บทที่ 2

“ความน่าจะเป็น”

<u>ความน่าจะเป็น</u>

ผลทดลอง(Outcome) ก็คือผลลัพย์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด จากการทดลองหนึ่งๆเช่น

๑. การทดลองโยนเหรียญ๑อัน ๑ครั้ง

ผลทดลองที่เป็นไปได้ ก็คือจะเป็น หน้าหัว หรือ หน้าก้อย

๒. การโยนลูกเต๋า ๑ลูก ๑ครั้ง

ผลทดลองที่เป็นไปได้ ก็คือจะเป็น หน้า๑,หน้า๒,หน้า๓,หน้า๔,หน้า๕,หรือหน้า๖

๓ การยืนรอรถเมล์ที่ป้ายหน้ารามคำแหง(รอรถเมล์คันใดคันหนึ่งที่จะมาถึงป้าย)

ผลทดลองที่เป็นไปได้ รถเมล์สายที่๖๐,๗๑,๙๒,๖๒,๕๘,๙๓,๙๔,๙๕,๒๒

๔. การสอบในวิชา "สถิติ๑๐๓"

ผลการทดลอง(ผลสอบ)ที่เป็นไปได้ เกรด G,P,F

<u>หมายเหตุ</u> จะเขียน S เป็นเซทของผลลัยธ์ของการทดลอง เพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ

เช่น จากตัวอย่างที่๑ S = {H,T}

ตัวอย่างที่๒ S = {1,2,3,4,5,6}

ตัวอย่างที่๓ S = {60,71,92,62,58,93,94,95,22}

ตัวอย่างที่๔ S = {G,P,F}

แบบฝึกหัด

.. ถ้านักศึกษาคนหนึ่งลงทะเบียนเรียนในภาค๑/๒๕๒๐ จำนวน ๖ วิชา ให้เขียนผลลัพย์ที่จะสอบได้ (จำนวนวิชาที่สอบได้)

S = { , , , , , }

b. โยนลูก เต๋า๒ลูก พร้อมกัน ให้เซทของผลลัพย์นี้

S = {(1,1),(,),(,),(,),(,),(,)
(,),(,),(,),(,),(,),(,)
(,),(,),(,),(,),(,),(,)
(,),(,),(,),(,),(,),(,)
(,),(,),(,),(,),(,),(,)
(,),(,),(,),(,),(,),(6,6)}

<u>หมาย เหตุ</u>. (1.1) คือลูกที่๑ ได้หน้า๑ และลูกที่๒ได้หน้า๑

ค. การโยนเหรียญ๑อัน๒ครั้ง(หรือ ๒อัน ๑ครั้ง)

S = {(H,H),(,),(,)(,)}

โดยที่(H,H) หมายถึง ....

๔. ในการโยนเหรียญจากข้อ๓. ถ้าหากว่าเราจะกำหนดว่าการได้หัว H=1 และการโยนได้ก้อย

T = 0 ดังนั้น S = {(1,1),(,),(,),(,)}

๕. การกระทำต่อไปนี้ถือว่าเป็นการทดลองเชิงสุ่มหรือไม่

๕.๑ เภสัชกรผสมสาร A กับสาร B เข้าด้วยกันเพื่อดูปฏิกริยาที่เกิดขึ้น

คำตอบ..........................

๕.๒ นำไฮโดรเจน ๒อะตอมมาทำปฏิกริยากับอ๊อกซิเจน ๑ อะตอม

คำตอบ..........................

๕.๓ หยิบไพ่มา๒ใบจากไพ่๑สำรับ

คำตอบ.........................

๖. ไก่ของด.ญ.ตุ่มออกไข่มา ๔ ฟอง เธอจึงให้มันฟัก ทางที่เป็นไปได้สำหรับไข่ที่จะฟักออกมาเป็นตัวเลี้ยง จะเป็นอย่างไร(ใช้เลข๑ สำหรับไขใบที่ฟักออกมาเป็นตัว และ ๐สำหรับใบที่ไม่ฟักออกมาเป็นตัว)

S = {..................}

๗. ในการออกสลากกินแบ่งแต่ละครั้งเลขท้าย ๒ ตัวที่เป็นไปได้มีอะไรบ้าง

S = {..................}

<u>เหตุการณ์</u> (Event)

เหตุการณ์ก็คือเซทของผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองนั่นเอง

เหตุการณ์แยกออกเป็น ๑. เหตุการณ์แบบง่าย(Simple Event)

๒. เหตุการณ์ประกอบ(Compound Event)

<u>ข้อสังเกต</u> เรามักจะใช้อักษร A-Z เป็นสัญญลักษณ์แทนเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งที่เราศึกษา

๑. เหตุการณ์แบบง่าย ก็คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลลัพธ์เดียว เช่น

๑.๑ ถ้าโยนลูกเต๋า๑ลูก๑ครั้ง

S = {1,2,3,4,5,6} (เลข 1,2,3,4,5,6 ก็คือหน้าของลูกเต๋า)

ดังนั้น ถ้าให้ A = เหตุการณ์ที่จะได้หน้าหัว

A = {......... }

เราเรียก A ว่าเหตุการณ์แบบง่าย

๑.๒ การหยิบไพ่มา๑ใบ จากสำรับโดยสุ่มโดยที่ให้ได้ไพ่หน้า ๑๐และเป็นไพ่โพดำด้วย

S = { 1 โพดำ , 2 โพดำ ,............., J โพดำ , Q โพดำ , K โพดำ

1 โพแดง , ... , A โพแดง

1 ข้าวหลามตัด , ... , X ข้าวหลามตัด

1 ดอกจิก , ... , K ดอกจิก }

A = เหตุการณ์ได้ไพ่หน้า ๑๐ และโพดำ

A = { 10 โพดำ }

A = เหตุการณ์แบบง่าย

๑.๓ นายมีสังเกตว่ากล้วยตานีในสวนออกมาเป็นลักษณะคล้ายตัว เลข เลยคิดความออกว่า เป็นเลข ๔๔ เพื่อที่จะไปซื้อลอตเตอรี่

ถ้า B =เหตุการณ์ที่ลอตเตอรี่จะออกมาเป็นเลขท้าย ๔๔

S = { __, __,__, ... }

B =เหตุการณ์ ....

๒. <u>เหตุการณ์ประกอบ</u> (Compound Event)

เหตุการณ์ประกอบก็คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วย อย่างน้อยสมาชิก ๒ตัวจากเซทของ

๒.๑ โยนลูกเต๋า ๑ ลูก ๑ครั้ง

ถ้า A =เหตุการณ์ที่ได้เลขคู่

A = { 2,4,6 }

A =เหตุการณ์ประกอบ

๒.๒ โยนเหรียญ . อัน ๒ ครั้ง

S = { HH,HT,TH,TT}

ถ้า B =เหตุการณ์ที่โยนเหรียญแล้วได้ ๑ หัว และ๑ก้อย(ไม่คำนึงถึงว่าครั้งที่๑และครั้งที่๒ได้อะไร)

B = {HT,TH}

B = เหตุการณ์ประกอบ

๒.๓ มีผลไม้อยู่ ๓ ผล คือเงาะ,ส้ม,มังคุด ให้หยิบผลไม้มา ๓ ผล

S = {(ง,ส),(งทม),(ส,ม)}

A = {ผลไม้ประกอบด้วยเงาะ}

A = {................ }

A = { เหตุการณ์ประกอบ}

๒.๔ ในโจทย์ข้อ๔ ถ้าให้ C เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ทุเรียน C = { } เพราะว่าในเซท S ไม่มีสมาชิกกลุ่มใดที่ประกอบด้วยทุเรียน C จึงเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้

๒.๕ ถนนสายหนึ่ง ฝั่งซ้ายจอดรถได้เฉพาะวันคี่ ฝั่งขวาจอดได้เฉพาะวันคู่ในเดือนกุมภาพันธ์ ๒๕๒๙จงศึกษาเหตุการณ์ต่อไปนี้

ถ้า A_1 เป็นเหตุการณ์ที่รถจอดฝั่งซ้าย

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่รถจอดฝั่งขวา

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ให้จอดรถทั้งสองฝั่ง

A_4 เป็นเหตุการณ์ที่ให้จอดรถทั้งสองฝั่ง

จงเขียนเซทของ $A_i;i=1,2,3,4$ และอธิบายว่า A_i เป็นเหตุการณ์ชนิดใด

A_1 =เหตุการณ์ชนิด............

A_2 = { }

A_2 =เหตุการณ์ชนิด.............

A_3 = { }

A_3 =เหตุการณ์ชนิด.............

A_4 = { }

A_4 =เหตุการณ์ชนิด..............

๒.๖ ผู้นำชุมชนแห่งหนึ่งประกอบด้วยนายก. นายข.นายค.และนายง.ต่อมามีการพัฒนาท้องถิ่น มีผู้เสนอให้ใช้แผน"๐๐๑"ในการพัฒนาท้องถิ่น แต่ปรากฏว่าตกลงกันไม่ได้ว่าจะรับแผนนี้หรือไม่ จึงได้มีการเลือกคณะกรรมการซึ่งประกอบด้วยผู้นำชุมชนมา๒คน เพื่อพิจารณาว่าจะรับแผนนี้หรือไม่ (เป็นที่ทราบกันดีว่า ยายก.และนายข.ต้องการที่จะรับแผนนี้ แต่นายค.และนายง.ไม่ต้องการที่จะรับแผนนี้)

๑. เหตุการณ์ที่แผน๐๐๑ จะถูกรับ

๒. เหตุการณ์ที่แผน๐๐๑ จะถูกปฏิเสธ

๓. เหตุการณ์ที่ตัดสินไม่ได้

ค. **<u>ทีชคุณิตของเหตุการณ์</u>**

ค.๑ ผลรวมของเหตุการณ์

ตัวอย่างเช่น

ค.๑.๑ โยนลูกเต๋า๑ลูก๑ครั้ง

S = {1,2,3,4,56 }

A = เหตุการณ์ที่โยนได้เลขคู่ A ={ 2,4,6 }

B = เหตุการณ์ที่โยนได้เลขคี่ B ={ 1,3,5 }

AUB = ผลรวมของเหตุการณ์ = 1,2,3,4,5,6

C = เหตุการณ์ที่โยนได้เลขไม่เกิน ๓ = 1,2,3

AUC = เหตุการณ์ซึ่งโยนได้เลขคู่หรือไม่เกินเลข ๓

<u>ข้อสังเกต</u> เพื่อให้ง่าย ควรนำเซทของ A,C มาพิจารณาดังนี้

A = {2,4,6} C ={1,2,3}

AU C = {2,4,6} {1,2,3}

= {1,2,3,4,5,6}

โดยที่พิจารณาดูว่าสมาชิกใดใน A กับ C มีอะไรให้นำมารวมกันในเซททุกตัว (4,6,1,3) ตัวใดที่ซ้ำ(2) ให้นำมา๑ตัว ดังนั้น AUC= {1,2,3,4,5,6} เขียนเรียงใหม่เพื่อให้สะดวกในการอ่าน

ค.๑.๒ โยนลูกเต๋า๑ลูก๒ครั้ง

S = {(6,1),(6,2),...,(6,6),(5,1),...,(1,6)}

A = เหตุการณ์ที่จะได้ผลรวม (แต้ม)ของลูก เต๋าที่มีค่าน้อยกว่า๘แต่สูงกว่า๔

A = {(6,1),(5,2),(5,1),(4,3),(4,2),(3,4),(3,3) (2,5),(2,4) (1,6),(1,5)}; B = เหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมเท่ากับ๑๐พอดี

B = {(6,4),(5,5),(4,6)}

ดังนั้น AUB = เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้ม มีค่าน้อยกว่า ๘ แต่สูงกว่า๔หรือเท่ากับ๑๐

AUB = {(6,1),(6,4),(5,1),(5,2),(5,5),(4,2),(4,3)
(4,6),(3,3),(3,4),(2,4),(2,5),(1,5),(1,6)}

ค.๑.๓ จากข้อ ค.๑.๑

A ={ 2,3,4 } B = { 4,5,6 }

AUB ={........}

AUB = เหตุการณ์ที่.........................

๓.๑.๔ ถ้า A คือเหตุการณ์ที่คนไปเที่ยวเขาดินและจะเห็นกวาง

B คือเหตุการณ์ที่จะเห็นช้าง

$A \cup B$ คือเหตุการณ์อะไร...............

๓.๑.๔ ผู้ที่จะมาสมัครเป็นนักศึกษาของมหาวิทยาลัยรามคำแหงจะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

๑. เป็นผู้ที่มีพื้นความรู้ม.ศ.๕หรือเทียบเท่า

หรือ ๒. เป็นบุคคลที่รับราชการแล้วฐานะการรับราชการไม่ต่ำกว่าชั้นตรี

ก.จงสร้างเหตุการณ์(ย่อย)ขึ้นตามความเข้าใจภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้

ข.จงสร้างเหตุการณ์ที่แสดงว่าเป็นเงื่อนไขในการรับนักศึกษาของมหาวิทยาลัยรามคำแหง จากเหตุการณ์ย่อยในข้อ ก.

<u>คำตอบ</u> ให้ $A = \{x : x =$ บุคคลมีความรู้ม.ศ.๕หรือเทียบเท่า $\}$

$B = \{y : y =$ บุคคลที่รับราชการแล้วมีฐาน เทียบเท่าชั้นตรี$\}$

$A \cup B = \{$ บุคคลที่......................... $\}$

๓.๒ <u>ผลร่วมของเหตุการณ์</u>(Intersection or Product)

ถ้า A เหตุการณ์ย่อยของ S

B เหตุการณ์ย่อยของ S

เขียน ผลร่วมของเหตุการณ์ A และ B ได้ดังนี้

$A \cap B$

ตัวอย่างเช่น

๓.๒.๑ จากข้อ๓.๑.๑ A = เหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋าได้เลขคู่

B = เหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋าได้เลขคี่

$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\}$

$A \cap B = \{\ \}$ เนื่องจากในเซท A และเซท B ไม่มีสมาชิกร่วม(เหมือนกัน)เลย เหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า๑ลูก๑ครั้งแล้วได้หน้าลูกเต๋าเป็นทั้งเลขคู่และเลขคี่(เป็นไปไม่ได้)ลองเปรียบเทียบตัวอย่างนี้กับการโยนเหรียญ๑อัน๑ครั้ง

$S = \{H, T\}$

$A = \{H\}$ $B = \{T\}$

$A \cap B = \{\ \}$ หมายความว่า .... (เป็นไปไม่ได้)

ซึ่งได้ { } เป็นเซทว่างเปล่า

๓.๒.๒ ใช้ตัวอย่าง๓.๑.๔ เขียน A B และ อธิบายความหมาย

$A \Lambda B = \{ \quad \}$

$A \Lambda B$ ก็คือเหตุการณ์ที่...............

๓.๒.๒ ใช้ตัวอย่าง๓.๑.๔ เขียน $A \Lambda B$ และอธิบายความหมาย

$A \Lambda B = \{ \quad \}$

$A \Lambda B$ ก็คือเหตุการณ์ที่.....................

<u>หมายเหตุ</u> ที่ยกตัวอย่างมากล่าวถึงจะมีแค่๒เหตุการณ์ย่อยคือ A B ถ้าหากว่าเราเพิ่มจำนวนเหตุการณ์มากขึ้นเช่นอาจมี C,D,... การหา<u>ผลรวม</u>หรือผลร่วมของเหตุการณ์จะใช้หลักเดียวกันกับกรณีที่มี๒ เหตุการณ์ย่อย เช่นกัน เช่น ถ้ามี ๓ เหตุการณ์ย่อย A,B และ C คุณสมบัติที่ใช้ได้

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \Lambda (B \Lambda C) = (A \Lambda B) \Lambda C$
3. $A \cup (B \Lambda C) = (A \cup B) \Lambda (A \cup C)$
4. $A \Lambda (B \cup C) = (A \Lambda B) \cup (A \Lambda C)$

ให้นักศึกษาลองตรวจสอบคุณสมบัติ ๑-๔ โดยการให้

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4\}$ $C = \{2,4,6\}$

1. $A \cup (B \cup C) =$
2. $(A \cup B) \cup C =$
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

<u>หมายเหตุ</u> ในกรณีที่ A และ B ไม่มีส่วนร่วมกันเลย นั่นคือ $A \Lambda B = \{ \quad \}$ เราเรียก A และ B ว่าไม่มีส่วนร่วมกัน (Disjoint or Mutually Exclusive)

๓.๓ <u>ส่วนประกอบของเหตุการณ์</u> (Complement)

ให้ A เป็นเหตุการณ์ใดๆ เราเรียก $\bar{A}$ ว่าส่วนประกอบของ A (ความหมายของ $\bar{A}$ ก็คือเหตุการณ์ที่ไม่ใช่เหตุการณ์ A)ตัวอย่างเช่น

๓.๓.๑ การโยนลูกเต๋า๑ลูก๑ครั้ง A= เหตุการณ์ได้เลขคู่

$A = \{2,4,6\}$

$\bar{A}$ เหตุการณ์ที่ไม่ได้เลขคู่ $= \{1,3,5\}$

๓.๓.๒ ในกล่องใบหนึ่งบรรจุลูกหินอยู่ ๓ สีแดง เขียว ขาว

A เหตุการณ์หยิบลูกหินมา๑ลูกเป็นสีแดง = {แดง}

$\bar{A}$ เหตุการณ์หยิบลูกหินขึ้นไม่เป็นสีแดง(ความหมาย $\bar{A}$ คือหยิบลูกหินได้สีอื่นเช่น เขียวหรือขาว)

๓.๓.๓ ทุกวันที่นายก. เดินทางบนเส้นทางประตูน้ำกับราชเทวีเขาจะพบกับเหตุการณ์

A : เห็นขอทาน

B : เห็นฮิปปี้

C ; เห็นคนธรรมดา

1. $\bar{A}$ =
2. $A \cap B \cap C$ =
3. $A \cap (\overline{B \cup C})$ =
4. $(A \cup B) \cap \bar{C}$ =

จงอธิบายเหตุการณ์ดังกล่าว

๓.๓.๔ เป็นที่น่าสังเกตว่านักธุรกิจมักจะตายด้วยโรคกระเพาะอาหารและโรคหัวใจ

A = {ตายด้วยโรคกระเพาะอาหาร}

B = {ตายด้วยโรคหัวใจ}

จงอธิบายเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. $\bar{A}$ = ...
2. $\bar{A} \cup A$ = ...*.....
3. $A \cup B$ = ...
4. $A \cup \bar{B}$ = ...<......
5. $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ = ...*..*.

๔. <u>ผลต่างของสองเหตุการณ์</u>

A และ B เป็นเหตุการณ์ย่อยใน

A − B = เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเหตุการณ์ A แต่ไม่ได้อยู่ในเหตุการณ์ B

ตัวอย่าง

1. $A = \{1,3,5\}$ $B = \{3,4,5,6\}$

   $A-B = \{1\}$

2. $A = \{1,3,5\}$ $B = \{2,4,6\}$

   $A-B = \{\ \}$

3. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{2,4,5\}$

   $A-B = \{1,3,5\}$

4. $A = \{2,4,6\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

   $A-B = \{\ \}$

๔. ส่วนแบ่งของกลุ่มผลทดลอง (Partition)

ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ย่อยของ S โดยที่

๑. A_i ($i=1,2,\ldots,n$) ไม่มีส่วนร่วมกัน

เช่น $A_1 \cap A_2 = \{\ \}$

$A_1 \cap A_3 = \{\ \}$ 82

$\vdots$

$A_i \cap A_j = \{\ \}$ โดยที่ $i \neq j$ และ $i=1,2,\ldots,n$

$j=1,2,\ldots,n$

$\vdots$

$A_{n-1} \cap A_n = \{\ \}$

b . $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = S$

พิจารณาจากตัวอย่าง

๓.๔.๑ การโยนลูกเต๋า๑ลูก๑ครั้ง

$A = \{1,3,5\}$ $B = \{2,4,6\}$

จะได้ว่า A และ B เป็นส่วนแบ่งของ S เพราะว่า

1. $A \cap B = \{\ \}$
2. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

๓.๔.๒ การสรรหาอธิการบดีของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งผลที่เป็นไปได้คือ อธิการบดีจะต้องมาจากตัวแทนของกลุ่มบุคคลต่อไปนี้กลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง คือ คณบดีของคณะต่างๆในมหาวิทยาลัย ข้าราชการฝ่ายตุลาการที่ปลดเกษียรแล้ว ข้าราชการการเมือง และข้าราชการกลาโหม

ถ้าเหตุการณ์ที่๑ คือการที่จะได้อธิการบดีมาจากข้าราชการการเมือง

เหตุการณ์ที่๒ คือเหตุการณ์ที่อธิการบดีมาจากคณบดีของคณะต่างๆในมหาวิทยาลัยหรือข้าราชการฝ่ายตุลาการที่ปลดเกษียร

เหตุการณ์ที่๓ คือเหตุการณ์ที่อธิการบดีไม่มาจากข้าราชการการเมือง

จงหาเหตุการณ์ย่อยที่เป็นส่วนแบ่งของกลุ่มผลการทดลอง

S = {................}

A = {.........} B = {..........}

A,B คือเหตุการณ์ย่อยที่เป็นส่วนแบ่งของ S

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า A คือเหตุการณ์ใดๆ $\bar{A}$ ก็คือส่วนประกอบของเหตุการณ์

นั่นคือ A และ $\bar{A}$ คือส่วนแบ่งของ S เสมอ

การกำหนดความน่าจะเป็นแยกออกเป็น

๑.วิธีปรนัย(Object)

๑.๑หลักความจริงหรือเหตุผล

๑.๒หลักการทดลอง

๒.วิธีอัตนัย(Subject)

๑.วิธีปรนัย เป็นการกำหนดความน่าจะเป็นโดยอาศัยกฎเกณฑ์ที่แน่นอนพครจะเป็นผู้กำหนด ก็จะได้คำตอบที่เท่ากัน วิธีการนี้แบ่งเป็น

๑.๑หลักความจริง มีแนวทางในการที่จะกำหนดคือ

-กำหนด S

-กำหนดดูว่าเหตุการณ์ A ที่สนใจเป็นเหตุการณ์ชนิดใดคือ

เป็นเหตุการณ์แบบง่ายหรือเหตุการณ์แบบประกอบ ถ้าเป็นเหตุการณ์

ประกอบเหตุการณ์นั้นมีสมาชิกอยู่เท่าไร

สรุป ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ = $\dfrac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์A}}{\text{จำนวนสมาชิกทั้งหมดในเซทS}}$

เขียนเป็นสูตรทั่วๆไปคือ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)$ = ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้น

$n(A)$ = จำนวนสมาชิกที่อยู่ในเหตุการณ์ A

$n(S)$ = จำนวนสมาชิกที่อยู่ในเหตุการณ์ S

ตัวอย่าง

๑.โยนลูกเต๋า๑ลูก๑ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะโยนได้เลข๑

A = เหตุการณ์ที่ได้เลข๑

A = $\{1\}$ เป็นเหตุการณ์แบบง่ายมีสมาชิกเพียง๑สมาชิก

$n(A) = 1$

S = $\{1,2,3,4,5,6\}$ มี ๖สมาชิก

$n(S) = 6$

$P(A) = \dfrac{1}{6}$

B = เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่

$n(B)$ =

$n(S)$ =

$P(B)$ =

๒.โยนเหรียญ ๒อัน ๑ครั้ง

A = เหตุการณ์ที่ได้๑หัวและ๑ก้อย

P(A) = = ½

(หมายเหตุ: A เป็นเหตุการณ์ประกอบ A = {(H,T),(T,H)})

๓.จงหาความน่าจะเป็นที่เลขท้าย๒ตัวที่ออกแล้วตัวท้ายจะเป็นเลข ๐

S = {00,01,02,...,99}

ใน มีสมาชิกอยู่ทั้งหมด ๑๐๐ สมาชิก วิธีคิดถ้าไม่อยากจะเขียนไล่ออกมาเนื่องจากเสียเวลา ให้ใช้วิธีการของ การเรียงลำดับ(Permutation ดูตอนที่เกี่ยวกับเรื่องนี้ได้) มาใช้จะสะดวกและง่ายกว่ามาก S = {00,01,02,...,99}

A = {00,10,20,...,90}

P(A) = (P(A)=10/100)

๔. จงหาความน่าจะเป็นที่จะไปสนามหลวงโดยการนั่งรถเมล์ต่อเดียวจากมหาวิทยาลัยรามคำแหง

P(A) =

๕. ป้ายทะเบียนรถประกอบด้วยเลข ๔ หลัก นายกก. ต้องการให้รถของเขาได้เลขตัวเดียวกันทั้ง ๔ ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่รถของนายก. จะได้เลขเดียวกันทั้ง ๔ ตัว

P(A) = (P(A)=10/10^4)

๑.๒หลักการทดลอง(Empirical)

อาศัยหลักของการทดลอง เพื่อกำหนดความน่าจะเป็นมีวิธีการคือ ทำการทดลองเชิงสุ่มซ้ำๆกัน n ครั้ง และเฝ้าสังเกตุความถี่ของเหตุการณ์แต่ละอย่างที่เกิดขึ้น จากนั้นจึงนำข้อสนเทศ (Information) ที่ได้มากำหนดเป็นความน่าจะเป็น(ประมาณ)

ดังนั้น

$$P(A) = f/n$$

โดยที่ P(A) คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์

f คือความถี่(จำนวนครั้ง)ที่เกิดเหตุการณ์ A ขึ้น

n จำนวนครั้งของการทดลอง

<u>ข้อสังเกตุ</u> ยิ่งทำการทดลองมากครั้งเท่าใด($n \to \infty \equiv n$ โตมากๆ)ก็จะยิ่งทำให้ค่าประมาณของความน่าจะเป็นใกล้เคียงกับค่าจริงมาก

ตัวอย่าง เช่น

๑. นำตัวอ่อนของกุ้งที่ได้จากการผสมพันธ์ภายในห้องทดลองไปปล่อยในทะเล ปรากฏว่าลูกกุ้งสามารถมีชีวิตอยู่ได้เพียง ๑แสนตัวจากที่นำไปปล่อยทั้งหมด๕แสนตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ ตัวอ่อนของกุ้งจากห้องทดลองจะมีชีวิตรอดในทะเล

$$P(A) = f/n = \frac{100,000\text{ตัว}}{500,000\text{ตัว}} = \frac{1}{5}$$

๒. ปี ๒๕๒๐ มีการสอบบรรจุปลัดอำเภอทั่วประเทศ มีผู้สมัครสอบทั้งสิ้น ๓,๐๐๐คน แต่ตำแหน่งที่จะรับได้มีเพียง ๖๐๐ ตำแหน่ง จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะสอบบรรจุได้

๓. จากโจทย์ข้อ๒ เป็นที่ทราบกันว่าตำแหน่งทั้ง๖๐๐ตำแหน่งนั้น แยกเป็น ส่วนกลาง ๑๕๐ ตำแหน่ง ส่วนภูมิภาค ๓๕๐ ตำแหน่ง จงหาความน่าจะเป็นที่คนที่สอบบรรจุได้จะถูกบรรจุในส่วนกลาง

๔. จากการสำรวจคนในกรุงเทพฯพบว่าในหนึ่งแสนคนจะตายด้วยโรคหัวใจ ๔ คน ด้วยโรคมะเร็ง ๓คน ด้วยวัณโรค ๗คน

๑.จงหาความน่าจะเป็นที่คนใดคนหนึ่งในกรุงเทพฯจะตายด้วยโรคหัวใจ

๒. " " มะเร็ง

๓. " " วัณโรค

๔. " " มะเร็งหรือวัณโรค

๕. " " หัวใจหรือวัณโรค

๖. " " หัวใจหรือมะเร็งหรือวัณโรค

๒. <u>วิธีอัตนัย</u>(Subjective) วิธีนี้เป็นวิธีที่ไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัวในการหาค่าความน่าจะเป็นโดยอาศัยข้อสนเทศ(Information) ของผู้ที่ทำการหาค่า เช่น ในการโยนลูกเต๋าถ้าหากผู้เล่นเป็นเซียน(สามารถกำหนดเอาไว้ว่าจะให้อะไรขึ้น หรือการแข่งม้าแข่งผู้ที่เล่นก็จะไปถามผู้ที่ทำการขี่ม้าแข่งแต่ละตัว เพื่อหาข้อมูลเช่นความสมบูรณ์ของม้า การขับขี่ของจ๊อกกี้ เป็นต้น เพื่อนำมาประกอบในการตัดสินใจก่อนที่ จะแทงเบอร์ลักษณะเช่นนี้เป็นการกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์โดยการพิจารณาจากข้อสนเทศ(Information) ประกอบกับการชั่งใจตนเองประกอบ

<u>คุณสมบัติของฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็น</u>

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไม่ได้แน่ๆแล้ว $P(A) = 0$

เขียนเป็นเซท $A = \{\ \}$

เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน $P(A) = 1$

$A = S$

๒. ๒.๑ A_1, A_2 เป็น เหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน เลย นั่นคือ

$$A_1 \cap A_2 = \{ \}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

๒.๒ ถ้า A_1 และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่มีส่วน ร่วมกันกัน

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

การนำคุณสมบัติดังกล่าวไปใช้เช่น

<u>ตัวอย่าง</u>ที่ความน่าจะ เป็นของเหตุการณ์ต่างๆมีดังนี้

1. P(A) = 0.2 P(B) = 0.7 P(C) = 0.1

2. P(A) = -0.5 P(B) = 0.8 P(C) = 0.7

3. -P(A) = 0.4 P(B) = 0.6 P(C) = 0.2

โดยที่ AUBUC = S และ A,B,C เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมกันเลย (Pairwise disjoint)

จงตรวจสอบดูว่าข้อใดที่ไม่มีคุณสมบัติของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น

1. 1.1 P(A) 0 , P(B) 0 , P(C) 0

1.2 AUBUC = S

P(AUBUC) = P(S)

∵ P(AUBUC) = P(A)+P(B)+P(C)

= 0.2+0.7+0.1 = 1

เนื่องจาก A,B และ C ไม่มีส่วนร่วมกันเลย

ดังนั้นข้อ มีคุณสมบัติของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น

2. ไม่เป็น เพราะว่า ....

....

3. ไม่เป็นเพราะว่า ....

....

<u>หมายเหตุ</u> ให้ตรวจสอบคุณสมบัติทั้ง๒ข้อของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น ถ้าขาดข้อใดข้อหนึ่งไม่ได้

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าเราทราบ P(A) เราจะสามารถหา $P(\bar{A})$ ได้โดยที่ $P(\bar{A}) = 1-P(A)$

เนื่องจาก $A \cup \bar{A} = S$; $A \cap \bar{A} = \{ \}$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$$

<u>การแจงนับผลการทดลอง</u>

๑.ใช้หลักการคูณ บางทีเรียกว่าการแจกแจงแบบ

เช่น การเดินทางจากเมือง ก. ไปยังเมือง ข.มีถนนอยู่ ๕สาย และจากเมือง ข.ไปยังเมืองค. มีถนนอยู่ ๓ สาย ดังนั้นวิธีที่จะเดินทางจากเมือง ก.ไปยังเมือง ค. โดยผ่านเมือง ข. จะมีทั้งหมดกี่วิธี

	๑		๑	
	๒		๒	
ก	๓	ข	๓	ค
	๔			
	๕			

จำนวนวิธี

$$
\begin{array}{lll}
S = (1,1),(1,2),(1,3) & \ldots 3 \text{ วิธี} & \\
\quad\ \ (2,1),(2,2),(2,3) & \ldots 3 \text{ วิธี} & \\
\quad\ \ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & \vdots & 15 \text{ วิธี} \\
\quad\ \ (5,1),(5,2),(5,3) & \ldots 3 \text{ วิธี} &
\end{array}
$$

มีอยู่ ๑๕ วิธี = 5 x 3

= (หนทางจาก ก ไปข) x (หนทางจาก ข ไป ค)

<u>แบบฝึกหัด</u>

๑. โยนเหรียญ ๑อัน ๒ครั้ง จงเขียนจำนวนวิธีโดยใช้หลักการคูณ

ครั้งที่๑	ครั้งที่๒	
H	H	
	T	๔วิธี
T	H	
	T	

จำนวนวิธี

๒. โยนลูกเต๋า๑ลูก ๓ครั้ง

จำนวนวิธี ....

๓. ครอบครัวหนึ่งมีบุตร ๓คน จงเขียนหนทางที่เป็นไปได้ในเรื่องเพศของบุตร

....

๔. มีเลขอยู่ ๒หลัก (หลักสิบและหลักหน่วย)

เราจะสร้างเลขได้กี่จำนวน ....

๕. มีทางเข้าห้องประชุมอยู่ ๔ทาง (และออก)

คนจะเข้าและออกห้องประชุมนั้งได้กี่วิธี ....

๖. จากโจทย์ในข้อ๕. ถ้ากำหนดว่าจะเข้าและออกประตูเดิมไม่ได้

หนทางที่จะเข้าและออกห้องประชุมมีกี่วิธี ....

๗. จะสร้างเลขได้กี่จำนวนจากตัวเลขต่อไปนี้ ๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ ๗ โดยที่มีข้อแม้ว่าห้ามใช้เลขซ้ำกันในแต่ละหลักและต้องมีค่าจำนวนละไม่เกิน ๕๐๐

ข้อแม้ที่กำหนดมีดังนี้ ๑. เลขหนึ่งจำนวนมี ๓หลัก

๒. ในเลข๓หลักนั้นห้ามใช้เลขซ้ำกัน

๓. เลข ๓หลักต้องสร้างจากเลขชุดนี้คือ ๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ ๗

๔. เลขแต่ละจำนวนต้องไม่เกิน ๕๐๐

คำตอบ	เลขหลักร้อย	เลขหลักสิบ	เลขหลักสิบ
	—	—	—

เพื่อให้สะดวกแก่การคิดคำนวณเราควรเริ่มคิดจากเลขหลักร้อยก่อนในตำแหน่งนี้เรามีสิทธจะเลือกเลขมาใส่ได้แค่ ๑ ๒ ๓ และ ๔(ข้อห้ามไม่ให้เลขจำนวนนี้เกิน ๕๐๐) วิธีเลือกเลขในตำแหน่งหลักร้อยมี ๔วิธี

การเลือกเลขในตำแหน่งหลักสิบ ที่จริงเรามีสิทธิเลือกได้ตั้งแต่ ๑ - ๗ แต่เนื่องจากถูกจำกัดตัวยว่าห้ามใช้เลขซ้ำกัน ดังนั้นเมื่อเลือกไปให้ตำแหน่งหลักร้อย ๑ตัว(๑ ๒ ๓ ๔)ที่เหลือจึงมีแค่ ๖ตัว พิจารณาจาก กลุ่ม ๑ ๒ ๓ ๔ จะเหลือแค่ ๓ตัว

กลุ่ม ๕ ๖ ๗ จะมีแค่ ๓วิธี

ดังนั้นวิธีในการเลือกทั้งหมดจึงแค่๖ตัวสำหรับเลขหลักสิบ

การเลือเลขหลักหน่วยก็ล้ายคลึงกับการเลือก เลขหลักสิบเพียงแต่ว่าข้อจำกัดจะเพิ่มขึ้นเนื่องจากว่าถูก กำหนดโดยหลักร้อยและหลักสิบแล้ว ดังนั้นเลขหลักหน่วยจึงยังคงมีสิทธิที่จะเลือกมาใส่แค่ ๕ตัว

ดังนั้นวิธีที่จะสร้างจำนวนเลข (โดยมีคุณสมบัติตามที่ต้องการ)

	หลักร้อย		หลักสิบ		หลักหน่วย		
=	4	x	6	x	5	= 120	วิธี (จำนวน)

๘. ในการสร้างเลขชุดหนึ่ง โดยที่เลขชุดนี้มี <u>หลักมากที่สุด</u> ๓หลัก จากเลข ๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ เราจะสร้างเลขได้กี่จำนวน(ห้ามใช้เลขซ้ำกัน) เลขชุดนี้มีหลักมากที่สุด ๓หลัก หมายความว่า เลขชุดนี้ประกอบด้วย

๑ เลขที่มี ๑หลัก (หลักหน่วยหลักเดียว)

๒ เลขชุดที่มี๒หลัก (หลักหน่วยและหลักสิบ)

๓ เลขชุดที่มี ๓หลัก (หลักหน่วย,หลักสิบ,และหลักร้อย)

วิธีการหาเลขชุดนี้

๑ เลขชุดที่มี ๑หลักจะมีอยู่ ....จำนวน

๒ เลขชุดที่มี ๒หลักจะมีอยู่ ....จำนวน (ใช้หลักการคิดเช่นเดียวกับข้อ๗)

๓ เลขชุดที่มี ๓หลักจะมีอยู่ ....จำนวน

เลขชุดนี้(โดยมีหลักมากที่สุด๓หลัก) จะประกอบด้วย

= จำนวนเลข ๓หลัก + จำนวนเลข ๒หลัก +จำนวนเลข ๑หลัก

= ๑๒๐+๓๐+๖ = ๑๕๖ จำนวน

๔. นักศึกษาปี๑ แต่ละคนในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จะต้องลงทะเบียนเรียนวิชา ภาษาอังกฤษ, วิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์, และภาษาต่างประเทศ ถ้าหากว่าเงื่อนไขในการลงทะเบียนมีดังนี้

ภาษาต่างประเทศ มี ๔ กลุ่มให้เลือกเพียง ๑

วิทยาศาสตร์ มี ๕ กลุ่มให้เลือกเพียง ๑

สังคมศาสตร์ มี ๓ กลุ่มให้เลือกเพียง ๑

ภาษาอังกฤษ มีกลุ่มเดียวทุกคนจะต้องลง

ให้หาวิธีทั้งหมด ที่นักศึกษาคนหนึ่งๆจะเลือกเรียนได้ครบทั้ง๔วิชา

∴ หนทางที่จะเลือกเรียนทั้ง ๔วิชา จะมีอยู่ .... หนทาง

๒<u>การจัดลำดับ</u>(Permutation) คือการคิดความแตกต่างที่เกิดขึ้น เนื่องจากการสลับอันดับที่ของสิ่งของที่นำมาเรียงกัน จุดประสงค์ที่ต้องการเพื่อที่จะหาวิธีการทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการจัดอันดับของสิ่งของ ตัวอย่างเช่น ๑๒ กับ ๒๑ เราถือว่าแตกต่างกัน ถ้าเมื่อใดที่คิดว่าลำดับที่ของของมีความสำคัญจะเป็นเรื่องของการจัดอันดับ

เพื่อให้สะดวกแก่การคิดจะขอแยกรายละเอียดออกเป็น

๑. มีของอยู่ n จำนวนนำมาจัดอันดับทีละ r จำนวนวิธีการจัดคือ nPr

โดย n คือจำนวนของทั้งหมดที่มีอยู่

r คือจำนวนของที่จะนำมาจัดอันดับ

P คือ สัญลักษณ์ที่จะนำมาคิดวิธีการจัดอันดับของn สิ่งจาก rสิ่ง

$$nP = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ความหมาย $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$

เช่น $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

ตัวอย่าง มี ตัวเลขอยู่๓ตัวนำมาเรียงลำดับทีละ๒ตัวจะได้วิธีทั้งหมด

$$3P2 = 3!/(3-2)! = 3.2.1/1 = 6$$

<u>หมายเหตุ</u> ค่า n และ r จะต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม และค่า $r \leq n$

ในกรณีที่มีของอยู่ n สิ่ง และเลือกมาจัดอันดับทีละ n สิ่งจะได้วิธีทั้งหมด

$$nPn = n!/(n-n)! = n!$$

<u>โดยมีข้อแม้สังเกตว่า</u> $0! = 1$ และ $1! = 1$ *******

๒. ในกรณีของการจัดอันดับ n สิ่งโดยที่แต่ละสิ่งมีทางที่จะนำมาใช้มีไม่จำกัดวิธีที่จะจัดอันดับ r ทั้งหมด $_nP_1r = n^r$

ตัวอย่างเช่น หาจำนวนวิธีที่เลขในล็อตเตอรี่แต่ละงวดจะเป็นไปได้

เลขแต่ละจำนวนจะประกอบด้วยเลข ๗หลัก และเลขแต่ละหลักสามารถใช้ได้ตั้งแต่เลข ๐,๑,๒,๓,๔,๕,๖,๗,๘,๙ โดยที่เลขแต่ละตัว เรามีสิทธิที่จะใช้ได้ซ้ำๆกันโดยไม่มีข้อจำกัด

จาก $_nP_1r = n^r$

โดยที่ $n = 10$ (เลข ๐-๙ มีอยู่ ๑๐ตัว)

$r = 7$ (นำมาจัดอันดับ๗อันดับ)

$_nP_1r = 10^7$

ดังนั้นล็อตเตอรี่๑งวดจะประกอบด้วย 10^7 ใบ

ปัญหา

๑. ในการโยนเหรียญ๑อัน๒๐ครั้ง จะมีจำนวนหนทางที่หน้าหัวและหน้าก้อยจะขึ้นเป็นอย่างไร

.... (2^{20}วิธี)

๒. คน ๓คนจะมีทางที่จะเกิด(วันในปี)ได้ต่างๆกันอย่างไร (คิดเรียงลำดับคนที่๑-คนที่๓)

....

๓. โยนลูกเต๋า ๔ลูกพร้อมกันจงหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

....

๓ หลักของการจัดวงกลม โดยที่เรามีของอยู่n สิ่งนำมาเรียงวงกลมทีละn สิ่ง

ดังนั้นจำนวนวิธีในการเรียง $_nP_2n = (n-1)!$

ตัวอย่าง มีเด็กชายอยู่ ๕ คนนำมาเรียงเป็นวงกลมทีละ๕ คนจะได้วงกลมต่างๆกันกี่วง

$$_5P_25 = (5-1)!$$
$$= 4!$$

๔ ถ้ามีของอยู่ n สิ่งและใน n สิ่งมีของที่ซ้ำๆกันอย่างที่ ๑มีซ้ำๆกันn_1 สิ่ง อย่างที่๒ มีซ้ำๆกันn_2 สิ่ง ....อย่างที่ k มีซ้ำๆกันn_k สิ่ง

จะมีวิธีการจัดสลับที่ได้ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่าง มีตัวอักษรอยู่ ๗ตัวคือ ALGEBRA

จะจัดคำใหม่ที่ประกอบด้วยอักษรทั้ง ๗ ตัวได้กี่คำ

ในปัญหานี้มีอักษรอยู่ ๗ตัวนั่นคือ $n = 7$

โดยที่มี Aซ้ำกันอยู่ 2ตัว; $n_1 = 2$

ดังนั้นจำนวนคำที่จะสร้างได้ $\dfrac{7!}{2!} = 7x6x5x4x3$ วิธี

<u>ปัญหา</u>

๑. ประสับอักษรในคำว่าCOLLEGE ให้เป็นคำใหม่ได้กี่คำ

$7!/2!)$

๒. ประสับอักษรในคำว่าTENNESSEE ได้เป็นคำใหม่ได้กี่คำ

$9!/2!4!2!$

๓. มีอยู่กี่วิธีในการจะจัดเรียงลูกปัดสีแดง ๔ลูก สีขาว ๕ลูก และสีน้ำเงิน ๓ลูกให้สลับสีกันในแถวเดียวกัน

<u>วิธีทำ</u> มีลูกปัดสีแดงซ้ำกันอยู่ ๔ ลูก

ลูกปัดสีขาวซ้ำกันอยู่ ๕ ลูก

ลูกปัดสีน้ำเงินซ้ำกันอยู่ ๓ ลูก

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะร้อยลูกปัดให้สลับสีกัน $\frac{12!}{4!5!3!}$ วิธี

๔. มีลูกปัดอยู่๗ลูก๗สี จะนำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือได้ต่างๆกันอยู่กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> นำลูกปัด ๗ลูก ๗สีมาร้อยเป็นวงกลมโดยสลับสีกัน $6!$ วิธี

$$= (7-1)!$$

๕. จงแสดงว่า $(n+1)Pr = (nP(r-1)).(n+1)$

$$\therefore (n+1)Pr = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!}$$

$$(nP(r-1)).(n+1) = \frac{n!}{(n-r+1)!}.(n+1)$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!}$$

$$= (n+1)Pr$$

๖. จงแก้สมการหาค่าของ n

$$nP5 = 20(nP3)$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} = 20.\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = 20.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 20n(n-1)(n-2)$$

$$n(n-1)(n-2)$$

$$(n-3)(n-4) = 20$$

$$n^2-7n-8 = 20$$

$$(n-8)(n+1) = 0$$

$$n = 8,-1$$

แต่ค่า n มีเฉพาะ +

$$\therefore \quad n = 8$$

๗. จงหาค่าของ $_5P_1+{}_5P_2+{}_5P_3+{}_5P_4+{}_5P_5$

$_5P_1+{}_5P_2+{}_5P_3+{}_5P_4+{}_5P_5$

$$= \frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{1!}+\frac{5!}{0!}$$

$$= 5 + 5\times4 + 5\times4\times3 + 5\times4\times3\times2 + 5\times4\times3\times2\times1$$

$$= 5 + 20 + 60 + 120 + 120$$

$$= 370$$

๘. มีอยู่กี่วิธีที่ในชั้นหนึ่งจะมีการเลือกตั้งที่ประกอบด้วย ประธาน รองประธาน เลขานุการและเหรัญญิก จากนักเรียนในชั้นที่มีทั้งหมด ๑๐๐ คน

มีนักเรียนอยู่ ๑๐๐ คน เลือกมา ๔ คน เพื่อรับหน้าที่ต่างๆดังกล่าว ถ้าเราใช้สูตร

นั่นหมายความว่าเรามีตำแหน่งต่างๆอยู่ ๔ ตำแหน่งโดยที่แต่ละตำแหน่งขึ้นอยู่กับอันดับของการเลือก เช่นถ้านายก. ถูกเลือกครั้งที่ ๑ นายก.จะได้เป็นประธาน แต่ถ้านายก.ถูกเลือกครั้งที่ ๒ นายก.จะได้เป็นรองประธานดังนี้เป็นต้น

ดังนั้นวิธีที่จะเลือกตั้งครั้งนี้ $= {}_{100}P_4$

$$= \frac{100!}{96!} \text{ วิธี}$$

$$= 100.99.98.97 \text{ วิธี}$$

๙. มีอยู่กี่วิธีในการที่จะจัดให้เด็กชาย ๔ คนและเด็กหญิง ๓ คนนั่งเรียงกันตามที่นั่งที่จัดไว้ให้ ๗ ที่ โดยที่มีเงื่อนไขดังนี้

๙.๑ ใครจะนั่งที่ใดก็ได้โดยไม่มีข้อแม้

มีคนทั้งหมด ชาย + หญิง = 4 + 3 = 7 คน

มีที่นั่งทั้งหมด = 7 ที่

โดยที่วิธีการนั่งก็เปรียบเสมือนกับการเรียงลำดับกัน

วิธีทั้งหมด $7P7 = 7!/0! = 7/1 = 7$ ... = 7

โดยที่ $n = 7$, $r = 7$, $0! = 1$

ดังนั้นวิธีการจัดคนให้นั่งตามเงื่อนไขที่กำหนด 7!

๙.๒ การนั่งจะต้องมีข้อแม้ว่าเด็กชายและเด็กหญิงจะต้องนั่งสลับกัน

แนวคิด การที่จะเป็นดังที่โจทย์ต้องการได้ จะต้องให้เด็กชายสองคนนั่งที่นั่งแรกและที่นั่งสุดท้าย วิธีคิดที่จะให้สะดวกก็คือ คิดว่าเรามีที่นั่งแค่ ๔ที่ก่อน (ภายหลังจึงนำมาเสริม) ในที่นี้ให้เป็นที่นั่งเบอร์ ๑,๓,๕,๗ ว่างเรียงอยู่ติดกัน แล้วจึงจัดให้เด็กชายนั่งก่อน คิดจำนวนวิธีที่ได้ และในแต่ละวิธีที่เด็กชายนั่งนั้น เราสามารถที่จะจัดเด็กหญิงให้นั่งได้โดยการแทรกเก้าอี้ระหว่างเก้าอี้ของเด็กชาย เพื่อให้สะดวก จะกำหนดเป็นที่นั่งเบอร์ ๒,๔,๖ แล้วจึงจัดเด็กหญิงให้นั่งได้คำนวณว่าได้กี่วิธี (ใน๑วิธีของการจัดที่นั่งให้เด็กชาย)

ดูรูปประกอบ

จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดให้เด็กทั้งหมดนั่งภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

= จำนวนวิธีในการจัดให้เด็กชายนั่ง x จำนวนวิธีในการจัดให้เด็กหญิงนั่ง

= $4P4$ x $3P3$

= $4!$ x $3!$

= $4! \times 3!$ วิธี

(หมายเหตุ วิธีการคำนวณ ใช้หลักการคูณ กับการจัดลำดับมารวมกัน)

๑๐. มีอยู่กี่วิธีในการที่จะจัดให้เด็กชาย ๔คนและเด็กหญิง ๔คนนั่งในเก้าอี้แถวหนึ่งที่มี๘ที่นั่ง โดยที่มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

๑๐.๑ ทุกคนจะนั่งอย่างไรก็ได้ ....วิธี

๑๐.๒ เด็กหญิงต้องนั่งสลับกับเด็กชาย ให้ใช้แนวคิดเช่นเดียวกับข้อ ๙.๒

($2 \times 4! \times 4!$)

หมายเหตุ มาจากการที่เด็กชายนั่งหัวท้าย๑วิธีและเด็กหญิงนั่งหัวท้ายอีก ๑วิธี= 2 วิธี)

๑๑. มีอยู่กี่วิธีที่จะจัดให้คน๘คนนั่งเป็นวงกลม

จำนวนวิธี ....วิธี

๑๒. มีอยู่กี่วิธีที่ชาย๘คนจะนั่งเรียงเป็นวงกลมโดยที่ชาย๒คนที่กำหนดไว้จะต้องนั่งติดกัน

หลักการคิด เพื่อให้ง่ายควรจะคิดว่าเรามัดชาย๒คนที่กำหนดไว้ให้นั่งติดกัน เวลาคิดจะได้สะดวกเพราะจะเหลือแค่ ๗คน (๖คนกับ๑คู่)

ดังนั้นนำ ๗สิ่ง (๖คนกับ๑คู่) มาเรียงเป็นวงกลมได้ $6!$ วิธี

(ถ้าเรา เกิดต้องการมีชายสามคนให้ติดกันก็จะมีวิธีการสลับได้ 3! วิธี)

ดังนั้นวิธีที่จะจัดให้ชายแปดคนนั่งเรียงเป็นวงกลมโดยที่มีข้อแม้ว่าชายสองคนที่กำหนดจะต้อง

นั่งติดกัน = 2!x6!

(ใน๒วิธีที่ชายสองคนที่กำหนดสลับกัน จะจัดให้ชายคนอื่นนั่งเรียงเป็นวงกลมได้ 6!วิธี)

๑๓. จะสร้างระหัสได้กี่วิธีโดยที่ระหัสที่ต้องการประกอบด้วย ตัวอักษร(ภาษาอังกฤษ)๒ตัวในสองตำแหน่งแรก ส่วนอีก๓ตำแหน่งต่อไปประกอบด้วยตัวเลข(๐-๙) โดยมีข้อแม้ว่าห้ามใช้ตัวเลขหรือตัวอักษรซ้ำกันเลย

แนวคิดให้คิดส่วนแรกก่อนว่ามีกี่วิธีแล้วนำมาคูณกับจำนวนวิธีในส่วนที่สอง(ส่วนของตัวเลข)

จำนวนวิธีในส่วนแรก(ตัวอักษร) 24P2

n = 24 (จำนวนตัวอักษร A-Z มีอยู่ 24 ตัว) เลือกมาใช้ r ตัว r=2

จำนวนวิธีในส่วนที่สอง(ตัวเลข) 10P3

n = 10 (จำนวนตัวเลข ๐-๙ มีอยู่ 10 ตัว เลือกมาใช้ r ตัว r = 3

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะได้ระหัสต่างๆกัน 24P2 x 10P3 ระหัส

$$= \frac{24!}{22!} \times \frac{10!}{7!}$$

$$= (24\times23)\times(10\times9\times8)$$

<u>การเลือกหมู่</u> (Combination)

การเลือกหมู่คือการจัดของโดยไม่คำนึงถึงอันดับแต่คำนึงถึงว่าในแต่ละกลุ่มที่เลือกนั้นมีสมาชิกอะไรบ้าง ถ้าหากว่ามีสมาชิกเหมือนกันก็ถือว่าเป็นกลุ่มเดียวกัน โดยไม่ได้คำนึงว่าใครจะเข้าก่อนเข้าหลัง

ตัวอย่างเช่น มีนายก.นายข. นายค. และนายง. เลือกมาเป็นกรรมการ๒คนจะได้กี่วิธี

วิธีที่จะเลือกได้มีดังนี้ กข ขค คง กค ขง กง

พิจารณา การเลือกได้ กข กับการเลือกได้ ขก ถ้าหากว่าเราไม่ถือว่าเป็นกลุ่มที่แตกต่างกัน(ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน)วิธีการทั้งหมดที่จะจัดกลุ่มภายใต้ปัญหานี้คือ

กข(ขก) กค(คก) คง(งค) ขง(งข)

กง(งก) ขค(คข)

ซึ่งถ้าเราถือว่าเป็นการจัดอันดับก็จะได้ ๑๒ วิธี

จัดหมวดหมู่จะได้ ๖ วิธี

<u>ข้อสังเกต</u> จำนวนวิธีของการจัดหมู่จะน้อยกว่าจำนวนวิธีของการจัดอันดับ

สูตรทั่วไปเพื่อใช้ในการหาจำนวนวิธีในการจัดหมู่

ถ้าเรามีของอยู่ n สิ่ง จะจัดกลุ่มละ r สิ่ง

จำนวนวิธีที่จะจัดหมู่(กลุ่ม) = nCr

โดยที่ C คือสัญลักษณ์ของการคิดวิธีใน Combination

$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

จะเห็นว่าการจัดอันดับจะมีวิธีมากกว่าการจัดหมู่อยู่ r! วิธี

เปรียบเทียบ

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

นั่นคือ

$$nCr = \frac{nPr}{r!}$$

นั่นเอง

ปัญหา

๑. จงหาค่าของ

๑.๑ 7C4 (35)

๑.๒ 10C2 (45)

๑.๓ 21C19 (210)

๒. จงหาค่าของ 8C3+8C4+8C5+8C6+8C7+8C8 (211)

๓. มีอยู่กี่วิธีในการที่จะเลือก คณะกรรมการชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยคน๕คนจากคนทั้งกลุ่มที่มี ๒๕คน

๔. มีสมาชิกพรรค ปปป.อยู่๑๘คน สมาชิกพรรคสปทอยู่ ๒๕คน จะเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่งที่ประกอบด้วยคน ๕คนโดยที่ ๕คนนี้จะต้องมาจากพรรคปปป ๒คนและมาจากพรรค สปท ๓คน

แนวคิดให้นำวิธีการจัดหมู่กับวิธีการหาวิธีโดยการคูณมาใช้ร่วมกันดังนี้

จากพรรคปปปมีอยู่ ๑๘ คนให้เลือกมา ๒คน = 18C2 = 18!/16!2!

พรรคสปท ๒๕ คนให้เลือกมา ๓คน = 25C3 = 25!/22!3!

ดังนั้นวิธีการที่จะเลือกทั้งหมด

$$= \frac{18!}{16!2!} \times \frac{25!}{22!3!}$$

$$= \frac{18.17.25.24.23}{2.1.3.2.1}$$ วิธี

บทที่๒

๑. การกระทำต่อไปนี้ถือว่าเป็นการทดลองเชิงสุ่มหรือไม่

ก. นำ Hydrogen ๒ อะตอมมาทำปฏิกริยากับ Oxygen ๑ อะตอม

คำตอบ ไม่ใช่ เพราะเราสามารถทราบผลลัพย์ที่จะเกิดขึ้นว่าเป็นน้ำแน่ๆ

ข. การมีชีวิตต่อไปในอนาคตของแต่ละบุคคล

คำตอบ ใช่ เพราะเราไม่สามารถกำหนดได้ว่าคนๆนั้นจะมีชีวิตอยู่ต่อไปยาวนานแค่ใด

ค. การซื้อสลากกินแบ่ง

คำตอบ ใช่

ง. การเลือกตั้งสมาชิกสภาผู้แทนราษฎร

คำตอบ ใช่

จ. ราคาของสินค้าเมื่อราคาน้ำมันเพิ่มขึ้น

คำตอบ ไม่ใช่เพราะเราทราบว่าถ้าราคาน้ำมันสูงขึ้นราคาของสินค้าต้องสูงขึ้นตามแน่ๆ

๒. จะสร้างเลขได้กี่จำนวนโดยที่แต่ละจำนวนมีลักษณะดังนี้

ก. มีเลข ๓ หลัก

$$S = \{000,001,...,999\}$$

จำนวนที่จะสร้างได้มี $10^3 = 1000$ จำนวน เพราะแต่ละหลักมีทางเป็นไปได้ ๑๐ ทาง (เลข ๐-๙) ดังนั้น เลข ๓ หลัก

ดูวิธีการสร้างได้จากเรื่อง Tree diagram ในตอนต่อไป

ข. ห้ามมีเลขซ้ำกัน

$$S = \{012,013,...789\}$$

จำนวนเลขที่ต้องการมีทั้งสิ้น = 10x9x8 = 782 จำนวน

วิธีการสร้างก็คือ เลขแต่ละหลักเรามีสิทธิใส่ได้ ๑๐ ตัว(๐-๙)แต่มีข้อแม้ว่าจะต้องไม่ซ้ำกัน วิธีการคิดมีดังนี้คือ

หลักที่๑(หลักร้อย) เลือกใส่ตัวเลขได้ ๑๐ ทาง

หลักที่๒(หลักสิบ) เลือกใส่ตัวเลขได้ ๙ ทาง (เพราะห้ามซ้ำกับหลักที่๑)

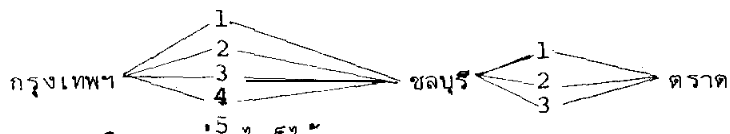
หลักที่๓(หลักหน่วย) เลือกใส่ตัวเลขได้ ๘ ทาง (ห้าซ้ำกับเลขหลักร้อยและหลักสิบ)

ดังนั้นหนทางทั้งหมดในการที่จะสร้างจำนวนตัวเลข = 10x9x8 = 872 จำนวน

๓.มีถนนเชื่อมจากกรุงเทพถึงชลบุรีอยู่๕สาย และจากชลบุรีถึงตราดมีถนนเชื่อมอยู่๓สาย จงหาวิธีที่จะเดินทางไปกลับ กรุงเทพถึงตราด โดยมีข้อแม้ดังนี้

๑. เดินทางอย่างไรก็ได้

๒.การเดินทางไปกลับไม่ใช้ถนนสายซ้ำกัน



๑. เดินทางอย่างไรก็ได้

การเดินทางไปกลับจากกรุงเทพฯ-ตราดจะเดินทางได้ดังนี้คือ

(๑๑๑๑) หมายความว่าใช้ถนนสาย ๑ จากกรุงเทพไปชลบุรี และใช้ถนนสาย๑ จากชลบุรีไปตราด ขากลับก็ใช้ถนนสาย ๑ จากตราดมาชลบุรี และใช้ถนน สาย๑ จาก ชลบุรีเข้ากรุงเทพฯ

:

(๕๓๓๕) หมายความว่าใช้ถนนสายที่๕ จากกรุงเทพไปชลบุรีและใช้ถนน สายที่๓ จากชลบุรีไปตราดในทำนองเดียวกันก็ใช้ถนนสายที่๓ จากตราดมาชลบุรี และใช้ถนนสายที่ ๕ จากชลบุรีเข้ากรุงเทพฯ

S = {(1111),(1121),...(5335)}

∴ จำนวนวิธีที่จะเดินทางไปกลับระหว่างกรุงเทพและตราด

$$= \underbrace{5x3}_{\text{ไป}}\underbrace{x3x5}_{\text{กลับ}} = 225 \quad \text{วิธี}$$

๒. การเดินทางไปกลับโดยไม่ใช้ถนนซ้ำกันเลย

หมายความว่าถ้าเราเดินทางจากกรุงเทพ-ชลบุรี-ตราด โดยถนนสายที่๑ และ ๑ ก็ห้ามกลับโดยถนนสายที่๑ และสายที่๑ หรือถ้าเดินทางจากกรุงเทพไปชลบุรีโดยถนนสายที่ ๓ และเดินทางจากชลบุรีถึงตราดโดยถนนสายที่ ๒ เวลากลับจากตราดมาชลบุรีก็ห้ามใช้ถนนสายที่ ๒ และห้ามใช้ถนนสายที่ ๓ จากชลบุรีมากรุงเทพ เป็นต้น

<u>วิธีการคิด</u> จากกรุงเทพไปชลบุรี(ขาไป)และจากชลบุรีไปตราด มีหนทางทั้งสิ้น

	1			
	2			
	3		1	
กรุงเทพ	4	ชลบุรี	2	ตราด
	5		3	

การเดินทางมีจำนวนทั้งสิ้น 5x3 =15 วิธี

จากตราดไปชลบุรีและชลบุรีไปกรุงเทพ(ขากลับ)

เงื่อนไขในการคิดก้ามเดินทางกลับโดยใช้ถนนซ้ำกันกับขาไป

ดังนั้นจำนวนหนทางที่เดินทางจากตราดไปชลบุรีจะเหลือเพียง 2 ทาง

และจำนวนหนทางที่จะเดินทางจากชลบุรีเข้ากรุงเทพจะเหลือ 4 ทาง

∴ หนทางที่จะเดินทางทั้งสิ้นก็คือ $2 \times 4 = 8$ ทาง

ดังนั้นหนทางที่จะเดินทางไปกลับจากกรุงเทพถึงตราดโยผ่านชลบุรีจะมี $\underset{\text{ไป}}{\underline{15}} \times \underset{\text{กลับ}}{\underline{8}} = 120$ ทางโดยที่ไม่ใช้ถนนสายเดิม

๔.นักศึกษาปี๑ในมหาวิทยาลัยต้องลงทะเบียนวิชาดังนี้ ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ สังคมวิทยา และจิตวิทยา โดยมีเงื่อนไขดังนี้

ภาษาอังกฤษมี ๔กลุ่ม ให้เลือก ๑กลุ่ม

คณิตศาสตร์มี ๓กลุ่ม ให้เลือก ๑กลุ่ม

สังคมวิทยามี ๒กลุ่ม ให้เลือก ๑กลุ่ม

จิตวิทยามี ๑กลุ่ม ต้องลงทุกคน

จงหาวิธีทั้งหมดที่มีนักศึกษาคนหนึ่งๆจะลงทะเบียนเรียน

วิธีที่นักศึกษาคนหนึ่งๆจะเลือกลงทะเบียนได้ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

$S = \{(E_1, M_1, S_1, P), (E_2, M_1, S_1, P), \ldots, (E_4, M_3, S_2, P)\}$

โดยที่ (E_1, M_1, S_1, P) หมายความว่าเลือกเรียนภาษาอังกฤษกลุ่มที่๑ คณิตศาสตร์กลุ่มที่๑ สังคมวิทยากลุ่มที่๑ และจิตวิทยา(มีกลุ่มเดียวไม่ต้องเลือก)

แบบฝึกหัด ๒.๒

๑. นักศึกษาคนหนึ่งลงทะเบียน ๖วิชา จงเขียนเซทของผลลัพย์ที่จะสอบได้(จำนวนวิชาที่จะสอบได้)

คำตอบ

คำตอบ $S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

0 หมายความว่า สอบไม่ได้เลย

1 หมายความว่าสอบได้ ๑ วิชา

.

6 สอบได้ทุก วิชา (๖วิชา)

๒. โยนลูกเต๋า๒ลูก๑ครั้ง ให้เขียนเซทของผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้(เติมให้ครบ)

s = { (1,1),(   ),(   ),(   ),(   ),(   )

(2,1),..............................

(3,1),..............................

(4,1),..............................

(5,1),..............................

(6,1),.............................. }

(1.1) คืออะไร

S = {(1,1),(1,2)(1,3)(1,4)(1,5),(1,6)

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),95,6)

(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

ความหมาย (1,1) คือโยนลูกเต๋าลูกที่๑ ได้หน้า ๑ และลูกที่๒ ได้หน้า ๑

(6,2) คือโยนลูกเต๋าลูกที่๑ได้หน้า ๖ และลูกที่๒ได้หน้า ๒

๓.

$$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

โดยที่ (T,H) คือการโยนเหรียญอันแรกได้หน้าก้อยและเหรียญอันที่๒ได้หัว

๔. ถ้ากำหนดว่า โยนเหรียญได้หัว =1และก้อย=0 ดังนั้น

ในปัญหาที่๓ จะเขียน S ได้ดังนี้คือ

S = { (1,1),( ),( ),( ) }

$$S = \{(1,1).(1.0),(0.1).(0,0)\}$$

๕. นำหลอดไฟ๓หลอดมาตรวจสอบดูว่าใช้ได้หรือไม่ จงเขียน Sample Space

S = {(ดี,ดี,ดี),(ดี,ดี,เสีย),(ดี,เสีย,ดี),(ดี,เสีย,เสีย),(เสีย,ดี,ดี)
(เสีย,ดี,เสีย),(เสีย,เสีย,ดี),(เสีย,เสีย,เสีย)}

๖. สุ่มนักศึกษามา๓คน เมื่อถามว่าเขาเห็นด้วยกับการที่จะเปิดมหาวิทยาลัยสุโขทัยหรือไม่ จงเขียนคำตอบที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด

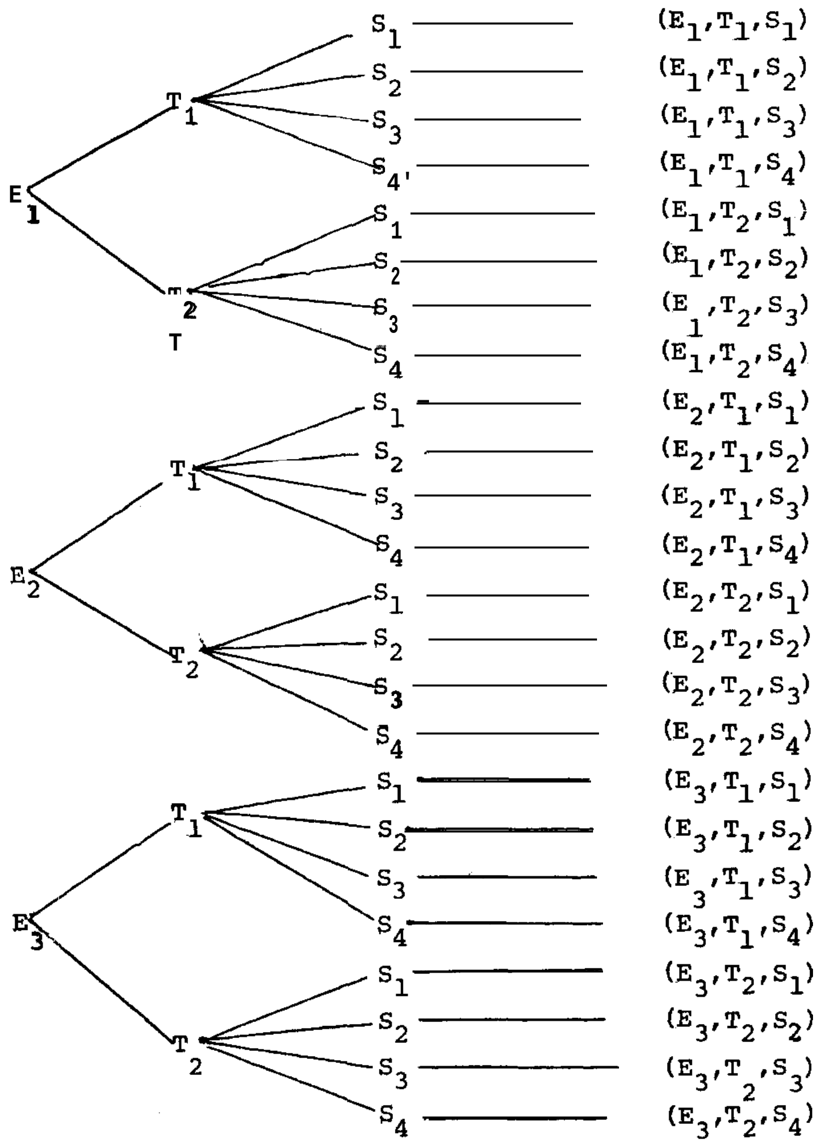
$$S = \{(Y,Y,Y),(Y,Y,N),(Y,N,Y),(Y,N,N),(N,Y,Y),(N,Y,N)$$
$$(N,N,Y),(N,N,N)\}$$

โดยที่ Y = เห็นด้วย

N = ไม่เห็นด้วย

๗. นักศึกษาที่ลงทะเบียนวิชาปีหนึ่ง จะต้องลงทะเบียนวิชาบังคับ๓วิชา คือวิชา EN101 ซึ่งมีอยู่ 3section
วิชา TH101 มีอยู่ 2 sectionและวิชา SO103ซึ่งมี 4 section
จงเขียน Sample space ของ การ เลือก เรียนวิชาบังคับทั้งสาม

S =



แบบฝึกหัด ๖.๓

๑. คำว่า PROBABILITY ถ้านำมาเรียงกันเป็นคำใหม่จะได้ทั้งหมดกี่คำ

อักษรในคำนี้มีอยู่ ๑๑ ตัว $n = 11$

ตัวที่ซ้ำคือ B มีอยู่ ๒ ตัว $r_1 = 2$

I มีอยู่ ๒ ตัว $r_2 = 2$

ดังนั้นวิธีการที่จะเขียนเรียงคำใหม่ให้ใช้หลักของการเรียงวัตถุ n สิ่ง ซึ่งมีวัตถุ k สิ่งที่ซ้ำกันอยู่อย่างละ r_i สิ่ง $= \dfrac{n!}{r_1!r_2!}$

ดังนั้นจะจัดเรียงวัตถุในที่นี้คืออักษรได้ทั้งหมด

$$= \frac{11!}{2!2!}$$

$$= 9979200 \quad \text{คำ}$$

๒. ในปัญหาข้อ๑. คำที่ขึ้นต้นด้วย L มีกี่คำ

หลักการคิดให้ใส่ L ไว้เป็นตัวอักษรที่ ขึ้นต้นในคำนั้นแล้วพิจารณาตำแหน่งของอักษรที่เหลือ(อีก๑๐ที่) ว่าจะสลับได้กี่วิธี

ดูรูปประกอบ

L _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

อักษรที่เหลือคือ P R O B A B I T Y

ในอักษรที่เหลือมีอักษรซ้ำกันอยู่ ๒ กลุ่มคือ

B	มีซ้ำกันอยู่	2	ตัว
I	มีซ้ำกันอยู่	2	ตัว

ดังนั้น ตั้งแต่ตำแหน่งที่ ๒ ถึงตำแหน่งที่๑๐ จะจัดอักษรสลับกันได้

$$= \frac{10!}{2!2!}$$

$$= 907200 \quad \text{วิธี}$$

∴ คำที่ขึ้นต้นด้วย L จะมีจำนวน 907200 คำ

๓. เลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพฯในแต่ละหมวดมีกี่หมายเลข

<u>หมายเหตุ</u> หมายเลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพฯ เป็นเลข ๔หลัก แต่ละหมวดคือขึ้นต้นด้วยตัวอักษรในภาษาไทย)

แนวคิด หมายเลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพจะประกอบด้วยหมายเลขดังต่อไปนี้

_	_	_	_	_
ตัวอักษร	๑	๒	๓	๔

ในกลุ่มของตัวเลขมี ๔ หลัก (หลักที่๑-๔) ในแต่ละหลักเรามีสิทธิใส่เลขได้ดังนี้ ๐-๙ (๑๐ตัว) ดังนั้น ถ้ายึดตามหลักการใช้ Tree diagram จะได้จำนวนหมายเลขในแต่ละหมวดดังนี้คือ

10	x	10	x	10	x	10
หลักที่๑		หลักที่๒		หลักที่๓		หลักที่๔

$\therefore$ ในแต่ละหมวดจะมี $= 10^4 = 10000$ หมายเลข

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าคิดทุกหมวดรวมกัน(สมมุติว่ามีหมวด ก-ฮ) ซึ่งมี ๔๔ ตัวอักษร ดังนั้นจะมีหมายเลขทั้งหมดเป็นเท่าไร การคิดก็ยังคงเป็นแนวเดิมเพียงแต่เราต้องเพิ่มอักษรเข้าไปอีก๑ ตำแหน่ง

ดังนั้นหมายเลขทุกหมวด

44	x	10	x	10	x	10	x	10
หมวด ก-ฮ		หลักที่๑		หลักที่๒		หลักที่๓		หลักที่๔

$= 44 \times 10^4 = 440000$ หมายเลข

๔. มีเลขอยู่ ๖ ตัว คือ ๓,๗,๔,๘,๕,๒
จะนำสร้างเลขหลักสิบได้กี่จำนวน

แนวคิด เลขหลักสิบคือเลขแต่ละจำนวนที่ประกอบด้วยเลข ๒ ตัว

_	_
หลักสิบ	หลักหน่วย

ใช้วิธีการคิดเป็นแบบ Tree diagram เข้าช่วย

เลขหลักสิบมีสิทธิใส่ได้ 3,7,4,8,5,2 (6 ตัว)

เลขหลักหน่วยมีสิทธิใส่ได้เพียง 5 ตัว เพราะหลักสิบใช้ไปแล้ว ๑ ตัว

ดังนั้น จะมีเลขหลักสิบทั้งสิ้นในปัญหานี้ $6 \times 5 = 30$ จำนวน

๕. ในปัญหาที่๔ ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าเลขหลักสิบจะต้องขึ้นต้นด้วยเลขคู่ เลขดังกล่าวที่ต้องการจะมีกี่จำนวน

(ข้อแนะนำ ให้จัดเลขหลักสิบก่อนด้วยเลขคู่ ที่เหลือจึงค่อยนำไปจัดเลขหลักหน่วย)

เลขหลักสิบที่เป็นไปได้ก็คือ(ต้องเป็นเลขคู่) 4 ,8, 2 (๓วิธี)

เลขหลักหน่วยจะเป็นอะไรก็ได้ที่เหลือจากการจัดเลขหลักสิบแล้ว ซึ่งจะมีอยู่ 5 ตัว

ดังนั้น เลขหลักสิบที่ขึ้นต้นด้วยเลขคู่ของปัญหานี้จะมี 3 x 5 = 15 จำนวน

๖. มีหนังสือ ST 103อยู่ ๔เล่ม PY103 อยู่๑๐เล่ม MA112 อยู่ ๖เล่ม และPC103 อยู่ ๗เล่ม จะเรียงเข้าทั้งหนังสือได้กี่วิธี

วิธีการในการจัดเรียงหนังสือเข้าตู้ ให้ยึดหลักของการจัดดังนี้ ดูว่ามีหนังสือทั้งหมดกี่เล่ม และหนังสือที่เหมือนกัน(ชนิดเดียวกัน)มีอย่างละกี่เล่ม แล้วใช้หลักของการจัดของ n สิ่งโดยที่แต่ละสิ่งมีซ้ำกันอยู่ชนิดละ r_i สิ่ง

ในปัญหานี้ $n = 10+6+7 = 23$

$k = 3$ โดยที่ $r_1 = 10$,$r_2 = 6$ และ $r_3 = 7$

วิธีที่จะจัดเรียงหนังสือเข้าตู้มีอยู่ $\frac{23!}{10!6!7!}$ วิธี

๗. นายแดง ต้องเดินทางจากบ้านที่ฝั่งธนมาลงที่สนามหลวงมามหาวิทยาลัยรามคำแหง จากบ้านของเขามาสนามหลวงมีรถเมล์สาย ๑,๓,๔ จากสนามหลวงมารามคำแหงมีรถเมล์สาย ๔,๑๐,๑๑,๑๒ จงหาวิธีในการเดินจากบ้านของเขามามหาวิทยาลัย (ให้ใช้ Tree diagram ในปัญหานี้)

วิธีการเดินทางของนายแดง 3 x 4 = 12 วิธี

<u>หมายเหตุ</u> เลข 3 ก็คือวิธีการเดินทางของนายแดง ที่เดินทางจากฝั่งธนมาสนามหลวง และเลข 4 ก็คือวิธีที่เดินทางจากสนามหลวงมารามคำแหง

๘. มีอยู่กี่วิธีในการจะจัดเรียงลูกปัดสีแดง ๔ ลูก สีขาว ๕ลูก และสีน้ำเงิน ๓ลูก ให้สลับสีกันในแถวเดียวกัน

มีจำนวนลูกปัดอยู่ทั้งสิ้น $4 + 5 = 3 = 12$ ลูก

$n = 12$

มีจำนวนซ้ำอยู่ $k = 3$ กลุ่ม

โดยที่ r_1 (ซ้ำในสีแดง) 4 ลูก

r_2 (ซ้ำในสีขาว) 5 ลูก

r_3 (ซ้ำในสีน้ำเงิน) 3 ลูก

จำนวนวิธีในการเรียงลูกปัดเป็นแถวเดียวกัน $\dfrac{12!}{4!5!2!}$ วิธี

๙. มีลูกปัดอยู่ ๗ ลูก ๗สี จะนำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือได้วิธีต่างๆกันกี่วิธี

มีของอยู่ n สิ่ง จะสลับกันเป็นวงกลมได้ทั้งสิ้น $(n-1)!$ วิธี

ดังนั้น จะนำลูกปัด ๗สี ๗ ลูกมาร้อยเป็นกำไลได้ $(71)! = 6!$ วิธี

๑๐. จงแสดงว่า $\dfrac{{}^{(n+1)}P_r}{(n+1)} = {}^{n}P_{(r-1)}$

$$
\begin{aligned}
{}^{(n+1)}P_r &= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!} \cdot \frac{1}{(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)(n!)}{(n+1-r)!\ (n+1)} \\
&= \frac{n!}{(n+1-r)!} \\
&= \frac{n!}{(n-(r-1))!} \\
&= {}^{n}P_{(r-1)}
\end{aligned}
$$

๑๑. จะสลับอักษรในคำ เหล่านี้เป็นคำใหม่ได้กี่คำ

a. ALGEBRA

b. COLLEGE

c. TENNESSEE

a. $n = 7$

เนื่องจากไม่มีตัวอักษรใดที่ซ้ำกัน เลย

ดังนั้นเราจะจัดเป็นคำต่างๆได้ $7!$ คำ

b. $n = 7$

มีอักษร L ซ้ำกันอยู่ ๒ ตัว $r_1 = 2$

มีอักษร E ซ้ำกันอยู่ ๒ ตัว $r_2 = 2$

ดังนั้นจะจัดเป็นคำต่างๆได้ $= \frac{7!}{2!2!}$ คำ

c. $n = 9$

มีอักษร E ซ้ำกันอยู่ ๓ ตัว $r_1 = 3$

อักษร N ซ้ำกันอยู่ ๒ ตัว $r_2 = 2$

อักษร S ซ้ำกันอยู่ ๒ ตัว $r_3 = 2$

ดังนั้นจะจัดเรียงเป็นคำต่างๆได้ $= \frac{9!}{3!2!2!}$ คำ

๑๒. จงแก้สมการหาค่าของ n

$$^nP_5 = 20.{}^nP_3$$

$$^nP_5 = 20{}^nP_3$$

$$\frac{n!}{(n-5)!} = 20.\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 20(n)(n-1)(n-2)$$

$$(n-3)(n-4) = 20$$

$$n^2-7n+12-20 = o$$

$$n^2-7n-8 = 0$$

$$(n-8)(n+1) = 0$$

$$\therefore \quad n = 8 \ , \ n = -1$$

เนื่องจากn มีได้เฉพาะค่าที่เป็นบวก

ดังนั้น $n = 8$

๑๓. จงหาค่าของ $^4P_1+^4P_2+^4P_3+^4P_4$

$$^4P_1+^4P_2+^4P_3+^4P_4 = \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} + \frac{4!}{(4-4)!}$$

$$= \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{0!}$$

$$= 4+(4\times3)+(4\times3\times2)+(4\times3\times2\times1)$$

$$= 4+12+24+24$$

$$= 64$$

๑๔. ในชั้นเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนอยู่ ๕๐คน จะมีการออกเสียงเลือกประธานกรรมการ รองประธาน และเลขานุการ ของห้องโดยข้อตกลงว่า การโหวตครั้งที่๑ ผู้ได้เสียงข้างมากจะเป็นประธาน ครั้งที่๒จะได้เป็นรองประธาน และครั้งที่๓ จะได้เป็นเลขานุการ จงหาจำนวนวิธีในการเลือกครั้งนี้

แนวคิด จำนวนนักเรียนทั้งหมด ๕๐ คนเลือกมา ๓ คนเป็นตัวแทนเพื่อรับตำแหน่งต่างๆกันนั้น โดยยึดอันดับ เป็นหลัก เนื่องจากการเลือกครั้งที่๑ และครั้งที่๒ และครั้งที่๓ จะทำให้ผู้ที่ได้รับเลือกได้ตำแหน่งต่างๆกัน ดังนั้นในกรณีนี้จึงเป็นเรื่องของการเลือกคน ๓ คนจากคนทั้งหมด ๕๐คน เพื่อจัดอันดับ ซึ่งเป็นวิธีการของ Permutation

ดังนั้นวิธีการเลือกครั้งนี้จึงเป็นไปได้ทั้งหมด $^{50}P_3 = \frac{50!}{47!} = 117600$ วิธี

๑๔. มีอยู่กี่วิธีในการจะจัดเด็กชาย๔คนและเด็กหญิง ๔ คน ให้นั่งในแถวหนึ่งโดยมีข้อแม้ดังนี้

ก. ทุกคนจะนั่งอย่างไรก็ได้

ข. เด็กหญิงจะต้องนั่งสลับกับเด็กชาย

ค. ต้องให้เด็กชายนั่งหัวแถวและปลายแถว

ก. ทุกคนจะนั่งอย่างไรก็ได้ หมายความว่ามีคนอยู่ คนนำมาจัดเรียงลำดับ (นั่งในแถว) ทีละ ที่นั่ง

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะจัดที่นั่ง

ข. การจัดต้องจัดโดยให้เด็กหญิงนั่งสลับกับเด็กชาย ดูวิธีการจัดจากแนวต่อไปนี้ โดยที่ครั้งแรกให้เด็กชายนั่งเรียงลำดับกันก่อน การจัดเด็กชาย ๔ คน ให้นั่งเรียงลำดับกันได้ 4! วิธี จากนั้นจึงค่อยจัดเด็กหญิงนั่งแทรกระหว่างเด็กชายแต่ละคู่

$\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$

1 2 3 4

การจัดเด็กหญิงให้แทรกระหว่างเด็กชายจะต้องให้หัวแถวหรือปลายแถวเป็นเด็กหญิง ดังรูป

ญ ช ญ ช ญ ช ญ ช เมื่อเด็กหญิงอยู่หัวแถว

หรือ

ช ญ ช ญ ช ญ ช ญ เมื่อเด็กหญิงอยู่ปลายแถว

จำนวนวิธีเมื่อเด็กหญิงอยู่หัวแถว 4! วิธี

จำนวนวิธีเมื่อเด็กหญิงอยู่ปลายแถว 4! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดให้เด็กชายนั่งสลับกับเด็กหญิงโดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องนั่นสลับกัน

4! จำนวนวิธีที่เด็กหญิงนั่ง (เมื่อเด็กหญิงนั่นหัวแถว)

จำนวนวิธีที่เด็กชายนั่ง
4!

4! จำนวนวิธีที่เด็กหญิงนั่ง (เมื่อเด็กหญิงนั่งปลายแถว)

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $4! \times 4! + 4! \times 4! = 2(4! \times 4!)$ วิธี

๑๖. มีกี่วิธีที่ชาย ๘ คนจะนั่งเรียงเป็นวงกลมโดยมีข้อแม้ว่าชาย ๓ คนจะต้องนั่งติดกัน

ชาย ๘ คนนั่งเรียงกันเป็นวงกลมโดยที่ชาย ๓ คนต้องนั่งติดกัน

แนวคิด คล้าย กับว่าเรานำชาย ๓ คนมามัดติดกัน แล้วจึงนำไปจัดเรียงกับชายคนอื่นที่เหลืออีก ๕ คน ดังนั้นจะเหลือสิ่งที่จะนำมาจัดวงกลมเพียง 5+1 = 6 สิ่งเท่านั้น โดยที่ชาย ๓ คนที่เรานำมามัดติดกันนั้นอย่างมีวิธีที่จะสลับกันได้อีก 3! วิธี (วิธีคิดก็คือมีคน ๓คนนำมาเรียงลำดับกันได้ 3!วิธี)

เมื่อจัดชาย ๓ คนที่มัดติดกันกับชายที่เหลืออีก ๕ คน จะมีวิธีการจัดเป็นวงกลมได้ดังนี้คือ

การจัดชายที่นั่งติดกัน ๓คน		ชายที่เหลือกับกลุ่มชายที่มัดติดกันจัดได้
3!	x	(6-1)!

ดังนั้นวิธีการจัดทั้งหมด 3! x 5! วิธี

<u>แบบฝึกหัดที่ ๒.๔</u>

. . จงหาค่าของ

a. $^{1}C_4$

b. $^{5}C_1$,

c. $^{5}C_1 + {}^{5}C_2 + {}^{5}C_3 + {}^{5}C4 + {}^{5}C_5$

a. $^{7}C_4 = \frac{7!}{(7-4)!4!}$

$= \frac{7!}{3!4!}$

$= \frac{7.6.5.4!}{3!4!}$

$= \frac{7.6.5}{3!}$

$= 35$

h. $^{5}C_1 = \frac{5!}{(5-1)!1!}$

$= \frac{5!}{4!1!}$

$= \frac{5.4!}{4!1!} = 5$

C. $^{5}C_1 + {}^{5}C_2 + {}^{5}C_3 + {}^{5}C_4 + {}^{5}C_5$

$= \frac{5!}{(5-1)!1!} + \frac{5!}{(5-2)!2!} + \frac{5!}{(5-3)!3!} + \frac{5!}{(5-4)!4!} + \frac{5!}{(5-5)!5!}$

$= \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{0!5!}$

$= 5+10+10+5+1 = 31$

๒. จงพิสูจน์ว่า $^{n}C_{r} = {}^{n}C_{(n-r)}$

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$^{n}C_{(n-r)} = \frac{n!}{(n-(n-r))!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r!)\,(n-r)!}$$

$$^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$$

๓. มีลูกบอลล์อยู่ ๑๒ ลูกสีต่างๆกัน หยิบลูกบอลล์มา๖ ลูกโดยสุ่ม จงหาจำนวนหนทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด

มีลูกบอลล์อยู่ $n = 12$ ลูก

หยิบมา $r = 6$ ลูก

จำนวนหนทางที่จะหยิบ $^{12}C_{6} = \frac{12!}{(12-6)!\,6!}$

$$= \frac{12!}{6!6!}$$

$$= \frac{12.11.10.9.8.7.6!}{6!6.5.4.3.2.1}$$

$$= 924$$

๔. หยิบไพ่ ๗ใบมาจากไพ่ทั้งสำรับ จะมีทางเป็นไปได้ทั้งสิ้นเท่าไร

ไพ่ ๑ สำรับมีไพ่หน้าและสีต่างๆกัน 52 ใบ

สุ่มไพ่มา 7 ใบ

นั่นคือ $n = 52$ และ $r = 7$

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ $^{52}C_{7} = 52!/(45! \times 7!)$ วิธี

๕. มีจุดอยู่ ๕จุดจะสร้างรูปตามเงื่อนไขต่อไปนี้ทั้งสิ้นกี่รูป

๕.๑ รูปสามเหลี่ยม

๕.๒ รูปสี่เหลี่ยม

๕.๓ เส้นตรง

๕.๑ จะสร้างรูปสามเหลี่ยมจากจุด ๕ จุดได้กี่รูป

การสร้างสามเหลี่ยม ๑ รูปจะต้องอาศัย จุด ๓ จุด

เรามีทั้งหมด ๕ จุด ดังนั้นจะสร้างสามเหลี่ยมได้ทั้งหมด $^5C_3$ รูป

$$= \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10 \text{ รูป}$$

๕.๒ รูปสี่เหลี่ยมจะต้องอาศัยจุด ๔ จุด

ดังนั้นจะสร้างรูปสี่เหลี่ยมได้ $^5C_4 = \frac{5!}{(5-4)!4!}$ รูป

$$= 5 \text{ รูป}$$

๕.๓ เส้นตรง ๑ เส้นต้องอาศัย ๒ จุด

ดังนั้นเราจะลากเส้นตรงได้ทั้งสิ้น $^5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!2!}$ เส้น

$$= 10 \text{ เส้น}$$

๖. ในเขตพญาไทซึ่งมีส.ส.ได้ ๒คน ปรากฏว่ามีพรรคประชาธิปัตย์ส่งเข้าสมัคร ๑คน พรรคแนวร่วมรักชาติ ๑ คน พรรคสหประชาไทย ๑คน และพรรคชาวนา๑คน จะมีวิธีเลือกส.ส.ได้ทั้งสิ้นกี่แบบ

มีผู้สมัคร ส.ส. จากแต่ละพรรคในเขตพญาไท ทั้งสิ้น 4 คน

จะเลือกมาเป็นผู้แทนเพียง ๒ คน

ดังนั้นวิธีการที่จะเลือกส.ส. มีอยู่ $^4C_2 = \frac{4!}{(4-2)!2!}$ วิธี

$$= 6 \text{ วิธี}$$

แบบฝึกหัดที่๒.๔

๑. ถนนสายหนึ่งฝั่งซ้ายให้จอดรถเฉพาะวันคี่ ฝั่งขวาให้จอดเฉพาะวันคู่ ถ้าเราศึกษาในเดือนมกราคม

ให้ A_1 = เหตุการณ์ที่จอดรถฝั่งซ้าย

A_2 = เหตุการณ์ที่จอดรถฝั่งขวา

A_3 = เหตุการณ์ที่จอดรถทั้งสองฝั่ง

A_4 = เหตุการณ์ที่จอดรถไม่ได้ทั้งสองฝั่ง

จงเขียนเซทของ A_i ;i=1,2,3,4

และอธิบายว่า A_i เป็นเหตุการณ์ชนิดใด

ในเดือนมกราคม มี ๓๑ วัน คือ ๑ - ๓๑ มกราคม

$S = \{1,2,3,...,31\}$

$A_1 = \{1,5,7,...,31\}$

$A_2 = \{2,4,6,...,30\}$

$A_3 = \{\ \}$ เซทว่างเปล่า

$A_4 = \{\ \}$ เซทว่างเปล่า

A_1 และ A_2 ถือเป็นเหตุการณ์ที่เป็น Mutually Exclusive กัน

๒. ผู้นำชุมชนแห่งหนึ่งประกอบด้วยนายก. นายข. นายค.และนายง. ต่อมามีการพัฒนาท้องถิ่นแห่งนั้น มีผู้เสนอให้ใช้แผน"๐๐๑" ในการพัฒนาท้องถิ่น แต่ปรากฏว่า ตกลงกันไม่ได้ว่าจะมีการรับแผนนี้หรือปฏิเสธแผนนี้ จึงได้มีการตกลงว่าจะเลือกผู้นำมาแทน เพื่อตัดสินเรื่องนี้ เป็นที่ทราบกันดีว่านายก.และนายข. ต้องรับแผนนี้แน่ ส่วนนายค.และนายง.จะต้องปฏิเสธแผนนี้

ก.จงเขียนผลการเลือกผู้ตัดสินทั้งหมดที่เป็นไปได้

ข.จงเขียนเหตการณ์ที่แผนนี้จะถูกรับ

ค.จงเขียนเหตุการณ์ที่แผนนี้จะถูกปฏิเสธ

ง.จงเขียนเหตุการณ์ที่จะหาข้อยุติไม่ได้

จ.จงเขียนเหตุการณ์ที่จะหาข้อยุติได้

ก. ผลการเลือกผู้ตัดสินทั้งหมดที่เป็นไปได้

S = {(กข),(กค),(กง),(ขค),(ขง),(คง)}

<u>หมายเหตุ</u> ตรวจสอบว่าจำนวนสมาชิกครบหรือไม่โดยที่มีผู้นำ ๔ คนเลือกมาเป็นตัวแทน ๒ คน

จำนวนหนทางทั้งหมดที่เป็นไปได้ $^4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

ข. เหตุการณ์ที่แผน ๐๐๑ จะถูกยอมรับ หมายความว่าจะต้องได้เลือกได้ นาย ก.และนายข. เป็นตัวแทน เพราะทราบอยู่ว่า ๒ คนนี้จะรับแผนนี้

ดังนั้นให้ A = คือเหตุการณ์ที่จะรับแผนนี้

A ={(กข)}

ค. เหตุการณ์ที่แผนนี้จะถูกปฏิเสธ หมายความว่า จะต้องเลือกได้นายคและนายง.เพราะเป็นที่ทราบกันอยู่ว่า ๒คนนี้ปฏิเสธที่จะรับแผนนี้

B = คือเหตุการณ์ที่จะปฏิเสธแผนนี้

B = {(คง)}

ง. เหตุการณ์ที่จะหาข้อยุติไม่ได้

C = คือเหตุการณ์ที่จะหาข้อยุติไม่ได้

C = {(กค),(กง),(ขค),(ขง)}

จ. เหตุการณ์ที่หาข้อยุติได้คือเหตุการณ์ที่จะยอมรับหรือปฏิเสธแผนนี้

D = คือเหตุการณ์ที่หาข้อยุติได้

D = {(กข),(คง)}

๓. เมื่อเราไปเที่ยวเขาดิน เราอาจจะพบกับเหตุการณ์ต่อไปนี้

A = เหตุการณ์ที่ได้เห็นช้าง

B = เหตุการณ์ที่ได้เห็นลิง

C = เหตุการณ์ที่ได้เห็นนก

จงอธิบายความหมายของเหตุการณ์ต่อไปนี้

๓.๑ $\bar{A}$

๓.๒ $A \cap B \cap C$

๓.๓ $A \cup B$

๓.๑ $\bar{A}$ = เหตุการณ์ที่ไม่ได้เห็นช้าง

๓.๒ $A \cap B \cap C$ = เหตุการณ์ที่ได้เห็นช้างและเห็นลิงและเห็นนก

๓.๓ $A \cup B$ = เหตุการณ์ที่เห็นช้างหรือเห็นลิง

(เหตุการณ์ที่เห็นทั้งช้างและลิงถือว่าเป็นสมาชิกในเหตุการณ์นี้ด้วย)

๔. คำว่า BELT จะสร้างคำใหม่ได้กี่คำโดยที่มีเงื่อนไขดังนี้

คำที่ลงท้ายด้วย L

คำที่ลงท้ายด้วย B

A = {(BETL), (BTEL), (EBTL), (ETBL), (TEBL), (TBEL)}

B = {(ETLB), (ELTB), (TELB), (TLEB), (LETB), (LTEB)}

๕. จะสร้างเลขทะเบียนรถยนต์ในแต่ละหมวดได้เท่าไร ภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

๕.๑ เลขที่ลงท้ายด้วย ๐ (A)

เลขเหมือนกันทุกตัว (B)

๕.๒ จงสร้างเซทของ $A \cap B$, $A \cup B$

๕.๓ $A \cap B$ คือเหตุการณ์อย่างไร

๕.๔ $A \cup B$ คือเหตุการณ์อย่างไร

๕.๑ เลขหมายทะเบียนรถยนต์คิดแต่ละหมวด ซึ่งประกอบด้วยเลข ๔ ตัว

A = {(0000), (0010), (0020), . . . , (9990)}

B = {(0000), (1111), (2222), . . . (9999)}

๕.๒ $A \cap B$ = {(0000)}

$A \cup B$ = {(0000),(0010),....(9990),(1111),...,(9999)}

๕.๓ $A \cap B$ คือเหตุการณ์ที่เลขทะเบียนรถจะเป็นเลขที่ซ้ำกันทั้ง ๔ ตัว และเลขท้ายสุดคือเลข ๐

๕.๔ $A \cup B$ คือเหตุการณ์ที่เลขทะเบียนรถยนต์จะเป็นเลขที่ซ้ำกันทั้งหมด ๔ ตัว หรือเป็นเลขที่ลงท้ายด้วยเลข ๐

๖. นายก.และนายข.เล่นหมากรุกกัน ๕ กระดานโดยมีเงื่อนไขว่าการที่คนใดคนหนึ่งจะชนะอีกคนหนึ่งหมายถึงจะต้องชนะ ๓ ใน ๕ กระดาน จงสร้างเหตุการณ์เป็นไปได้ที่นายก.จะชนะนายข.

ให้ A คือเหตุการณ์ที่นายก.ชนะนายข.

S = {(11111),(11110),(11100),(11000),(10000),(00000),.....}

โดยที่ 1 หมายความว่าเกมนั้นนายก.ชนะนายข.

0 หมายความว่าเกมนั้นนายก.แพ้นายข.

เช่น (11111) หมายความว่านายกชนะนายข.ทุกเกม

(11100) หมายความว่านายก.ชนะนายข.เกมที่๑ที่๒ที่๓ และแพ้นายข.เกมที่๔และที่๕

หรืออาจจะเขียนได้ว่า

A = {(นายก.ชนะนายข.๕กระดาน),(นายกชนะนายข.๔กระดาน),(นายก.ชนะนายข.๓กระดาน)}

โดยที่ นายก.ชนะนายข.๕กระดานหมายถึง {(11111)}

นายก.ชนะนายข.๔กระดานหมายถึง {(11110),(11101),(11011),(10111),(01111)}

นายก.ชนะนายข.๓กระดานหมายถึง {(11100),(11010),... }

๑๐ สมาชิก

๗. ในการสรรหาอธิการบดีของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าผู้ที่ได้รับการเสนอชื่อเพื่อเข้าหยั่งเสียงมาจากบุคคลหลายฝ่ายดังนี้คือ คณบดีของคณะต่างๆภายในมหาวิทยาลัย ข้าราชการตุลาการ บุคคลภายนอก ข้าราชการทหาร ให้ A คือเหตุการณ์ที่อธิการบดีมาจากคณบดีของคณะต่างๆ จงหาเหตุการณ์ $\bar{A}$ และอธิบายเหตุการณ์นี้ด้วย

$\bar{A}$ = {บุคคลภายนอก,ข้าราชการตุลาการ,ข้าราชการทหาร }

$\bar{A}$ = เหตุการณ์ที่อธิการบดีมาจากบุคคลภายนอก หรือ ข้าราชการตุลาการ หรือข้าราชการทหาร

แบบฝึกหัดที่๒.๖

๑. กำหนดให้ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง เป็นดังนี้

๑.๑ $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.7$, $P(C) = 0.1$

๑.๒ $P(A) = -0.5$, $P(B) = 0.8$, $P(C) = 0.7$

๑.๓ $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$, $P(C) = 0.2$

โดยที่ $A \cup B \cup C = S$ และ A, B, C เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมกันเลย จงตรวจสอบดูว่าข้อใดที่ไม่มีคุณสมบัติของฟังค์ชั่นความน่าจะเป็น

เนื่องจาก $A \cup B \cup C = S$ และ A, B, C ไม่มีส่วนร่วมกันเลย

$$\therefore \quad P(A \cup B \cup C) = P(S) = 1$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1$$

$$\because \quad P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)$$

นั่นคือ $P(A)+P(B)+P(C) = 1$

ตรวจสอบดูว่าข้อใดที่ไม่มีคุณสมบัติของฟังค์ชั่นความน่าจะเป็น

๑.๑ $P(A) = 0.2$ $P(B) = .0.7$ $P(C) = 0.1$

$$P(A)+P(B)+P(C) = .2+.7+.1 = 1$$

คล้องกับคุณสมบัติที่กำหนดให้ ดังนั้นข้อนี้จึงมีคุณสมบัติของความน่าจะเป็น

๑.๒ $P(A) = -.5$ $P(B) = 0.5$ $P(C) = 0.7$

เนื่องจากฟังค์ชั่นความน่าจะเป็นจะต้องมีคุณสมบัติที่ว่า

$$P(\text{เหตุการณ์ใดๆ}) \geq 0$$

แต่ $P(A) = -.5$ ซึ่งแย้งกับคุณสมบัติของความน่าจะเป็น

ดังนั้น ข้อ ๑.๒ จึงไม่มีคุณสมบัติของความน่าจะเป็น

๑.๓ $P(A) = 0.4$ $P(B) = 0.6$ $P(C) = 0.2$

ฟังค์ชั่นความน่าจะเป็นทุกเหตุการณ์ A,B,C มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ตรวจสอบดูต่อไปพบว่า $P(A)$,$P(B)$ และ $P(C)$ ไม่คล้องตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

เพราะว่า

$$P(A)+P(B)+P(C) = .4+.6+.2 = 1.2$$

แต่โจทย์กำหนดให้ $P(A)+P(B)+P(C) = P(S) = 1$

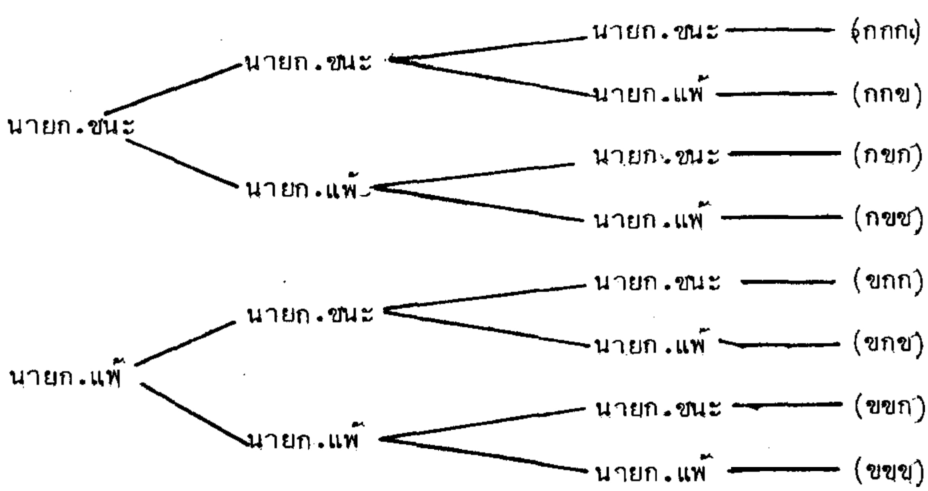
ดังนั้นข้อ ๑.๓ จึงไม่มีคุณสมบัติของความน่าจะเป็น

๒. นายก.และนายข. เล่นหมากรุกแข่งกันโดยมีกติกาว่าถ้าใครชนะ สองในสามกระดานจะเป็นผู้ได้รับรางวัล จงหาความน่าจะเป็นที่นายก.จะได้รับรางวัล(สมมุติว่าทั้งคู่เก่งเท่าๆกัน)

S = เซทของผลลัพธ์ที่ได้จากการแข่งขันระหว่างนายกและนายข(แข่งกัน ๓กระดาน)

คิดจำนวนสมาชิกในเซทได้ดังนี้

กระดานที่๑ กระดานที่๒ กระดานที่๓ ผลลัพธ์



จะมีจำนวนสมาชิก 8 สมาชิก

S = {(กกก),(กกข),...,(ขขข)}

โดยที่ (กกก) หมายความว่า นายก.ชนะรวด ๓ กระดาน

(กกข) หมายความว่า นายก.ชนะกระดานที่ ๑และที่๒ แพ้กระดานที่๓

ให้ A = เหตุการณ์ที่นายก.จะชนะนายข. ๒ใน ๓ กระดาน

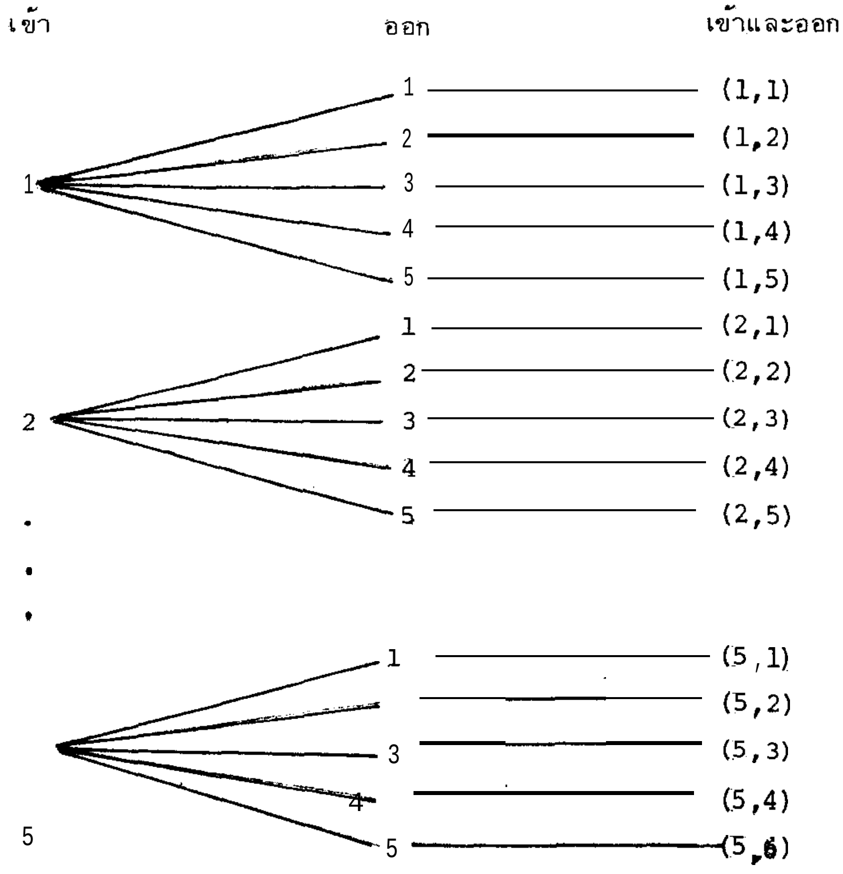
A = {(กกก),(กกข),(กขก),(ขกก)}

P(A) = 4/8 = 1/2

ความน่าจะเป็นที่นายก.จะชนะนายข. = ½

๓. **NB1 มีประตูอยู่ ๕ประตู. จงหาความน่าจะเป็นที่คนใดคนหนึ่งจะเข้าและออกโดยใช้ประตูเดิม**

วิธีการเข้าและออก NB1 ซึ่งมีอยู่ ๕ ประตู คือ



จำนวนวิธีเข้า-ออกตึก NB1 = 5 x5 = 25 วิธี

ดังนั้นสมาชิกใน S มีอยู่ 25 วิธี

เหตุการณ์ที่เข้าออกโดยใช้ประตูเดียวกัน

A = เหตุการณ์ที่เข้าและออกโดยใช้ประตูเดิม

A = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}

ตัวอย่างเช่น (1,1) หมายถึงการเข้า- ออกโดยใช้ประตูที่ ๑

P(A) = 5/25 = 1/5

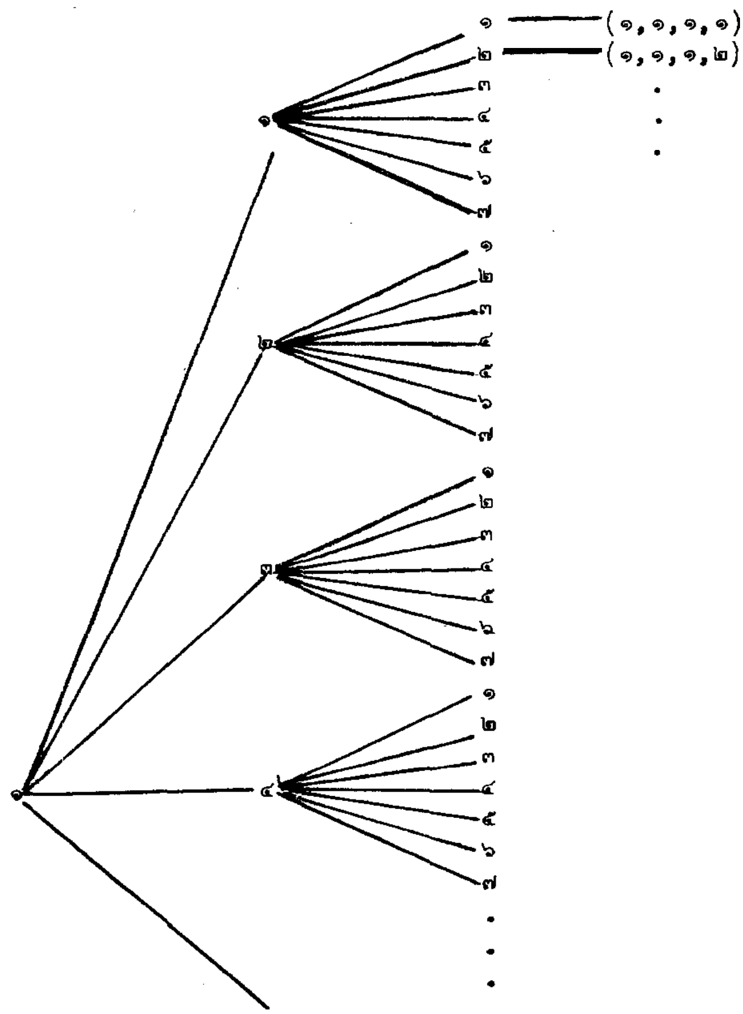
๔. **มีครอบครัวหนึ่งมีบุตรอยู่ ๔คน ปรากฏว่าทุกคนเกิดวันศุกร์ จงหาโอกาสที่เหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้น**

มีบุตร ๔ คน ทุกคนเกิดวันศุกร์หมด

กำหนดให้ สัปดาห์ หนึ่ง มี ๗ วันแทนด้วยเลข ๑ ๒ ๓ ๔ ๕ ๖ ๗

โดยที่เลข ๕ คือวันศุกร์ ดังนั้นเซทของผลลัพธ์ของวันเกิดของบุตรทั้ง ๔ คนที่จะเป็นไปได้คือ

บุตรคนที่๑ บุตรคนที่๒ บุตรคนที่๓ บุตรคนที่๔



ซึ่ง โดยวิธีการคิดจาก Tree Diagramจะได้จำนวนสมาชิกของ S คือ $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$ วิธี

ให้ A = เหตุการณ์ที่บุตรทั้ง ๔ คนจะ เกิดในวันศุกร์

$A = \{(5,5,5,5)\}$

$P(A) = 1/7^4$

โอกาสที่บุตรทั้ง ๔ คนจะเกิดในวันศุกร์ $= 1/7^4$

๔. นายก.และนายข.เป็นนักโดดร่ม เป็นที่ทราบกันว่า นายก.เก่งกว่านายข.เป็นสองเท่า และโอกาสที่นายข.จะได้รับอุบัติเหตุในการกระโดดร่มแต่ละครั้งเท่ากับ๐.๔ วันหนึ่งนายก.และนายข.ได้รับคำสั่งให้ ไปโดดร่มเพียง๒คน ถามว่า

๑. โอกาสที่วันนั้นจะไม่มีใครได้รับอุบัติเหตุเป็นเท่าไร

๒. โอกาสที่จะมีอุบัติเหตุทั้งคู่

๓. โอกาสที่จะต้องมีผู้ได้รับอุบัติเหตุ

ให้ A = เหตุการณ์ที่นายก.จะได้รับอุบัติเหตุจากการโดดร่ม

B = เหตุการณ์ที่นายข.จะได้รับอุบัติเหตุจากการโดดร่ม

โจทย์กำหนดให้ $P(B) = 0.4$

$P(A) = 0.2$ (เพราะว่านายก.เก่งกว่านายข.เป็น ๒ เท่า สมมุติว่าเก่งกว่า ๒ เท่าคือโอกาสที่จะได้รับอุบัติเหตุจะมีน้อยกว่าครึ่งหนึ่ง)

๑. โอกาสที่วันนั้นจะไม่มีใครได้รับอุบัติเหตุ

$P(\bar{B}) = 1-0.4 = 0.6$

$\bar{B}$ คือเหตุการณ์ที่นายข.ไม่ได้รับอุบัติเหตุ

$P(\bar{A}) = 1-0.2 = 0.8$

$\bar{A}$ คือเหตุการณ์ที่นายก.ไม่ได้รับอุบัติเหตุ

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$ (เนื่องจาก $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน)

$P(\bar{A})P(\bar{B}) \quad = \quad 0.6x0.8$

$= \quad 0.48$

ดังนั้นโอกาสที่จะไม่มีใครได้รับอุบัติเหตุ 0.48

๒. โอกาสที่จะได้รับอุบัติเหตุทั้งคู่

$P(AB) \quad = \quad P(A)P(B)$

$= \quad 0.4x0.2 \quad = \quad 0.8$

๓. โอกาสที่จะต้องมีผู้ได้รับอุบัติเหตุ

$P(AUB) \quad = \quad P(A)+P(B)$

$= \quad 0,4+0,2 \quad = \quad 0.6$

๖. เราสามารถอธิบายเหตุการณ์ A ได้อย่างไร ให้ยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่เข้าข่ายคุณลักษณะแบบ A

โดยที่ $P(A) = 1$

ถ้า $P(A) = 1$

หมายความว่าเหตุการณ์ A จะต้องเป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแน่นอน เช่น A เป็นเหตุการณ์ที่คนจะต้องตายในวันหนึ่งวันใดในอนาคต

๗. วิชาหนึ่งออกข้อสอบเป็นปรนัย ๑๐๐ข้อแต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก๔คำตอบ จงหาความน่าจะเป็นที่นายก.ซึ่งไม่มีความรู้วิชานี้เลยจะสอบผ่านวิชานี้ไปได้ ถ้าเกณฑ์ในการตัดสินคือ๖๐ คะแนน

ข้อสอบแบบปรนัย ๑๐๐ ข้อ แต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก ๔ คำตอบ

โดยที่โอกาสที่ผู้ไม่มีความรู้จะตอบถูก ได้เท่ากับ 60

ดังนั้นโอกาสที่ถูก ๖๐ ข้อ (เพราะเกณฑ์ตัดสิน ๖๐ คะแนน) จึงมีแนวการคิดดังนี้

การที่จะตอบถูก ๖๐ ข้อนั้น เราอาจจะเลือกคำตอบที่ถูกต้อง ๖๐ ข้อได้หลายทางคือ

อาจจะถูกตั้งแต่ข้อ ๑-๖๐

หรือถูกตั้งแต่ข้อ ๔๐-๑๐๐

หรือข้ออื่นๆใน๑๐๐ข้อซึ่งรวมกันได้ ๖๐ข้อ

จำนวนหนทางที่เป็นไปได้ในการที่เดาคำตอบถูกก็คือ 4 วิธี

แต่เนื่องจากเราต้องคิดประกอบกับหนทางในการที่จะเดาคำตอบผิด ด้วยถึง ๔๐คำตอบหรือน้อยกว่า

ดังนั้นโอกาสที่จะสอบผ่าน คือได้คะแนนตั้งแต่ ๖๐ ขึ้นไป

$$= ({}^{100}C_{60})(\tfrac{1}{4})^{60}(\tfrac{3}{4})^{40}+({}^{100}C_{61})(\tfrac{1}{4})^{61}(\tfrac{3}{4})^{39}+\ldots+({}^{100}C_{100})(\tfrac{1}{4})^{100}(\tfrac{3}{4})^{0}$$

การคิดวิธีนี้ให้นักศึกษาไปอ่านบทที่๓คงจะเข้าใจยิ่งขึ้น สาเหตุที่เราใช้วิธีธรรมดาในการคิดไม่ได้ก็เพราะจะมีความยุ่งยากในการสร้างเซท S ว่ามีกี่สมาชิกและนับว่าเหตุการณ์ที่จะเดาถูกคือถูกตั้งแต่ ๖๐ ข้อขึ้นไปมีกี่สมาชิก แล้วจับมาหารกัน ซึ่งเป็นวิธีที่ยุ่งยากมาก

๘. จากคำถามที่๗.ถ้าอาจารย์ตัดสินด้วยเกณฑ์ ๓๐คะแนนโอกาสที่นายก.จะสอบได้จะเป็นเท่าไร ให้เปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับข้อ ๗.

การคิดเช่นเดียวกับข้อ ๗. แต่เปลี่ยนเกณฑ์มาเป็น ๓๐ คะแนน

ดังนั้นโอกาสที่จะสอบได้ $= ({}^{100}C_{30})(\tfrac{1}{4})^{30}(\tfrac{3}{4})^{70}+\ldots({}^{100}C_{100})(\tfrac{1}{4})^{100}(\tfrac{3}{4})^{0}$

---

1 Factorial Function. Binomial Coefficients.

factorials

$n! = n(n-1) \ldots 2.1,$

1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5,040
8	40 320
9	362,880
10	3,628,800
11	39,916,800
12	479,001,600
13	6,227,020,800
14	87,178,291,200
15	1,307,674,368,000
16	20,922,789,888,000
17	355,687,428,096,000
18	6,402,373,705,728,000
19	121,645,100,408,832,000
20	2,432,902,008,176,640,000
21	51,090,942,171,709,440,000
22	1,124,000,727,777,607,680,000
2-j	25,852,016,738,884,976,640,000
24	620,448,401,733,239,439,360,000
25	15,511,210,043,330,985,984,000,000
26	403,291,461,126,605,635,584,000,000
27	10,888,869,450,418,352,160,768,000,000
28	304,888,344,611,713,860,501,504,000,000
29	8,841,761,993,739,701,954,543,616,000,000
30	265,252,859,812,191,058,636,308,480,000,00

Coefficients of the Binomial Distribution

Example If $n = 8$ and $x = 6$, $\binom{8}{6} = 28$.

This table giver the value of $\binom{n}{x}$ in $\binom{n}{x} q^{n-x} p^x$, the general term of $(q + p)^n$

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
i	1	1									
2	1	2	!								
3 1		3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10		1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35		7	1			
8	1					21		1	1		
9	1	8	36	84 56	17206	1256	28	36	9	Q	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	15	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	[illegible]	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
W	I	W	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756