บทที่ 3

“แบบจำลองความน่าจะเป็น การสุ่มตัวอย่าง การกระจายของตัวแทน”

บทที่ ๓

การแจกแจงแบบทวินาม ใช้สำหรับการหาค่าความน่าจะเป็นในกรณีที่การทดลองนั้นๆมีลักษณะดังต่อไปนี้คือ

๑. การทดลองนั้นๆประกอบด้วยการทดลองย่อยๆ n ครั้ง โดยที่การทดลองย่อยทั้ง n ครั้งนั้นเป็นอิสสระกัน ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญ ๕ ครั้ง (การโยนเหรียญแต่ละครั้งย่อมเป็นอิสสระกัน หมายความว่าการได้ผลลัพธ์จากการโยนเหรียญแต่ละครั้งจะไม่มีส่วนเกี่ยวข้องกัน หรือครอบครัวหนึ่งมีบุตร ๓ คน นั่นหมายความว่าเพศของบุตรแต่ละคนจะไม่เกี่ยวข้องกันเช่น ถ้าลูกคนโตเป็นผู้ชายก็ไม่มีผลสะท้อนถึงการกำหนดเพศของบุตรคนต่อไปเป็นต้น)

๒. การทดลองย่อยแต่ละครั้งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้อยู่ ๒ ทาง ดังตัวอย่างของการโยนเหรียญซึ่งแต่ละครั้งของการทดลองจะปรากฏผลเป็นหัวหรือก้อย การมีบุตรแต่ละคนจะเป็นไปได้คือชายหรือหญิง การโยนลูกเต๋าแต่ละครั้งผลลัพธ์ที่เป็นไปได้คือหน้าคู่ หรือ หน้าคี่ เป็นต้น

๓. ความน่าจะเป็นของสิ่งที่ เราสนใจจะเกิดในแต่ละครั้งย่อยจะมีค่าเท่ากับ p ดังเช่นตัวอย่างของการโยนเหรียญ ถ้าสิ่งที่เราสนใจคือหน้าหัวที่จะเกิดขึ้น ดังนั้น โอกาสที่จะเกิดหน้าหัว $p = \frac{1}{2}$ ($p =$ เพราะการโยนเหรียญแต่ละครั้ง $S = \{H,T\}$ โดยที่ H หมายถึงหัวและ T หมายถึงก้อยดังนั้นค่าของความน่าจะเป็นที่จะเกิดหัวเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ตามวิธีการคิดหาค่าความน่าจะเป็น หรือ ตัวอย่างในการหาค่าความน่าจะเป็นของเพศบุตรที่เป็นไปได้ ถ้าเราสนใจเพศชาย ดังนั้นโอกาสที่จะเกิดบุตรเป็นเพศชาย $p = \frac{1}{2}$ ซึ่งคิดโดยวิธีการหาตามวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่๒

จากคุณสมบัติข้อ ๑- ๓ ดังนั้น ผลรวมของการทดลองทั้ง n ครั้ง จึงออกมาในรูปดังนี้คือ

$$Pr(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad ; \quad x = 0,1,\ldots,n$$

โดยที่ $Pr(X=x)$ โอกาสที่จะได้รับสิ่งที่เราสนใจจำนวน x ครั้ง

เช่น ทดลองโยนเหรียญ ๕ ครั้ง สิ่งที่เราสนใจคือจำนวนหัวที่จะเกิดขึ้นดังนั้น x คือค่าของสิ่งที่เราสนใจ นั่นหมายความว่า x จะเป็นไปได้คือเกิดหัว 0 ครั้ง(ไม่เกิดเลย)

นั่นหมายความว่า x จะเป็นไปได้คือเกิดหัว ๐ ครั้ง (ไม่เกิดเลย) เกิดหัว ๑ ครั้ง,...

จนถึงเกิดหัว ๕ ครั้ง $(n=5)$

เช่น $Pr(X=3)$ = ความน่าจะเป็นที่หน้าหัวจะเกิดขึ้น ๓ ครั้ง

๒. p คือโอกาสที่จะเกิดสิ่งที่เราสนใจในแต่ละครั้งย่อย

๓. q คือโอกาสที่จะไม่เกิดสิ่งที่เราสนใจในแต่ละครั้งย่อย ในที่นี้สามารถทราบค่า q โดยการหาจาก $q = 1-p$

<u>การแจกแจงแบบทวินามจะมีค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้คือ</u>

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามแล้ว

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

<u>แบบฝึกหัดที่๓.๑</u>

เฉพาะข้อที่เกี่ยวข้องกับการ**แจกแจงแบบ**ทวินามและแบบเบอร์นูลลิ

๑. จงให้นิยามและอธิบายความหมายของคำต่อไปนี้

ก. ตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลิ

ข. การแจกแจงแบบเบอร์นูลลิ

ก. ตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลลิ คือตัวแปรสุ่มที่มีผลลัพธ์จากการทดลองที่เป็นไปได้ ๒ ลักษณะ เท่านั้น โดยการที่ให้ผลลัพธ์ที่เราสนใจคือ $X = 1$ และผลลัพธ์ที่เราไม่สนใจคือ โดยที่โอกาส (ความน่าจะเป็น) ที่จะเกิดสิ่งที่เราสนใจ (คือ p) และโอกาสที่จะเกิดผลลัพธ์ที่เราไม่สนใจ $X = 0$ ซึ่งมีค่า q เราจะหาค่า $q = 1-p$

ข. การแจกแจงแบบเบอร์นูลลิ

ขอให้สังเกตุว่าผลรวมของเบอร์นูลลิคือ X ก็คือการแจกแจงแบบทวินามนั่นเอง ขอให้นักศึกษาพยายามแยกความแตกต่างระหว่างการแจกแจงแบบเบอร์นูลลิและแบบทวินามให้ดี ถ้านักศึกษายังสงสัยว่าทำไมเราจึงใช้สัญญลักษณ์ X เหมือนกันทั้งในการแจกแจงแบบทวินามและแบบเบอร์นูลลิ ก็ขอให้เข้าใจว่าเราจะเขียนอย่างไรก็ได้แต่ขอให้ระลึกถึงความหมายที่ถูกต้อง

ด้วยว่า X ทั้ง 2 ตัวที่ใช้ในการแจกแจงแต่ละแบบนั้นความหมายต่างกัน เราอาจจะแยกความแตกต่างระหว่าง ๒ ตัวแปรในการแจกแจงทั้ง ๒ แบบ ได้โดยที่

ถ้าเราให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบเบอร์นูลลิ

ให้ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินาม

ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างการแจก แจงแบบทวินามกับการแจกแจงแบบเบอร์นูลลิคือ

$Y = \Sigma Xi/n$

ขอให้สังเกตุว่าฟังค์ชั่นความน่าจะเป็นของ X ก็ยังคงเขียนในรูปเดิมที่เคยมาให้ดูแล้ว เพียงอันเดิมเราเขียนเป็น Y ซึ่งจริงๆแล้วเราจะใช้สัญญลักษณ์อย่างไรก็ตามขอให้คงความหมายของการแจก แจงแต่ละแบบให้ถูกต้องก็พอ

๒. จากการทอดเหรียญ ๓๐ครั้ง พบว่าเหรียญหงายหน้า "หัว" ๑๘ครั้ง ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลิ อยากทราบว่าค่าเฉลี่ยของ Y เท่ากับเท่าไร? ค่าเฉลี่ยที่ได้เป็นSample mean หรือ Population mean

(18/30, Sample mean)

แนวคิดจากโจทย์ $n = 30$ ครั้ง

X = ตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลลิ

(X = 0 หรือ 1)

$Y = \Sigma Xi$ (ผลรวมของเบอร์นูลลิ)

ค่าเฉลี่ย $Y = \Sigma Xi/n$

ดังนั้น $\Sigma Xi = 18$ (ผลรวมของหน้าหัว 18 ครั้ง)

ค่าเฉลี่ย = 18/50 =.36คือ Sample Mean เพราะคิดจากการทดลอง ๕๐ ครั้ง ซึ่งผลลัพธ์(หน้าหัว)ที่สนใจ ๑๘ ครั้ง

๓. สมมุติว่า ๘๐% ของครอบครัวในท้องที่แห่งหนึ่งมีสถานภาพการครอบครองเคหะสถานในฐานะเจ้าของบ้าน(ไม่ใช่ผู้เช่า)

ให้ตัวแปรสุ่ม Y มีค่าดังนี้

y = 1 ถ้าเป็นเจ้าของบ้าน

y = 0 ถ้าไม่ได้เป็นเจ้าของบ้าน

จงหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ Y

(.8,.16)

จากโจทย์ ๘๐% ของครอบครัวมีฐานะเป็นเจ้าของบ้านหมายความว่า ร้อยละ ๘๐ หรือ ๑ราย ของคนไทยมีฐานะเป็นเจ้าของบ้าน .๘

ค่าเฉลี่ยของ Y = 80/100 = .8

หรือ p = .8

ความแปรปรวนของ = pq = .8(1-.8)

= .8 x .2 = .16

<u>หมายเหตุ</u> เราสามารถหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ Y ซึ่งมีการแจกแจงเบอร์นูลลิ ได้จากสูตรดังนี้

ถัวเฉลี่ย = p

ค่าความแปรปรวน= pq โดยที่ q = 1-p

๔. จากการค้นคว้าการแพทย์พบว่าวัคซีนป้องกันหวัดมีประสิทธิภาพสูงถึง ๗๐% หมายความว่าผู้รับการฉีดวัคซีน ๑๐๐ รายจะไม่เป็นหวัดตลอดฤดูฝนหนึ่งถึง ๗๐ราย

ให้ W เป็นตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลิ จงคำนวณหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ W

(.7,.21)

เมื่อ W เป็นตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลลิ

ก. ค่าเฉลี่ยของ W = p = 70/100 = .7

<u>หมายเหตุ</u>

การคิดค่า p ในข้อ ๓ และข้อ ๔ใช้วิธีการหาค่าโดยวิธีการหาค่าโดยวิธีการสังเกตุผลที่ได้จากการทดลอง เช่น ถ้าโยนเหรียญ ๕๐ ครั้ง ได้หัว ๒๐ ครั้ง เราสรุปได้ว่าความน่าจะเป็นที่หัวจะปรากฏ ก็คือ 20/50 = .4

หรือจะหาความน่าจะเป็นโดยวิธีการ สร้าง Sample Space ดังที่กล่าวไว้ในบทที่๒ ก็ได้ขึ้นอยู่กับโจทย์ว่ากำหนดลักษณะมาเช่นใด ถ้าให้ผลการทดลองมาก็คิดโดยวิธี

$$Pr(A) = f/n$$

โดยที่ f คือจำนวนครั้งของความถี่ ที่จะเกิดเหตุการณ์ที่เราสนใจ

n คือจำนวนการทดลองทั้งหมด

แต่ถ้าไม่กำหนด การทดลองและความถี่มาก็คิดโดยการหาสมาชิกใน Sample Space และสมาชิกในเซตของเหตุการณ์ที่เราสนใจแล้วนำมาหารกัน (ดูบทที่2ประกอบ).

ข. ความแปรปรวนของ $W = pq$

$$= .7(1-.7)$$

$$= .7 \times .3$$

$$= .21$$

5. คำต่อไปนี้มีความหมายแตกต่างกันหรือไม่? อย่างไร?

ก. ตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลิ และตัวแปรสุ่มทวินาม

ข. การแจกแจงแบบเบอร์นูลลิและการแจกแจงทวินาม

<u>คำตอบ</u> ให้ดูคำอธิบายในข้อที่1

6. สุ่มตัวอย่างนักเรียนจากโรงเรียนสหศึกษาแห่งหนึ่งมา ๓๐คน ซึ่งโรงเรียนดังกล่าวมีนักเรียนชายและนักเรียนหญิงเท่ากัน ถ้าให้ Y จำนวนนักเรียนชายที่ปรากฏในกลุ่มตัวอย่าง จงคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่กลุ่มตัวอย่างจะมีลักษณะดังนี้

ก. มีนักเรียนชาย ๑๕คน นักเรียนหญิง ๑๕คน (.6475)

ข. มีนักเรียนชาย ๒๐คน นักเรียนหญิง ๑๐คน (.5886)

ค. มีนักเรียนหญิงไม่เกิน ๑๐คน (.6409)

ง. มีนักเรียนชายอย่างน้อย ๑๐คน (.9786)

จ. มีนักเรียนชายระหว่าง ๑๒คน ถึง ๒๔ คน (.8995)

จากโจทย์ n = 30 คน

p = สัดส่วนของนักเรียนชาย(ความหมายก็เหมือนกับ ค่าความน่าจะเป็นที่สุ่มนักเรียนมา 1 คนแล้วจะมีโอกาสที่เป็นเด็กชายเท่าไร ให้นักศึกษาเทียบตัวอย่างนี้กับปัญหาในการโยนเหรียญจะพบว่าคล้ายคลึงกันคือ สุ่มตัวอย่างนักเรียนมา 30 คน ก็เหมือนกับการโยนเหรียญ 30 ครั้ง โอกาสที่จะเป็นเด็กชาย(โจทย์กำหนดให้สิ่งที่สนใจคือเด็กชาย) ก็เหมือนกับการหาโอกาสของการหงายหน้าหัว(เมื่อเราสนใจหน้าหัว) ในการโยนเหรียญ 1 ครั้ง

$p = \frac{1}{2}$ (เนื่องจากโจทย์กำหนดว่ามีนักเรียนชายและนักเรียนหญิงเท่าๆกันในโรงเรียนนี้ ดังนั้นโอกาสที่จะสุ่มนักเรียนมา 1 คนแลเวจะเป็นเด็กชายจึงเท่ากับ $\frac{1}{2}$)

ก. หาความน่าจะเป็นที่จะมีนักเรียนชาย 15 คน นักเรียนหญิง 15 คน ความหมายก็คือการหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักเรียนชาย 15 คน หรือ $Y = 15$ คน

จากฟังค์ชั่นความน่าจะเป็นของ Y ที่มีการแจกแจงแบบทวินาม

$$\Pr(Y=y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \quad ; \; y = 0,1,2,\ldots,30$$

$$n = 30 \;, p = \tfrac{1}{2} \qquad Y = 15$$

(โจทย์กำหนดให้นักเรียนชาย15 คน)

ดังนั้น $q = 1 - p = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \Pr(Y=y) = \binom{30}{15}(\tfrac{1}{2})^{15}(\tfrac{1}{2})^{30-15}$$

$$= \binom{30}{15}\tfrac{1}{2}^{30} = .1445$$

(เปิดตารางหน้า 132 เมื่อ n=30, p=.5, x=15 จะได้ค่าเท่ากับ .1445)

ข. หาความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างที่สุ่มได้จะเป็นนักเรียนชาย 20 คนและนักเรียนหญิง10คน

ในปัญหานี้ $n = 30$, $Y = 20$, $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

$$\Pr(Y=y) = \binom{30}{20}(\tfrac{1}{2})^{20}(\tfrac{1}{2})^{30-20}$$

$$= .0280$$

(เปิดตารางหน้า 132 เมื่อ n=30, p = .5 ,q = .5 จะได้ค่าเท่ากับ .0280)

ค. จงหาความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักเรียนหญิงไม่เกิน 10 คน

ความหมายในการคิดถ้าคิดในแง่ของนักเรียนชายก็คือ การหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่สุ่มมาทั้ง 30 คนจะมีนักเรียนชายไม่ต่ำกว่า 20 คน ถ้านักศึกษายังสงสัย ก็ให้พิจารณาแนวคิดดังนี้ ประโยคที่ว่าเป็นนักเรียนหญิงไม่เกิน 10 คน ก็คือ อาจจะเป็นนักเรียนหญิง 10 คน หรือ 9 คน หรือ 8 คน หรือ ... หรือ 0 คน ก็ได้ นั่นหมายความว่า

ถ้าเป็นนักเรียนหญิง 10 คน ก็หมายถึงนักเรียนชาย 20 คน

ถ้าเป็นนักเรียนหญิง 9 คน ก็หมายถึงนักเรียนชาย 21 คน

.

.

ถ้าเป็นนักเรียนหญิง 0 คน ก็หมายถึงนักเรียนชาย 30 คน

ดังนั้นจากโจทย์ข้อนี้ก็คือการหาค่าความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างที่สุ่มได้ จะเป็นนักเรียนชาย 20 คน หรือ 20 คน หรือ . . . หรือ 30 คน ดังนี้

$$Pr(Y \geq 20) = Pr(Y=20)+Pr(Y=21)+\ldots+Pr(Y=30)$$

$$= \binom{30}{20}(\tfrac{1}{2})^{20}(\tfrac{1}{2})^{30-20} + \binom{30}{21}(\tfrac{1}{2})^{21}(\tfrac{1}{2})^{30-21} + \ldots +$$

$$\binom{30}{30}(\tfrac{1}{2})^{30}(\tfrac{1}{2})^{30-30}$$

เพื่อให้ง่ายแก่การคิดคำนวณเปิดตารางดูแล้วเขียนรูปที่เราคำนวณให้เข้าสู่ตรที่จะเปิดตารางได้ดังนี้คือ

$$Pr(Y > 20) = 1 -(Pr(Y=19)+Pr(Y=18)+\ldots+Pr(Y=0))$$

$$= 1 - \{(\binom{\sim}{19}(\tfrac{1}{2}) \quad (\tfrac{1}{2})19 + \binom{30}{18}(\tfrac{1}{2})^{18}(\tfrac{1}{2})^{30-18} +$$

$$\binom{30}{0}(\tfrac{1}{2})^{0}(\tfrac{1}{2})^{30-0})$$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{19}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^{y}(\tfrac{1}{2})^{30-y}$$

เปิดตารางหน้า 142 ตารางที่ n= 30 ดูช่วงที่ตรงกับ n = 30

p = ½ = .5 (ดูหัวตาราง) และ x = 19 จะได้ว่า

$$\sum_{y=0}^{19} \binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y} = .9505$$

$$Pr(Y \geq 20) = 1 - .955 = .0495$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักเรียนหญิงไม่เกิน 10 คน เท่ากับ .0495

ง. ความน่าจะเป็นที่จะมีนักเรียนชายอย่างน้อย 10 คน

$$= Pr(Y=30)+Pr(Y=29)+\ldots+Pr(Y=10)$$

$$= 1 -(Pr(Y=0)+Pr(Y=1)+\ldots+Pr(Y=9))$$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{9} \binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y}$$

$$= 1 - .0214 = .9786$$

จ. มีนักเรียนชายระหว่าง ๑๒คน ถึง ๒๔ คน

$$= Pr(Y=12)+Pr(Y=13)+\ldots+Pr(Y=24)$$

$$= 1 - (Pr(Y=0)+Pr(Y=1)+\ldots+Pr(Y=11))-(Pr(Y=25)+$$

$$Pr(Y=26)+\ldots+Pr(Y=30))$$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{11}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y} - \sum_{y=25}^{30}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y} \quad \ldots(1)$$

เนื่องจากค่า $\sum_{y=25}^{30}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y}$ ไม่มีในตาราง ดังนั้นเราจึงต้องหาค่าดังกล่าวด้วยวิธีการดังนี้คือ

$$\sum_{y=25}^{30}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y} = 1 - \sum_{y=0}^{24}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y}$$

ซึ่งค่าของ $\sum_{y=0}^{24}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^y(\tfrac{1}{2})^{30-y} = .9998$

ดังนั้น $\sum_{y=25}^{30}\binom{30}{y}(\frac{1}{2})^{y}(\frac{1}{2})^{30-y} = 1 - .9998 = .0002$

และจากการเปิดค่า

$$\sum_{y=0}^{11}\binom{30}{y}(\tfrac{1}{2})^{y}(\tfrac{1}{2})^{30-y} = .1003$$

แทนค่าที่ได้ในสมการที่(1)

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเป็นนักเรียนชายระหว่าง 12 คน ถึง 24 คน = 1 - .1003

= .0002

= .8995

๗. จากการวิจัยทางการแพทย์พบว่า ๑๐% ของเด็กนักเรียนในชนบทเป็นโรคขาดอาหาร สุ่มนักเรียนจากโรงเรียนแห่งหนึ่งในชนบทมา ๓๐คน จงคำนวณหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. พบนักเรียนเป็นโรคขาดอาหารไม่เกิน ๓ คน (.6475)

ข. พบนักเรียนเป็นโรคขาดอาหารอย่างน้อย ๓คน (.5886)

ค. พบนักเรียนเป็นโรคขาดอาหารระหว่าง ๒ถึง ๔คน (.6409)

จากโจทย์ สุ่มนักเรียนมา 30 คน ดังนั้น

เด็กนักเรียนในชนบท 10% เป็นโรคขาดอาหาร ดังนั้นโอกาสที่จะเป็นนักเรียนขาดอาหารโดยที่สุ่มนักเรียนมา 1 คน 10/1000 = .1

นั่นคือ $p = .1$

$q = .9$

ให้ Y มีการแจกแจงแบบทวินาม

ก. ความน่าจะเป็นที่พบนักเรียนเป็นโรคขาดอาหารไม่เกิน 3 คน

$$\Pr(Y \leq 3) = \Pr(Y=3)+\Pr(Y=2)+\ldots+\Pr(Y=0)$$

$$= \sum_{y=0}^{3}\binom{30}{y}(.1)^{y}(.9)^{30-y}$$

$$= .6475$$

ข. ความน่าจะเป็นที่จะพบว่านักเรียนเป็นโรคขาดอาหารอย่างน้อย 3 คน

$= Pr(Y \quad 3)$

$= Pr(Y=30)+Pr(Y=29)+...+Pr(Y=4)+Pr(Y=3)$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{2} \binom{30}{y}(.1)^{y}(.9)^{30-y}$$

$= 1 - .4114 \qquad = \quad .5886$

ค. ความน่าจะเป็นที่จะพบนักเรียนเป็นโรคขาดอาหารระหว่าง 2 ถึง 4 คน

$= \; Pr(Y=2)+Pr(Y=3)+Pr(Y=4)$

$= .2277 + .2361 + .1771$

$= \; .6409$

๘. ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบทวินาม มีพารามิเตอร์เป็น n และ p ตามลำดับ จงสร้างการกระจายทวินาม(Binomial Expansion) สำหรับกรณีต่อไปนี้

ก. เมื่อ n=3 ข. เมื่อ n=5 ค. เมื่อ n=10

ก. เมื่อ n = 3

$$(q+p)^3 = \binom{3}{0}q^3+\binom{3}{1}q^2p + \binom{3}{2}qp^2 + \binom{3}{3}p^3$$

ข. เมื่อ n = 5

$$(q+p)^5 = \binom{5}{0}q^5 + \binom{5}{1}q^4p + \binom{5}{2}q^3p^2+\binom{5}{3}q^2p^3+\binom{5}{4}q\,p^4 + \binom{5}{5}p^5$$

ค. เมื่อ n = 10

$$(q+p)^{10} = \binom{10}{0}q^{10} + \binom{10}{1}q^9p + \ldots + \binom{10}{10}p^{10}$$

๙. ในการรณรงค์เพื่อปราบหนูนา เกษตรอำเภอได้เสนอให้ใช้วิธีให้รางวัลแก่บุคคลที่สามารถกำจัดหนู คิดเป็นมูลค่าตัวละ ๑ บาท โดยนำหางหนูไปเบิกเงิน ปรากฏว่าข้อเสนอนี้มีผู้เห็นด้วยและคัดค้านในจำนวนก้ำกึ่งกัน

ถ้าทำการสอบถามความเห็นเกี่ยวกับข้อเสนอนี้จากประชาชน ๒๐คน จงคาดหมายจำนวนประชาชนที่เห็นด้วย พร้อมทั้งคำนวณหาค่าความแปรปรวนของจำนวนผู้เห็นด้วย

(10,5)

จากโจทย์สุ่มประชาชนมา 20 คน นั่นคือ n = 20 คน

ความคิดเห็นของประชาชนในเรื่องนี้ก้ำกึ่งกันแสดงว่าประชาชนที่เห็นด้วยและไม่เห็นด้วยพอๆกัน ดังนั้นถ้าเราสนใจในเรื่องความคิดเห็นที่เห็นด้วยแล้ว และ p คือความน่าจะเป็นที่จะสุ่มประชาชนมา 1 คนแล้วคนๆนั้นตอบว่าเห็นด้วย ซึ่งจากปัญหานี้ $p = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ถ้าให้ Y คือตัวแปรสุ่มในปัญหานี้แล้ว

ฟังค์ชั่นการแจกแจงของ Y ก็คือ

$$Pr(Y=y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \; ; \; y=0,1,\ldots,n$$

$$Pr(Y=y) = \binom{20}{y} (\tfrac{1}{2})^y (\tfrac{1}{2})^{20-y} ; \; y=0,1,\ldots,20$$

ดังนั้น ค่าคาดหมายของ Y ก็คือ E(Y) และความแปรปรวนก็คือ V(Y)

โดยที่ $E(Y) = np = 20(\tfrac{1}{2}) = 10$

ดังนั้น ค่าคาดหมายของประชาชนที่เห็นด้วยจะมีจำนวน 10 คน

$$V(Y) = npq = 20(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = 5$$

ความแปรปรวนของจำนวนผู้ที่เห็นด้วยเท่ากับ 5 คน

๑๐. ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบทวินาม มีพารามิเตอร์เป็น n และ p=.05จงคำนวณหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X เมื่อ n=3,5และ 10

ก. เมื่อ n = 3, p =.05 q= .95

$$E(X) = npq$$

$$= 3(.05)(.95) = 0.15$$

ข. $n = 5 \quad p = .05 \quad q = .95$

$$E(X) = np$$
$$= 5(.05)$$
$$= 0.25$$
$$V(X) = npq$$
$$= 5(.05)(.95)$$
$$= 0.2375$$

ค. $n = 10 \quad p = .05 \quad q = .95$

$$E(X) = np$$
$$= 10(.05)$$
$$= 0.5$$
$$V(X) = npq$$
$$= 10(.05)(.95)$$
$$= 0.475$$

<u>การแจกแจงแบบปกติ</u> (Noraml Distributio)

ลักษณะของการแจกแจงแบบปกติจะมีลักษณะสำคัญพอสรุปได้ดังนี้

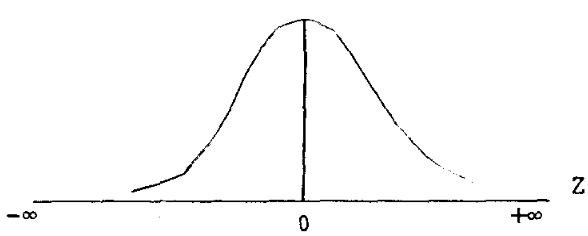
1. โค้งของการแจกแจงปกติเป็นรูประฆังคว่ำ และสมมาตรกัน

2. พื้นที่ใต้โค้งมีค่ารวมกันเท่ากับ 1

3. การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ μ และ σ^2 โดยที่ μ และ σ^2 จะทำหน้าที่บอกตำแหน่งที่ตั้งและรูปของโค้ง

<u>หมายเหตุ</u> ในการนำฟังก์ชั่นการแจกแจงแบบปกติไปใช้ในงานนั้นเราจะแปลงรูปตัวแปรสุ่มเดิม จาก $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ มาเป็นการแจกลแจงแบบมาตรฐานคือ Z โดยที่ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ซึ่งจะได้ว่า $Z \sim N(0,1)$ หมายความว่าตัวแปรเชิงสุ่ม Z จะมีการแจกลแงแบบปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรเป็น 0 และ 1 ตามลำดับ การที่ Z มีลักษณะเช่นนี้จะทำให้เราหาค่าความน่าจะเป็นหรือที่เราเรียกว่าค่าของพื้นที่ใต้โค้งได้ง่ายขึ้น โดยอาศัยตารางซึ่งคิดคำนวณไว้เรียบร้อยแล้ว

การหาพื้นที่ใต้โค้งของตัวแปรสุ่ม Z โดยอาศัยตารางนั้น ถ้านักศึกษาจะป้องกันความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นได้ง่าย ก็โดยการเขียนรูปประกอบซึ่งจะทำให้เข้าใจดียิ่งขึ้นและทำให้การคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งถูกต้องยิ่งขึ้น ขอให้พิจารณาดูจากลักษณะพื้นที่ใต้โค้งปกติดังนี้



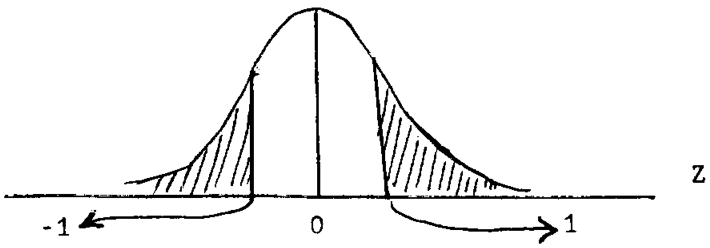
1. พื้นที่ใต้โค้งปกติของตัวแปรสุ่ม Z จะมีลักษณะเป็นรูประฆังคว่ำและสมมาตรกัน

2. ค่าของแกน Z จะเริ่มจากน้อย คือ$-\infty$ (ทางซ้ายมือ) มาจนถึง ค่า Z ด้านบวกคือ (ทางขวามือ)$+\infty$

3. ถ้าลากจากจุดสูงสุดของโค้งมาตัดกันกับแกน Z จะตั้งได้ฉากกับแกน Z ที่ 0 โดยที่

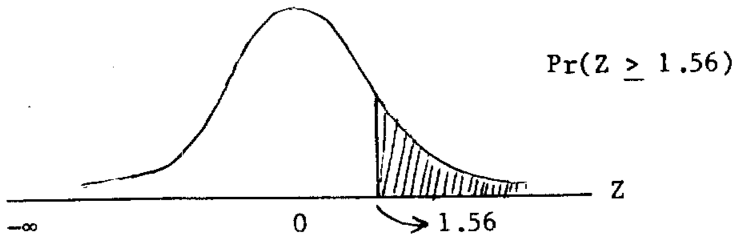
เส้นที่ลากมาตั้งฉากนี้จะแบ่งพื้นที่ใต้โค้งออกเป็น 2 ซีกเท่าๆกันคือ ซีกซ้ายและซีกขวามือ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ 0.5

4.



พื้นที่ใต้โค้งจะสมมาตรกัน หมายความว่าถ้าเราหาพื้นที่ระหว่างค่า Z ตั้งแต่ 0 ถึง 1 ได้พื้นที่เท่ากับ Z ตั้งแต่ -1 ถึง 0 ในทำนองเดียวกัน พื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ -∞ ถึง -1 ก็จะเท่ากับพื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ 1 ถึง ∞

5.



ถ้าเราจะเปิดหาพื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ 1.56 ถึง ∞ เราสามารถหาได้โดยการเปิดพื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ -∞ ถึง 1.56 แล้วนำไปหักออกจาก 1 อาจจะเขียนความสัมพันธ์ในรูป

$$Pr(Z > 1.56) = 1 - Pr(Z \le 1.56)$$

เปิดตารางหน้า 167 (ดูค่า Z=1.5 แล้วดูที่ตำแหน่งทศนิยมตำแหน่งที่2 ที่ .06)จะพบว่าพื้นที่ใต้โค้งของค่า Z ตั้งแต่ -∞ ถึง 1.56 มีค่าเท่ากับ 0.9406

ดังนั้น $Pr(Z \ge 1.56) = 1 - 0.9406$

$= 0.0594$ 0.05

ถ้าเราต้องการหาค่าพื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ - ∞ ถึง -1.56 จะใช้ค่าที่หาได้นี้เนื่องจากประโยชน์จากการสมมาตรกันของโค้งนั้นคือ $Pr(Z \le -1.56) = 0.0594$

ลองดูโดยการตรวจสอบเปิดจากตารางดูที่ค่า Z = -1.56 จะได้ค่าพื้นที่เท่ากับ 0.0592 ซึ่งเท่ากับวิธีที่เราคำนวณเอง

นักศึกษาจะต้องพยายามทำความเข้าใจในการเปิดตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติให้ดี เพราะเราจะต้องนำประโยชน์นี้ไปใช้ในเรื่องของการทดสอบสมมุติฐานในบทถัดไป มิใช่สิ้นสุดเพียงบทนี้เท่านั้น

<u>**แบบฝึกหัดที่** 3.2</u>

๑. จงอธิบายให้เข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปกติ

ให้อ่านคำอธิบายในหน้า 160 -161

๒. พารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปกติมีอะไรบ้าง พารามิเตอร์ทั้งสองมีความหมายต่อรูปร่างของโค้งปกติอย่างไร

ให้อ่านคำอธิบายในหน้า 161

๓. จงยกตัวอย่างตัวแปรสุ่มแบบปกติให้ดูอย่างน้อย ๒ตัว พร้อมทั้งแสดงเหตุผลด้วยว่า เพราะเหตุใดท่านจึงเชื่อว่าตัวแปรดังกล่าวมีการแจกแจงแบบปกติ

ให้คำอธิบายในหน้า 160

๔. การแจกแจงแบบปกติมีประโยชน์ต่องานด้านวิจัยหรือสถิติอนุมานอย่างไร

การแลกแจงแบบปกติมีประโยชน์ต่องานด้านวิจัยหรือสถิติอนุมานก็คือจะช่วยให้การคิดคำนวณง่ายขึ้น

๕. เมื่อ $X \sim N(100,225)$ จงคำนวณหา

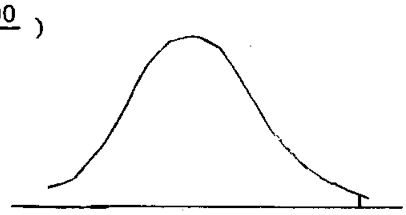
1. $Pr(X \leq 925)$	(.3085)
2. $Pr(X \geq 76)$	(.9452)
3. $Pr(X \leq 107.5)$	(.6915)
4. $Pr(X > 124)$	(.0548)
5. $Pr(77.5 \leq X < 100)$	(.4332)
6. $Pr(112 \leq X \leq 128.5)$	(.1832)
7. $Pr(91 \leq X \leq 127)$	(.6898)
18. $Pr(71.35 \leq X \leq 109)$	(.6976)

$X \sim N(100,225)$

$\mu = 100 \qquad \sigma^2=225 \qquad \therefore \sigma = 25$

โจทย์ข้อนี้เราจะต้องแปลงค่า X ให้กลายเป็น Z ซึ่งแปลงได้โดยที่ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

1. $\Pr(X \leq 925) = \Pr(\frac{X-100}{25} \leq \frac{925-100}{25})$



$= \Pr(Z \leq 33)$

≈ 1

ในตารางมีค่า $Z = 3.49$ ให้พื้นที่ใต้โค้งเท่ากับ .9998 ดังนั้น เมื่อ 33 จึงให้พื้นที่ใต้โค้ง ประมาณ .999... หรือประมาณ 1

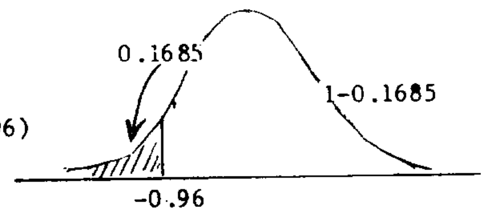
2. $\Pr(X > 76) = \Pr(\frac{X-100}{25} \geq \frac{76-100}{25})$

$= \Pr(Z \geq -0.96)$

$= 1 - \Pr(Z < -0.96)$

$= 1 - 0.1685$

$= 0.8315$

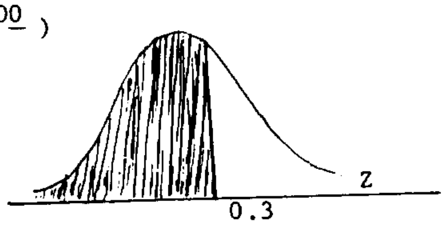


3. $\Pr(X \leq 107.5) = \Pr(\frac{X-100}{25} \leq \frac{107.5-100}{25})$

$= \Pr(Z \leq 0.3)$

$= \Pr(Z \quad 0.3)$

≈ 0.6179



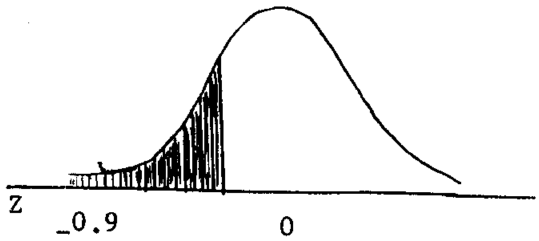
4. $\Pr(X \geq 124) = \Pr(\frac{X-100}{25} \geq \frac{124-100}{25})$

$= \Pr(Z > 0.96)$

$= 1 - \Pr(Z \leq 0.96)$

$= 1- .8315 \qquad = 0.1685$

5. $Pr(77.5 \leq X \leq 100) = Pr(\frac{77.5-100}{25} \leq \frac{X-100}{25} \leq \frac{100-100}{25})$

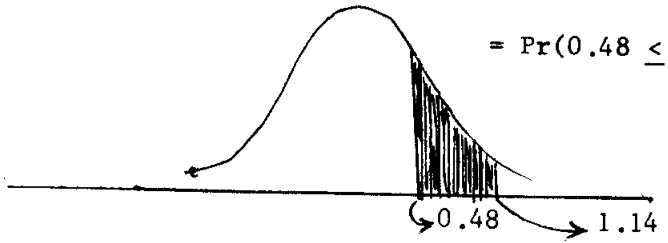


$= Pr(-0.9 \leq Z \leq 0)$

$= Pr(Z \leq 0) - Pr(Z \leq -0.9)$

$= .5 - 0.1841 \quad = 0.3159$

6. $Pr(112 \leq X \leq 128.5) = Pr(\frac{112-100}{25} \leq \frac{X-100}{25} \leq \frac{128.5-100}{25})$



$= Pr(0.48 \leq Z \leq 1.14)$

พิจารณารูปเราสามารถหาพื้นที่ระหว่าง 0.48 ถึง 1.14 ได้โดยการหาพื้นที่ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง 0.48

$\therefore \quad Pr(112 \leq X < 128.5) = Pr(Z \leq 1.14) - Pr(Z \leq 0.48)$

$= 0.8729 - 0.6844$

$= 0.1885$

7. $Pr(91 \leq X < 127) = Pr(\frac{91-100}{25} \leq \frac{X-100}{25} \leq \frac{127-100}{25})$

$= Pr(-0.36 < Z \leq 1.08)$

คิดในทำนองเดียวกันกับข้อ 6. จะได้ว่า

$Pr(91 < X \leq 127) = Pr(Z \leq 1.08) - Pr(Z \leq -0.36)$

$= 0.8599 - 0.3594$

$= 0.5005$

8. $Pr(71.35 \leq X < 109) = Pr(\frac{71.35-100}{25} \leq \frac{X-100}{25} \leq \frac{109-100}{25})$

$= Pr(-1.146 < Z \leq 0.36)$

$= Pr(Z \leq 0.36) - Pr(Z < -1.146)$

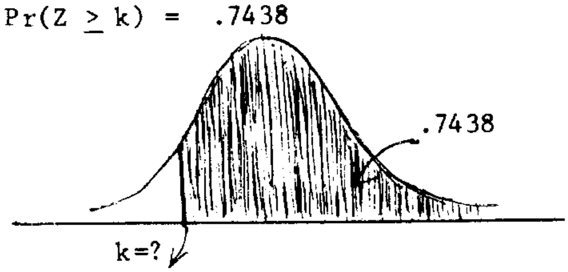
$= 0.6406 - 0.1271$

$= 0.5135$

๖. จงคำนวณหาค่า k จากสมการความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. $Pr(Z \geq k)$	=	.7438	(-0.655)
2. $Pr(Z \geq k)$	=	.6045	(-0.265)
3. $Pr(Z \geq k)$	=	.1200	(1.175)
4. $Pr(Z \geq k)$	=	.9984	(-2.914)
5. $Pr(Z \leq k)$	=	.8000	(0.842)
6. $Pr(Z \leq k)$	=	.1250	(-1.15)

1. $Pr(Z \geq k) = .7438$



ดูจากตารางในส่วนที่ให้ค่าพื้นที่ตรงกับ .7438 ว่าตรงกับค่า Z ที่เท่าไร

จากตารางจะเห็นได้ว่าค่าพื้นที่ตรงกับ .7438 ไม่มี ดังนั้น จึงพิจารณาหาค่าพื้นที่ใกล้เคียงคือระหว่าง $Pr(Z \leq 0.65)$ ให้พื้นที่ 0.7422 และ $Pr(Z < 0.66)$ ให้พื้นที่ 0.7454 ดังนั้นโดยวิธีการประมาณค่า (ใช้วิธีบัญญัติไตรยางค์ซึ่งที่จริงไม่ค่อยถูกต้องนัก แต่ในชั้นนี้ให้อนุโลมใช้ได้)

ค่า Z ต่างกัน C.01 ให้ค่าพื้นที่ต่างกัน 0.0032

ดังนั้น พื้นที่ 0.0032 ค่า Z ต่างกันประมาณ 0.01

พื้นที่ 0.0016 ค่า Z ต่างกัน $\frac{0.01 \times 0.0016}{0.0032} = .005$

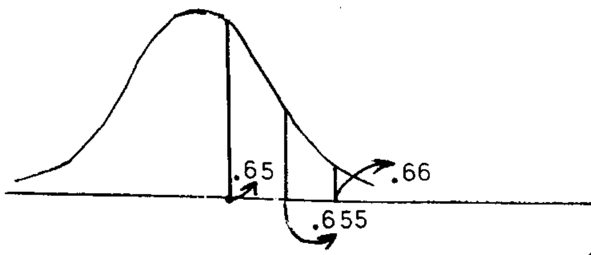
ดังนั้นค่า Z โดยประมาณ 0.655 จะให้พื้นที่ใต้โค้ง .7438

ให้พิจารณาจากรูปประกอบ ดังนี้

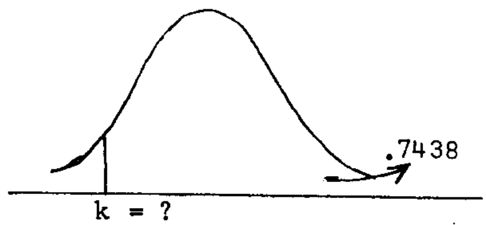
$\Pr(Z \quad 0.66) = .7454$

$\Pr(Z \quad 0.65) = .7422$

$\Pr(Z \quad 0.655) = .7438$



แต่พื้นที่ที่เราต้องการคือรูปนี้

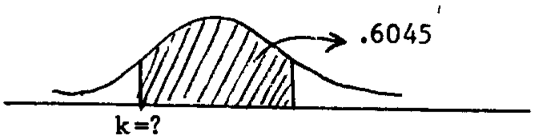


เนื่องจากโค้งปกติจะมีลักษณะสมมาตรกัน

$\therefore \quad \Pr(Z \geq -0.655) = 0.7738$

$k = -0.655$

2. $\Pr(Z \geq k) = .6045$



วิธีการเปิดตารางสำหรับปัญหานี้ให้เปิดที่ พื้นที่

$\Pr(Z \leq k) = 1 - .6045 = 0.3955$

เปิดตารางดูจะพบว่า

$$Pr(Z \leq -2.07) = 0.3936$$

และ $$Pr(Z \leq -2.08) = 0.3897$$

พื้นที่ต่างกัน 0.0039 ค่า Z ต่างกัน -.01

พื้นที่ต่างกัน 0.0019 ค่า Z ต่างกัน $\frac{-.01 \times .0019}{.0039} = -0.0048$

ดังนั้น ค่า Z -2.0752 จะให้พื้นที่ใต้โค้งเท่ากับ 0.3955

$$Pr(Z < -2.0752) = 0.3955$$

$$\therefore \quad Pr(Z \geq -2.0752) = 1 - 0.3955$$

$$= 0.6045$$

นั่นคือ $k = -2.0752$

3. $Pr(Z \geq k) = .1200$

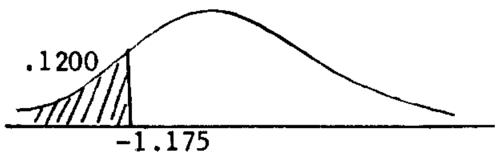
$$Pr(Z \leq -1.17) = .1210$$

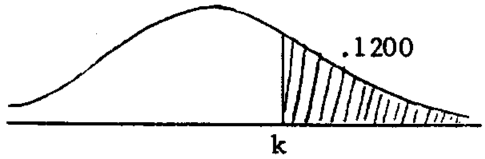
$$Pr(Z \leq -1.18) = .1190$$

พื้นที่ต่างกัน .0020 ค่า Z ต่างกัน -.01

พื้นที่ต่างกัน .0010 ค่า Z ต่างกัน $\frac{-0.01 \times .0010}{.0020} = -.005$

ดังนั้น $Pr(Z \leq -1.175) = .1200$





ดังนั้น เราจะหาค่า ที่ต้องการได้จากรูปที่ 2 โดยอาศัยประโยชน์จากรูปที่1

$$Pr(Z \geq 1.175) = .120$$

$$k = 1.175$$

4. $Pr(Z \geq k) = .9984$

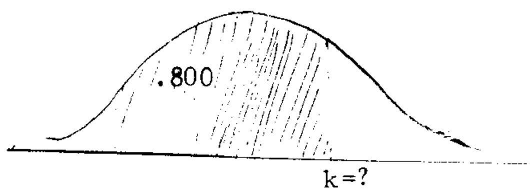
พิจารณาพื้นที่ด้านน้อยกว่า

$$Pr(Z \leq -k) = 1-.9984$$
$$= 0.0016$$

จากตาราง

$$Pr(Z < -2.94) = 0.0016$$
$$\therefore \quad Pr(Z \geq -2.94) = .9984$$
$$k = -2.9$$

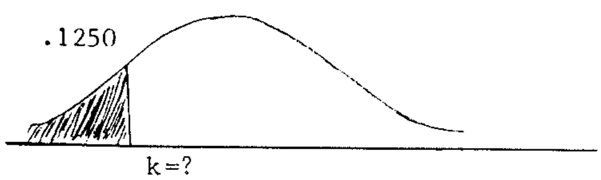
5. $Pr(Z \leq k) = .800$



จากตาราง $Pr(Z < .84) = .7995$

$Pr(Z \leq .85) = .8023$

6. $Pr(Z \leq k) = .1250$



$$\Pr(Z < -1.15) = 0.1251$$

ค่าประมาณของ k $= -1.15$

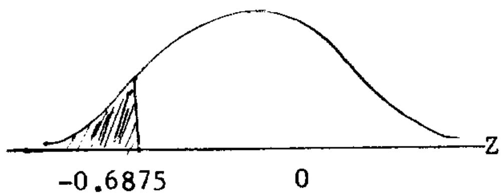
๗. นักเรียนมัธยมในโรงเรียนแห่งหนึ่งมี IQ โดยเฉลี่ยเท่ากับ ๑๐๖ ความแปรปรวนเท่ากับ ๒๕๖ จงคำนวณหาสัดส่วนของนักเรียนที่มีระดับ IQ ดังต่อไปนี้

1. IQ ไม่เกิน 95 (.3085)
2. IQ ไม่เกิน 130 (.9332)
3. IQอย่างน้อย 127 (.0948)
4. IQ ระหว่าง 94 ถึง 118 (.5468)

จากโจทย์ $\mu = 106$ (ค่าเฉลี่ย)

$\sigma^2 = 256$ (ความแปรปรวน), $\sigma = 16$

ให้ X คือ IQ ของนักเรียน $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$



$$\Pr(X \leq 95) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{95-106}{16}\right)$$

$$= \Pr(Z \leq -.6875) = \Pr(Z \leq -0,69)$$

$$= .2451$$

สัดส่วนของนักเรียนที่มี IQ ไม่เกิน 95 คือ .2451

2. IQ ไม่เกิน 135

$= \Pr(X < 135)$

$= \Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{135-106}{16})$

$= \Pr(Z \le 1.181)$

$= .9649$

∴ สัดส่วนของนักเรียนที่มี IQ ไม่เกิน 135 = .9649

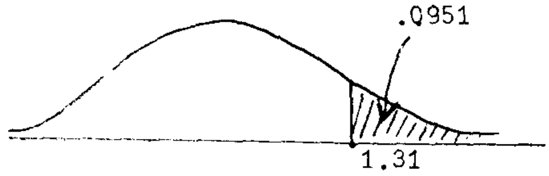
3. IQ อย่างน้อย 1'27

$\Pr(X \ge 127) = \Pr(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{127-106}{16})$

$= \Pr(Z \ge 1.31) = 1-\Pr(Z \quad 1.31)$

$= 1-.9049 = .095I$

∴ สัดส่วนของนักเรียนที่มี IQ อย่างน้อย 127 = .0951



4. IQ ระหว่าง 94 ถึง 118

$= \Pr(94 < X \le 118)$

$= \Pr(\frac{[illegible]}{16} \le \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{118-106}{16})$

$= \Pr(-0.75 \le z < 0.75)$

-0.75 0.75 $= \Pr(Z < 0.75)-\Pr(Z \le -0.75)$

$= 0.7734 - 0.2266 = 0.5468$

∴ สัดส่วนของนักเรียนที่มี IQ ระหว่าง 94 ถึง 118 = 0.5486