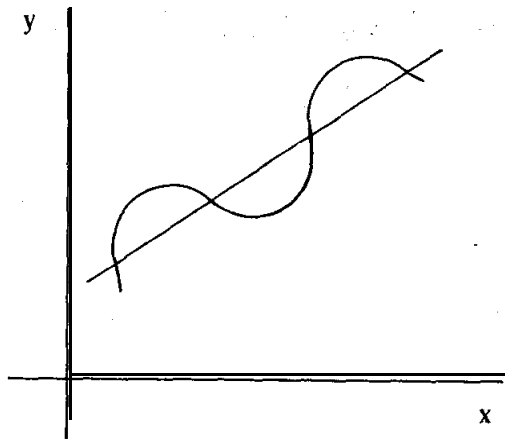
ประเภทของการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลา



(1) **แนวโน้มระยะยาว** หมายถึงอนุกรมเวลาที่มีคุณลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปโดยสม่ำเสมอ และแน่นอน ในกาลระยะยาว อย่างเช่นความต้องการรถยนต์ขนาดเล็กเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ อัตราการตายลดลง สาเหตุจากการเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์



(2) **การเปลี่ยนแปลงตามฤดูกาล** เป็นแบบอย่างที่เกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันอย่างสม่ำเสมอไปตามฤดูกาลของแต่ละปี เดือน สัปดาห์ หรือตามเวลา อย่างเช่นผู้โดยสารรถเมย์ การจราจรติดขัด ราคาผลไม้ของบางชนิด



(3) การเปลี่ยนแปลงแบบวัฏจักร หมายถึง การเปลี่ยนแปลงขึ้น ๆ ลง ๆ รอบเส้น แนวโน้ม วัฏจักรเหล่านี้อาจเป็นคาบเวลา หรือไม่ก็ได้ ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลง วัฏจักรที่สำคัญ ได้แก่ วัฏจักรธุรกิจ ซึ่ง ใช้แทนในช่วงของความเจริญรุ่งเรืองถดถอย ตกต่ำและฟื้นฟู

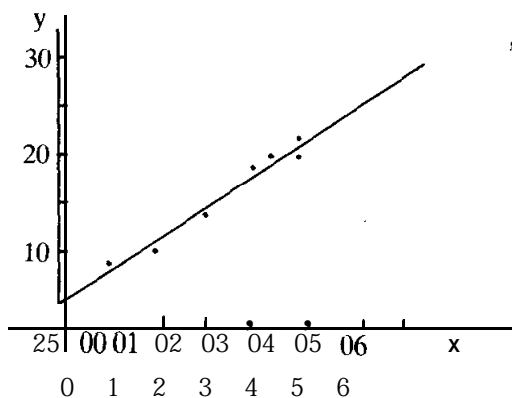
(4) การเปลี่ยนแปลงแบบไม่สม่ำเสมอ เป็นการเปลี่ยนแปลงของเหตุการณ์ต่างๆ ที่ เกิดขึ้นโดยบังเอิญหรือแบบสุ่ม ไม่สามารถ ทำนายได้ อย่างเช่น น้ำท่วม แผ่นดินไหว การนัดหยุดงาน สงคราม เป็นต้น

การประมาณเส้นแนวโน้ม เส้นแนวโน้มที่ใช้แทนอนุกรมเวลานั้น เป็นเส้นที่แสดงถึง ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสังเกตกับเวลา และความสัมพันธ์นั้นในที่นี่แสดงได้เป็น 2 แบบ ที่เรา สนใจ

(1) ความสัมพันธ์เชิงเส้น มีตัวแบบเขียนได้เป็น $y = \alpha + \beta x + \epsilon$ ในเมื่อ y เป็น ค่าสังเกต x เป็นเวลา ϵ เป็นค่าคลาดเคลื่อนเนื่องจากสาเหตุอื่นที่ไม่ใช่ x นั้น แต่การประมาณค่า เส้นแนวโน้มแบบนี้ เราใช้สมการแนวโน้มเป็น $\hat{y} = a + bx$

(2) ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น มีตัวแบบเขียนได้เป็น $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \epsilon$ เส้นแนวโน้มที่ใช้การประมาณค่าตัวแบบนี้ เขียนได้เป็น $\hat{y} = a + bx + cx^2$

ส่วนวิธีการคำนวณหาและการแสดงออกของแนวโน้มในรูปของสมการและกราฟ จากข้อมูลที่กำหนดให้มีวิธีการต่าง ๆ ดังนี้

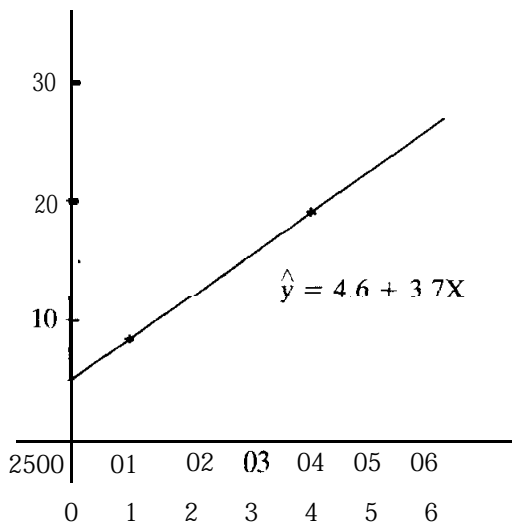


(1) วิธีกะเอา วิธีนี้ง่ายที่สุด คือต้องพลอต- กราฟของอนุกรมเวลา แล้วลากเส้นตรง ที่คิดว่าผ่านจุดต่างๆ ในกราฟมากที่สุด

ปี	x	Y
2500	0	5
2501	1	8
2502	2	12
2503	3	15
2504	4	20
2505	5	23

$$\frac{25}{3} = 8.3$$

$$\frac{58}{3} = 19.3$$



(2) **วิธีกิ่งเฉลี่ย** วิธีการแบบนี้แบ่งอนุกรมเวลาออกเป็น 2 ส่วน และหาค่าเฉลี่ยของแต่ละส่วน แล้วลากเส้นตรงผ่านค่าเฉลี่ยทั้งสองส่วน ก็จะได้เส้นแนวโน้มกิ่งเฉลี่ย ดังตัวอย่าง ค่าเฉลี่ยของส่วนที่หนึ่ง คือปี 2500 ถึง 2502 ได้ 8.3 ส่วนที่สองคือปี 2503 ถึง 2505 ได้ 19.3 พล็อตจุด 8.3 ที่ปี 2501 (ปีกลางของส่วนที่หนึ่ง) กับจุด 19.3 ที่ปี 2504 (ปีกลางของส่วนที่สอง) เส้นตรงก็จะผ่านจุด (1, 8.3) กับจุด (4, 19.3) ก็คือเส้นแนวโน้มกิ่งเฉลี่ย หากเราต้องการคำนวณหาเส้นแนวโน้ม ก็สามารถหาได้ดังนี้

ให้สมการของเส้นตรงเป็น $\hat{y} = a + bx$ หาค่า a และ b ได้โดยแทนค่าจุด (1, 8.3) กับจุด (4, 19.3) ลงในสมการเส้นตรงได้

$$8.3 = a + b(1)$$

$$19.3 = a + b(4)$$

จากสมการข้างบนเรากำหนดหาค่า a ได้เท่ากับ 4.6 กับ b ได้เท่ากับ 3.7 ดังนั้นสมการของเส้นแนวโน้มเป็น

$$\hat{y} = 4.6 + 3.7x$$

(3) **วิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่** วิธีการแบบนี้เหมาะสำหรับการเปลี่ยนแปลงแบบวัฏจักรฤดูกาลและแบบไม่สม่ำเสมอ เรานิยามเฉลี่ยเคลื่อนที่ของลำดับ n ได้โดยการลำดับของมัธมิมเลขคณิต

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad \frac{y_2 + y_3 + \dots + y_{n+1}}{n}, \quad \frac{y_3 + y_4 + \dots + y_{n+3}}{n}$$

แล้วก็ประมาณเส้นแนวโน้มจากข้อมูลนี้ได้โดยวิธีแบบกะเอา กิ่งเฉลี่ย หรือวิธีการอื่น ๆ

ปี	ด้านบาท	ผลบวก 3 ปี	ค่าเฉลี่ย	ตัวอย่าง
2500	3			หาผลบวกเคลื่อนที่ 3 ปีสำหรับ ปี 2500 ถึง 2502 เราได้ $3+4+8 = 15$ ค่า 15 นี้ใส่ให้
2501	4	15	5	ตรงกับปีกลาง 2501 ผลบวกของ 3 ปีต่อไป
2502	8	18	6	คือ ปี 2501 ถึง 2503 ก็จะได้ $4+8+6 = 18$
2503	6	21	7	และค่านี้ก็ใส่ให้ตรงกับปีกลาง 2502 กระบวนการ
2504	7	24	8	นี้ทำต่อไปจนหมด จะเห็นว่าคอลัมน์ของผลบวก
2505	11	27	9	เคลื่อนที่ 3 ปี จะไม่มีผลบวกสำหรับปี 2500
2506	9	30	10	กับปี 2509 ต่อไปคำนวณหาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่
2507	10	33	11	3 ปี ในคอลัมน์ที่ 4 ภายหลังจากที่ได้พลอตจุดค่าเฉลี่ย
2508	14	36	12	เคลื่อนที่ 3 ปี เราอาจลากเส้นแนวโน้มของ
2509	12			จุดค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่เหล่านี้ได้โดยวิธีกะเอา

วิธีกะเฉลี่ย หรือวิธีอื่นๆ ก็ได้ แต่ในตัวอย่างของเราเมื่อพลอตค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 3 ปี ลงบนแผนกราฟดังรูปจะได้เส้นตรง

(4) **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด** วิธีการนี้เป็นวิธีที่ดีที่สุด เพราะเส้นแนวโน้มที่คำนวณได้จะมีคุณสมบัติดังนี้

(ก) ผลบวกของผลต่างระหว่างค่าสังเกตในอนุกรม y กับค่าแนวโน้ม \hat{y} มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\Sigma (y - \hat{y}) = 0$

(ข) ผลบวกของผลต่างกำลังสองระหว่างค่าสังเกตในอนุกรม y กับค่าแนวโน้ม \hat{y} ให้มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ

$$\Sigma (y - \hat{y})^2 = \text{น้อยที่สุด}$$

ในเมื่อ $\hat{y} = a + bx$ เป็นเส้นแนวโน้มที่จะเป็นไปตามสมบัติข้างต้นได้นั้น a และ b จะคำนวณได้จากสมการปกติดังนี้

$$an + b \Sigma x = \Sigma y$$

$$a \Sigma x + b \Sigma x^2 = \Sigma xy$$

สูตรสำเร็จรูปเขียนได้เป็น

$$b = \frac{n \Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

ในทางปฏิบัติ แทนที่จะใช้ปีจริง ๆ เราอาจใช้ x แทนปีจริง ๆ และทำให้ Σx เท่ากับศูนย์ก็จะได้

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$$

$$a = \bar{y}$$

ตัวอย่าง	ปี	2500	2501	2502	2503	2504
	น้ำมัน (ล้าน บาเรน)	5	8	12	15	20

ผลิตภัณฑ์น้ำมันปีโตรเลียม 5 ปี เรากำหนดให้ปีกลางเป็น 0 ก่อนปีกลางปี -1, -2 และหลังปีกลางเป็น 1, 2 เพื่อให้ผลบวกของปี (Σx) เป็นศูนย์ จากตารางเราได้ $\Sigma y = 60$, $\Sigma x^2 = 10$, $\Sigma xy = 37$ และ $n = 5$ ก็สามารถคำนวณหา a , b ได้จาก

$$b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{37}{10} = 3.7$$

$$a = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{60}{5} = 12$$

ดังนั้นสมการสำหรับเส้นแนวโน้ม คือ

$$\hat{y} = 12 + 3.7x \quad (x \text{ มีหน่วยเป็น 1 ปี})$$

ตัวอย่างที่ 2	ปี	2500	2501	2502	2503	2504	2505
	น้ำมัน (ล้านบาเรน)	5	8	12	15	20	25

ผลิตภัณฑ์น้ำมันปีโตรเลียม 6 ปี เรากำหนดให้ปี 2502 เป็น -1 ปี 2503 เป็น +1 ปีก่อนหน้าปี 2502 เป็น -3 และหลังปี 2503 เป็น +3 เพื่อให้ผลบวกของปี (Σx) เป็นศูนย์ จากตารางเราคำนวณหา

$$\Sigma y = 85, \Sigma xy = 139, \Sigma x^2 = 70; n = 6$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสูตร ได้

$$a = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{85}{6} = 14.2$$

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{139}{70} = 1.99$$

ดังนั้นเส้นแนวโน้มคือ

$$\hat{y} = 14.2 + 1.99x \quad x \text{ มีหน่วยเป็นครั้งปี}$$

$b = 1.99$ แสดงการเพิ่มขึ้นของค่าแนวโน้มต่อครั้งปี ค่าแนวโน้มสำหรับ 2504 ได้

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 14.2 + (1.99)(3) \\ &= 20.17\end{aligned}$$

การเปลี่ยนหน่วยมูลค่า

	2505	2506	2507
ข้าราชการคนหนึ่งมีรายได้	12,000 บาท	12,720 บาท	13,440 บาท
เฉลี่ยเดือนละ	1,000 บาท	1,060 บาท	1,120 บาท
รายได้เพิ่มต่อปี	720 บาท		

สมการยอดรวมรายปี

$$\hat{y} = 12,000 \text{ บาท} + 720x$$

จุดกำเนิดคือวันที่ 1 กรกฎาคม 2505 และ x มีหน่วย 1 ปี

สมการเฉลี่ยรายเดือน

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \frac{12,000}{12} + \frac{720}{12}x \\ &= 1,000 + 60x\end{aligned}$$

จุดกำเนิดคือวันที่ 1 กรกฎาคม 2505 และ x ยังมีหน่วยเป็น 1 ปี เราต้องการเปลี่ยนให้สมการของเดือน จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนค่า x ให้มีหน่วยเป็น 1 เดือน ค่าของ x จึงต้องหารด้วย 12 สมการของเดือนก็เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 1,000 + 60 \frac{x}{12} \\ &= 1,000 + 5x\end{aligned}$$

$x = 0$ ก็ยังเป็นวันที่ 1 กรกฎาคม 2505 x มีหน่วยเป็น 1 เดือน

การเปลี่ยนจุดกำเนิด

ตัวอย่าง ให้สมการเฉลี่ยรายเดือนเป็น

$$\hat{y} = 1,000 + 60x$$

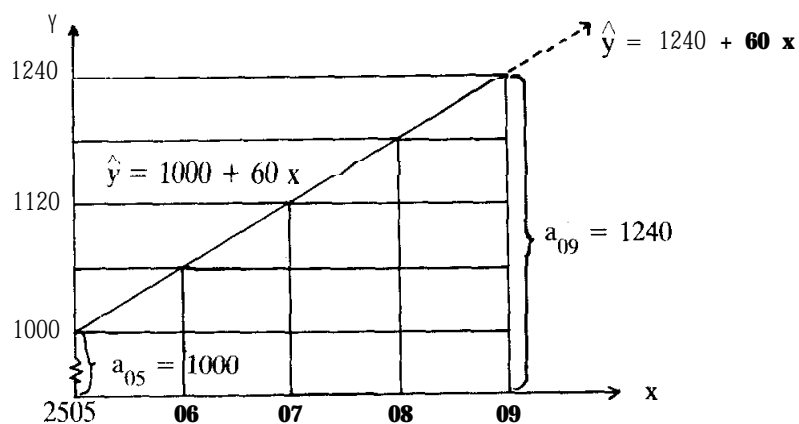
x มีหน่วย 1 ปี จุดกำเนิด คือ 1 กรกฎาคม 2505 ต้องการเปลี่ยนจุดกำเนิดเป็นวันที่ 1 กรกฎาคม 2509 ก่อนอื่นเราหาจุดตัดที่แกน y ใหม่ a_{09} ได้

$$a_{09} = 1,000 + (60 \times 4) = 1,240$$

แล้วบวกด้วย $60x$ ดังนั้นสมการก็กลายเป็น

$$\hat{y} = 1,240 + 60x$$

x ยังมีหน่วย 1 ปี จุดกำเนิด คือ 1 กรกฎาคม 2509



ถ้าเราต้องการดำเนินการเพียงขั้นเดียวก็ทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 1,000 + 60(x + 4) \\ &= 1,240 + 60x\end{aligned}$$

ถ้าเราต้องการเปลี่ยนจุดกำเนิดไปอยู่วันที่ 1 กรกฎาคม 2500 ก็จะได้

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 1,000 + 60(x - 5) \\ &= 1,000 + 60x - 300 \\ &= 700 + 60x\end{aligned}$$

x มีหน่วย 1 ปี จุดกำเนิด คือวันที่ 1 กรกฎาคม 2500

คำและประโยคที่ควรจำ

อนุกรมเวลา	เส้นแนวโน้ม
ประเภทการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลา	ประเภทเส้นแนวโน้ม
วิธีการคำนวณหาเส้นแนวโน้ม	จุดกำเนิด
การเปลี่ยนหน่วย	การเปลี่ยนจุดกำเนิด

คำถามบทที่ 11

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด.-

1. สมการยอดรวมรายปีสำหรับผลิตภัณฑ์วิทยุ โดย X มีหน่วยเป็น 1 ปี และ X = 0 หมายถึงวันที่ 1 กรกฎาคม 1958 เขียนได้เป็นสมการ $\hat{Y} = 144 + 72X$ จะเปลี่ยนสมการนี้เป็นสมการรายเดือนได้เป็น.-

(1) $\hat{Y} = 12 + 6X$ (2) $\hat{Y} = 1 + 0.5X$

(3) $\hat{Y} = 12 + .5X$ (4) $\hat{Y} = 144 + 6X$

(5) $\hat{Y} = 144 + .5x$

2. จากโจทย์ ข้อ 1. ต้องการเปลี่ยนจุด Origin เป็นวันที่ 1 กรกฎาคม 1957 สมการนี้จะเขียนได้.-

(1) $\hat{Y} = 12 + 6X$ (2) $\hat{Y} = 288 + 72X$

(3) $\hat{Y} = 216 + 72X$ (4) $\hat{Y} = 144 - 72X$

(5) $\hat{Y} = 72 + 72X$

3. ตารางจำนวนสินค้าออกระหว่างปี 1950 - 1956
(พันล้านดอลลาร์)

ปี	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
จำนวนสินค้าออก	10.1	14.9	15.0	15.7	15	15.4	18.9

กำหนดให้ $\Sigma X = 0$, $\Sigma X^2 = 28$, $\Sigma Y = 105$, $\Sigma XY = 27.4$

X มีหน่วยเป็นหนึ่งปี และ X = 0 หมายถึงวันที่ 1 กรกฎาคม 1953

สมการกำลังสองน้อยที่สุดเขียนได้ $\hat{Y} = a + bX$

จงคำนวณหาค่า a

(1) 0.98 (2) 15 (3) 4 (4) 7 (5) 5.5

4. จากโจทย์ข้อ 3. จงคำนวณหาค่า b

(1) 0.98 (2) 15 (3) 4 (4) 7 (5) 5.5

5. จากโจทย์ข้อ 3. สมการกำลังสองน้อยที่สุด $\hat{Y} = a + bX$ เขียนได้.-

(1) $\hat{Y} = 0.98 + 15x$

(2) $\hat{Y} = 0.98 + 4x$

(3) $\hat{Y} = 0.98 + 7x$

(4) $\hat{Y} = 0.98 + 5.5X$

(5) $\hat{Y} = 15 + .98X$

6. จากโจทย์ข้อ 8. จงหาค่าแนวโน้มของปี 1953
 (1) 0.98 (2) 15.7 (3) 4 (4) 15 (5) 7
7. จากโจทย์ข้อ 3. ต้องการเปลี่ยนจุดกำเนิด เป็นวันที่ 1 กรกฎาคม 1956 สมการนี้เขียนได้.-
 (1) $\hat{Y} = 45.98 + 15X$ (2) $\hat{Y} = 12.98 + 4X$
 (3) $\hat{Y} = 21.98 + 7X$ (4) $\hat{Y} = 17.48 + 5.5X$
 (5) $\hat{Y} = 17.94 + .98X$
8. จากโจทย์ข้อ 3. กำหนดให้สมการ $\hat{Y} = a + bX$ จุดกำเนิดปี 1951 จงคำนวณหาค่า a โดยวิธีกึ่งเฉลี่ย (Semiaverage)
 (1) - 1.6 (2) 1.6 (3) 13.3 (4) - 13.2 (5) 16.4
9. จากโจทย์ข้อ 3. และข้อ 8. จงคำนวณหาค่า b โดยวิธีกึ่งเฉลี่ย (Semiaverage)
 (1) - 1.6 (2) 1.6 (3) 13.2 (4) - 13.2 (5) 0.78
10. จากโจทย์ข้อ 3. สมการแนวโน้ม กึ่งเฉลี่ย เขียนได้.-
 (1) $\hat{Y} = -1.6 + 13.2X$ (2) $\hat{Y} = 1.6 + 13.2X$
 (3) $\hat{Y} = 16.4 + 1.6X$ (4) $\hat{Y} = -13.2 + 1.6X$
 (5) $\hat{Y} = 13.3 + 0.78X$
11. สมการแนวโน้มของเส้นโค้งเขียนได้เป็น $\hat{Y} = 10 + 11X - 5X^2$ จุดกำเนิด 1955 - 1956 x มีหน่วย 1/2 ปี เปลี่ยนจุดกำเนิดให้เป็นปี 1955 ได้เป็น.-
 (1) $\hat{Y} = 6 + 21X + 5X^2$ (2) $\hat{Y} = -6 + 21X - 5X^2$
 (3) $\hat{Y} = 16 + X - 5X^2$ (4) $\hat{Y} = 26 + 21X + 5X^2$
 (5) $\hat{Y} = 16 + X + 5X^2$
12. สมการยอดรวมรายปีสำหรับผลิตภัณฑ์วิทย์โดย X มีหน่วยเป็น 1 ปี และ X = 0 หมายถึง วันที่ 1 กรกฎาคม 1958 เขียนได้เป็นสมการ $Y = 144 + 72X$ จงเปลี่ยนสมการนี้เป็นสมการของเดือน
 (1) $Y = 12 + 6X$ (2) $Y = 1 + 0.5x$
 (3) $Y = 12 + 0.5X$ (4) $Y = 144 + 6X$
 (5) $Y = 144 + .5x$
13. สมการยอดรวมรายปีสำหรับรายได้ของข้าราชการชั้นพิเศษคนหนึ่งโดย X มีหน่วยเป็น 1 ปี X = 0 คือวันที่ 1 กรกฎาคม 2514 เขียนได้เป็น $Y = 72,000 + 3600X$ จงคำนวณหารายได้ของข้าราชการผู้นี้ในปี

- (1) **72,000** บาท (2) 75,600 บาท (3) 90,000 บาท
 (4) 108,000 บาท (5) 94,800 บาท
14. จากโจทย์ข้อ 13. จงคำนวณหารายได้เฉลี่ยรายเดือนของปี 2519 ของข้าราชการผู้นี้
 (1) **6,000** บาท (2) 7,500 บาท (3) 7,525 บาท
 (4) 72,000 บาท (5) 90,000 บาท
15. จากโจทย์ข้อ 13. จงคำนวณหารายได้ของเดือนสิงหาคม 2519 ของข้าราชการผู้นี้
 (1 สิงหาคม 2519)
 (1) 6,000 บาท (2) 6,300 บาท (3) 6,025 บาท
 (4) 7,000 บาท (5) 7,525 บาท
16. กำหนดให้สมการแนวโน้มเขียนได้เป็น $Y = 48 + 5.76X$ จุดกำเนิด ปี 1965 X มีหน่วย
 เป็น 1 ปี จงเปลี่ยนสมการให้ X มีหน่วยเป็น 10 ปี
 (1) **$Y = 4.8 + 576X$** (2) $Y = 48 + 57.6X$
 (3) $Y = 48 + .576X$ (4) $Y = 4.8 + 57.6X$
 (5) $Y = .48 + .576X$
17. จากโจทย์ข้อที่ 16. จงเปลี่ยนสมการให้ X มีหน่วยเป็น 1/10 ปี
 (1) **$Y = 4.8 + .576X$** (2) $Y = 48 + 57.6X$
 (3) $Y = 48 + .576X$ (4) $Y = 4.8 + 57.6X$
 (5) $Y = .48 + .576X$

เฉลยคำถามบทที่ 11

- | | | | |
|------------|-----|------------|-----|
| 1. | (3) | 2. | (5) |
| 3. | (2) | 4. | (1) |
| 5. | (5) | 6. | (4) |
| 7. | (5) | 8. | (3) |
| 9. | (5) | 10. | (5) |
| 11. | (2) | 12. | (3) |
| 13. | (3) | 14. | (2) |
| 15. | (5) | 16. | (2) |
| 17. | (3) | | |

