บทที่ 6
สถิติแบบนันพาราเมตริก
(Nonparametric Statistics)

6.1 บทนำ

ในการทดสอบสมมุติฐานที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 และที่ 5 นั้น เป็นการทดสอบที่มีเงื่อนไข หรือข้อกำหนดที่เราต้องการเช่น ประชากรจะต้องมีความแปรปรวนเท่ากัน คือประชากรต้องมีการแจกแจงแบบปกติ และอื่น ๆ สำหรับในบทนี้เราจะกล่าวถึงการทดสอบสมมุติฐานที่เรียกว่า การทดสอบที่ไม่เกี่ยวกับ พารามิเตอร์ (Nonparametric tests)[1] ซึ่งไม่ต้องมีข้อกำหนดดังกล่าว

อย่างไรก็ดี การทดสอบที่ไม่เกี่ยวกับพารามิเตอร์นี้ไม่ควรนำมาใช้ ถ้าการทดสอบนั้นสามารถ ทดสอบแบบใช้ พารามิเตอร์ได้ ทั้งนี้เพราะว่า อำนาจของการทดสอบ (Power of the test) ของ Nonparametric test เมื่อเทียบกับ parametric test จะต่ำกว่า เนื่องจากเหตุผลอันนี้ถ้าการทดสอบนั้นจะต้องใช้ Nonparametric ก็ควรจะใช้ขนาดตัวอย่างที่โต เพราะจะทำให้มีอำนาจทดสอบมากขึ้น

ถึงกระนั้นก็ตาม วิธีการของ Nonparametric ก็ยังมีประโยชน์ คือ ง่ายต่อการนำไปใช้ประยุกต์ และเมื่อเทียบเคียงกับวิธี Parametric วิธี Nonparametric จะคำนวณง่าย ไม่ยุ่งยาก ง่ายต่อการอธิบายและการทำความเข้าใจ

วิธีการของ Nonparametric มีมากมาย แต่ในที่นี้จะขอกล่าวถึง 4 แบบด้วยกัน คือ การทดสอบมัธยฐาน (Median Test) การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (Sign Test) การทดสอบ

---

1. nonparametric statistics คือตัวสถิติที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ (ธรรมชาติของประชากร) หรือทดสอบความเป็นจริงบางประการของพารามิเตอร์ โดยมิได้กำหนดข้อตกลงหรือมิได้สนใจว่าตัวแปรสุ่มที่กำลังเกี่ยวข้องอยู่นั้นมีการแจกแจงแบบใด ด้วยเหตุนี้เมื่อถึงขั้นการใช้ประโยชน์เราจึงนำตัวสถิตินี้ไปใช้ได้กับการแจกแจงของตัวแปรสุ่มได้ทุกแบบ เพียงแต่คำตอบที่ได้อาจคลาดเคลื่อนไปบ้าง คือมีอำนาจการตัดสินใจต่ำลงบ้าง (คำว่าอำนาจการตัดสินใจ (power of test) *หมายถึงความน่าจะเป็นที่เราจะปฏิเสธความไม่ถูกต้อง สิ่งใดก็ตามที่ไม่ถูกต้องชอบธรรม* ถ้าเราปฏิเสธ แปลว่า เรามีอำนาจตัดสินใจสูง) เมื่อเทียบกับ parametric statistics เช่น t-test F-test Z-test

อันดับโดยใช้เครื่องหมาย (Signed-rank test) และการทดสอบผลรวมของอันดับ (Rank-Sum Test) ของ Mann-Whitney

6.2 การทดสอบมัธยฐาน (The Median Test)

ใช้ทดสอบว่าตัวอย่าง 2 ตัวอย่าง หรือมากกว่าที่เป็นอิสระกันมาจากประชากรที่มีค่ามัธยฐานเท่ากันหรือไม่ เพื่อที่จะให้ง่ายแก่การเข้าใจจะกล่าวถึงกรณี 2 ตัวอย่างเท่านั้น แต่วิธีการนี้จะใช้ได้ในกรณีที่มีมากกว่า 2 ตัวอย่าง การทดสอบมัธยฐานไม่ต้องมีสมมุติฐานเกี่ยวกับประชากร ทั้ง 2 นอกจากตัวแปรทั้ง 2 เป็นแบบต่อเนื่อง

สมมุติฐานหลักที่ใช้ในการทดสอบนั้น คือ ประชากรทั้ง 2 ที่เราสุ่มตัวอย่างมา มีมัธยฐานเท่ากัน และสมมุติฐานรอง คือ ประชากรทั้ง 2 มีมัธยฐานต่างกัน ในการที่จะทดสอบมัธยฐานนั้น จำเป็นจะต้องพิจารณาค่ามัธยฐานของค่าสังเกตทั้งหมดในตัวอย่างทั้ง 2 สำหรับค่าสังเกตแต่ละค่าที่ได้ในตัวอย่างทั้ง 2 บางค่าจะต่ำกว่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด บางค่าจะสูงกว่าค่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด

ถ้าให้ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนค่าสังเกตของตัวอย่างทั้ง 2 ตามลำดับ เราจะได้ตาราง 2×2 ดังนี้

จำนวนค่าสังเกต	ตัวอย่างที่ 1	ตัวอย่างที่ 2	ผลรวม
สูงกว่าค่ามัธยฐาน ของข้อมูลทั้งหมด	a	b	a + b
ต่ำกว่าค่ามัธยฐาน ของข้อมูลทั้งหมด	c	d	c + d
ผลรวม	$a + c = n_1$	$b + d = n_2$	$n_1 + n_2 = n$

ซึ่งถ้าสมมุติฐานหลักเป็นจริง นั่นคือ ถ้าประชากรทั้ง 2 มีมัธยฐานเท่ากัน เราจะคาดได้ว่าในตัวอย่างแต่ละกลุ่มครึ่งหนึ่งของข้อมูลจะสูงกว่า และอีกครึ่งหนึ่งของข้อมูลจะต่ำกว่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด หรืออาจกล่าวได้ว่า เราจะคาดได้ว่า $a = c = 0.5\ n_1$ และ $b = d = 0.5\ n_2$ ดังนั้นเมื่อ $n = n_1 + n_2$ มีขนาดโตกว่า 20 และเมื่อความถี่ที่คาดหมาย (Expected frequency) ในทุก ๆ ช่องมีค่าน้อยกว่า 5 เราจะใช้การทดสอบแบบ χ^2 ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\chi^2 \quad \frac{n\,(|ad - bc| \quad \frac{n}{2})^2}{(a + \quad (a+c)\,(c+d)\,(b+d)}$$

ซึ่ง χ^2 นี้มี d.f = (2 − 1) (2 − 1) I

ตัวอย่าง 6.1 ต้องการจะดูว่าค่าจ้างของคนงานชายจะมีมัธยฐานเท่ากับค่าจ้างของคนงานหญิงหรือไม่ ถ้าสุ่มตัวอย่างคนงานชายมา 14 คน และคนงานหญิงมา 16 คน โดยที่ตัวอย่างทั้ง 2 เป็นอิสระกัน ซึ่งจะได้ตาราง 2×2 ดังนี้

ความถี่ของค่าจ้าง	คนงานผู้ชาย	คนงานผู้หญิง	รวม
สูงกว่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด	9	6	15
ต่ำกว่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด	5	10	15
รวม	14	16	30

วิธีทำ

1.) ตั้งสมมุติฐาน

H_o : มัธยฐานของค่าจ้างแรงงานของผู้ชายเท่ากับมัธยฐานของค่าจ้างแรงงานของผู้หญิง

H_a : มัธยฐานของค่าจ้างแรงงานของผู้ชายไม่เท่ากับมัธยฐานของค่าจ้างแรงงานของผู้หญิง

2.) ถ้าให้ $\alpha = 0.05$, $n_1 = 14$, $n_2 = 16$, $n = n_1 + n_2 = 14 + 16 = 30$

3.) ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$\chi^2 = \frac{n\,(|ad - bc| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)\,(a+c)\,(c+d)\,(b+d)}$$

d.f = 1

4.) C.R. คือจะปฏิเสธ H_o ถ้า $\chi^2_c > \chi^2_{table}$

∴ CR คือ $\chi^2_c > \chi^2_{.05,1}$

จากตาราง $\chi^2_{.05,1} = 3.84146$

∴ CR คือ $\chi^2_c > 3.84146$

5.) คำนวณค่า χ^2_C จาก

$$\chi^2_C = \frac{n(|ad-bc|-\frac{n}{2})^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$$

$$= \frac{30\,|\,|9(10) - b\,(5)| - \frac{30}{2}|^2}{(15)(14)(15)(16)}$$

$$= \frac{30(|90-30| - 15)^2}{50,400}$$

$$= \frac{60,750}{50,400} \quad 1.205$$

6.) สรุปผล

$$\because \chi^2_C < \chi^2_{.05,1}$$

ดังนั้นเราจึงยอมรับ H_o ที่ว่า มัธยฐานของประชากร 2 กลุ่มนี้เท่ากัน นั่นคือมัธยฐานของค่าจ้างของคนงานชายกับคนงานหญิงมีค่าเท่ากัน

สรุปขั้นตอนในการทดสอบมัธยฐาน

1.) ตั้งสมมุติฐาน H_o และ H_a

H_o : ประชากรทั้ง 2 มีมัธยฐานเท่ากัน

H_a : ประชากรทั้ง 2 มีมัธยฐานไม่เท่ากัน

2.) กำหนด α และขนาดตัวอย่าง

3.) ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ χ^2 ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\chi^2 = \frac{n(|ad - bc| - \frac{n}{2})^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}$$

χ^2 นี้จะมี d.f = 1

4.) เขตวิกฤต คือ จะปฏิเสธ H_o ถ้า $\chi^2_C > \chi^2_{\alpha,}$ 1 d.f

5.) คำนวณหาค่า χ^2_C โดยมีขั้นตอนดังนี้

ก. หามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด

ข. หาจำนวนข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่มีค่าสูงกว่า และต่ำกว่ามัธยฐาน

ค. สร้างตารางแสดงจำนวนข้อมูลหรือความถี่ที่ได้

โดยให้ n_1 = จำนวนข้อมูลของกลุ่มที่ 1

n_2 = จำนวนข้อมูลของกลุ่มที่ 2

ซึ่งจะได้ตาราง 2×2 ดังนี้

จำนวนข้อมูลหรือความถี่	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	รวม
สูงกว่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด	a	b	a + b
ต่ำกว่ามัธยฐานของข้อมูลทั้งหมด	c	d	c + d
รวม	a + c	b + d	n

ง. คำนวณค่า χ_C^2 จาก

$$\chi_C^2 = \frac{n\left(|ad - bc| - \frac{n}{2}\right)^2}{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}$$

6.)สรุปผล โดยเปรียบเทียบ χ_C^2 ที่คำนวณได้ในข้อ 5 กับ χ^2 ที่เปิดจากตาราง ในข้อ 4

ถ้า $\chi_C^2 < \chi^2_{table}$ เราจะยอมรับ H_o

ถ้า $\chi_C^2 > \chi^2_{table}$ เราจะปฏิเสธ H_o

6.3 การทดสอบเกี่ยวกับเครื่องหมายของผลต่าง

ถ้าต้องการที่จะดูว่า มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรทั้ง 2 ที่เราสุ่มตัวอย่างมา เครื่องหมายของความแตกต่างระหว่างคู่ของค่าสังเกตจาก 2 ตัวอย่าง สามารถนำมาใช้ในการทดสอบได้ ซึ่งต่อไปนี้เราจะพิจารณาการทดสอบที่เกี่ยวข้องกับเครื่องหมาย 2 แบบด้วยกัน คือ การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (The Sign Test) และการทดสอบอันดับโดยใช้เครื่องหมาย (The Signed-Rank Test)

6.3.1 การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (Sign Test)

ในบทที่ 4 ที่เราเรียนมาแล้วนั้น การทดสอบผลต่างของค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ เราจะใช้ t-test ซึ่งเราต้องมีสมมุติฐานว่า ประชากรทั้ง 2 ต้องมีการกระจายเป็นแบบปกติ (Normally distributed) และยังสมมุติต่อไปอีกว่า ประชากรทั้ง 2 จะต้องมีความแปรปรวนเท่ากัน แต่โดยสถานการณ์ทั่ว ๆ ไปแล้ว เรามักจะไม่ค่อยได้พบกับลักษณะของประชากรเช่นนี้ คือเรามักจะไม่ทราบรูปแบบการแจกแจงของประชากรใดประชากรหนึ่ง ดังนั้น t-test จึงไม่ได้นำมาใช้ ซึ่งเราจะนำการทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์มาใช้ทดสอบแทน และการทดสอบที่นำมาใช้และรู้จักกันดี ก็คือ การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (Sign-Test) นั่นเอง

การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย (Sign-Test) เป็นการทดสอบที่ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายบวก (Positive sign) หรือเครื่องหมายลบ (Negative Sign) ของผลต่างระหว่างค่าสังเกตของข้อมูลแต่ละคู่โดยไม่พิจารณาถึงขนาดของความแตกต่างว่าจะมีเท่าใด ซึ่งก็เป็นวิธีการทดสอบผลต่างของ 2 ค่าเฉลี่ยประชากร อีกวิธีหนึ่งที่สะดวก ในกรณีที่ตัวอย่างที่สุ่มมาไม่เป็นอิสระต่อกัน (Dependent Samples) หรือข้อมูลมีลักษณะจับคู่กัน หรือใช้ข้อมูลจากตัวอย่างเดียวกัน แต่เก็บรวบรวม 2 ครั้ง ซึ่งในบทที่ 4 ที่เรียนมาแล้ว เราใช้ t-test ทดสอบ และการทดสอบนั้นใช้ได้ทั้ง ทางเดียวและ 2 ทาง

การทดสอบโดยใช้เครื่องหมายนี้มีหลักการที่สำคัญคือ เครื่องหมายที่เกิดจากความแตกต่างระหว่างข้อมูล 2 ชุด จำนวนเครื่องหมายบวกกับจำนวนเครื่องหมายลบ ควรจะเป็นจำนวนพอ ๆ กัน แต่ถ้าจำนวนเครื่องหมายลบและจำนวนเครื่องหมายบวก แตกต่างกันมาก แสดงว่า ค่าเฉลี่ยของประชากรทั้ง 2 แตกต่างกัน

ตัวอย่าง 6.2 ถ้าต้องการจะดูว่าระยะเวลาในการพักผ่อนจะเพิ่มผลผลิตของคนงานหรือไม่ โดยเก็บข้อมูลจากคนงาน 22 คน จากบริษัทอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง ได้ข้อมูลมา ดังนี้

คนงาน	ก่อนพักผ่อน X	หลังจากได้พักผ่อน Y	เครื่องหมาย Y − X
A	83	79	−
B	85	87	+
C	75	70	−
D	91	93	+
E	80	85	+
F	75	75	0
G	90	80	−
H	65	71	+
I	78	80	+
J	85	88	+
K	83	82	−
L	75	71	−
M	78	75	−

คนงาน	ก่อนพักผ่อน X	หลังจากได้พักผ่อน Y	เครื่องหมาย Y − X
N	80	85	+
O	82	86	+
P	88	85	−
Q	85	82	−
R	80	87	+
S	78	78	0
T	81	84	+
U	70	85	+
V	80	81	+

สมมุติฐานหลักที่จะใช้ทดสอบในกรณีนี้คือ ระยะเวลาของการพักผ่อนไม่มีผลต่อผลผลิตของคนงานเลย หรือกล่าวอีกแบบหนึ่งได้ว่า เครื่องหมายบวกกับเครื่องหมายลบที่ได้มีจำนวนเท่า ๆ กัน หรือเราอาจจะกล่าวได้ว่า โอกาสที่จะได้เครื่องหมายบวกมีค่าเท่ากับโอกาสที่จะได้เครื่องหมายลบ คือ $Pr[+] = Pr[-] = 0.5$ นั่นคือ สมมุติฐานหลัก (H_o) อาจตั้งว่า

$$H_o : P = 0.5$$

เมื่อ P เป็นความน่าจะเป็นที่จะได้เครื่องหมายบวก ถ้าเราถือว่าเครื่องหมายบวกเป็นผลสำเร็จ (Success) ดังนั้นเมื่อเราต้องการจะทดสอบดูว่าผลผลิตของคนงานจะเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ สมมุติฐานรอง (H_a) จะตั้งว่า

$H_a : P > 0.5$ ซึ่งเป็นการทดสอบแบบทางเดียว (one tailed test) วิธีการทดสอบเราก็ทำได้ง่าย โดยการนับจำนวนเครื่องหมายบวก และให้ X มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยให้เครื่องหมายบวกเป็นผลสำเร็จ (Success) คือ b (n,0.5) และสุดท้ายก็คือจะปฏิเสธ H_o ถ้าจำนวนเครื่องหมายบวก หรือตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงแบบทวินามตกอยู่ในเขตปฏิเสธเมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญให้เท่ากับ α ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$P[X \geq C / P = 0.5] = \alpha$$

เมื่อ C คือ ค่าวิกฤต

ดังนั้น ถ้า X มีค่ามากกว่า C เราจะปฏิเสธ H_o และยอมรับ H_a จากตัวอย่างข้างต้น นับจำนวนเครื่องหมายบวกได้เท่ากับ 12 เครื่องหมายลบได้เท่ากับ 8 และมี 2 คู่ ที่ผลต่างเป็น 0 เพราะว่า เมื่อ ค่า 2 ค่าในคู่เดียวกันเท่ากัน เราเรียกว่าเกิดการซ้ำกัน (tie) ผลต่างจะเป็นศูนย์ จึงไม่มีเครื่องหมาย ซึ่งในการทดสอบเราจะไม่พิจารณาคู่ที่ซ้ำกัน ดังนั้นขนาดของตัวอย่างก็จะลดลงด้วย ในตัวอย่างนี้ ค่า n จึงมีค่าเท่ากับ (22-2) = 20 โดยเป็น Success เท่ากับ 12 ถ้าให้ $\alpha = 0.05$ ค่า C จะประมาณได้เท่ากับ 14 เพราะว่าจากตาราง binomial เมื่อ P = 0.5, n = 20

$$P\,|X \geqslant 14| = 0.0577$$

$$P\,|X \geqslant 13| = 0.1316$$

$$P\,|X \geqslant 15| = 0.0059$$

$\therefore C = 14$

จากตัวอย่าง จำนวน Success ได้เท่ากับ 12

$\therefore 12 < 14$ ดังนั้นเราจึงปฏิเสธ H_o ไม่ได้ แสดงว่าระยะเวลาของการพักผ่อน ไม่มีผลต่อการเพิ่มผลผลิตของคนงาน

สรุปขั้นตอนในการทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย

1.) ตั้งสมมุติฐาน อาจจะตั้งแบบทางเดียวหรือ 2 ทางก็ได้

H_o : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรไม่แตกต่างกัน

H_a : ค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 1 มากกว่าค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 2

หรือ

H_o : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรไม่แตกต่างกัน

H_a : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรแตกต่างกัน

หรือ อาจจะตั้งว่า

$H_o : P = 0.5$

$H_a : P > 0.5$ หรือ $H_a : P \neq 0.5$

2.) วิธีการทดสอบ

ก. หาผลต่างระหว่างข้อมูล 2 กลุ่ม จากแต่ละคู่ แล้วแทนด้วยเครื่องหมาย + หรือ – ในกรณีที่ความแตกต่างเป็นศูนย์ ให้แทนด้วย 0

ข. นับจำนวนเครื่องหมาย + และ – ที่ได้ ถ้าเป็น 0 ให้ตัดทิ้ง

ค. หาเขตวิกฤต โดยอาศัยการแจกแจงแบบทวินาม (binomial distribution) โดยให้ X แทน

จำนวนครั้งที่สำเร็จ (Success) n คือจำนวนข้อมูล (เมื่อตัดความแตกต่างที่เป็นศูนย์ทิ้งแล้ว) และ C เป็นจุดวิกฤต

$$P\,|\,X \geqslant C\,/\,P = 0.5\,| \;=\; \alpha$$

ง. การสรุปผล เราจะปฏิเสธ H_o ถ้า X มีค่ามากกว่า C และยอมรับ H_o ถ้า X มีค่าน้อยกว่า C

ในกรณีที่ตัวอย่างที่เราสุ่มมานั้นมีจำนวนมาก (คือ n มีค่าโต) เราอาจทดสอบโดยใช้เครื่องหมายก็ได้ โดยใช้การกระจายแบบปกติประมาณการกระจายแบบทวินามเพราะว่า เมื่อ n มีขนาดโต b (n, 0.5) จะเข้าใกล้การกระจายแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย = np ซึ่งจะเท่ากับ $n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ และมี ส่วนเบี่ยงเบน = $\sqrt{npq}$ ซึ่งจะเท่ากับ $\sqrt{n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{4}}$ ซึ่งตัวสถิติที่เราใช้ทดสอบเราจะใช้ ตัว Z โดยที่

$$Z = \frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sim N(0,1)$$

จากตัวอย่างข้างต้นเราจะได้

$$\mu = np = \frac{n}{2} = 20(0.5) = 10 \text{ และ}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{n}{4}} = \sqrt{20 \times 0.5 \times 0.5}$$

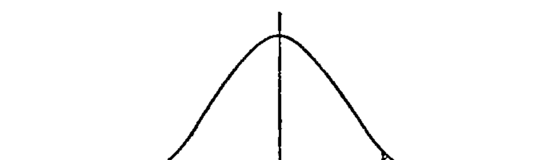
$$= \sqrt{5} = 2.236$$

จาก $Z = \dfrac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$

จะได้ $Z_C = \dfrac{12-10}{2.236} = \dfrac{2}{2.236}$

$$= 0.894$$

CR. จะปฏิเสธ H_o ถ้า $Z_C > Z_{0.05}$ ($\because H_a$ เป็นแบบทางเดียว) คือ $Z_C > 1.645$



$\therefore Z_C$ ตกอยู่ในเขตยอมรับ เราจึงยอมรับ H_o ที่ว่าระยะเวลาในการพักผ่อน ไม่มีผลต่อการเพิ่มผลผลิตของคนงาน ซึ่งผลสรุปได้ออกมาเหมือนกันวิธีแรก

6.3.2 การทดสอบอันดับโดยใช้เครื่องหมาย (Signed-rank Test)

ได้ชี้ให้เห็นข้างต้นแล้วว่า การทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย จะไม่นำขนาดของผลต่างระหว่างค่าสังเกต แต่ละคู่ มาคิดคำนวณ เพื่อที่จะปรับปรุงการทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย ในปี ค.ศ. 1945 Frank Wilcoxon ได้แนะนำให้นำเอาขนาดของความแตกต่าง มาพิจารณาด้วย ซึ่งแบบทดสอบที่ใช้ได้ปรับปรุงเรียกว่า Wilcoxon's signed-rank test สำหรับวิธีการทดสอบนั้นขั้นแรกจะให้อันดับกับค่า สัมบูรณ์ (absolute Value) ของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตแต่ละคู่เริ่มจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด โดยให้อันดับที่ 1 กับผลต่างที่น้อยที่สุดอันดับที่ 2 กับค่าน้อยที่สุดตัวต่อไป ไปเรื่อย ๆ ซึ่งการที่เราให้อันดับ กับผลต่างที่ได้โดยไม่ได้คิดเครื่องหมาย ดังนั้นผลต่างที่ได้ คือ -1 กับ 1 เราก็จะให้อันดับเดียวกัน โดยใช้วิธีเฉลี่ยอันดับ (mid rank) หลังจากที่ให้ลำดับผลต่างเหล่านั้นแล้ว จึงใส่เครื่องหมายตามความแตกต่าง จากนั้นก็หาผลรวมของลำดับที่มีเครื่องหมายบวก และผลรวมของลำดับที่มีเครื่องหมายลบ ผลรวมที่มีค่าน้อยกว่า (โดยไม่คิดเครื่องหมาย) จะเป็นตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ ซึ่งใช้สัญลักษณ์ด้วยตัว T หรือบางทีเรียกว่า Wilcoxon's T Statistic โดยที่

$$T = \min \left\{ \Sigma R(+), \Sigma R(-) \right\}$$

เมื่อ $\Sigma R(+)$ เป็นผลรวมของลำดับที่ กำหนดให้กับผลต่างโดยไม่คิดเครื่องหมายที่เป็นบวก และ $\Sigma R(-)$ เป็นผลรวมของอันดับที่กำหนดให้กับผลต่าง โดยไม่คิดเครื่องหมายที่เป็นลบ

การสรุปผลนั้น เราจะปฏิเสธสมมุติฐาน เมื่อผลรวมของอันดับที่น้อยกว่า มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตจากตาราง

สรุปขั้นตอนในการทดสอบลำดับโดยใช้เครื่องหมาย มีดังนี้

1.) สมมุติฐานที่ตั้งขึ้น จะเป็นแบบทางเดียว หรือสองทางก็ได้

H_o : ค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งสองไม่มีความแตกต่างกัน

H_a : ค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งสองมีความแตกต่างกัน

2.) วิธีการทดสอบ

ก. หาผลต่างของค่าสังเกต แต่ละคู่ ซึ่งอาจจะได้เครื่องหมายบวก หรือลบหรือเป็นศูนย์

ข. กำหนดอันดับให้กับผลต่าง โดยเรียงค่าสัมบูรณ์ (ผลต่างที่ไม่มีเครื่องหมาย) จากน้อยไปมาก และบันทึกเครื่องหมายของผลต่างไว้ด้วย

หลักการจัดอันดับมีดังนี้

1. ถ้าผลต่างเป็นศูนย์ให้ตัดทิ้ง

2. ค่าที่ซ้ำกัน ให้ใช้ค่าเฉลี่ยของอันดับ

ค. หาผลรวมของอันดับที่มีเครื่องหมายบวกและผลรวมของอันดับที่มีเครื่องหมายลบ แล้วนำค่าผลรวมของอันดับที่น้อยกว่า มาพิจารณา

ง. สรุปผล คือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อผลรวมของอันดับที่น้อยกว่ามีค่าน้อยกว่า ค่าวิกฤตจากตาราง

ค่าของ T ที่ได้จากตาราง T นั้น แสดงไว้ในตารางที่ 12 ซึ่งตารางจะให้ค่าวิกฤตของ T ณ ระดับนัยสำคัญ (α) ต่าง ๆ กันคือ 0.005, 0.01 และ 0.25 สำหรับการทดสอบแบบทางเดียว และ 0.01, 0.02 และ 0.05 สำหรับการทดสอบแบบสองทาง วิธีอ่านเริ่มแรกดูค่า n แล้วเลือก α ตามสมมุติฐาน H_0 ที่ตั้งไว้ว่าเป็นแบบทางเดียวหรือสองทาง ค่าที่อยู่ตรงแถวของ n ตัดกับ คอลัมน์ของ α จะเป็นค่า วิกฤต T ที่ต้องการ เช่น ในการทดสอบแบบทางเดียวเมื่อ $n = 20$ ค่าวิกฤต T เมื่อ $\alpha = 0.01$ คือ 43 หรือน้อยกว่า

ถ้าเป็นการทดสอบ 2 ทาง ค่าวิกฤต T มีค่าเท่ากับ 43 จะอยู่ตรงที่ $\alpha = 0.02$ และ $n = 20$

ตัวอย่าง 6.3 บริษัทแห่งหนึ่งเชื่อว่า ผลงานของพนักงานแต่ละคนจะดีขึ้น ถ้าห้องทำงานติดแอร์ เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อของเขา จึงทำการทดลองกับพนักงาน 10 คน ที่สุ่มมา แล้วให้ทำงาน 2 คาบเวลาในสถานที่ 2 แห่งที่เหมือนกัน แต่อีกแห่งหนึ่งติดแอร์ ผลการทดลองได้ข้อมูลซึ่งผลงานออกมา ดังนี้

คนงาน	ผลงาน	
	ติดแอร์	ไม่ติดแอร์
1	53	46
2	49	39
3	47	35
4	46	42
5	43	51
6	41	40
7	40	40
8	37	35
9	35	38
10	34	36

ผลการทดสอบ จะเป็นอย่างไร ที่ $\alpha = .05$

วิธีทำ สมมุติฐานคือ

1.) H_o : ผลงานของพนักงานแต่ละคนไม่ต่างจากเดิม

H_a : ผลงานของพนักงานแต่ละคนต่างจากเดิม

2.) $\alpha = 0.05$

3.) ตัวสถิติที่ใช้ทดลองคือ $T = \min | \Sigma R(+), \Sigma R(-) |$

4.) จะปฏิเสธ H_o ถ้า T ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤต T จากตาราง

5.) คำนวณค่าของตัวสถิติ T จากตาราง

ผลงาน

คนงาน	ติดแอร์	ไม่ติดแอร์	ผลต่าง	อันดับ/ผลต่าง	R (+)	R (−)
1	53	46	+ 7	6	+ 6	
2	49	39	+ 10	8	+ 8	
3	47	35	+ 12	9	+ 9	
4	46	42	+ 4	5	+ 5	
5	43	51	− 8	7		− 7
6	41	40	+ 1	1	+ 1	
7	40	40	0	−	−	−
8	37	35	+ 2	2.5	+ 2.5	
9	35	38	− 3			− 4
10	34	36	− 2			− 2.5
					ΣR (+) = 31.5	ΣR (−) = 13.5

จาก $T = \min | \Sigma R(+), \Sigma R(-) |$

จะเห็นได้ว่า $\Sigma R(+) = 31.5$ และ $\Sigma R(-) = 13.5$

$\therefore \; T = 13.5$

จากตาราง T เมื่อ $n = 9, \alpha = 0.05$ (เป็นการทดสอบแบบ 2 ทาง)

จะได้ $T_{ตาราง} = 5$

6.) สรุปผลคือ จะปฏิเสธ H_o ถ้า T มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤต จากตารางซึ่งในที่นี้ค่าวิกฤตจากตาราง เท่ากับ 5

แต่ T ที่คำนวณได้ = 13.5 ซึ่งมากกว่า 5

∴ เราจึงปฏิเสธ H_0 ไม่ได้ นั่นคือผลงานของ พนักงานไม่แตกต่างจากเดิม สำหรับกรณีที่ตัวอย่างที่สุ่มมามีมากกว่า 25 ตัวอย่างเราจะไม่ใช้ตาราง ค่าวิกฤต T เราจะใช้ตารางปกติแทน เนื่องจากว่า เมื่อ n มีขนาดโต การแจกแจงของ T จะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ

ที่มีค่าเฉลี่ย $E(T) = \frac{n}{4}(n+1)$

และ $Var(T) = \frac{n}{24}(n+1)(2n+1)$

เมื่อ n เป็นขนาดของตัวอย่าง ซึ่งมี n คู่ และตัวสถิติที่ใช้ทดสอบเราจะใช้ตัวสถิติ Z ซึ่ง

$$Z = \frac{T - E(T)}{\sqrt{Var(T)}} \sim N(0,1)$$

.4 การทดสอบผลรวมของอันดับ (Rank-Sum Test) ของ Mann Whitney (Mann-Whitney U Test)

การทดสอบของ Mann-Whitney เป็นการทดสอบที่ใช้สำหรับทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรว่าเหมือนกันหรือไม่ โดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่างที่สุ่มมาจากแต่ละประชากร โดยที่ตัวอย่างทั้ง 2 ที่สุ่มมานั้นเป็นอิสระกัน ซึ่งในบทที่ 4 ที่เราเรียนมาแล้วนั้น เราใช้การทดสอบแบบที 2 ดังนั้นการทดสอบแบบนี้จึงใช้แทนการทดสอบแบบ ที ในกรณีที่เราไม่ทราบรูปการแจกแจงของประชากร หรือในกรณีที่ข้อสมมติเกี่ยวกับประชากรไม่สมบูรณ์

สมมุติฐานที่ต้องการจะทดสอบจะเป็นแบบทางเดียวหรือสองทางก็ได้ เช่น

H_0 : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรเท่ากัน ($\mu_1 = \mu_2$)

H_a : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรเท่ากัน ($\mu_1 \neq \mu_2$)

หรือ H_0 : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรเท่ากัน ($\mu_1 = \mu_2$)

H_a : ค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 1 มากกว่าค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 2 ($\mu_1 > \mu_2$)

หรือ H_0 : ค่าเฉลี่ยของ 2 ประชากรเท่ากัน ($\mu_1 = \mu_2$)

H_a : ค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 1 น้อยกว่าค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 2 ($\mu_1 < \mu_2$)

วิธีการทดสอบก็คือ ให้ n_1 = จำนวนข้อมูลของตัวอย่าง กลุ่มที่ 1

n_2 = จำนวนข้อมูลของตัวอย่าง กลุ่มที่ 2

ก. นำข้อมูล 2 กลุ่ม $(n_1 + n_2)$ มาจัดอันดับร่วมกันจากน้อยไปหามาก (จาก 1 ถึง $n_1 + n_2$) ในกรณีที่ค่าของข้อมูลซ้ำกันให้ใช้วิธีเฉลี่ยอันดับ

ข. หาผลรวมของอันดับ ในแต่ละกลุ่มโดยให้ผลรวมของอันดับในกลุ่มที่ 1 เป็น R_1 และผลรวมของอันดับในกลุ่มที่ 2 เป็น R_2

ค. คำนวณค่าสถิติ U จาก

$$U = n_1n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \qquad .....(1)$$

หรือจะหา U จากสูตร

$$U = n_1n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 \qquad .....(2)$$

แต่ U ที่ได้จากสูตรทั้ง 2 นี้ จะให้ค่าต่างกัน เราจะใช้ค่าน้อยเป็นค่าตัวสถิติ U ส่วนค่าที่มากให้เป็น U' ก่อนที่จะทำการทดสอบ จะต้องตรวจค่าของ U และ U' ก่อนโดยนำไปเปรียบเทียบกับ $\frac{n_1 n_2}{2}$ ถ้าค่าใดมีค่ามากกว่า $\frac{n_1 n_2}{2}$ ค่านั้นจะเป็นค่า U' แล้วนำค่า U' ที่ได้นี้ ไปหาค่า U จาก

$U = n_1n_2 - U'$ (ซึ่งค่า U ที่ได้ต้องเท่ากับค่า U ที่ได้เลือกไว้เมื่อใช้สูตรที่ (1) กับสูตรที่ (2)

ง. จะปฏิเสธ H_0 : ถ้าค่า U น้อยกว่าหรือเท่ากับค่า U ที่ได้จากตารางที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดให้ หรือค่า U' มากกว่า หรือเท่ากับค่า U' ที่ได้จากตาราง ที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดให้

สำหรับตารางค่าของ U และ U' ณ ระดับนัยสำคัญต่าง ๆ จะอยู่ในตารางที่ 13 ซึ่งตารางนี้ค่า n_1 และ n_2 สูงสุดเท่ากับ 20 เท่านั้น เช่นที่ $n_1 = 5, n_2 = 5$

จากตารางจะได้ว่า ถ้า $U \leqslant 2$ หรือ $U' \geqslant 23$ จะปฏิเสธ H_0 สมมติว่าเราคำนวณได้ค่า $U = 6$ และ $U' = 19$ $\because U > 2$ เราจึงยอมรับ H_0 หรือดูจาก U' $\because U' \leqslant 23$ เราจึงยอมรับ H_0 เช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 6.4 เช่น ต้องการทดสอบดูว่าความสามารถในการเรียนวิชา EN 102 ของนักศึกษาคณะรัฐศาสตร์ กับนักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ แตกต่างกันหรือไม่ โดยสุ่มจากนักศึกษาคณะรัฐศาสตร์ 11 คนและคณะศึกษาศาสตร์ 10 คน ได้ผลการทดสอบวิชา EN 102 ดังนี้

คณะรัฐศาสตร์	55	59	61	64	70	73	75	76	82	83	95
คณะศึกษาศาสตร์	65	77	80	80	84	86	88	91	91	93	–

จงทดสอบ โดยใช้ Mann-Whitney ที่ $\alpha = 0.05$

H_0 : นักศึกษาทั้ง 2 คณะมีความสามารถในการเรียน วิชา EN102 เท่า ๆ กัน

H_a : นักศึกษาทั้ง 2 คณะมีความสามารถในการเรียน วิชา EN 102 แตกต่างกัน

วิธีการทดสอบนั้น ขั้นแรก จะต้องนำเอาคะแนนทั้งหมดจากนักศึกษาทั้ง 2 คณะ มาเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก แล้วหาผลรวมของอันดับของข้อมูลของแต่ละคณะ ดังนี้

คะแนนคณะรัฐศาสตร์	อันดับ	คะแนนคณะศึกษาศาสตร์	อันดับ
55	1	65	5
59	2	77	10
61	3	80	11.5
64	4	80	11.5
70	6	84	15
73	7	86	16
75	8	88	17
76	9	91	18.5
82	13	91	18.5
83	14	93	20
95	21	–	
	$R_1 = 88$		$R_2 = 143$

เมื่อได้ R_1 และ R_2 แล้ว นำค่า R_1 และ R_2 ไปคำนวณหาค่า U

จาก $$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

$$= (11)(10) + \frac{11(11+1)}{2} - 88$$

$$= 110 + 66 - 88 = 88$$

หรือ $$U = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$$

$$= (11)(10) + \frac{(10)(10+1)}{2} - 143$$

$$= 110 + 55 - 143$$

$$= 165 - 143 = 22$$

ค่า U = 22 เป็นค่าที่น้อย ∴ ค่าสถิติ U = 22 ส่วนค่า U = 88 เป็นค่าของ U′

ตรวจสอบค่า U และ U′ โดยนำไปเทียบกับ $\frac{n_1 n_2}{2} = \frac{(11)(10)}{2} = 55$

จะเห็นได้ว่าค่า U = 88 มากกว่า $\frac{n_1 n_2}{2}$ (เท่ากับ 55) ∴ U′ = 88 (∵ ค่า U ที่มากกว่า $\frac{n_1 n_2}{2}$ เราจะให้เป็นค่า U′) จากค่า U′ ที่ได้นำไปหาค่า สถิติ U ได้จากสูตร

$$U = n_1 n_2 - U'$$

$$= (11)(10) - 88$$

$$= 110 - 88 = 22$$

จะได้ค่า สถิติ U เท่ากัน

จากตารางได้ค่าวิกฤต U และ U′ เป็น $U \leqslant 26$ และ $U' \geqslant 84$

จะเห็นได้ว่า 22 < 26 ดังนั้น เราจึงปฏิเสธ H_o ที่ว่า นักศึกษาทั้ง 2 คณะมีความสามารถในการเรียน วิชา EN102 เท่า ๆ กันและยอมรับ H_a ที่ว่านักศึกษา 2 คณะมีความสามารถในการเรียน วิชา EN 102 ต่างกัน

ในกรณีที่ n_1 และ n_2 โตกว่า 20 ตัวสถิติ U จะมีการแจกแจงแบบปกติโดยประมาณที่มีค่าเฉลี่ย $E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}$

และความแปรปรวน $Var(U) = n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)$ และการทดสอบ เราจะใช้ตัวสถิติ Z โดยที่

$$Z = \frac{U - \mu_u}{\sigma_u}$$

ตัวอย่าง เช่น ถ้า $n_1 = 22, n_2 = 24$ และ U = 43

ถ้าใช้ $\alpha = .01$ ถ้าสมมุติฐาน คือ $H_o : \mu_1 = \mu_2$

$$H_a : \mu 1 \neq \mu_2$$

หา $\mu_u = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{(22)\ (24)}{2} = 264$

$\sigma_u^2 = (22)\,(24)\,(22 + 24 + 1) = 2068$

$\therefore \sigma_u = \sqrt{24816} = 157.5$

ตัวสถิติทดสอบคือ

$$Z = \frac{U - \mu_u}{\sigma_u}$$

$$= \frac{43 - 264}{157.5} = -1.40$$

เปิดตาราง Z ได้ $Z_{.005} = 2.575$

เขตวิกฤต คือจะปฏิเสธ H_o ถ้า $Z_C < -Z_{.005}$ หรือ $Z_C > Z_{.005}$

$\therefore -1.40 > -2.575$

ดังนั้น จึงยอมรับ H_o

ยังมีการทดสอบแบบไม่ใช้พาราามิเตอร์อีกหลายวิธี แต่จะไม่ขอกล่าวในวิชา ST 103 นี้

แบบฝึกหัดที่ 6

1. การทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์ (Parametric Tests) และการทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ (Non parametric tests) คืออะไร แตกต่างกันอย่างไร
2. จงบอกผลดีผลเสียในการใช้ nonparametric tests
3. กำหนดว่าต้องการจะทดสอบดูว่ามัธยฐานของตัวอย่างที่ 1 ที่มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 14 (n_1 = 14) แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่จากมัธยฐานของตัวอย่างชุดที่ 2 ที่มีขนาดตัวอย่าง เท่ากับ 24 (n_2 = 24) ข้อมูลที่เก็บได้มีดังนี้

คะแนน	ตัวอย่างที่ 1	ตัวอย่างที่ 2	รวม
สูงกว่ามัธยฐานทั้งหมด	4	15	19
ต่ำกว่ามัธยฐานทั้งหมด	10	9	19
รวม	14	24	38

จงทดสอบ H_0 ที่ว่าตัวอย่างทั้ง 2 นี้ สุ่มมาจาก 2 ประชากร ที่มีมัธยฐานเท่ากัน และ H_a : ประชากรทั้ง 2 มีมัธยฐานแตกต่างกัน ที่ $\alpha = 0.01$

4. นำข้อมูลชุดเดียวกัน มาทดสอบกับนักเรียน 2 กลุ่ม กลุ่ม 1 มีนักเรียน 13 คน อีกกลุ่มหนึ่งมีนักเรียน 17 คน คะแนนสอบของนักเรียนทั้ง 2 ชั้น มีดังนี้

กลุ่มที่ 1	54	65	66	71	73	78	78	80	82	87	92	93	95	–	–	–	–
กลุ่มที่ 2	51	53	54	61	64	66	67	69	71	74	76	80	81	85	89	90	94

ที่ $\alpha = 0.05$ จะทดสอบสมมุติฐาน H_0 ที่ว่านักเรียน 2 กลุ่มนี้มาจากประชากร ที่มีมัธยฐานเท่ากัน

5. กำหนดว่าต้องการจะทดสอบดูประสิทธิภาพของการลดความอ้วนโดยทดลองสุ่มคนมา 17 คน มาลดความอ้วน โดยชั่งน้ำหนักก่อนและหลังทำการลดความอ้วนได้ ข้อมูลดังนี้

คนที่	นน. (ปอนด์) ก่อน	นน. (ปอนด์) หลัง
1	210	208
2	197	196
3	203	195
4	175	175
5	234	224
6	178	170
7	252	242
8	230	221
9	190	213
10	195	180
11	154	150
12	179	173
13	243	235
14	195	204
15	198	193
16	169	169
17	217	210

จงทดสอบ H_o : ที่ว่าการลดความอ้วนไม่มีประสิทธิภาพ ($P = 0.5$)
และ H_a : ที่ว่าการลดความอ้วนมีประสิทธิภาพ ($P > 0.5$) ที่ $\alpha = 0.01$

6. นักเคมีคนหนึ่งอ้างว่าเขาได้ค้นพบ Gassoline additive B-21 และเขากล่าวว่า รถที่ใช้ Gassoline additive B-21 จะวิ่งได้ระยะทางมากขึ้น เพื่อที่จะทดสอบคำกล่าวของเขาจึงสุ่มรถยนต์มา 18 คัน การทดสอบได้ผลดังนี้

รถยนต์คันที่	ระยะทางเป็นไมล์/แกลลอน	
	ใช้ additive	ไม่ใช้ additive
1	10.4	10.9
2	16.3	16.2
3	15.1	15.8
4	9.2	10.0
5	10.3	10.2
6	8.4	7.9
7	9.7	9.6
8	8.6	9.9
9	11.0	11.9
10	13.2	13.0
11	18.1	18.1
12	7.5	8.1
13	9.5	9.8
14	10.9	10.9
15	8.7	10.3
16	15.1	16.2
17	13.4	13.0
18	12.3	13.8

H_o : Gassoline additive B-21 ไม่ทำให้ระยะทางที่รถวิ่งมากขึ้น

H_a : Gassoline additive B-21 ทำให้รถวิ่งได้ระยะทางมากขึ้น

ที่ $\alpha = .05$ โดยใช้ Sign-Test

7. จากโจทย์ข้อ 6 ให้ทดสอบโดยใช้ Sign-Rank test

8. จงประเมินผลความสำเร็จของ โปรแกรมลดความอ้วนที่ ใช้เวลา 5 สัปดาห์ โดยใช้ Sign-rank test จากข้อมูลที่ได้

คนที่	นน. ก่อนเข้าโปรแกรม (ปอนด์)	นน. หลังเข้าโปรแกรม (ปอนด์)
1	202	204
2	189	177
3	149	154
4	186	169
5	149	140
6	200	200
7	220	214
8	190	189
9	164	167
10	161	150
11	162	155
12	171	172
13	193	183
14	163	158
15	187	184
16	178	192
17	218	210
18	181	166
19	140	143
20	168	164

9. จะเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย ของความเร็วในการพิมพ์ดีดของนักเรียนที่เรียนธุรกิจ 2 กลุ่ม โดยกลุ่มที่ 1 ใช้วิธีการเรียนแบบที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ใช้วิธีการเรียนแบบที่ 2 ได้ข้อมูลดังนี้

กลุ่มที่ 1 คำ/นาที	กลุ่มที่ 2 คำ/นาที
36.0	38.2
32.5	40.1
41.3	29.8
40.1	30.3
50.8	32.8
39.2	40.4
41.2	37.2
29.7	34.1
32.5	36.2
37.8	41.5
46.6	35.5
—	42.5
—	44.9

จงทดสอบโดยใช้ Mann-Whitney test โดยใช้ $\alpha = 0.05$

10. จงใช้ Mann-Whitney test เพื่อทดสอบดูว่า ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม A มากกว่า ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม B หรือไม่ใช้ $\alpha = 0.01$

A	5.2	5.9	6.3	6.8	7.0	8.1	8.2	8.9	9.5	10.0
B	4.5	5.0	5.1	5.6	5.9	6.3	6.8	7.2	7.8	8.1

11. จงทดสอบดูว่าค่าเฉลี่ย ของจำนวนขายของ ร้าน ก และ ข แตกต่างกันหรือไม่ ที่ $\alpha \cong 01$
ข้อมูลจำนวนขายของร้านค้าทั้ง 2 มีดังนี้

ร้านค้า ก	ร้านค้า ข
$ 10.50	$ 22.25
18.71	17.65
9.16	15.62
8.75	9.10
2.00	10.80
11.53	6.78
4.56	8.75
3.88	12.34
9.16	8.99
12.34	9.90
10.75	—
16.41	—

หนังสืออ้างอิง

1. William J. Stevenson ; **Business Statistics,** Harper & Row, Publishers, 1978.
2. Audrey Haber and Richard P. Runyon ; **General Statistics** ; Addison-wesley publishing company, 1977.
3. Lincoln L. Chao ; **Statistics : Methods and Analysis** McGraw-Hill Kogakusha, LTD. 1974.