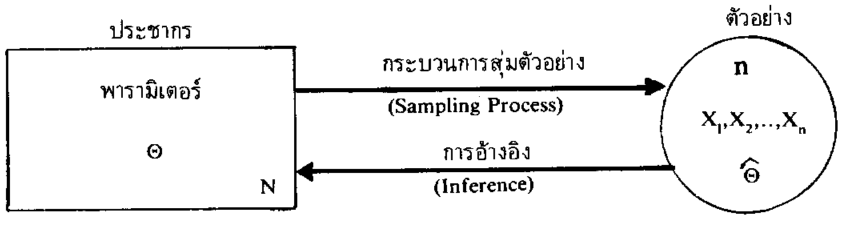
บทที่ 4
การประมาณค่าและการทดสอบสมมุติฐาน
STATISTICAL ESTIMATION AND HYPOTHESIS TESTING

4.1 บทนำ

จุดมุ่งหมายในการศึกษาประชากรซึ่งเป็นผลรวมของหน่วยทั้งหมด โดยอาศัยตัวแทนของประชากรที่เรียกว่า "ตัวอย่าง (Sample)" ก็เพื่อรวบรวมข้อมูลข่าวสารสำหรับใช้เป็นพื้นฐานในการสรุปผลหรืออ้างอิงเกี่ยวกับคุณลักษณะประชากร (Population Characteristics) พารามิเตอร์หรือมาตรประชากร (Parameter) ซึ่งเป็นมาตราวัดสรุป เช่น ค่าเฉลี่ยประชากร (μ) สัดส่วนประชากร (π) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ) ก็เป็นคุณลักษณะประชากรที่น่าสนใจอย่างหนึ่ง

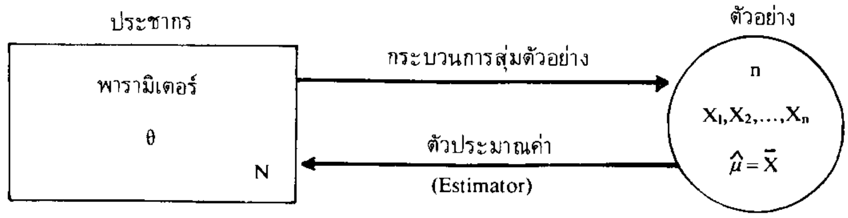
ถ้าเราต้องการสรุปผลเกี่ยวกับสัดส่วนหรือเปอร์เซนต์ของคนสูบบุหรี่ในประเทศไทย โดยการสอบถามคนทุกคนที่อยู่ในประเทศไทย และคำนวณค่าของพารามิเตอร์ที่แทนเปอร์เซนต์จริงเราก็ไม่สามารถจะทำได้ เพราะต้องเสียค่าใช้จ่ายและเวลามากมาย ดังนั้นเราจึงต้องใช้ตัวอย่างหรือตัวแทนของประชากร และคำนวณเปอร์เซนต์ของคนที่ชอบสูบบุหรี่จากตัวอย่างนั้น ค่าของเปอร์เซนต์ที่คำนวณได้ซึ่งเป็นค่าของ "ตัวสถิติตัวอย่าง (Sample Statistic)" นี้จะใช้อ้างอิงหรืออนุมานเกี่ยวกับเปอร์เซนต์จริง

ให้ Θ เป็นพารามิเตอร์ประชากรที่น่าสนใจซึ่งอาจจะเป็นค่าเฉลี่ย (μ) สัดส่วน (π) หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) จากตัวอย่างเราเลือกตัวสถิติตัวอย่าง ($\hat{\Theta}$) ซึ่งเป็นมาตรวัดสรุปจากตัวอย่างนั้นทำการอ้างอิงหรือสรุปผลเกี่ยวกับค่าของพารามิเตอร์ Θ เราสามารถแสดงกระบวนการอ้างอิงได้ดังรูปต่อไป



$\hat{\Theta} = f(X_1, X_2, .. X_n)$

เช่นเมื่อเราสนใจประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (μ) ตัวสถิติตัวอย่างที่เราใช้อ้างอิงหรือประมาณค่า μ ก็คือค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X} = \hat{\mu} = \Sigma X_i/n$ ซึ่งเรามักเรียกตัวสถิติที่ใช้ประมาณค่ากันว่า "ตัวประมาณค่า (Estimator)" พิจารณารูปต่อไปนี้



วิธีอ้างอิงเชิงสถิติหรือการสรุปผลเกี่ยวกับค่าของพารามิเตอร์ประชากร (Θ) มีอยู่ 2 วิธี คือ (1) การประมาณค่าเชิงสถิติพารามิเตอร์ (Statistical Estimation) ซึ่งเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ประชากร โดยอาศัยตัวสถิติตัวอย่างที่สรุปจากตัวอย่างสุ่มนั้น ค่าของตัวสถิติตัวอย่างจะใช้เป็นค่าประมาณ (Estimate) ของค่าพารามิเตอร์ประชากร และ (2) การทดสอบสมมุติฐานเชิงสถิติ (Statistical Hypothesis Testing) ในการอ้างอิงวิธีนี้มีสมมุติฐานหรือคำกล่าวเกี่ยวกับค่าของพารามิเตอร์ Θ และใช้ข้อมูลข่าวสารตัวอย่างไปทำการตัดสินใจว่าสมมุติฐานนั้นน่าจะเป็นไปได้หรือไม่ เช่นเราสนใจพารามิเตอร์ π เราก็มีคำกล่าวหรือสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าของ π แล้วใช้ตัวสถิติตัวอย่าง p ที่เรียกว่าสัดส่วนตัวอย่าง (Sample Proportion) มาตัดสินใจว่าสมมุติฐานนั้นมีเหตุผลสนับสนุนหรือไม่

วิธีการอ้างอิงเชิงสถิติทั้งสองวิธีที่กล่าวมานั้น ต่างก็ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างผลทดลองตัวอย่าง (Sample Outcomes) และค่าประชากร (Population Values) เช่นเดียวกันนั่นคือเลือกตัวอย่างแบบสุ่มจากประชากร และใช้ตัวสถิติตัวอย่างทำการอ้างอิงเกี่ยวกับพารามิเตอร์ประชากร ในการประมาณค่าเชิงสถิตินั้นข้อมูลข่าวสารตัวอย่างจะใช้ประมาณค่าของพารามิเตอร์ Θ ส่วนในการทดสอบสมมุติฐานนั้นค่าเดี่ยว ๆ หรือช่วงของค่าของพารามิเตอร์ Θ จะเป็นคำกล่าวหรือสมมุติฐานที่กำหนดมาก่อน แล้วจึงใช้ข้อมูลข่าวสารตัวอย่างมาตัดสินว่า สมมุติฐานนั้นจะได้รับการปฏิเสธหรือไม่

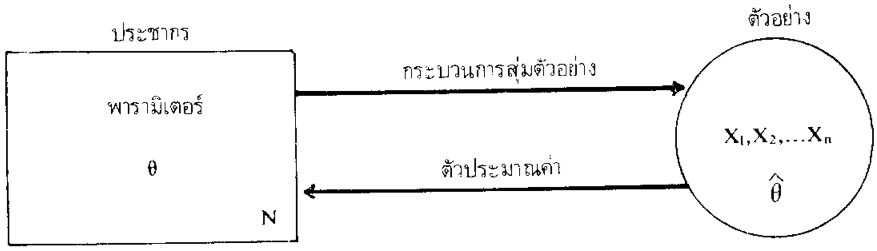
4.2 การประมาณค่าเชิงสถิติ (Statistical Estimation)

ในการประมาณค่าเชิงสถิติเราทำได้ 2 แบบ คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation) สำหรับการประมาณค่าแบบจุดนั้นเราใช้จำนวนเลขเดี่ยวที่คำนวณจากข้อมูลข่าวสารตัวอย่างหรือที่เป็นค่าหนึ่งของตัวสถิติตัวอย่างมาเป็นค่าประมาณของค่าพารามิเตอร์ Θ ที่สนใจ เช่นจากตัวอย่างสุ่มของนักศึกษา มร.

ปรากฏว่ามีคนสูบบุหรี่ 10% จำนวน 10% นี้จะใช้เป็นค่าประมาณแบบจุดสำหรับเปอร์เซนต์แท้จริง (π) ของนักศึกษา มร.ทั้งหมดที่สูบบุหรี่ ความจริงค่าประมาณแบบจุดนี้มีโอกาสที่จะเท่ากับพารามิเตอร์น้อยมาก ส่วนการประมาณค่าแบบช่วงนั้นเราอาศัยจำนวนเลข 2 ค่า (หรือจุด) ที่กำหนดช่วงขึ้นมาโดยหวังว่ามันจะครอบคลุมค่าของพารามิเตอร์ Θ ด้วยความเชื่อมั่นระดับหนึ่งตามที่ต้องการ เช่นในการประมาณค่าแบบช่วงของเปอร์เซนต์ที่นักศึกษา มร.สูบบุหรี่ เราจะได้ว่า "เปอร์เซนต์ แท้จริงของนักศึกษา มร.ที่สูบบุหรี่จะอยู่ระหว่าง 9.5% กับ 10.5% ด้วยความเชื่อมั่น 95%" เป็นต้น

4.2.1 การประมาณค่าด้วยค่าคงที่ (Point Estimation)

กระบวนการในการประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ Θ ก็คือเลือกตัวอย่างสุ่มขนาดหนึ่ง n จากประชากรที่มีพารามิเตอร์ Θ ซึ่งไม่ทราบว่า ค่าสังเกตหรือข้อมูลจากตัวอย่างจะได้เป็น X_1, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ แล้วใช้กฎหรือวิธีการบางอย่างมาสรุปผลข้อมูลเหล่านี้เป็นเลขจำนวนหนึ่งออกมา เลขจำนวนนี้จะเป็นค่าของตัวสถิติตัวอย่าง (หรือตัวประมาณค่า) $\hat{\Theta}$ และเราจะถือว่า $\hat{\Theta}$ เป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ Θ ในทางคณิตศาสตร์เราพูดได้ว่า $\hat{\Theta}$ เป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตตัวอย่าง $X_1,X_2,\ldots,X_n$ นั่นคือ $\hat{\Theta} = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ กระบวนการของการประมาณค่าแบบจุดแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

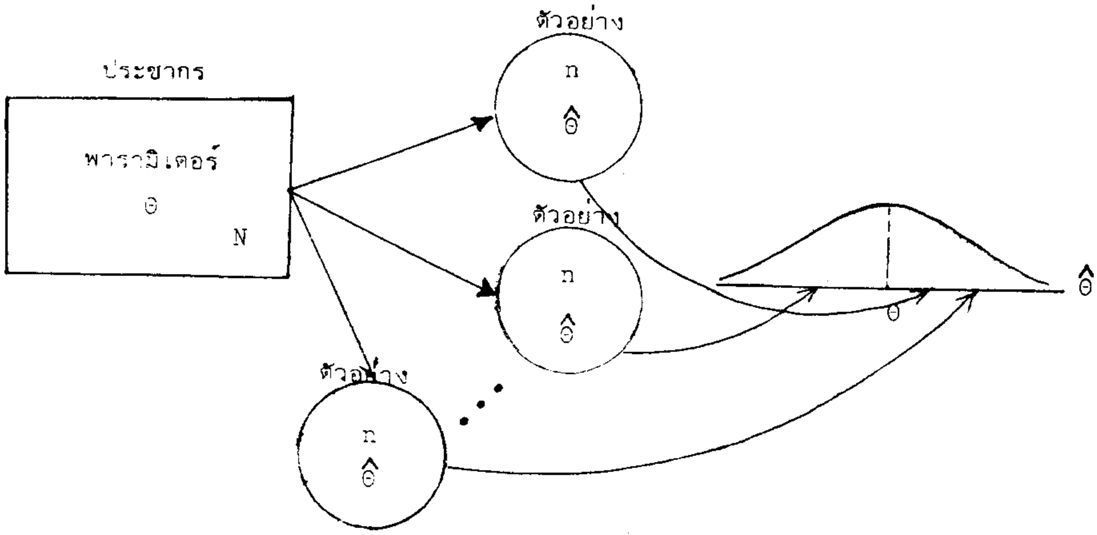


ตัวสถิติตัวอย่าง $\bar{X}$ (ค่าเฉลี่ยเลขคณิต) S^2 (ความแปรปรวน) และ P (สัดส่วน) จะใช้เป็นตัวประมาณค่าแบบจุดของพารามิเตอร์ μ, σ^2 และ π ตามลำดับ

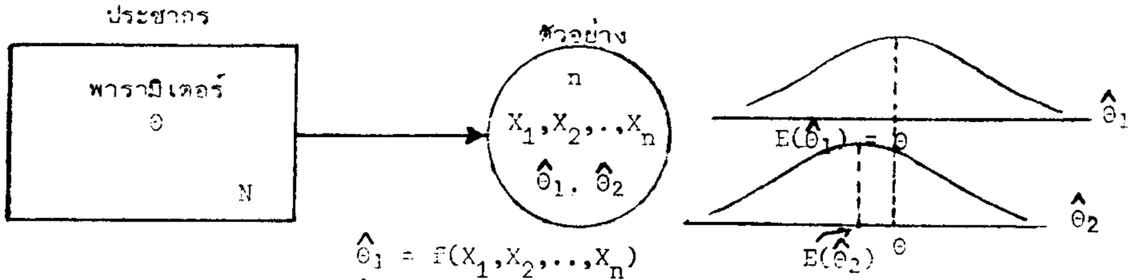
สำหรับพารามิเตอร์ประชากร μ (ค่าเฉลี่ยประชากร) ซึ่งเป็นมาตราวัดแนวโน้มสู่ส่วนกลาง (Measure of Central Tendency) นั้น ฟังก์ชั่นหรือตัวประมาณค่าของ μ ที่เป็นไปได้ ซึ่งเรารู้จักกันดีก็คือ (1) ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ (2) มัธยฐานตัวอย่าง $\bar{X}_m$ และ (3) ฐานนิยมตัวอย่าง $\bar{X}_{mo}$ โดยที่แต่ละตัวประมาณค่าเป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตตัวอย่าง $X_1,X_2,\ldots,X_n$ หรือเป็นค่าที่สรุปจากตัวอย่างนั่นเอง ค่าเฉลี่ยตัวอย่างนั้นเป็นค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตตัวอย่าง มัธยฐานตัวอย่างเป็นค่ากลาง (middle value) ของค่าสังเกตตัวอย่างที่เรียงลำดับตามขนาดแล้ว และฐานนิยมตัวอย่างเป็นค่าสังเกตที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุดหรือมีความถี่มากสุดนั่นเอง

ตัวประมาณค่าตัวไหนที่ใช้เป็นตัวประมาณค่าของ μ? เป็นที่ทราบกันว่าค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\bar{X}$) จะเป็นตัวประมาณค่าของ μ เรามีเกณฑ์ต่าง ๆ สำหรับใช้ในการเลือกตัวประมาณค่าที่ดี เกณฑ์หนึ่งที่เราจะพูดถึงก็คือ "ความแปรปรวนต่ำสุดที่ไม่เอียงเฉ (UMV, Unbiased Minimum Variance) ตัวประมาณค่าที่สอดคล้องกับเกณฑ์นี้ได้ชื่อว่า "ตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉและมีความแปรปรวนต่ำสุด" เกณฑ์ดังกล่าวนี้อธิบายได้ดังนี้

ค่าของตัวประมาณค่าขึ้นอยู่กับค่าสังเกตตัวอย่าง ค่าสังเกตตัวอย่างนี้ก็ขึ้นอยู่กับตัวอย่างสุ่มที่เลือกมาจากประชากร ดังนั้นค่าของตัวประมาณค่าจึงผันแปรไปตามตัวอย่าง นั่นคือตัวประมาณค่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (Ramdom Variable) นั่นเอง และตัวประมาณค่าจะมีการแจกแจงอย่างหนึ่งซึ่งเรียกว่า "การแจกแจงของการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Distribution)" ลองพิจารณาการแจกแจงของตัวประมาณค่า ดังรูปต่อไปนี้

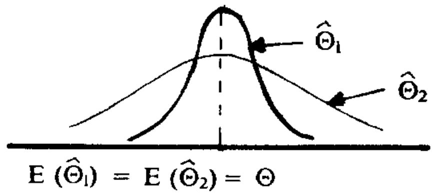


ค่าของตัวประมาณค่า $\hat{\Theta}$ ที่คำนวณจากตัวอย่าง (ขนาด n) ต่าง ๆ ที่เป็นไปได้นั้น ถ้ามีค่าเฉลี่ยเท่ากับพารามิเตอร์ Θ หรือ $E(\hat{\Theta}) = \Theta$ แล้วตัวประมาณค่า $\hat{\Theta}$ ของพารามิเตอร์ Θ จะได้ชื่อว่า "ตัวประมาณค่าไม่เอียงเฉ (Unbiased Estimator)" จากรูปต่อไปนี้เราจะเห็นว่า $\hat{\Theta}_1$ เป็นตัวประมาณค่าไม่เอียงเฉ แต่ $\hat{\Theta}_2$ เป็นตัวประมาณค่าเอียงเฉ เพราะ $E(\hat{\Theta}_1) = \Theta$ และ $E(\hat{\Theta}_2) \neq \Theta$



$\hat{\Theta}_1 = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
$\hat{\Theta}_2 = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

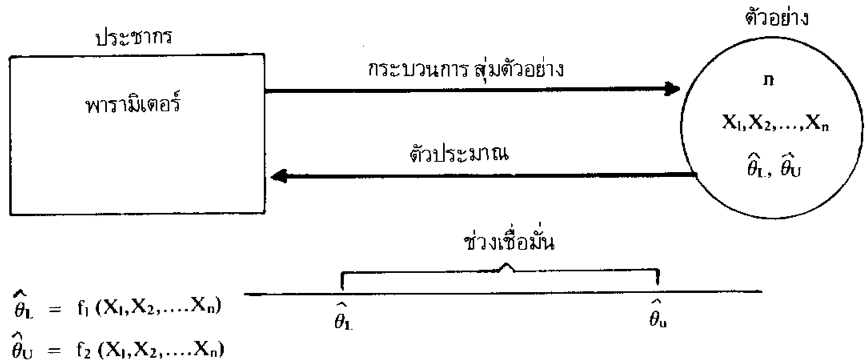
ถ้าตัวประมาณค่า $\hat{\Theta}_1$ และ $\hat{\Theta}_2$ ของพารามิเตอร์ Θ ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าไม่เอียงเฉ นั่นคือ $E(\hat{\Theta}_1) = \Theta$ และ $E(\hat{\Theta}_2)$ แล้ว $\hat{\Theta}_1$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่ดีกว่า Θ_2 ก็ต่อเมื่อค่าที่เป็นไปได้ของ $\hat{\Theta}_1$ เกาะกลุ่มรอบพารามิเตอร์ Θ มากกว่า นั่นก็คือ $\hat{\Theta}_1$ มีความแปรปรวนน้อยกว่า หรือ $V(\hat{\Theta}_1) < V(\hat{\Theta}_2)$ พิจารณารูปต่อไปนี้ประกอบ



ดังนั้นเราจึงสรุปเกณฑ์ความแปรปรวนต่ำสุดที่ไม่เอียงเฉได้ดังนี้ "ตัวประมาณค่า $\hat{\Theta}$ ของพารามิเตอร์ Θ จะได้ชื่อว่าตัวประมาณที่ไม่เอียงเฉและมีความแปรปรวนต่ำสุด ถ้าค่าคาดหวังของ $\hat{\Theta}$ เท่ากับ Θ หรือ $E(\hat{\Theta}) = \Theta$ และในระหว่างตัวประมาณค่าทั้งหมดที่ไม่เอียงเฉของ Θ นั้น $\hat{\Theta}$ จะมีความแปรปรวนน้อยสุด" ตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ μ, π และ σ^2 ที่สอดคล้องกับเกณฑ์ดังกล่าวนี้ก็คือ $\bar{X}$, P และ S^2 ตามลำดับ

4.2.2 การประมาณค่าด้วยช่วงเชื่อมั่น (Interval Estimation)

กระบวนการประมาณแบบช่วงก็คือใช้ฟังก์ชั่นของค่าสังเกตตัวอย่าง 2 ฟังก์ชั่น สมมุติว่าเป็นฟังก์ชั่น $f_1(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ และ $f_2(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ ซึ่งจะให้ค่าออกมา 2 ค่า, $\hat{\Theta}_L$ และ $\hat{\Theta}_u$, โดยที่ค่าทั้งสองจะกำหนดช่วงที่จะรวมค่าของพารามิเตอร์ Θ ด้วยระดับความเชื่อมั่นที่ระบุไว้ เช่นเราอาจจะหา $\hat{\Theta}_l$ และ $\hat{\Theta}_u$ ที่ทำให้พารามิเตอร์ Θ จะอยู่ระหว่าง $\hat{\Theta}_l$ และ $\hat{\Theta}_u$ ด้วยความเชื่อมั่น 95% ค่าประมาณแบบช่วง (Θ_L, Θ_U) นี้มักเรียกว่า "ช่วงเชื่อมั่น (Confidence Interval)" กระบวนการประมาณแบบช่วงที่กล่าวสรุปได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปฟอร์มของการประมาณค่าแบบช่วงจะเป็นดังนี้ "ช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับพารามิเตอร์ Θ คือ

$\hat{\Theta}_L < \Theta < \hat{\Theta}_u$ หรือ $\Theta = (\hat{\Theta}_l, \hat{\Theta}_u)$"

โดยที่ $(1-\alpha)$ เป็นระดับความเชื่อมั่น (Confidence Level) และ α เป็นระดับความไม่เชื่อมั่น ซึ่ง $0 < \alpha < 1$

ตัวอย่างของการประมาณแบบช่วง เช่นถ้าสุ่มตัวอย่างขนาดหนึ่งเพื่อประมาณพารามิเตอร์ μ แบบช่วง และกำหนดระดับความเชื่อมั่นเป็น 0.95 เราประมาณ $\hat{\Theta}_L$ และ $\hat{\Theta}_u$ ได้เป็น 10.50 และ 11.50 ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับพารามิเตอร์ μ จะเป็น

$$\mu = (10.50, 11.50)$$

ในทำนองเดียวกับตัวประมาณค่าแบบจุด เราสามารถพิจารณาตัวประมาณค่าแบบช่วงที่ดีได้จากเกณฑ์ต่อไปนี้ "ตัวประมาณค่าแบบช่วงที่ดีซึ่งเป็นฟังก์ชั่น $f_1(X_1, X_2,...,X_n)$ และ $f_2(X_1, X_2,.....X_n)$ นั้นจะให้ช่วง $(\hat{\Theta}_l, \hat{\Theta}_u)$ ที่สั้นที่สุด สำหรับระดับความเชื่อมั่นและขนาดตัวอย่างที่กำหนดไว้"

4.2.3 การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (μ)

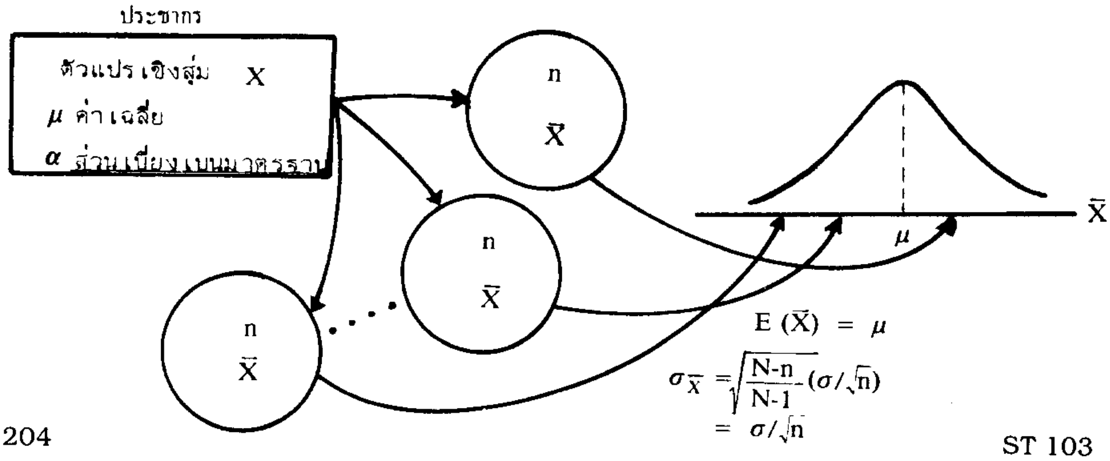
เราทราบมาแล้วว่าค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ดีของค่าเฉลี่ยประชากร μ โดยเทียบกับมัธยฐานตัวอย่าง และฐานนิยมตัวอย่าง จากการศึกษาการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ เราจะได้ค่าคาดหวังและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหรือความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) ของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ ดังนี้

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}(\sigma/\sqrt{n}) \quad \text{ประชากรจำกัด}$$

$$= \sigma/\sqrt{n} \quad \text{ประชากรไม่จำกัด}$$

และถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Population) แล้วการแจกแจงของ $\bar{X}$ จะเป็นแบบปกติด้วย ถ้าประชากรไม่เป็นแบบปกติ (Nonnormal Population) แต่ใช้ตัวอย่างขนาดโต ($n \geq 30$) แล้วการแจกแจงของ $\bar{X}$ แล้วการแจกแจงของ $\bar{X}$ ก็จะเป็นแบบปกติ (โดยประมาณ) พิจารณารูปต่อไปนี้เพื่อประกอบคำอธิบายที่กล่าวมา



ตัวประมาณค่าแบบช่วงของ μ พิจารณาได้จากการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่าง $\bar{X}$ นี้เอง ซึ่งจะสมมติว่ามีการแจกแจงแบบปกติ นั่นคือเมื่อกำหนดตัวอย่างขนาด n และระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ เราจะได้ค่าประมาณแบบช่วง $(\hat{\Theta}_l, \hat{\Theta}_u) = (\hat{\mu}_l, \hat{\mu}_u)$ ของพารามิเตอร์ μ ดังนี้

$$\hat{\mu}_L = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$$

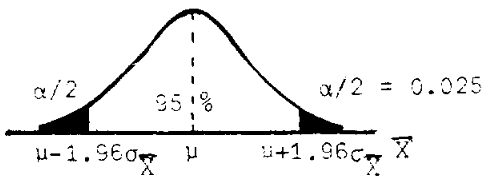
$$\hat{\mu}_u = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$$

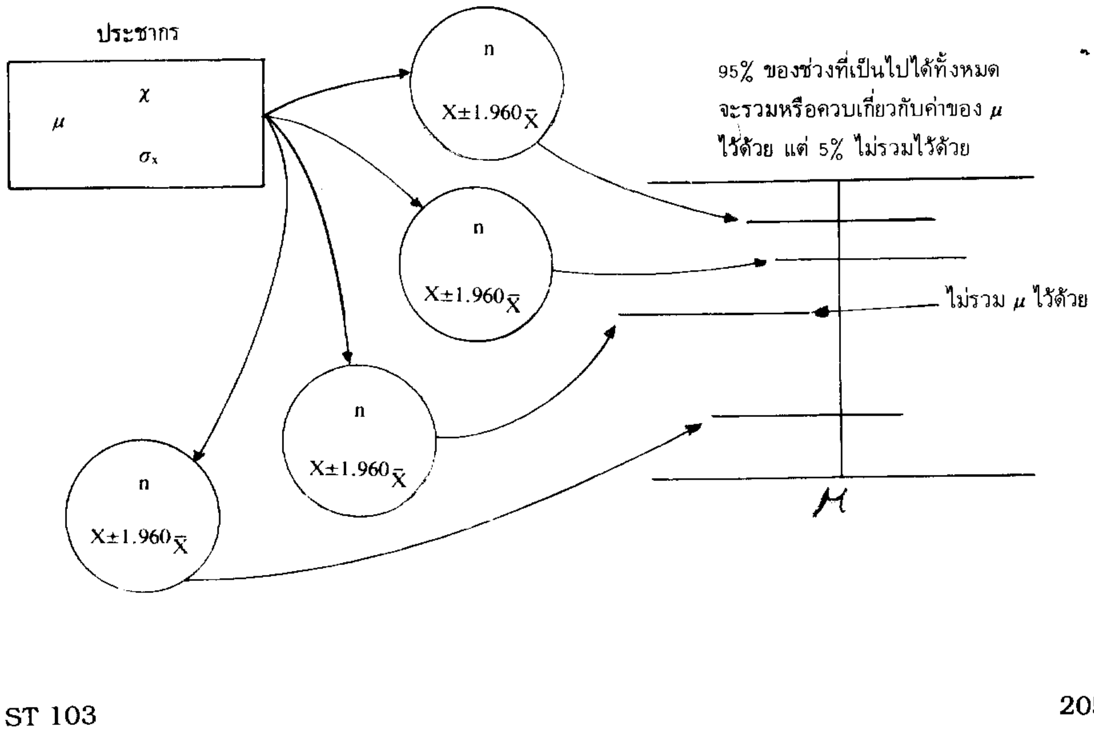
ในเมื่อ $Z_{\alpha/2}$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐานที่ทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น $\alpha/2$ และค่า $Z_{\alpha/2}$ นี้ พิจารณาได้จากตารางปกติมาตรฐานหรือโค้งปกติ (Normal Curve) นั่นเอง เช่นเมื่อเรากำหนด $(1-\alpha)$ เท่ากับ 0.95 หรือ $\alpha = 0.05$ เราจะได้ค่า $Z_{\alpha/2}$ จากตารางปกติมาตรฐานเป็น 1.96 แล้วเราจะได้ $\hat{\mu}_l$ และ $\hat{\mu}_u$ เป็น

ลองพิจารณารูปต่อไปนี้

$$\hat{\mu}_L = \bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}}$$

$$\hat{\mu}_U = \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}$$





จากรูปแรก เราจะเห็นได้ว่า โอกาสที่ $\bar{X}$ จะอยู่ห่างจาก μ ไม่เกิน 1.96 $(\sigma_{\bar{X}})$ จะเท่ากับ 95% นั่นคือ

$$P(\mu - 1.96\sigma_{\bar{X}} < \bar{X} < \mu + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$$

ซึ่งเราสามารถแปลงได้เป็น

$$P(\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}) = 0.95$$

นั่นคือเราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร μ ที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง สำหรับรูปที่สองนั้นแสดงให้เห็นว่า ถ้าเราคำนวณ $\hat{\mu}_L = \bar{X}-1.96\sigma_{\bar{X}}$ และ $\hat{\mu}_U = \bar{X}-1.96\sigma_{\bar{X}}$ สำหรับ μ จากตัวอย่าง (ขนาด n) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด แล้ว 95% ของช่วงเชื่อมั่นที่คำนวณจากตัวอย่างเหล่านั้นจะรวมหรือคาบเกี่ยวค่าของ μ ไว้ด้วย แต่อีก 5% จะไม่รวมค่าของ μ ไว้ด้วย

ดังนั้นเราพอจะสรุปสูตรการประมาณค่าแบบช่วงของพารามิเตอร์ μ ได้ดังนี้ ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นค่าสังเกตของตัวอย่าง (ขนาด n) ที่สุ่มจากประชากรแบบปกติที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย μ แต่ทราบความแปรปรวน σ^2 แล้วช่วงเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร μ กำหนดไว้ว่า

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

หรือ $$\mu = \bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

ในเมื่อ $\bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่างและ $Z_{\alpha/2}$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐานที่ทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือของค่านี้เป็น $\alpha/2$

ถ้าประชากรไม่เป็นแบบปกติ แล้วช่วงเชื่อมั่นนี้ยังใช้ได้ ถ้าขนาดของตัวอย่างโตพอ $(n \geqslant 30)$

ตัวอย่าง 4.1 ในการศึกษารายได้ต่อปีของครัวเรือนเกษตรกรที่อยู่ในอำเภอหนึ่ง โดยอาศัยตัวอย่างของครัวเรือนเกษตรกร 100 ราย ได้รายได้เฉลี่ย $(\bar{X})$ เป็น 6000 บาท

จงประมาณรายได้เฉลี่ยแท้จริง (μ) ของครัวเรือนเกษตรกรในอำเภอนั้นโดยให้มีระดับความเชื่อมั่น 0.95 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของรายได้ของครัวเรือน (σ) เป็น 1000 บาท

สำหรับ $\alpha = 0.05$ เราได้ค่า $Z_{\alpha/2}$ จากตารางปกติมาตรฐานเป็น $Z_{.050/2} = Z_{.025} = 1.96$ เราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับรายได้เฉลี่ยแท้จริงของครัวเรือนเกษตรกรจะเป็น

$$\begin{aligned}\mu &= \bar{X} \pm Z_{.05/2}\sigma/\sqrt{n} \\ &= 6000 \pm 1.96(1000/\sqrt{100})\end{aligned}$$

$$\mu = 6000 \pm 196$$
$$= (5804, 6196)$$

ส่วนมากเราไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) หรือความแปรปรวน (σ^2) ของประชากร จึงจำเป็นต้องประมาณค่า ตัวประมาณค่าที่ดีของ σ ก็คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง S และถ้าตัวอย่างขนาดโต ($n \geqslant 30$) แล้ว S จะมีค่าใช้กับ σ มากขึ้น ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 100 ($1-\alpha$)% สำหรับ μ จึงเป็น

$$\mu = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$$

ตัวอย่าง 4.2 จากตัวอย่างของรายได้ต่อปีของครัวเรือนเกษตรกรนั้น ถ้าเราไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของรายได้ และเราประมาณได้จากตัวอย่างของครัวเรือนเกษตรกร 100 ราย สมมติว่าได้เป็น 1100 บาท แล้วเราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับรายได้เฉลี่ยแท้จริงเป็น

$$\mu = \overline{X} \pm Z_{.05/2} S/\sqrt{n}$$
$$= 6000 \pm 1.96(1100/\sqrt{100})$$
$$= (5784.40, 6215.60)$$

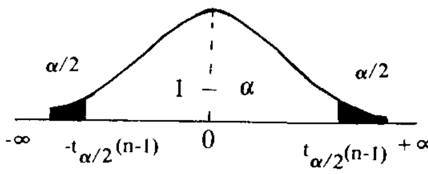
บ่อยครั้งที่เราจำเป็นต้องใช้ตัวอย่างขนาดเล็ก ($n < 30$) ซึ่งสุ่มมาจากประชากรแบบปกติ (หรือเกือบจะแจกแจงแบบปกติ) ที่ไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร σ ในกรณีนี้ค่าเฉลี่ยประชากร μ ที่จะประมาณแบบช่วงนั้นจะต้องอาศัยการแจกแจงของตัวสถิติ T

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

ในเมื่อ $S_{\overline{X}}$ เป็นตัวประมาณค่าของ $\sigma_{\overline{X}}$ และตัวสถิติ T นี้จะมีการแจกแจงแบบที (Student's t Distribution) ซึ่งมีองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom, df) เท่ากับ n-1 กราฟของการแจกแจงแบบทีจะมีรูปร่างคล้ายกับการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน แต่มีการกระจัดกระจายมากกว่า และถ้าองศาความเป็นอิสระหรือตัวอย่างขนาดโต แล้วกราฟของทั้งสองเกือบจะทับกัน จากการแจกแจงของตัวสถิติ T นี้เราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่น 100 ($1-\alpha$)% สำหรับค่าเฉลี่ยประชากร μ ได้เป็น

$$\mu = \overline{X} \pm t_{\alpha/2}^{(n-1)} \; S/\sqrt{n}$$

ในเมื่อ $t_{\alpha/2}^{(n-1)}$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม T ที่มีการแจกแจงแบบที (องศาความเป็นอิสระ n-1 และทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น $\alpha/2$ ดังรูป



$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

ตัวอย่าง 4.3 เกษตรกรต้องการประมาณผลผลิตต่อไร่ของข้าวพันธ์ กขค จึงทำการทดลองกับแปลงข้าว 16 แห่ง ๆ ละไร่ ปรากฏว่าได้ข้าวเฉลี่ยต่อไร่เป็น 90 ถัง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 ถัง

จงประมาณผลผลิตเฉลี่ยต่อไร่ที่แท้จริง (μ) ของข้าวพันธุ์นี้ โดยใช้ระดับความเชื่อมั่น 0.99

จากตารางที เมื่อ $\alpha = .01$, $n-1 = 16-1 = 15$ เราได้ $t_{.01/2}^{(15)} = t_{.005}^{(15)} = 2.95$ และจากข้อมูลเรามี $\bar{X} = 90$, $S = 20$ แล้วเราจะได้ช่วงเชื่อมั่น 99% สำหรับผลผลิตข้าวเฉลี่ยต่อต่อไร่ของพันธุ์ข้าว กขค ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mu &= \bar{X} \pm t_{.01/2}^{(16-1)} S/\sqrt{n} \\
&= 90 \pm (2.95)(20/\sqrt{16}) \\
&= 90 \pm 14.75 \\
&= (75.25,\ 104.75)
\end{aligned}$$

4.2.2 การประมาณสัดส่วนประชากร (π)

ในประชากรขนาด N ถ้ามีหน่วยแจงนับที่น่าสนใจเป็น A แล้วสัดส่วนประชากร π ของหน่วยที่สนใจกำหนดไว้เป็น

$$\pi = A/N$$

ตัวประมาณค่าแบบจุดที่ดีก็คือสัดส่วนตัวอย่าง P ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$P = a/n$$

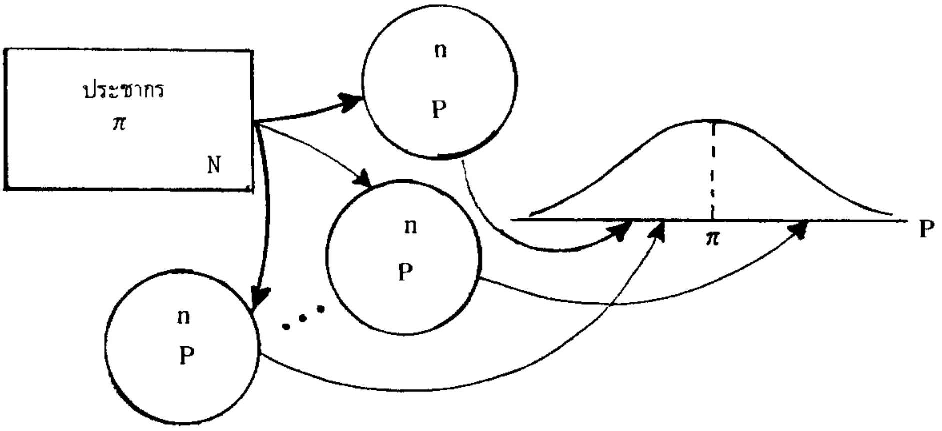
ในเมื่อ a เป็นจำนวนหน่วยแจงนับที่น่าสนใจในตัวอย่างขนาด n จากการศึกษาการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของ P เราทราบว่า

$$E(P) = \pi$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\sqrt{\pi(1-\pi)/n} \qquad \text{ประชากรจำกัด}$$

$$= \sqrt{\pi(1-\pi)/n} \qquad \text{ประชากรไม่จำกัด}$$

และเมื่อตัวอย่างขนาดโต ($n \geq 30$) ตัวประมาณค่า P จะมีการแจกแจกแบบปกติ (โดยประมาณ) ดังรูป



เนื่องจาก σ_p ขึ้นอยู่กับ π ที่ไม่ทราบค่า จึงจำเป็นต้องประมาณค่า ซึ่งจะประมาณด้วย $S_p = \sqrt{P(1-P)/n}$ แล้วเราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่น $100\,(1-\alpha)\%$ สำหรับ π ได้โดยอาศัยการแจกแจงของ P ที่มีการแจกแจงแบบปกติ (เมื่อตัวอย่างขนาดโต) ซึ่งจะได้เป็นดังนี้

$$\pi = P \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{P\,(1-P)/n}$$

จากช่วงเชื่อมั่นนี้เราสามารถประมาณเปอร์เซ็นต์แบบช่วงได้เป็น

$$100\pi = 100\,(P \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{P\,(1-P)/n}\,)$$

ตัวอย่าง 4.3 ก่อนเลือกตั้ง นาย ก. ต้องการประมาณสัดส่วนที่ผู้เลือกตั้งจะลงคะแนนให้นาย ข. ผู้สมัครรับเลือกตั้ง สุ่มตัวอย่างของผู้มีสิทธิเลือกตั้ง 2500 ราย นาย ก. พบว่ามี 60% ที่จะเลือก นาย ข.

จงประมาณสัดส่วนประชากร (π) ที่ผู้เลือกตั้งจะลงคะแนนให้นาย ข. โดยใช้ความเชื่อมั่น 96%

สำหรับระดับความเชื่อมั่น 96% หรือ $\alpha = .04$ เราพิจารณาค่า $Z_{.04/2} = Z_{.02}$ โดยอาศัยตารางปกติมาตรฐานได้เป็น 2.05 ดังนั้นช่วงเชื่อมั่น 96% สำหรับสัดส่วนประชากร π ที่ผู้เลือกตั้งจะเลือกนาย ข. เป็น

$$\begin{aligned}
\pi &= P \pm Z_{.04/2}\sqrt{P\,(1-P)/n} \\
&= 0.60 \pm 2.05\sqrt{0.60\,(1-0.60)/2500} \\
&= 0.60 \pm 0.02 \\
&= (0.58,\ 0.62)
\end{aligned}$$

4.2.5 การประมาณความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ^2, σ)

ตัวประมาณค่าแบบจุดที่ดีของความแปรปรวนประชากร σ^2 ก็คือความแปรปรวนตัวอย่าง S^2 ซึ่งกำหนดไว้ว่า

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X-\bar{X})^2$$

ความแปรปรวนตัวอย่าง S^2 นี้เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉและมีความแปรปรวนต่ำสุดของพารามิเตอร์ σ^2

สำหรับตัวประมาณค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร σ ที่ใช้กันบ่อยมากก็คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง S ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่เอียงเฉเล็กน้อยของ σ นั่นคือ E (S) $\geqslant \sigma$ จำนวนที่เอียงเฉจะลดลงถ้าขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

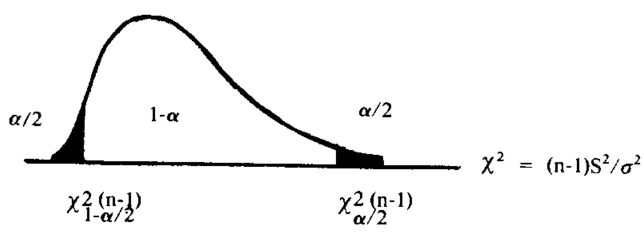
ตัวประมาณค่าแบบช่วงของความแปรปรวนประชากร σ^2 จะขึ้นอยู่กับการแจกแจงของสุ่มตัวอย่างของฟังก์ชั่นของความแปรปรวนตัวอย่าง S^2 นั่นคือขึ้นอยู่กับการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติ χ^2

$$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$$

ซึ่งมีการแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square) ด้วยองศาความเป็นอิสระ (n-1) การแจกแจงไคสแควร์นี้จะเบ้ทางขวา และรูปร่างของมันจะขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างเช่นเดียวกับการแจกแจงแบบทีจากการแจกแจงของตัวสถิติ นี้เราสามารถสร้างช่วงเชื่อมั่น 100 (1-α)% สำหรับความแปรปรวนประชากร σ^2 ได้เป็น

$$\sigma^2 = (n-1)\, S^2/\chi^{2(n-1)}_{\alpha/2} \quad , \quad (n-1)S^2/\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}$$

ในเมื่อ $\chi^{2(n-1)}_{\alpha/2}$ และ $\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}$ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบไควสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระ n-1 และทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น $\alpha/2$ และ $1-\alpha/2$ ตามลำดับ ค่าทั้งสองพิจารณาได้จากตารางไคสแควร์



ตัวอย่าง 4.4 ในการประมาณความแปรปรวนของรายได้ต่อวันของคนงานในโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง โดยใช้ตัวอย่างของคนงาน 10 ราย ปรากฏว่าได้รายได้เฉลี่ยและความแปรปรวนเป็น

60 และ 15 ตามลำดับ

จงประมาณความแปรปรวนของรายได้ต่อวันที่แท้จริง σ^2 โดยใช้ระดับความเชื่อมั่น 0.95

สำหรับ $\alpha = .05$ และ $n-1 = 9$ เราพิจารณาค่า $\chi^{2(n-1)}_{\alpha/2}$ และ $\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}$ โดยอาศัยตารางไคสแควร์ได้เป็น 19.02 และ 2.70 ตามลำดับแล้วช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับความแปรปรวนของรายได้ต่อวันที่แท้จริงจะเป็น 19.02

$$\sigma^2 = (n-1)S^2/\chi^{2(n-1)}_{.05/2}\ ,\ (n-1)S^2/\chi^{2(n-1)}_{1-.05/2}$$

$$= (10-1)\ (15)/(19.02),\ (10-1)\ (15)/(2.70)$$

$$= (7.10,\ 50.00)$$

ส่วนช่วงเชื่อมั่น $100\,(1-\alpha)\%$ สำหรับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ) นั้นจะประมาณได้จากช่วงเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนนั่นเอง นั่นคือ

$$\sigma = \sqrt{(n-1)S^2/\chi^2_{\alpha/2}{}^{(n-1)}}\ ,\ \sqrt{(n-1)S^2/\chi^2_{1-\alpha/2}{}^{(n-1)}}$$

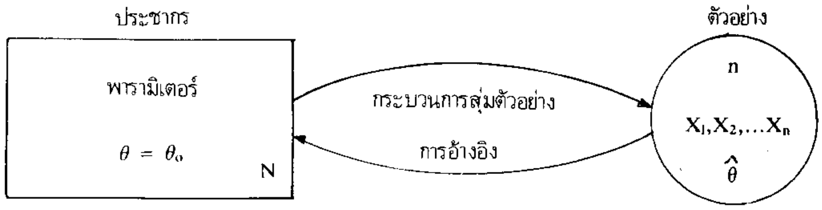
การทดสอบสมมติฐาน (Statistical Hypothesis Testing)

การทดสอบสมมติฐานเป็นอีกแบบหนึ่งของสถิติอนุมานหรือการอ้างอิงเชิงสถิติโดยทั่วไปคำว่า "สมมติฐาน (Hypothesis)" นั้นจะหมายถึงทฤษฎีหรือข้อเสนอที่กล่าวขึ้นมาใช้ชั่วคราวเพื่ออธิบายความจริงบางอย่าง และใช้เป็นแนวทางในการสืบสวนค้นคว้าเรื่องอื่น ๆ ด้วย สมมติฐานอาจจะเป็นจริงหรือเป็นเท็จก็ได้ แต่จะไม่เป็นทั้งจริงและเท็จพร้อม ๆ กัน

สำหรับสมมติฐานเชิงสถิติ (Statistical Hypothesis) จะเป็นข้อเสนอหรือคำกล่าวเกี่ยวกับคุณลักษณะหรือพารามิเตอร์ของประชากรที่ต้องการศึกษาหรือสำรวจเช่นรายได้เฉลี่ยต่อครอบครัวต่อปีของชาวนาไทยมากกว่า 4000 บาท พรรคพัฒนาเกษตรได้รับความนิยมจากประชาชนในภาคอีสานน้อยกว่า 20% เป็นต้น ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติส่วนมากเราเพียงแต่ระบุพารามิเตอร์ประชากรเฉพาะตัวที่สนใจเท่านั้น อาจจะเป็นหนึ่งตัวหรือมากกว่าก็ได้ แต่ไม่จำเป็นต้องระบุทุกตัว

สมมติฐานเชิงสถิตินั้นอาจจะเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง ในการตรวจสอบสมมติฐานเราก็อาศัยตัวสถิติซึ่งสรุปจากตัวอย่างสุ่มมาตัดสินใจว่าสมมติฐานนั้นได้รับการยอมรับ (หรือได้รับการปฏิเสธ) หรือไม่ การยอมรับหรือการปฏิเสธก็พิจารณาจากตัวสถิติตัวอย่างว่าสอดคล้องกับสมมติฐานหรือไม่ ถ้าสอดคล้องหรือไปกันได้ก็ยอมรับ แต่ถ้าไม่สอดคล้องก็ปฏิเสธ

ให้ Θ เป็นพารามิเตอร์ประชากรที่สมมติฐานระบุไว้และ Θ_0 เป็นค่าของพารามิเตอร์ Θ ที่ระบุไว้ในสมมุติฐาน สำหรับตัวสถิติหรือตัวประมาณค่าแบบจุดจากตัวอย่างที่จะใช้พิจารณาว่าค่าของพารามิเตอร์ Θ ซึ่งระบุไว้ในสมมติฐานนั้นเป็นไปได้หรือไม่ จะให้เป็น $\hat{\Theta}$ แล้วเราสามารถแสดงกระบวนการสุ่มตัวอย่างเพื่อการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติได้ดังนี้



$\hat{\theta}$: ตัวประมาณค่าแบบจุดของ θ

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิตินั้น ข้อความซึ่งเป็นสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์และขึ้นอยู่กับกระบวนการทดสอบ (Test Procedure) จะเรียกว่า "สมมติฐานหลัก (Null Hypothesis, Ho)" และคำกล่าวอย่างอื่นที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งไม่อยู่ในสมมติฐานหลักจะเรียกว่า "สมมติฐานรอง (Alternative Hypothesis, Ha)" หรือสมมติฐานวิจัย (Research Hypothesis)" สมมติฐานหลัก Ho และสมมติฐานรอง Ha นั้นจะต้องไม่ร่วมกัน จะประกอบเป็นเซทรวม (หรือเซทจักรวาล) หรือไม่ก็ได้

แบบฟอร์มของคำกล่าวที่เป็นสมมติฐานเชิงสถิติ ซึ่งเกี่ยวกับพารามิเตอร์ Θ จะเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบต่อไปนี้

(1) Ho : $\Theta = \Theta_0$ Ha : $\Theta \neq \Theta_0$

(2) Ho : $\Theta \geqslant \Theta_0$ Ha : $\Theta < \Theta_0$

(3) Ho : $\Theta \leqslant \Theta_0$ Ha : $\Theta > \Theta_0$

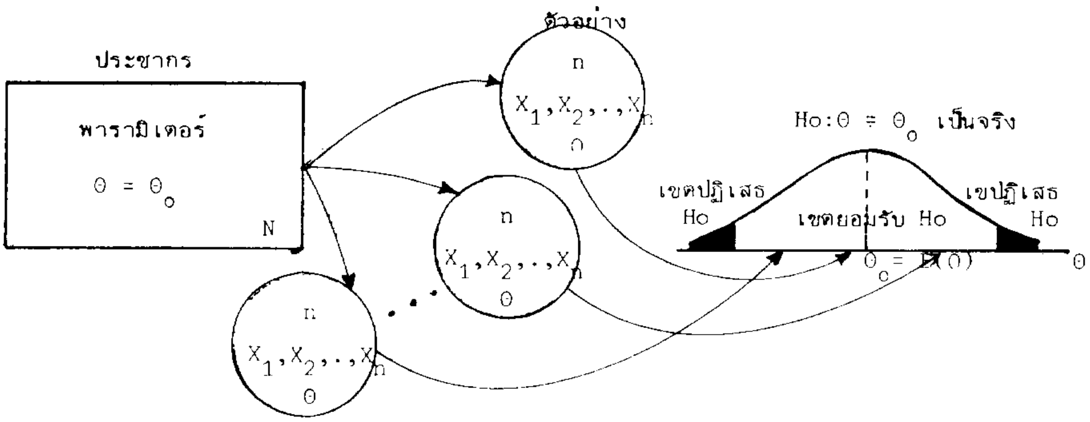
สมมติฐานเหล่านี้มีสิ่งที่น่าสนใจพิเศษ ดังนี้

(ก) สมมติฐานหลัก Ho จะเป็นคำกล่าวที่มีคำว่า "เท่ากับ (=)" รวมไว้ด้วยเสมอ ซึ่งจะบ่งถึงการเท่ากันหรือไม่แตกต่างกันนั่นเอง และค่า Θ_0 นั้นจะเรียกว่าค่าว่างเปล่า (Null Value)

(ข) สมมติฐานหลัก Ho และสมมติฐานรอง Ha จะไม่รวมค่าของตัวสถิติหรือตัวประมาณค่าไว้เป็นอันขาด

(ค) สมมติฐานรอง Ha นั้นตามปกติจะเป็นคำกล่าวของผู้ที่ทำการทดสอบ, ผู้กล่าวข้อความ, หรือผู้ทำการวิจัย

ตัวสถิติหรือตัวประมาณค่าแบบจุดที่กำหนดจากตัวอย่าง เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการตัดสินใจเกี่ยวกับสมมติฐานหลัก Ho นั้นจะเรียกว่า ตัวสถิติทดสอบ (Test Statistic) กลุ่มหรือเซทของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวสถิติทดสอบจะเรียกว่า กลุ่มผลทดลอง (Sample Space) ของตัวสถิติทดสอบ ในกลุ่มผลทดลองของตัวสถิติทดสอบนี้บางค่าของมันเกือบจะไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย ถ้าสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง, ค่าเหล่านั้นจะใช้เป็นค่าที่นำไปสู่การตัดสินใจที่จะปฏิเสธสมมัติฐานหลัก Ho และจะเรียกว่า "ค่าวิกฤต (Critical Value)" สำหรับเซทของค่าเหล่านี้ซึ่งเป็นเซทย่อยของกลุ่มผลทดลองของตัวสถิติทดสอบจะเรียกว่า "เขตวิกฤตหรือเขตปฏิเสธ (Critical or Rejection Region) ดังนั้นสมมติฐานหลัก Ho จะได้รับการปฏิเสธถ้าค่าของตัวสถิติทดสอบอยู่ในเขตวิกฤต ซึ่งเป็นเซทย่อยที่เกือบจะไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย ถ้าสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง และจะยอมรับสมมติฐานหลัก Ho ถ้าค่าของตัวสถิติทดสอบไม่อยู่ในเขตปฏิเสธ นั่นคือมันอยู่ในเขตยอมรับ (Acceptance Region) หรืออยู่ในเซทย่อยที่มีโอกาสเกิดขึ้นมากนั่นเอง ที่กล่าวมานั้นแสดงได้ด้วยรูปภาพ ดังนี้



4.3.1 ความคลาดเคลื่อนในการทดสอบสมมติฐาน (Error in Hypothesis Testing)

ในการตัดสินใจที่จะยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho โดยอาศัยตัวอย่างเป็นเครื่องมือนั้น เราอาจจะตัดสินใจผิดก็ได้ ซึ่งเราจะเรียกว่าเกิดความคลาดเคลื่อน (Error) ขึ้น ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นก็เนื่องจากตัวอย่างเองมีความคลาดเคลื่อนที่เรียกกันว่า "ความคลาดเคลื่อนตัวอย่าง (Sampling Error) และความคลาดเคลื่อนอย่างอื่น (Nonsampling Error)" ปะปนอยู่ด้วย สำหรับความคลาดเคลื่อนตัวอย่างนั้นเป็นคุณลักษณะประจำตัวของตัวอย่างจะทำให้น้อยลงได้ถ้าใช้ตัวอย่างขนาดโต ความคลาดเคลื่อนในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ

(1) ความคลาดเคลื่อนแบบ 1 (Type I Error) เป็นความคลาดเคลื่อนอันเกิดจากการที่ปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ทั้ง ๆ ที่เป็นจริง ความน่าจะเป็นที่ความคลาดเคลื่อนประเภทนี้

จะเกิดขึ้นเราเรียกว่า การเสี่ยงแบบ 1 (Alpha Risk), ระดับนัยสำคัญ (Significance Level) หรือขนาดของการทดสอบ (Size of Test) ซึ่งจะแทนด้วย α ดังนั้น

α = P (ความคลาดเคลื่อนแบบ 1)
= P (ปฏิเสธ Ho ในเมื่อ Ho เป็นจริง)
= P (ค่าของตัวสถิติทดสอบอยู่ในเขตวิกฤตในเมื่อ Ho เป็นจริง)

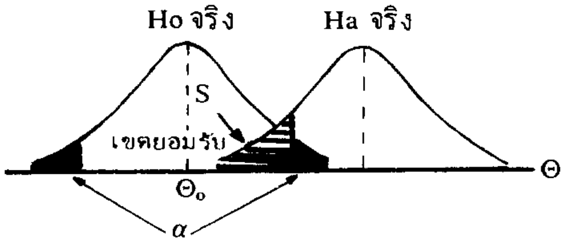
(2) ความคลาดเคลื่อนแบบ 2 (Type II Error) เป็นความคลาดเคลื่อนอันเกิดจากการที่เรายอมรับสมมติฐานหลัก Ho ทั้ง ๆ ที่เป็นเท็จ (หรือสมมติฐานรอง Ha เป็นจริง) ความน่าจะเป็นที่ความคลาดเคลื่อนประเภทนี้จะเกิดขึ้น เรียกว่า การเสี่ยงแบบ 2 (Beta Risk) และจะแทนด้วย β นั่นคือ

β = P (ความคลาดเคลื่อนแบบ 2)
= P (ยอมรับ Ho ในเมื่อ Ha เป็นจริง)
= P (ค่าของตัวสถิติทดสอบอยู่ในเขตยอมรับ ในเมื่อ Ha เป็นจริง)

เราพอจะสรุปความคลาดเคลื่อนในการทดสอบ และความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนหรือการเสี่ยงแบบต่าง ๆ กับความน่าจะเป็นอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้ดังนี้

	สถานการณ์ที่แท้จริง (True Situation)	Ho เป็นจริง	Ho เป็นเท็จ
การตัดสินใจ (Decision)	ปฏิเสธ Ho (RejectX	Type I Error (α) Significance Level	No Error (1 -ß) Power
	ยอมรับ Ho (Accept)	No Error ($1 - \alpha$) Confidence Level	Type II Error (ß)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิตินั้น เรามุ่งหวังจะให้ความคลาดเคลื่อนทั้งสองแบบมีโอกาสเกิดขึ้นน้อย ๆ นั่นคือต้องการให้การเสี่ยงทั้งสองแบบ α และ β มีค่าน้อย ๆ นั่นเอง แต่การที่จะให้ทั้ง α และ β มีค่าน้อย ๆ ได้ก็ต้องอาศัยตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \to \infty$) ในทางปฏิบัติส่วนมากเราไม่สามารถใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่ได้ ทั้งนี้ก็เพราะค่าใช้จ่าย เวลา หรือ ปัจจัยอื่น ๆ ไม่เอื้ออำนวยให้ นั่นคือเราจำเป็นต้องใช้ตัวอย่างขนาดจำกัดนั่นเอง ดังนั้นเราจึงไม่สามารถทำให้ทั้ง α และ β มีค่าน้อย ๆ พร้อมกันได้ อย่างไรก็ตามเราสามารถทำให้ค่าใดค่าหนึ่งน้อยได้ แต่เมื่อทำให้ค่าหนึ่งน้อยอีกค่าหนึ่งจะมาก ทั้งนี้ก็เพราะ α และ β มีความสัมพันธ์กันในแง่ที่ว่า ถ้า α มีค่ามาก แล้ว β จะมีค่าน้อย หรือถ้า α มีค่าน้อย แล้ว β จะมีค่ามากลองพิจารณารูปของการทดสอบสมมติฐาน Ho : $\Theta = \Theta_o$, Ha : $\Theta \neq \Theta_o$ ประกอบ



โดยทั่วไปในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เรามักจะกำหนด α ไว้ล่วงหน้าก่อนที่จะรวบรวมตัวอย่าง และให้เป็นค่าน้อย ๆ นั่นคือให้เป็น α = .01, .05 หรือ .10 (ทั้งนี้ก็เพราะว่าปัญหาทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติส่วนมากนั้นความคลาดเคลื่อนแบบ 1 จะก่อให้เกิดการสูญเสีย (Loss) มากกว่า) แล้วพยายามหาหลักเกณฑ์การทดสอบ หรือตัวสถิติทดสอบที่ทำให้ β มีค่าน้อย ๆ เท่าที่เป็นไปได้ หรือทำให้อำนาจทดสอบ (1-β) มีค่ามากนั่นเอง

สำหรับอำนาจทดสอบ (Power of Test) นั้นเป็นความน่าจะเป็นที่วิธีการทดสอบจะตรวจพบสมมติฐานหลัก Ho ที่เป็นเท็จ หรือเป็นโอกาสที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ที่เป็นเท็จนั่นเอง นั่นคือ

อำนาจทดสอบ (1-β) = P (ปฏิเสธ Ho ในเมื่อ Ha เป็นจริง)
= P (ค่าของตัวสถิติทดสอบอยู่เขตวิกฤต ในเมื่อ Ha เป็นจริง)

4.3.2 ขั้นตอนในการทดสอบสมมติฐาน (Steps for Statistical Hypothesis Testing)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิตินั้น เรามักทำตามขั้นตอนต่าง ๆ ต่อไปนี้ ซึ่งเป็นแบบหนึ่งที่ใช้กันบ่อย ๆ

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐาน (Hypothesis Formulation) สมมติฐานทดสอบที่ตั้งขึ้นจะประกอบด้วยสมมติฐานหลัก Ho และสมมติฐานรอง Ha โดยมีสมมติฐานหลัก Ho จะเป็นแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

Ho : $\Theta = \Theta_o$, Ho : $\Theta \geqslant \Theta_o$, หรือ Ho : $\Theta \leqslant \Theta_o$

ในเมื่อ Θ_o เป็นค่าที่ระบุไว้ของพารามิเตอร์ Θ และสมมติฐานรอง Ha จะเป็นแบบหนึ่งใน 2 แบบดังนี้

(ก) สมมติฐานรองทางเดียว (One-sided Alternatives) มีแบบฟอร์มดังนี้

Ha : $\Theta < \Theta_o$ หรือ Ha : $\Theta > \Theta_o$

(ข) สมมติฐานรองสองทาง (Two - sided Alternatives) มีแบบฟอร์มเป็น

Ha : $\Theta \neq \Theta_o$

ซึ่งเป็นสมมติฐานที่กล่าวทั้ง $\Theta<\Theta_0$ และ $\Theta>\Theta_0$

ตัวอย่างของการตั้งสมมติฐาน เช่น ถ้ามีคำกล่าวว่า "ครอบครัวเกษตรกรไทยมีรายได้เฉลี่ยต่อปีเป็น 6000 บาท" สมมติฐานที่ตั้งขึ้นจะเป็น

Ho : μ = 6000 บาท ; Ha : $\mu \neq$ 6000 บาท

แต่ถ้ากล่าวว่า "ครอบครัวเกษตรกรไทยมีรายได้เฉลี่ยมากกว่า 6000 บาท" สมมติฐานจะเป็น

Ho : $\mu \leqslant$ 6000 บาท ; Ha : $\mu >$ 6000 บาท

หรือกล่าวว่า "ครอบครัวเกษตรกรไทยมีรายได้เฉลี่ยน้อยกว่า 6000 บาท" แล้วสมมติฐานจะเป็น

Ho : $\mu \geqslant$ 6000 บาท ; Ha ; $\mu <$ 6000 บาท

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญและขนาดตัวอย่าง (Specifying Significance Level and Sample Size) โดยทั่วไปเรากำหนดระดับนัยสำคัญหรือการเสี่ยงแบบ 1 เป็น α = .05 หรือ .01 ถ้าสมมติฐานหลัก Ho ได้รับการปฏิเสธในระดับนัยสำคัญ α = .05 แล้วการทดสอบจะเรียกว่า "มีนัยสำคัญ (Significant)" แต่ถ้าปฏิเสธ ณ α = .01 จะเรียกว่า "มีนัยสำคัญยิ่ง (Highly Significant)"

บางครั้งเราก็กำหนดอำนาจทดสอบ (1-β) ไว้ด้วยซึ่งจะทำให้สามารถพิจารณาขนาดตัวอย่างที่จะต้องเลือกสุ่ม ได้ในการกำหนดขนาดตัวอย่างนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยต่าง ๆ ว่าจะเอื้ออำนวยให้ได้หรือไม่ ถ้าใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่จะลด β ลง (สำหรับ α ควบคุมไว้แล้ว)

ขั้นที่ 3 เลือกตัวสถิติทดสอบและตั้งเกณฑ์ตัดสินใจ (Selecting Test Statistic and Establishing Decision Criteria) ตัวสถิติทดสอบที่จะเลือกนั้นจะเป็นตัวสถิติที่มีการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างสอดคล้องกับพารามิเตอร์ประชากรที่ระบุไว้ในคำกล่าวของสมมติฐานหลัก Ho และสมมติฐานรอง Ha ถ้าข้อกำหนดบางอย่าง (Certain Assumptions) สอดคล้องกันแล้วการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติทดสอบจะทราบได้ ข้อกำหนดเหล่านี้มักจะเกี่ยวกับประชากรที่จะสุ่มตัวอย่างและของตัวอย่างเอง เช่นประชากรต้องมีการแจกแจงเป็นแบบหนึ่งทราบพารามิเตอร์อะไรบ้าง ตัวอย่างก็ต้องเป็นแบบสุ่ม เป็นต้น

จากการที่ทราบการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติทดสอบทำให้เราสามารถกำหนดเกณฑ์ตัดสินใจซึ่งใช้เป็นแนวทางในการยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ได้ เกณฑ์ตัดสินใจนั้นมักจะกล่าวในแบบมาตรฐานของค่าตัวสถิติทดสอบที่ใช้ ซึ่งค่าเหล่านี้หาได้จากตารางสถิติต่าง ๆ เช่นตารางปกติมาตรฐาน Z ตารางที t ตารางไคสแควร์ X^2 หรือตารางเอฟ F เป็นต้น เกณฑ์ตัดสินใจนี้ แบ่งการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติทดสอบออกเป็น 2 เขตคือ

เขตปฏิเสธและเขตยอมรับ เขตเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับสมมติฐานรอง Ha (ซึ่งบอกทิศทางของเขตปฏิเสธ) ระดับนัยสำคัญ α (บอกขนาดของเขตปฏิเสธ) และการแจกแจงของการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติทดสอบ (ใช้หาจุดวิกฤติที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho หรือจุดแบ่งเขตปฏิเสธกับเขตยอมรับ) เขตปฏิเสธสำหรับสมมติฐานรอง Ha แบบต่าง ๆ จะเป็นดังนี้

(1) Ha : $\Theta \neq \Theta_o$ (2) Ha : $\Theta < \Theta_o$ (3) Ha : $\Theta > \Theta_o$

ขั้นที่ 4 ทำการทดลองและคำนวณตัวสถิติ (Performs Experiment and Doing Computations) สามขั้นตอนที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นการเตรียมการหรือเป็นขั้นวางแผนทดสอบ ขั้นที่ 4 นี้ จึงเป็นงานสนามหรืองานในห้องทดลองเพื่อทำการทดลองสำหรับรวบรวมข้อมูลข่าวสาร จากข้อมูลข่าวสารที่ได้จึงคำนวณตัวสถิติต่าง ๆ ที่จำเป็น และคำนวณค่าของตัวสถิติทดสอบซึ่งกำหนดไว้ในขั้นที่ 3 ด้วย

ขั้นที่ 5 สรุปผลหรือทำการตัดสินใจ (Drawing Conclusion or Making Decisions) ขั้นสุดท้ายนี้เป็นการสรุปผลในทางสถิติ โดยใช้ค่าของตัวสถิติทดสอบที่คำนวณได้ในขั้นที่ 4 มาเป็นเครื่องมือสำหรับตัดสินใจ นั่นคือถ้าค่าของตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตปฏิเสธ เราก็ปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho นั้นแต่ถ้าไม่อยู่ก็ย่อมรับสมมติฐานหลัก Ho นั้น

ในการสรุปผลนั้นจะต้องกล่าวให้สอดคล้องกับคำกล่าวหรือสมมติฐานนั้นด้วย มิใช่เพียงแต่บอกว่าปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐานหลัก Ho เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.5 นักวิจัยกล่าวว่า "บุหรี่ที่มีนิโคตินเฉลี่ยน้อยกว่า 30 มก. จะปลอดภัยจากโรคปอด" ถ้าเราต้องการจะทดสอบว่าบุหรี่กรุงทองนั้นปลอดภัยจากโรคปอดหรือไม่ เราทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

(1) ปัญหานี้ต้องการให้เราทดสอบสมมติฐานที่ว่า

Ho : $\mu \geqslant 30$ มก. ; Ha : $\mu < 30$ มก.

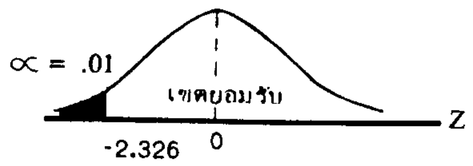
ถ้าเราปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho เราก็แน่ใจว่าบุหรี่กรุงทองปลอดภัยจากโรคปอด

(2) ในการทดสอบสมมติฐานนี้จะใช้ระดับนับสำคัญ $\alpha = .01$ หรือ 1% และใช้ตัวอย่างของบุหรี่กรุงทอง 100 ม้วน (จะใช้น้อยหรือมากกว่า 100 ม้วนก็ได้)

(3) ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ คือ $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N (0, 1) ถ้า (ก) เลือกบุหรี่แบบสุ่ม (ข) จำนวนนิโคตินต่อมวนมีการแจกแจงแบบปกติ และ (ค) การแจกแจงนั้นมีค่าเฉลี่ย $\mu = 30$ มก. และส่วนเบี่ยนเบนมาตรฐาน $\sigma = 8$ มก.

เราพยายามเลือกตัวอย่างเพื่อให้สอดคล้องกับ (ก) ได้โดยการเลือกบุหรี่ 1 มวนจากบุหรี่หนึ่งซอง และเลือกแต่ละซองจากบุหรี่ที่ขายอยู่ตามร้านต่าง ๆ เมื่อขนาดตัวอย่างโตมาก (ขนาด 100) เช่นนี้จะทำให้ข้อกำหนด (ข) ไม่จำเป็น สำหรับข้อกำหนด (ค) ที่ว่า $\sigma = 8$ นั้นอาจจะไม่เป็นจริงก็ได้ (กรณีที่ไม่ทราบ σ เราใช้ตัวสถิติทดสอบตัวอื่นได้)

เกณฑ์ตัดสินใจซึ่งกำหนดเขตวิกฤตนั้นพิจารณาได้จากตารางปกติมาตรฐาน ดังนี้-- จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ถ้าค่าของตัวสถิติทดสอบ Z น้อยกว่า -2.326 หรือค่าสัมบูรณ์ของตัวสถิติทดสอบ Z มากกว่า 2.326 นั่นคือ $Z < -2.326$ หรือ $|Z| < 2.326$



(4) ขั้นนี้ก็ทำการทดลองโดยการสุ่มตัวอย่างของบุหรี่ 100 มวน แล้วหาจำนวนนิโคตินในบุหรี่เหล่านั้น และแล้วคำนวณค่าเฉลี่ย สมมติว่าได้เป็น $\bar{X} = 26$ มก. เราจำคำนวณค่าของตัวสถิติทดสอบ Z ได้เป็น

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{26-30}{8/\sqrt{100}} = -5.00$$

(5) เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตวิกฤต จึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก Ho ซึ่งหมายความว่าผู้สูบบุหรี่กรุงทองจะปลอดภัยจากโรคปอด

4.3.3 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วน หรือเปอร์เซนต์

สำหรับประชากรที่สนใจนั้น ถ้าเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วน หรือเปอร์เซนต์ของหน่วยที่มีลักษณะตามต้องการว่าเป็น π หรือ 100π เราสามารถทดสอบสมมติฐานนั้นโดยอาศัยตัวอย่างขนาด n หรือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จากประชากรที่สนใจ

สมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบ ต่อไปนี้

(1) Ho : $\pi = \pi_0$; Ha : $\pi \neq \pi_0$

(2) Ho : $\pi \geqslant \pi_0$; Ha : $\pi < \pi_0$

(3) Ho : $\pi \leqslant \pi_0$; Ha : $\pi > \pi_0$

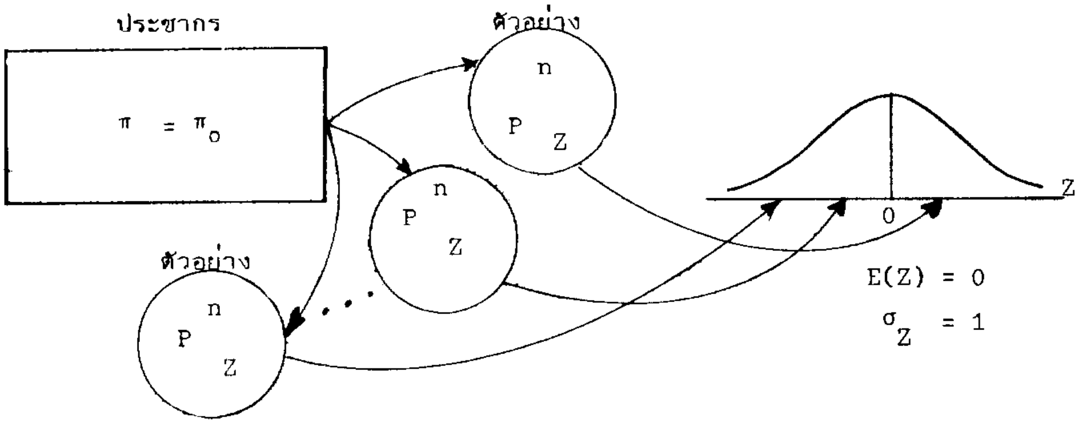
ตัวสถิติทดสอบนั้นพิจารณาจากสัดส่วนตัวอย่าง $P = a/n$ นั่นเอง เมื่อตัวอย่างขนาดโต ($n \geqslant 20$) สัดส่วน P จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย π และความแปรปรวน $\pi(1-\pi)/n$ หรือสัดส่วน P ในเทอมหน่วยมาตรฐาน Z

$$Z = \frac{P-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}\sqrt{n}}$$

จะมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N(0, 1) ดังนั้นเมื่อสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง เราจึงได้ตัวสถิติทดสอบ Z เป็นดังนี้

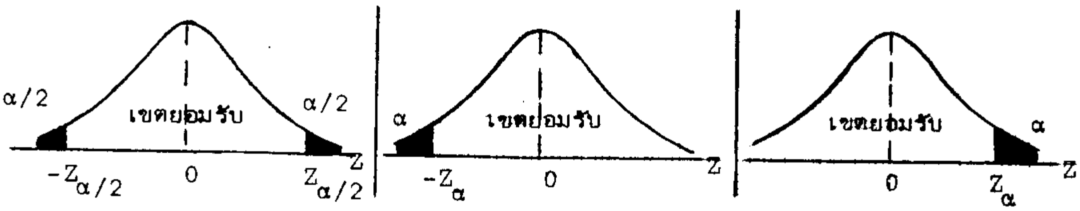
$$Z = \frac{P-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$$

พิจารณารูปต่อไปนี้ประกอบคำอธิบาย



เกณฑ์ตัดสินใจสามารถกำหนดได้จากการแจงแจกของตัวสถิติทดสอบ Z ซึ่งเป็นแบบปกติมาตรฐานนั่นเอง ดังนั้นเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α ตามสมมติฐานรอง Ha ต่าง ๆ จะเป็นดังนี้

สมมติฐาน		
Ho : $\pi = \pi_0$	Ho : $\pi \geqslant \pi_0$	Ho : $\pi \leqslant \pi_0$
Ha : $\pi \neq \pi_0$	Ha : $\pi < \pi_0$	Ha : $\pi > \pi_0$
เกณฑ์ตัดสินใจ		
ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z > Z_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z > Z_{\alpha}$



ในเมื่อ Z_α และ $Z_{\alpha/2}$ เป็นค่าจากตารางปกปิดมาตรฐาน Z ที่ทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น α และ $\alpha/2$ หรือ $P(Z>Z_\alpha) = \alpha$ และ $P(Z>Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

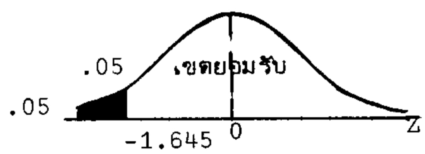
ตัวอย่าง 4.6 นาย ก กล่าวว่า "นาย ข ผู้สมัครรับเลือกตั้งในเขตเลือกตั้งของเขาจะได้คะแนนเสียงอย่างน้อย 50% ของผู้ที่หย่อนบัตรเลือกตั้ง" จากการสุ่มตัวอย่างของผู้ที่ตั้งใจจะไปเลือกตั้ง 100 ราย ปรากฏว่า 40% จะเลือกนาย ข ข้อมูลจากตัวอย่างนี้สนับสนุนคำกล่าวของนาย ก หรือไม่ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05

(1) สมมติฐาน Ho : $\pi \geqslant 0.50$; Ha : $\pi < 0.50$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ ขนาดตัวอย่าง $n = 100$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $Z = \dfrac{P-\pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho เมื่อ $Z < -Z_{.05} \cong -1.645$



(4) คำนวณตัวสถิติทดสอบ $P = 0.40$

$$Z = \frac{0.40-0.50}{\sqrt{0.50(1-0.50)/100}} = -2.00$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบ Z ตกอยู่ในเขตปฏิเสธ เราจึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า $\pi \geqslant 0.50$ นั่นคือคำกล่าวของนาย ก ไม่น่าจะเป็นจริง

4.3.4 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร (μ)

ถ้าเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร เช่น รายได้เฉลี่ยต่อปีของครอบครัวเกษตรกรจะน้อยกว่า 5,000 บาท หรือรายจ่ายต่อเดือนของนักศึกษามากกว่า 900 บาท เป็นต้น แล้วเราต้องการที่จะทดสอบสมมติฐานนั้นโดยอาศัยตัวอย่างจากประชากรที่สนใจ สมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็นแบบหนึ่งแบบใดใน 3 แบบ ดังต่อไปนี้

(1) Ho : $\mu = \mu_0$; Ha : $\mu \neq \mu_0$

(2) Ho : $\mu \geqslant \mu_0$; Ha : $\mu < \mu_0$

(3) $Ho : \mu \leqslant \mu_0$; $Ha : \mu > \mu_0$

ในเมื่อ μ_0 เป็นค่าที่ระบุไว้ของค่าเฉลี่ยประชากร μ

ตัวสถิติทดสอบก็จะเป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ นั่นเอง เมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง ตัวสถิติ $\bar{X}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ ถ้าตัวอย่างขนาดโตพอ $(n \geqslant 30)$ และทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ) ดังนั้นตัวสถิติ $\bar{X}$ เมื่ออยู่ในรูปมาตรฐาน Z

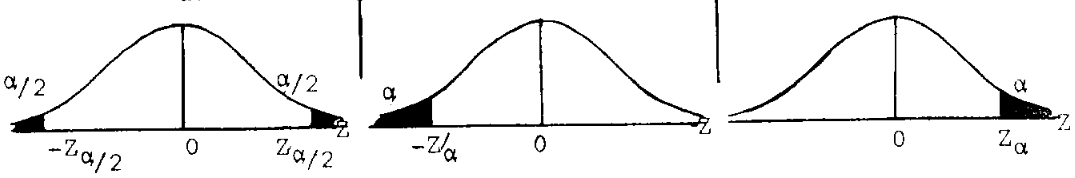
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

จะเป็นตัวสถิติทดสอบ ซึ่งจะมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N(0,1) แต่ถ้าไม่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร σ เราก็ใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง S แทน ซึ่งเราจะได้ตัวสถิติทดสอบ Z เป็นดังนี้

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อกำหนดตามสมมติฐานรอง Ha ก็จะเป็นดังนี้

สมมติฐาน		
$Ho : \mu = \mu o$ $Ha : \mu \neq \mu o$	$Ho : \mu \geqslant \mu o$ $Ha : \mu < \mu o$	$Ho : \mu \leqslant \mu o$ $Ha : \mu > \mu o$
เกณฑ์ตัดสินใจ		
ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z > Z_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z > Z_{\alpha}$

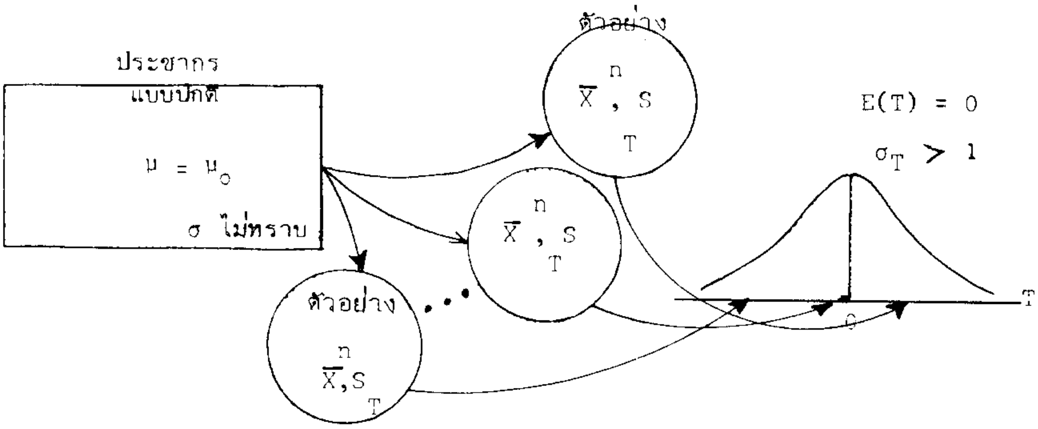


ในเมื่อ $Z_{\alpha/2}$ และ Z_{α} เป็นค่าจากตารางปกติมาตรฐานที่ทำให้เกิดพื้นที่ทางด้านขวามือเป็น $\alpha/2$ และ α

บ่อยครั้งเราไม่สามารถใช้ตัวอย่างขนาดโตได้ $(n < 30)$ และเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ σ แล้วตัวสถิติทดสอบจะเป็น T

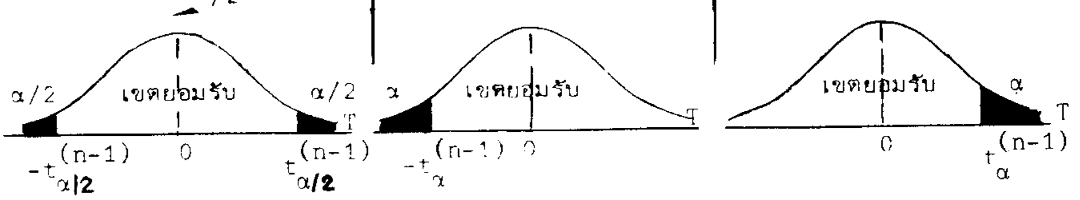
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

ซึ่งจะมีการแจกแจงแบบที (Student t) ด้วยองศาความเป็นอิสระ (n-1) กราฟของการแจกแจงแบบทีจะคล้ายกับการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน แต่จะกระจัดกระจายมากกว่า ถ้าขนาดตัวอย่างไม่โตพอ



สำหรับเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อใช้ตัวสถิติทดสอบ T จะกำหนดไว้ดังนี้

สมมติฐาน		
Ho : $\mu = \mu_0$	Ho : $\mu \geq \mu_0$	Ho : $\mu \leq \mu_0$
Ha : $\mu \neq \mu_0$	Ha : $\mu < \mu_0$	Ha : $\mu > \mu_0$
เกณฑ์ตัดสินใจ		
ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t_{\alpha/2}^{(n-1)}$ หรือ $T > t_{\alpha/2}^{(n-1)}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t_{\alpha}^{(n-1)}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $T > t_{\alpha}^{(n-1)}$



ในเมื่อ $t_{\alpha}^{(n-1)}$ และ $t_{\alpha/2}^{(n-1)}$ เป็นค่าของตัวสถิติทดสอบ T ซึ่งพิจารณาได้จากตารางที ด้วยองศาความเป็นอิสระ (n-1) และทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น α และ $\alpha/2$ ตามลำดับ

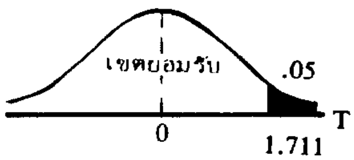
ตัวอย่าง 4.7 ตัวแทนจำหน่ายปุ๋ยคุยว่า "ปุ๋ยตราไถนี้จะให้ผลผลิตข้าวต่อไร่เฉลี่ยแล้วมากกว่า 100 ถัง" จากการทดสอบคำกล่าวนี้โดยหัวหน้ากลุ่มเกษตรกรผู้หนึ่งซึ่งอาศัยแปลงทดลองข้าว 25 แปลง ๆ ละไร่ ปรากฏว่าได้ข้าวเฉลี่ย 110 ถังต่อไร่ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 ถัง คำกล่าวของตัวแทนจำหน่ายปุ๋ยพอจะเชื่อถือได้หรือไม่?

(1) สมมติฐาน Ho : $\mu \leqslant 100$; Ha : $\mu > 100$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ และขนาดตัวอย่าง $n = 25$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

เกณฑ์ตัดสินใจ จะปฏิเสธ Ho ถ้า $T > t_{.05}(25-1) = 1.711$



(4) คำนวณตัวสถิติทดสอบ $\bar{X} = 110, S = 10$

$T = \dfrac{110-100}{10/\sqrt{25}} = 5.00$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบ T ตกอยู่ในเขตวิกฤต จึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า $\mu \leqslant 100$ นั่นคือ คำกล่าวของตัวแทนจำหน่ายปุ๋ยพอที่จะเชื่อถือได้

4.4.5 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแปรปรวน หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในประชากรแบบปกตินั้น ถ้าเรามีคำกล่าวเกี่ยวกับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานว่ามีค่าเป็นอย่างไร (σ_0) เช่นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของรายได้ต่อปีของครอบครัวเกษตรกรในตำบลนี้มากกว่า 1000 บาท เป็นต้น เราก็สามารถทำการทดสอบโดยอาศัยตัวอย่างสุ่มได้ สมมติฐานที่จะทดสอบจะเป็นอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนี้

(1) Ho : $\sigma = \sigma_0$; Ha : $\sigma \neq \sigma_0$

หรือ Ho : $\sigma^2 = \sigma_0^2$; Ha : $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(2) Ho : $\sigma \geqslant \sigma_0$; Ha : $\sigma < \sigma_0$

หรือ Ho : $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$; Ha : $\sigma^2 < \sigma_0^2$

(3) Ho : $\sigma \leqslant \sigma_0$; Ha : $\sigma > \sigma_0$

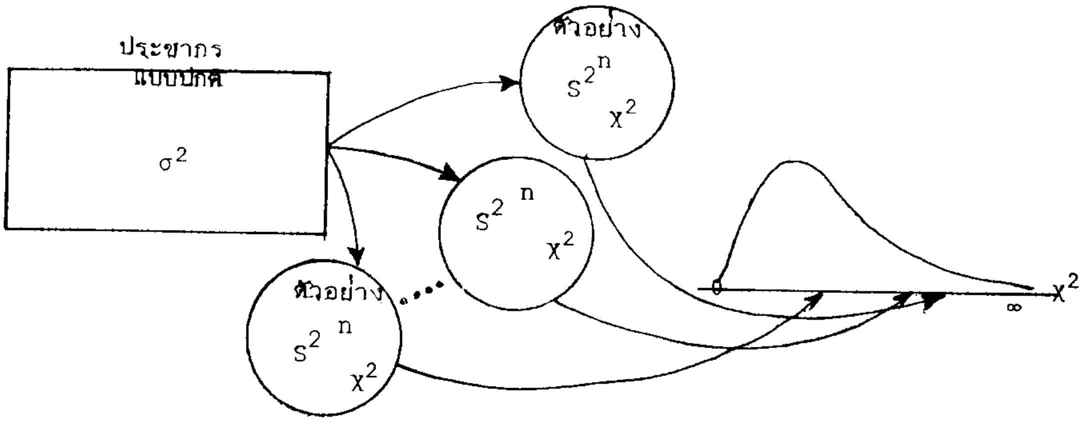
หรือ Ho : $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$; Ha : $\sigma^2 > \sigma_0^2$

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานดังกล่าวนั้นก็จะเป็นความแปรปรวนตัวอย่าง S^2

แต่จะอยู่ในรูปมาตรฐานของตัวสถิติ χ^2 ดังนี้

$$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$$

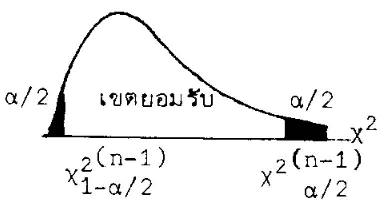
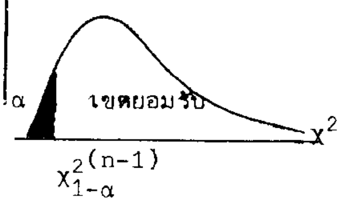
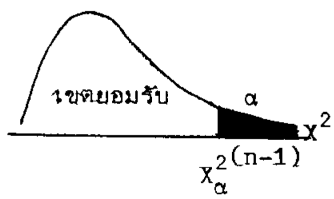
ซึ่งจะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square) ด้วยองศาความเป็นอิสระ (n-1) กราฟของการแจกแจงนี้จะเบ้ทางขวา ความเบ้จะลดลงถ้า (n-1) โตขึ้น



เมื่อสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง ตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma_0^2$$

แล้วเราจะได้เกณฑ์ตัดสินใจต่าง ๆ ณ ระดับนัยสำคัญ α เป็นดังนี้

สมมติฐาน		
Ho : $\sigma^2 = \sigma_0^2$	Ho : $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	Ho : $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$
Ha : $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	Ha : $\sigma^2 < \sigma_0^2$	Ha : $\sigma^2 > \sigma_0^2$
เกณฑ์ตัดสินใจ		
ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 < \chi^{2(n-1)}_{1-\alpha/2}$ หรือ $\chi^2 > \chi^{2(n-1)}_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 < \chi^{2(n-1)}_{1-\alpha}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 > \chi^{2(n-1)}_{\alpha}$
		

ในเมื่อ $\chi_{\alpha}^{2(n-1)}$ และ $\chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$ เป็นค่าของตัวสถิติทดสอบ X^2 ซึ่งพิจารณาได้จากตารางไคสแควร์ด้วยองศาความเป็นอิสระ (n-1) และทำให้เกิดพื้นที่ทางขวามือเป็น α และ $1-\alpha$ ตามลำดับ ในกรณีตัวอย่างหรือองศาความเป็นอิสระมีขนาดโต เราประมาณค่าเหล่านี้ได้จากสมการ

$$\chi_{\alpha}^{2(\nu)} = \tfrac{1}{2}(Z_{\alpha} + \sqrt{(2\nu-1)}\,)^2$$

โดยที่ ν เป็นองศาความเป็นอิสระ และ Z_{α} เป็นค่าจากตารางปกติมาตรฐาน Z

ตัวอย่าง 4.8 เกษตรกรอำเภอต้องการซื้อปุ๋ยจำนวนหนึ่งจากตัวแทนจำหน่ายแห่งหนึ่ง เพื่อแจกให้แก่เกษตรในอำเภอนั้น เขาตั้งเกณฑ์ในการรับปุ๋ยไว้ว่า "ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักต่อกระสอบซึ่งบรรจุ 50 ก.ก. มากกว่า 0.50 ก.ก. จะไม่รับปุ๋ยเหล่านั้น" จากตัวอย่างของปุ๋ยที่ส่งมา 26 กระสอบ ปรากฏว่าได้รับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่างของน้ำหนักปุ๋ยเป็น 0.60 ก.ก. จะรับปุ๋ยที่ส่งมาให้หรือไม่?

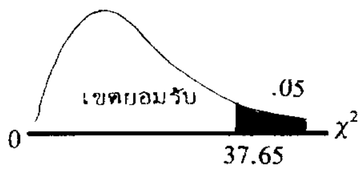
(1) สมมติฐาน $Ho : \sigma \leqslant 0.50$; $Ha : \sigma > 0.50$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.50$ และขนาดตัวอย่าง $n = 26$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma_0^2$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 > \chi_{.05}^{2(26-1)}$

$= 37.65$



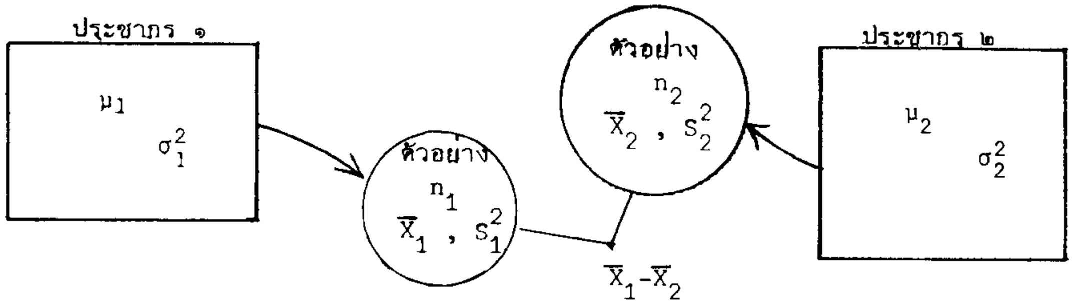
(4) คำนวณตัวสถิติทดสอบ $S^2 = (0.60)^2$, $n = 26$

$$\chi^2 = (26-1)(0.60)^2/(0.50)^2 = 36.00$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 ตกอยู่ในเขตยอมรับ จึงยอมรับ Ho ที่ว่า $\sigma \leqslant 0.50$ นั่นคือเกษตรกรอำเภอจะรับปุ๋ยที่ส่งมานั้น

4.3.6 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของสองประชากร (μ_1 และ μ_2)

ในกรณีที่สองประชากรแบบปกติ หรือเกือบเป็นแบบปกตินั้น ถ้าเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากประชากรนั้น เราก็อาศัยตัวอย่างที่เป็นอิสระกันจากแต่ละประชากร จากตัวอย่างทั้งสองนี้เราจะได้ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ และความแปรปรวน S_1^2, S_2^2 ซึ่งจะใช้อ้างอิงหรือสรุปผลเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากร $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ นั้น



ตัวประมาณค่าที่ดีของผลต่างค่าเฉลี่ยประชากร $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ ก็คือผลต่างค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}_1$-$\bar{X}_2$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่เอียงเฉ และมีความแปรปรวนน้อยสุด

สมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากรจะเป็นแบบหนึ่งแบบใดใน 3 แบบ ต่อไปนี้

(1) Ho : $\mu_D = D_0$; Ha : $\mu_D \neq D_0$

(2) Ho : $\mu_D = D_0$; Ha : $\mu_D < D_0$

(3) Ho : $\mu_D \leqslant D_0$; Ha : $\mu_D > D_0$

ในเมื่อ D_0 เป็นค่าของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากรที่ระบุไว้ โดยทั่ว ๆ ไปมักเป็นศูนย์

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากรนี้จะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ทราบค่าของความแปรปรวนประชากรทั้งสอง σ_1^2 และ σ_2^2 เมื่อทราบค่าของความแปรปรวนทั้งสอง ตัวประมาณค่า $\bar{X}_1$-$\bar{X}_2$ จะมีการแจกแจงแบบปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน ดังนี้

$$E(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2 = \mu_D$$

$$V(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$$

ดังนั้นตัวสถิติ Z

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - \mu_D}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

จึงมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน และภายใต้สมมติฐานหลัก Ho เราจึงได้ตัวสถิติทดสอบเป็นดังนี้

$$Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-D_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

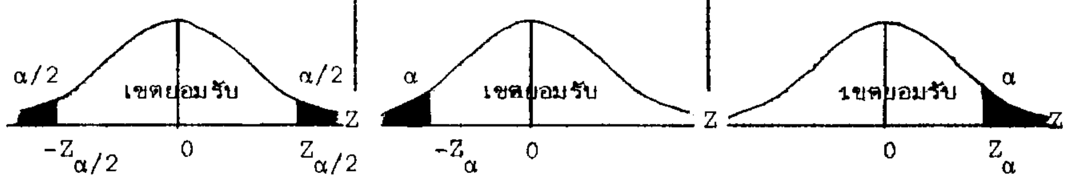
ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N(0,1) นั่นเอง

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α กำหนดไว้ดังนี้

สมมติฐาน		
Ho : $\mu_D = D_o$	Ho : $\mu_D \geq D_o$	Ho : $\mu_D \leq D_o$
Ha : $\mu_D \neq D_o$	Ha : $\mu_D < D_o$	Ha : $\mu_D > D_o$

เกณฑ์ตัดสินใจ

ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z > Z_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z > Z_{\alpha}$



สำหรับช่วงเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากร สามารถสร้างได้โดยอาศัยตัวสถิติที่กล่าวมานั้น นั่นคือ ช่วงเชื่อมั่น 100 $(1-\alpha)$ %สำหรับ $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ จะเป็น

$$\mu_1 - \mu_2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\alpha_1^2/n_1 + \sigma_2^5/n_2}$$

ตัวอย่าง 4.9 ในการทดสอบสมมติฐานที่ว่า "เงินเดือนเริ่มต้นของบัณฑิตรัฐศาสตร์กับบัณฑิตสาขาอื่นที่มีระยะการศึกษาเท่ากันจะแตกต่างกัน" ได้ใช้ตัวอย่างบัณฑิตรัฐศาสตร์ 60 ราย บัณฑิตสาขาอื่น 100 ราย ปรากฏว่าได้เงินเดือนเริ่มต้นเฉลี่ยเป็น 2150 และ 2050 บาท ตามลำดับ

ถ้าจากประสบการณ์เราทราบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเงินเดือนเริ่มต้นของบัณฑิตรัฐศาสตร์ และบัณฑิตสาขาอื่นเป็น 180 และ 200 บาท ตามลำดับ แล้วผลสรุปจะเป็นอย่างไร?

(1) สมมติฐาน Ho : $\mu_D = 0$; Ha : $\mu_D \neq 0$

หรือ Ho : $\mu_1 = \mu_2$; Ha : $\mu_1 \neq \mu_2$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ และขนาดตัวอย่าง $n_1 = 60, n_2 = 100$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $Z = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - D_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{.05/2} = -1.96$ หรือ $Z > Z_{.05/2} = 1.96$

(4) คำนวณตัวสถิติทดสอบ $\bar{X}_1 = 2150, \bar{X}_2 = 2050, \sigma_1 = 180, \sigma_2 = 200, D_0 = 0$

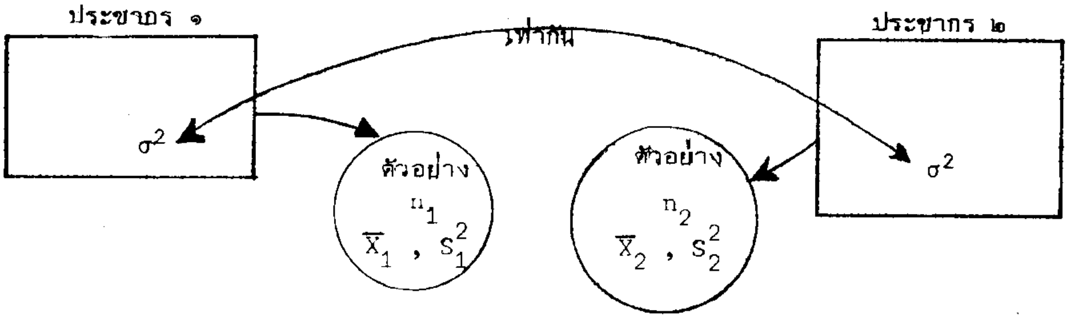
$$Z = \frac{(2150\text{-}2050)\text{-}0}{\sqrt{180^2/60 + 200^2/100}} = 3.26$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตวิกฤต $(Z > 1.96)$ จึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า $\mu_D = 0$ หรือ $\mu_1 = \mu_2$ นั่นคือบัณฑิตรัฐศาสตร์กับบัณฑิตสาขาอื่นได้เงินเดือนเริ่มต้นเฉลี่ยจะแตกต่างกัน

ถ้าเราต้องการทราบผลต่างระหว่างเงินเดือนเริ่มต้นเฉลี่ย $(\mu_1 - \mu_2)$ โดยใช้ระดับความเชื่อมั่น 0.05 ก็จะได้เป็น

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \\ &= (2150\text{-}2050) \pm (1.96)\sqrt{180^2/60 + 200^2/100} \\ &= 100 \pm 60.09 = (39.91,\ 160.09)\end{aligned}$$

กรณี 2 ไม่ทราบค่าความแปรปรวนประชากรทั้งสอง σ_1^2 และ σ_2^2 แต่ทราบว่าไม่แตกต่างกัน $(\sigma^2_1 = \sigma_2^2)$ ปัญหาส่วนมากเรามักไม่ทราบค่าความแปรปรวนประชากรทั้งสอง ในกรณีที่เราสมมติว่าเท่ากัน เราจะให้ σ^2 เป็นค่าความแปรปรวนร่วม (Common Value) ของ σ_1^2 และ σ_2^2



ดังนั้นความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณค่า $\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2$ ของพารามิเตอร์ μ_1-μ_2 จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{X}_1\text{-}\bar{X}_2) &= \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} = \sqrt{\sigma^2/n_1 + \sigma^2/n_2} \\ &= \sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}\end{aligned}$$

เนื่องจากประชากรทั้งสองมีความแปรปรวนเท่ากัน ความแปรปรวนตัวอย่างทั้ง S_1^2 และ S^2_2 จึงเป็นตัวประมาณค่าของ σ^2 แต่เรามักใช้ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของความแปรปรวนตัวอย่าง S_1^2 และ S_2^2 เป็นตัวประมาณค่าของ σ^2 ซึ่งจะเป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด นั่นคือความแปรปรวนเฉลี่ย (Pooled Variance) ซึ่งจะแทนด้วย S_p^2 จะเป็น

$$S_p^2 = \frac{(n_1\text{-}1)S_1^2 + (n_2\text{-}1)S_2^2}{(n_1\text{-}1) + (n_2\text{-}1)}$$

ดังนั้นตัวประมาณค่าของ $\sigma_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$ จะเป็น $S_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$

$$S_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$$

แล้วเราจะได้ว่า ตัวสถิติ

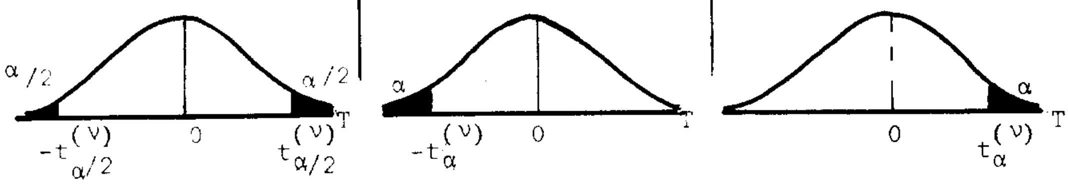
$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - \mu_D}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

มีการแจกแจงแบบที (t) ซึ่งมีองศาความเป็นอิสระ $(n_1-1)+(n_2-1) = n_1 + n_2 - 2$
ภายใต้สมมติฐานหลัก Ho เราจะได้ตัวสถิติทดสอบเป็น

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - D_0}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบที ด้วยองศาความเป็นอิสระ n_1+n_2-2 และเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญจะเป็นดังนี้

สมมติฐาน		
Ho : $\mu_D = D_o$	Ho : $\mu_D \geq D_o$	Ho : $\mu_D \leq D_o$
Ha : $\mu_D \neq D_o$	Ha : $\mu_D < D_o$	Ha : $\mu_D > D_o$
เกณฑ์ตัดสินใจ		
ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t^{(\nu)}_{\alpha/2}$ หรือ $T > t^{(\nu)}_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t^{(\nu)}_{\alpha}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $T > t^{(\nu)}_{\alpha}$



ในเมื่อ ν เป็นองศาความเป็นอิสระของการแจกแจงแบบที ซึ่งเท่ากับ n_1+n_2-2

การสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของค่าเฉลี่ย $(\mu_1-\mu_2)$ ก็อาศัยตัวสถิติ T ดังกล่าวมาแล้วนั้น นั่นคือช่วงเชื่อมั่น 100 (1-α) %สำหรับ $\mu_D = \mu_1-\mu_2$ จะเป็น

$$\mu_1-\mu_2 = (\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t^{(\nu)}_{\alpha/2} S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$$

ตัวอย่าง 4.10 ฝ่ายฝึกอบรมต้องการเปรียบเทียบวิธีการฝึกอบรม 2 แบบ ว่าแตกต่างกันหรือไม่ จึงทำการทดลองกับผู้เข้ารับการอบรม 2 กลุ่ม ที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน เมื่อฝึกอบรมแล้ว ก็ทำการทดสอบความรู้ ได้ผลดังนี้

	ขนาดตัวอย่าง	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
วิธีฝึกอบรม ๑	๓๑	๔๐.๓๙	๘.๖๙
๒	๔๒	๓๕.๘๑	๘.๓๓

ผลการทดลองจะสรุปได้อย่างไร?

(1) สมมติฐาน Ho : $\mu_1 = \mu_2$; Ha : $\mu_1 \neq \mu_2$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ และขนาดตัวอย่าง $n_1 = 31, n_2 = 42$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $T = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - D_0}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t^{(71)}_{.05/2} = -1.994$ หรือ $T > t^{(71)}_{.05/2} = 1.994$, $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 31 + 42 - 2 = 71$

(4) คำนวณตัวสถิติทดสอบ

$$S_p^2 = \frac{(31-1)(8.69)^2 + (42-1)(8.33)^2}{31+42-2}$$

$$= 71.98$$

$$S_p = \sqrt{71.98} = 8.48$$

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-D_0}{S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = 2.281$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตปฏิเสธ จึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า $\mu_1 \neq \mu_2$ นั่นคือวิธีการฝึกอบรมทั้งสองวิธีให้ผลแตกต่างกัน โดยวิธีที่ฝึกอบรม 1 จะดีกว่า

สำหรับผลต่างของความรู้เฉลี่ยจากวิธีการฝึกอบรมทั้งสองแบบ (μ_D) ที่มีระดับความเชื่อมั่น 95% จะสร้างได้ดังนี้

$$\mu_D = (\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t^{(\nu)}_{\alpha/2}\, S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$$

$$= (40.39 - 35.81) \pm 1.994(8.48)\sqrt{1/31 + 1/42}$$

$$= 4.58 \pm 0.94$$

$$= (3.64, 5.52)$$

กรณี 3 ไม่ทราบค่าความแปรปรวนทั้งสอง σ_1^2 และ σ_2^2 แต่ทราบว่าแตกต่างกัน $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$ ตัวประมาณค่าของ $\mu_1-\mu_2$ ก็จะเป็น $\bar{X}_1-\bar{X}_2$ เช่นเดิม แต่มีค่าประมาณของความแปรปรวน หรือ $S^2_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}$ เป็นดังนี้

$$S^2_{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)} = S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2$$

สมมติฐานที่จะทดสอบ หรือการสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับ $\mu_1-\mu_2$ ก็อาศัยตัวสถิติ T

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2 - \mu_D}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

แต่ตัวสถิติ T นี้แจกแจงแบบที โดยประมาณ และยุ่งยากในการกำหนดองศาความเป็นอิสระ จึงไม่ขอกล่าวในกรณีนี้ต่อไปอีก

4.3.7 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของสองประชากร เมื่อตัวอย่างสุ่มไม่เป็นอิสระหรือต้องเปรียบเทียบทีละคู่ (Paired Comparison)

ในการเปรียบเทียบสองค่าเฉลี่ยประชากร μ_1 และ μ_2 นั้น บางครั้งตัวอย่างสุ่มจากประชากรทั้งสองไม่เป็นอิสระกัน หรือในการวางแผนการทดลอง เรามีความต้องการให้ตัวอย่างทั้งสองไม่เป็นอิสระกัน เช่นในการทดลองที่ทำการวัดค่าสังเกตจากหน่วยเดียวกัน 2 ระยะเวลา ซึ่งจะให้ค่าสังเกตออกมา 2 ชุด หรือ 2 ตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระกัน หรือทำการจับคู่หน่วยทดลองในสองประชากรโดยอาศัยเกณฑ์หรือองค์ประกอบต่าง ๆ ค่าสังเกตจากหน่วยที่จับคู่กันก็จะเป็นคู่ ๆ และประกอบเป็น 2 ตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระกัน

ให้ $(X_{11}, X_{12}), (X_{21}, X_{22}), \ldots, (X_{n1}, X_{n2})$ เป็นค่าสังเกต n คู่ ของหน่วยทดลองที่เป็นตัวอย่างจากประชากร (ความแปรปรวนประชากรจะเท่ากันหรือไม่ก็ได้) และกำหนด d_i เป็นผลต่างระหว่างค่าสังเกตในคู่ที่ i นั่นคือ

$$d_i = X_{i1} - X_{i2} \; ; \; i = 1,2,\ldots,n$$

ถ้าเราสมมติว่า d_i ต่าง ๆ ประกอบเป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ แล้วตัวสถิติ T

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_d/\sqrt{n}}$$

จะมีการแจกแจงแบบที ด้วยองศาความเป็นอิสระ n-1 ในเมื่อ d และ D_d^2 เป็นค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ d_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ นั่นคือ

$$\bar{d} = \Sigma d_i/n \; ; \; S_d^2 = \frac{1}{n-1} \Sigma (d_i - \bar{d})^2$$

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของค่าเฉลี่ยประชากร เราก็ใช้ตัวสถิติข้างบนนี้ นั่นคือเมื่อสมมติฐานหลัก Ho เป็นจริง เราได้ตัวสถิติทดสอบ

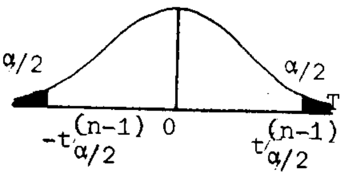
$$T = \frac{\bar{d} - D_0}{S_d/\sqrt{n}}$$

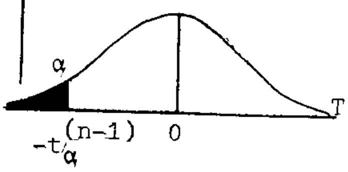
ซึ่งมีการแจกแจงแบบที ด้วยองศาความเป็นอิสระ n-1 สำหรับเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α ของสมมติฐานแบบต่าง ๆ เรากำหนดได้ดังนี้

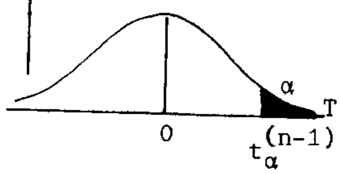
สมมติฐาน		
Ho : $\mu_D = D_o$	Ho : $\mu_D \geq D_o$	Ho : $\mu_D \leq D_o$
Ha : $\mu_D \neq D_o$	Ha : $\mu_D < D_o$	Ha : $\mu_D > D_o$

เกณฑ์ตัดสิน

ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t^{(n-1)}_{\alpha/2}$ หรือ $T > t^{(n-1)}_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t^{(n-1)}_{\alpha}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $T > t^{(n-1)}_{\alpha}$







ในการประมาณค่าแบบช่วงของผลต่างค่าเฉลี่ยประชากร $(\mu_1 - \mu_2)$ ก็อาศัยตัวสถิติ T เช่นเดียวกัน ซึ่งจะได้ช่วงเชื่อมั่น 100 (1-α) %สำหรับ $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ ดังนี้

$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{d} \pm t^{(n-1)}_{\alpha/2} S_d / \sqrt{n}$$

ตัวอย่าง 4.11 ในการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบบรรยากาศในการทำงาน 2 แบบ ว่าให้ผลงานออกมาแตกต่างกันหรือไม่ โดยการจับคู่คนงานที่มีความสามารถในการทำงานเท่า ๆ กัน ได้ 10 คู่ แต่ละคู่จับฉลากกันว่าจะได้ทำงานในบรรยากาศแบบใด ผลของการทดลองได้ข้อมูลซึ่งเป็นผลงานออกมาดังนี้

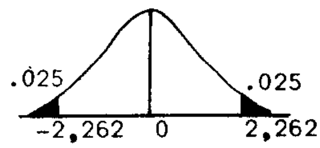
คู่ที่	๑	๒	๓	๔	๕	๖	๗	๘	๙	๑๐
บรรยากาศแบบ ๑	๒๓	๒๕	๒๐	๑๘	๒๖	๑๕	๑๖	๒๑	๒๔	๑๙
๒	๒๐	๒๒	๒๐	๑๔	๒๑	๒๒	๑๓	๒๑	๒๐	๑๙
d_i	๓	๓	๐	๔	๕	-๗	๓	๐	๔	๐

จะสรุปผลการทดลองว่าอย่างไร?

(1) สมมติฐาน Ho : $\mu_D = 0$; Ha : $\mu_D \neq 0$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ ขนาดตัวอย่าง $n = 10$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $T = \frac{\bar{d} - D_0}{S_d/\sqrt{n}}$



เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $T < -t_{.05/2}(10-1)$

$= -2.262$ หรือ $T > 2.262$

(4) คำนวณตัวสถิติ $\bar{d} = \Sigma d/n = 15/10 = 1.5$

$\Sigma d_i^2 = 3^2 + 3 + \ + .. + 4^2 + 0^2 = 133$

$S_d^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma (d-\bar{d})^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma d^2 - (\Sigma d)^2/n)$

$= \frac{1}{10-1}(133-(15)^2/10) = 110.5/9$

$= 12.28$

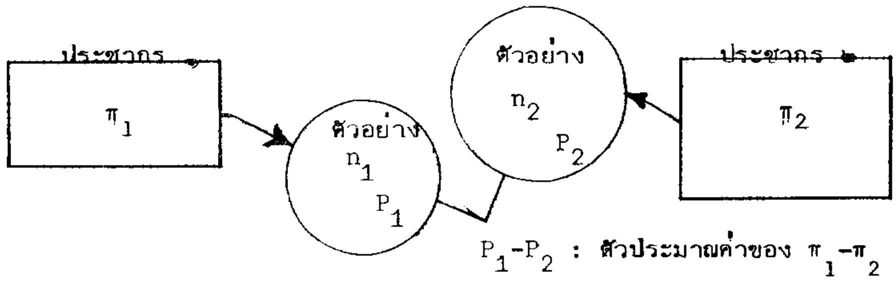
$S_d = \sqrt{12.28} = 3.50$

$T = \frac{1.5 - 0}{3.50/\sqrt{10}} = 1.35$

(5) สรุปผล ค่าของตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตยอมรับ จึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า $\mu_D = 0$ ไม่ได้ นั่นคือ บรรยากาศในการทำงานทั้งสองแบบให้ผลงานไม่แตกต่างกัน

4.3.8 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของสองประชากร (π_1 และ π_2)

ในการเปรียบเทียบสองสัดส่วนประชากร, π_1. และ π_2. นั้นก็อาศัยสองสัดส่วนตัวอย่าง P_1 และ P_2 จากสองตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน ดังรูป



ตัวประมาณค่าที่ดีของผลต่างสองสัดส่วนประชากร $(\pi_1-\pi_2)$ จะเป็นผลต่างของสองสัดส่วนตัวอย่าง (P_1-P_2) ถ้าตัวอย่างทั้งสองมีขนาดโต $(n_1-n_2 \geq 30)$ แล้วตัวประมาณค่าของ $\pi_1-\pi_2$ หรือ P_1-P_2 จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน ดังนี้

$E(P_1-P_2) = \pi_1-\pi_2$

$V(P_1-P_2) = \sigma^2_{P_1} + \sigma^2_{P_2} \quad = \pi_1(1-\pi_1)/n_1 + \pi_2(1-\pi_2)/n_2$

เนื่องจากความแปรปรวนของ P_1-P_2 ขึ้นอยู่กับ π_1 และ π_2 ซึ่งไม่ทราบค่า เราจึงประมาณความแปรปรวนของ P_1-P_2 ด้วย $S^2_{(P_1-P_2)}$ ดังนี้

$$S^2_{(P_1-P_2)} = P_1(1-P_1)/n_1 + P_2(1-P_2)/n_2$$
$$= P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2$$

ดังนั้นตัวสถิติทดสอบ และเกณฑ์ตัดสินใจต่าง ๆ จึงอาศัยตัวสถิติ Z

$$Z = \frac{(P_1-P_2) - (\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน N(0,1) นั่นคือภายใต้สมมติฐานหลัก Ho เราได้ตัวสถิติทดสอบ Z ดังนี้

$$Z = \frac{(P_1-P_2) - D_0}{\sqrt{P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2}}$$

เมื่อ $D_0 = 0$ หรือ $\pi_1 = \pi_2$ ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าของ $\pi = \pi_1 = \pi_2$ ความแปรปรวนของ P_1-P_2 หรือ $\sigma^2(P_1-P_2)$ และค่าประมาณของมัน $S^2(P_1-P_2)$ จะเป็นดังนี้

$$\sigma^2(P_1-P_2) = \pi(1-\pi)/n_1 + \pi(1-\pi)/n_2$$
$$= \pi(1-\pi)(1/n_1 + 1/n_2)$$
$$S^2(P_1-P_2) = P(1-P)(1/n_1 + 1/n_2)$$
$$= PQ\,(1/n_1 + 1/n_2)$$

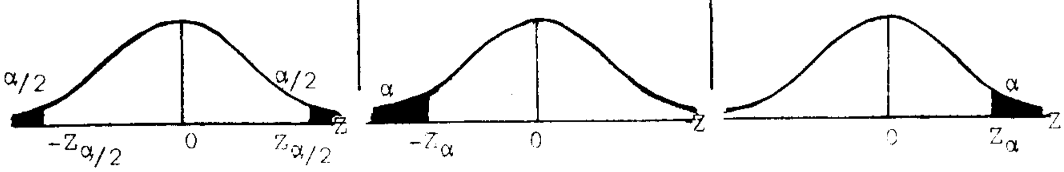
ดังนั้นตัวสถิติทดสอบจะเป็น

$$Z = \frac{P_1-P_2}{\sqrt{PQ(1/n_1 + 1/n_2)}}$$

ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ในเมื่อ P เป็นสัดส่วนเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของ P_1 และ P_2 นั่นคือ $P = (n_1P_1 + n_2P_2)/(n_1+n_2)$

สำหรับเกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α กำหนดไว้ตามสมมติฐานต่าง ๆ ดังนี้

สมมติฐาน		
Ho : $\pi_1 - \pi_2 = D_0$	Ho : $\pi_1 - \pi_2 \geq D_0$	Ho : $\pi_1 - \pi_2 \leq D_0$
Ha : $\pi_1 - \pi_2 \neq D_0$	Ha : $\pi_1 - \pi_2 < D_0$	Ha : $\pi_1 - \pi_2 > D_0$
เกณฑ์ตัดสินใจ		
ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_{\alpha/2}$ หรือ $Z > Z_{\alpha/2}$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z < -Z_\alpha$	ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z > Z_\alpha$



ในทำนองเดียวกัน การสร้างช่วงเชื่อมั่นสำหรับผลต่างของสองสัดส่วนประชากร $\pi_1-\pi_2$ ก็อาศัยตัวสถิติทดสอบ Z นั้น ซึ่งเราจะได้เป็นดังนี้

$$\pi_1-\pi_2 = (P_1-P_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{P_1Q_1/n_1+P_2Q_2/n_2}$$

ตัวอย่าง 4.12 ในการศึกษาเพื่อต้องการทราบว่านักศึกษาชาย และนักศึกษาหญิงที่มีสิทธิ์ออกเสียงเลือกตั้งได้ไปลงคะแนนเลือกตั้งคิดเป็นสัดส่วนแตกต่างกันหรือไม่ ได้อาศัยตัวอย่างนักศึกษาชายและหญิงที่มีสิทธิ์ออกเสียงเลือกตั้งเป็นจำนวน 100 และ 144 คน ตามลำดับ ปรากฏว่านักศึกษาชายและหญิงไปลงคะแนนเลือกตั้งเป็นสัดส่วน 0.52 และ 0.66 ตามลำดับ จะสรุปผลอย่างไร?

(1) สมมติฐาน $Ho : \pi_1-\pi_2 = 0$; $Ha : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$

หรือ $Ho : \pi_1 = \pi_2$; $Ha : \pi_1 \neq \pi_2$

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ และขนาดตัวอย่าง $n_1 = 100, n_2 = 144$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $Z = \dfrac{P_1-P_2}{\sqrt{PQ(1/n_1 + 1/n_2)}}$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $Z<-Z_{.05/2} = -1.96$ หรือ $Z>1.96$

(4) คำนวณตัวสถิติทดสอบ $P_1 = 0.52, P_2 = 0.66$

$$\begin{aligned} P &= (n_1P_1 + n_2P_2)/(n_1 + n_2) \\ &= (100(.52) + 144(.66))/(100+144) \\ &= 0.603 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{0.52-0.66}{\sqrt{0.603(1-0.603)(1/100+1/144)}} = -2.20$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตปฏิเสธ จึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า $\pi_1 = \pi_2$ แสดงว่าสัดส่วนของนักศึกษาชายและหญิงไปลงคะแนนเลือกตั้งจะแตกต่างกัน และจากข้อมูลตัวอย่างเราได้ว่านักศึกษาชายไปลงคะแนนเลือกตั้งคิดเป็นสัดส่วนน้อยกว่านักศึกษาหญิง

ช่วงเชื่อมั่น 95% สำหรับ $\pi_1-\pi_2$ จะหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &= (P_1 - P_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{P_1Q_1/n_1 + P_2Q_2/n_2} \\ &= (.52 - .66) \pm 1.96\sqrt{.52(1-.52)/100 + .66(1-.66)/144} \\ &= -.14 \pm 1.96(0.064) = (-.265, -.015) \end{aligned}$$

4.3.9 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นเอกภาพของประชากร

(Test for Homogeneity of Populations)

ในบางครั้งเราต้องการทราบว่าประชากรหรือกลุ่มต่าง ๆ เป็นเอกภาพ หรือเหมือนกันหรือไม่ โดยที่หน่วยตัวอย่างหรือหน่วยแจงนับในประชากรนั้นสามารถแยกออกได้เป็น c ประเภท

ต่าง ๆ กัน และแต่ละประเภทคิดเป็นสัดส่วน $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_c$ ตามลำดับ ถ้าเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นเอกภาพของประชากรต่าง ๆ เหล่านั้น เราก็จะมีสมมติฐานหลัก Ho และสมมติฐานรอง Ha ดังนี้

Ho : ประชากรต่าง ๆ เป็นเอกภาพกัน

Ha : ประชากรต่าง ๆ ไม่เป็นเอกภาพกัน

สำหรับ Ho สามารถเขียนในรูปสัดส่วนได้เป็น

$$\text{Ho} : \pi_{11} = \pi_{12} = \ldots = \pi_{1k} = \pi_1 ,$$
$$\pi_{21} = \pi_{22} = \ldots = \pi_{2k} = \pi_2 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\pi_{c1} = \pi_{c2} = \ldots = \pi_{ck} = \pi_c$$
$$\text{Ho} : \pi_{ij} = \pi_i , \ (i=2,3,\ldots,c;\ j=1,2,\ldots,k)$$

ในการสมมติฐานหลัก Ho นั้นก็อาศัยตัวอย่างจากประชากรต่าง ๆ ขนาด $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับ ซึ่งเราจะได้ค่าสังเกตเป็นความถี่ในประเภทต่าง ๆ ของประชากรที่ทำการศึกษา ดังนี้

ตัวอย่าง (j)		๑	๒	...	k	รวม
ประเภท (i)	๑	O_{11}	O_{12}	...	O_{1k}	O_1
	๒	O_{21}	O_{22}	...	O_{2k}	O_2
	:		...	O_{ij}	...	
	c	O_{c1}	O_{c2}	...	O_{ck}	O_c
ขนาดตัวอย่าง (n_j)		n_1	n_2		n_k	n

ในเมื่อ $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ และ O_{ij} เป็นความถี่ของประเภทที่ i ในตัวอย่างที่ j $(i = 1,2,\ldots,c ;\ j = 2,3,\ldots,k)$

ภายใต้สมมติฐานหลัก Ho เราจะได้ตัวสถิติทดสอบ χ^2 ดังนี้

$$\chi^2 = \sum_{i,j}^{c,k} (O_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij}$$

ในเมื่อ Eij เป็นความถี่คาดหวังของประเภทที่ i ในตัวอย่างที่ j ภายใต้สมมติฐานหลักที่ว่า "ประชากรต่าง ๆ เป็นเอกภาพกัน" และ E_{ij} คำนวณได้จาก

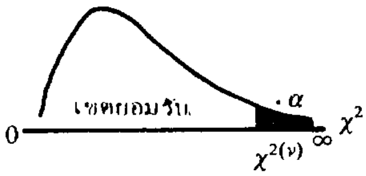
$$E_{ij} = O_i(n_j)/n, \ (i=1,2,\ldots,c ;\ j=1,2,\ldots,k)$$

ในทางปฏิบัติเราได้ตัวสถิติทดสอบ X^2 มีรูปฟอร์มเป็นดังนี้

$$\chi^2 = n\left\{\sum_{i}^{c}\sum_{j}^{k} O_{ij}^2/O_i(n) - 1\right\}$$

ตัวสถิติ χ^2 นี้จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ที่มีองศาความเป็นอิสระ (c-1)(k-1) ถ้าตัวอย่างมีขนาดโตพอ

เกณฑ์ตัดสินใจ กำหนดได้ดังนี้ "ปฏิเสธ Ho ณ ระดับนัยสำคัญ α ถ้า $\chi^2 > \chi^{2(\nu)}$, $\nu = (c-1)(k-1)$



ตัวอย่าง 4.13 ในการศึกษาเกษตรกรรมตามภาคต่าง ๆ โดยอาศัยตัวอย่างของเกษตรกร ได้ข้อมูลซึ่งเป็นจำนวนเกษตรกรที่มีรายได้ระดับต่าง ๆ กัน ดังนี้

เกษตรกร (j)		ภาคกลาง	ภาคอีสาน	ภาคเหนือ	ภาคใต้	รวม
ระดับรายได้ (i)	สูง	300	150	100	150	700
	กลาง	700	550	200	250	1700
	ต่ำ	500	500	400	200	1600
ขนาดตัวอย่าง (j)		1500	1200	700	600	4000

เกษตรกรตามภาคต่าง ๆ มีระดับรายได้เป็นเอกภาพกันหรือไม่? (นั่นคือเปอร์เซนต์ของเกษตรกรแต่ละภาคมีรายได้ในแต่ละระดับรายได้แตกต่างกันหรือไม่?)

(1) สมมติฐาน Ho : เกษตรกรตามภาคต่าง ๆ มีระดับรายได้เป็นเอกภาพกัน

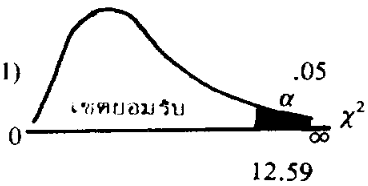
Ha : H_O ไม่เป็นจริง

(2) ระดับนัยสำคัญ α = .05 และขนาดตัวอย่าง $n_1 = 1500$,, $n_2 = 1200$, $n_3 = 700$, $n_4 = 600$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2 = \sum_{i}^{c}\sum_{j}^{k}(O_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij}$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 > \chi^{2\,(4-1)(3-1)}_{.05}$

$= \chi^2(6) = 12.59$



(4) คำนวณตัวสถิติ สำหรับค่า E_{ij} จะหาได้ดังนี้

$E_{11} = O_1(n_1)/n = 700(1500)/4000 = 262.50$

$E_{12} = O_1(n_2)/n = 700(1200)/4000 = 210$

$$E_{13} = 700(700)/4000 = 122.50$$

$$E_{14} = 700(600)/4000 = 105$$

$$E_{21} = O_2(n_1)/n = 1700(500)/4000 = 637.50$$

$$E_{22} = O_2(n_2)/n = 1700(1200)/400 = 510$$

$$E_{23} = 1700(700)/4000 = 297.50$$

$$E_{24} = 1700(600)/4000 = 255$$

$$E_{31} = O_3(n_1)/n = 1600(1500)/4000 = 600$$

$$E_{32} = 480 \quad E_{33} = 280 \quad E_{34} = 240$$

ค่า E_{ij} และ O_{ij} สรุปได้ในตารางเดียวกัน ดังนี้

เกษตรกร (j)		ภาคกลาง	ภาคอีสาน	ภาคเหนือ	ภาคใต้	รวม
ระดับรายได้ (i)	สูง	๓๐๐ 262.50	๑๕๐ 210	๑๐๐ 122.50	๑๕๐ 105	๗๐๐
	กลาง	๗๐๐ 637.50	๕๕๐ 510	๒๐๐ 297.50	๒๕๐ 255	๑๗๐๐
	ต่ำ	๕๐๐ 600	๕๐๐ 480	๔๐๐ 280	๒๐๐ 240	๑๖๐๐
ขนาดตัวอย่าง (j)		1500	1200	700	600	4000

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i,j}^{3,4} (O_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij} \\ &= (300-262.50)^2/262.50 + (700-637.50)^2/637.50 + (500-600)^2/600 \\ &\quad + \ldots + (200-240)^2/240 \\ &= 163.60\end{aligned}$$

ถ้าเราใช้สูตร $\chi^2 = n\{\Sigma O_{ij}^2/O_i(n_j) - 1\}$ เราไม่ต้องคำนวณหา E_{ij} เราเพียงแต่ใช้ข้อมูล จากตัวอย่าง (O_{ij}) ได้เลย ดังนี้

$$\begin{aligned}\chi^2 &= 4000 \quad \{300^2/700(1500) + 700^2/1700(1500) + \ldots\ldots + 200^2/1600(600)-1\} \\ &= 163.60\end{aligned}$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบ χ^2 ตกอยู่ในเขตปฏิเสธ จึงปฏิเสธ Ho ที่ว่า "เกษตรกรตามภาคต่าง ๆ มีระดับรายได้เป็นเอกภาพกัน"

4.3.10 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระ (Test for Independence)

บ่อยครั้งที่เราสนใจตัวแปรในประชากรมากกว่าหนึ่ง และเรามีสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระของสองตัวแปรใด ๆ เหล่านั้น นั่นคือสมมติฐานจะเป็น

Ho : สองตัวแปรใด ๆ เป็นอิสระกัน

Ha : สองตัวแปรใด ๆ ไม่เป็นอิสระกัน

ในการทดสอบสมมติฐานหลัก Ho นั้น เราก็อาศัยตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่สนใจ แล้วเราจะได้ค่าสังเกตดังตารางต่อไปนี้

ตัวแปร ๒ (Y)		Y_1	Y_2	.....	Y_c	รวม
ตัวแปร ๑ (X)	X_1	O_{11}	O_{12}		O_{1c}	R_1
	X_2	O_{21}	O_{22}		O_{2c}	R_2
				O_{ij}		
	X_r	O_{r1}	O_{r2}		O_{rc}	R_r
รวม	(C_j)	C_1	C_2		C_c	n

ในเมื่อ $X_1, X_2,..,X_r$ เป็นค่าของตัวแปร X และ $Y_1,Y_2,..Y_c$ เป็นค่าของตัวแปร Y

O_{ij} เป็นความถี่ที่เกิดขึ้นจากตัวอย่างขนาด n ของค่าที่ i และ j ของตัวแปร X และ Y ตามลำดับ $(i = 1,2,..,r;\ J = 1,2,..,c)$

R_i เป็นผลรวมของความถี่ในค่าที่ i ของตัวแปร X $(i = 1,2,..,r)$

C_j เป็นผลรวมของความถี่ในค่าที่ j ของตัวแปร Y $(j = 1,2,..,c)$

r, c เป็นจำนวนค่าของตัวแปร X และ Y ตามลำดับ

ตัวสถิติทดสอบสำหรับสมมติฐานหลัก Ho จะเป็นเช่นเดียวกับตัวสถิติทดสอบเกี่ยวกับเอกภาพของประชากร ดังนี้

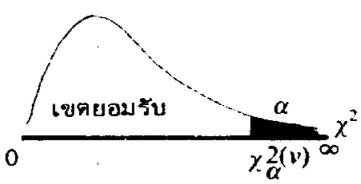
$$\chi^2 = \Sigma\ (O_{ij} - E_{ij})^2/E_{ij}$$

$$= n\{\Sigma O_{ij}^2/R_i(C_j) - 1\}$$

ตัวสถิติ χ^2 จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $\nu = (r-1)(c-1)$

สำหรับ E_{ij} นั้นเป็นความถี่คาดหวังของค่าที่ i และ j ของตัวแปร X และ Y ภายใต้สมมติฐานว่าตัวแปรทั้งสองเป็นอิสระกัน

เกณฑ์ตัดสินใจ ณ ระดับนัยสำคัญ α จะกำหนดไว้ว่า ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 > \chi^{2(\nu)}$ $\nu = (r-1)(c-1)$



ตัวอย่าง 4.14 ในการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความสนใจทางการเมือง และชนชั้นทางสังคมของคนในตำบลหนึ่ง โดยอาศัยตัวอย่างของผู้มีสิทธิ์ออกเสียงเลือกตั้ง 300 ราย ได้ข้อมูลซึ่งเป็นความถี่มา ดังนี้

ชั้นทางสังคม		ต่ำ	กลาง	สูง	รวม
ความสนใจทาง	ซ้าย	68	19	13	100
การเมือง	เสรีนิยม	18	54	48	120
	ขวา	4	47	29	80
	รวม	90	120	90	300

ข้อมูลที่ได้มานี้พอจะสรุปได้ไหมว่า ความสนใจทางการเมืองขึ้นอยู่กับชั้นทางสังคม?

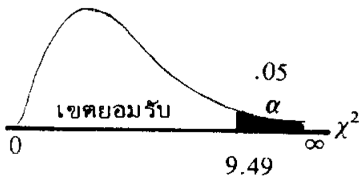
(1) สมมติฐาน Ho : ความสนใจทางการเมืองไม่ขึ้นอยู่กับชั้นทางสังคม

Ha : ความสนใจทางการเมืองขึ้นอยู่กับชั้นทางสังคม

(2) ระดับนัยสำคัญ $\alpha = .05$ และขนาดตัวอย่าง $n = 300$

(3) ตัวสถิติทดสอบ $\chi^2 = n\{\Sigma O_{ij}^2/R_i(C_j) - 1\}$

เกณฑ์ตัดสินใจ ปฏิเสธ Ho ถ้า $\chi^2 > \chi^{2\,2(3-1)(3-1)}_{05} = 9.49$



(4) คำนวณตัวสถิติ

$$\chi^2 = 300\ \{68^2/100(90) + 18^2/120(90) + 4^2/80(90) + \ldots..$$

$$+ 47^2/80(120) + 29^2/80(90) - 1\}$$

$$= 107.28$$

(5) สรุปผล เนื่องจากค่าของตัวสถิติทดสอบตกอยู่ในเขตปฏิเสธ จึงสรุปได้ว่าความสนใจทางการเมืองขึ้นอยู่กับชั้นทางสังคม

ในการประมาณค่า และทดสอบสมมติฐานต่าง ๆ เกี่ยวกับพารามิเตอร์ของประชากรนั้น ยังมีเรื่องที่น่าศึกษาอีกมากในกระบวนวิชาสถิติสังคมศาสตร์ (ST 201) หรือกระบวนวิชาอื่น ๆ ในภาควิชาสถิติ

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงอธิบายความหมายของเทอมต่อไปนี้
   ก. ประชากร
   ข. พารามิเตอร์
   ค. ตัวอย่าง
   ง. ตัวสถิติ
   จ. ตัวประมาณค่า
   ฉ. การแจกแจงการสุ่มตัวอย่าง
2. จงทำความเข้าใจเกี่ยวกับเทอมต่อไปนี้
   ก. ความไม่เอียงเฉของตัวประมาณค่า
   ข. ช่วงเชื่อมั่น และระดับความเชื่อมั่น
   ค. สมมติฐาน
   ง. ตัวสถิติทดสอบ
   จ. ความคลาดเคลื่อนแบบ 1
   ฉ. ระดับนัยสำคัญ
   ช. อำนาจทดสอบ
3. จงอธิบายถึงกระบวนการในการประมาณพารามิเตอร์ประชากรต่อไปนี้ โดยอาศัยตัวอย่างสุ่ม
   ก. รายได้เฉลี่ยต่อเดือนของรัฐมนตรี
   ข. ค่าเช่าหอพักในย่านหัวหมาก
   ค. เวลาที่ใช้เดินทางจากบ้านมาที่มหาวิทยาลัยในตอนเช้า ของนักศึกษารัฐศาสตร์
   ง. เปอร์เซนต์ของนักศึกษาที่เห็นด้วยกับการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของสภานักศึกษาม.ร.
   จ. รายได้ต่อเดือนของครอบครัวชาวนาไทยในภาคอีสาน
   ฉ. รายได้เริ่มต้นของนักศึกษา ม.ร. ที่เห็นด้วยกับรัฐบาลที่ต้องการให้ ม.ร.รับนักศึกษาจำนวนจำกัด
4. จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95 สำหรับพารามิเตอร์ประชากร จากการศึกษาโดยอาศัยตัวอย่างสุ่มดังต่อไปนี้
   ก. เจ้าหน้าที่กรมการค้าภายในได้สุ่มผงซักฟอกชนิด 1 กก. มา 36 กล่อง ได้น้ำหนักเฉลี่ย 0.95 กก. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.135 กก. (สมมติว่าน้ำหนักผงซักฟอกต่อกล่องมีการแจกแจงแบบปกติ)
   ข. จากการสำรวจความคิดเห็นของนักศึกษา 500 ราย พบว่า 400 รายเห็นด้วยกับการใช้รถจักรยานไปทำงาน
   ค. จากการศึกษษรายได้ต่อวันของครอบครัวชาวนาไทยในตำบลหนึ่งโดยอาศัยตัวอย่างครอบ-ครัว 25 ครอบครัว ได้รายได้รวม 1250 บาท ความแปรปรวนของรายได้เป็น 1250 บาท (สมมติว่ารายได้ต่อวันมีการแจกแจงแบบปกติ)

ง. จากการศึกษาความแตกต่างระหว่างรายได้ต่อวันของกรรมการ โดยอาศัยตัวอย่าง ได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 บาท จากกรรมกร 21 ราย (สมมติว่ารายได้มีการแจกแจงแบบปกติ)

5. จงสร้างช่วงเชื่อมั่น 95 สำหรับผลต่างของพารามิเตอร์ประชากรของสองประชากร จากการศึกษาต่อไปนี้

ก. ในการศึกษารายได้ต่อวันของกรรมกรในโรงงานทอผ้า กับโรงงานยาสูบได้ข้อมูลสรุปดังนี้

	ขนาดตัวอย่าง	รายได้เฉลี่ย	ความแปรปรวน
โรงงานทอผ้า	๒๙	๔๕	๑๐๐
โรงงานยาสูบ	๑๕	๗๐	๑๐๕

ข. ในการสำรวจทัศนคติของนักศึกษาชายและหญิงเกี่ยวกับมาตรการแบบหนึ่งที่รัฐบาลนำออกมาใช้เพื่อแก้ปัญหาจราจร ได้ข้อมูลสรุปดังนี้

	ขนาดตัวอย่าง	เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย
ชาย	๑๐๐	๗๐	๓๐
หญิง	๑๒๐	๗๐	๕๐

6. จงกำหนดสมมติฐาน (Ho, Ha) จากคำกล่าวต่อไปนี้

ก. ค่าใช้จ่ายเฉลี่ยรายเดือนของนักศึกษา ม.ร. มากกว่า 1000 บาท

ข. รายได้ต่อวันของครอบครัวชาวนาไทยในภาคอิสาณน้อยกว่า 10 บาท

ค. นักศึกษารัฐศาสตร์ ม.ร. เห็นด้วยกับนโยบายของรัฐบาลในการแก้ปัญหาเศรษฐกิจมากกว่าครึ่งหนึ่ง

ง. ปุ๋ยยี่ห้อ ก ให้ผลผลิตมากกว่าปุ๋ยี่ห้อ ข

7. จากการสำมะโนอุตสาหกรรมเฉพาะกรุงเทพมหานคร เมื่อปี 2510 เราได้ค่าจ้างเฉลี่ยต่อวันเป็น 45 บาท นักปกครองคนหนึ่งคาดว่า ปัจจุบันนี้ค่าจ้างเฉลี่ยจะเพิ่มขึ้นอีกประมาณ 5 บาท

ก. จงกำหนดสมมติฐานในการทดสอบ (Ho, Ha)

ข. ในการสรุปผลการตรวจสอบนั้น จะเกิดความคลาดเคลื่อนแบบ 1 หรือแบบ 2 ได้อย่างไร?

ค. ควรใช้ตัวสถิติทดสอบตัวใด ตัวสถิตินั้นมีการแจกแจงแบบไหน

ง. ถ้าตัวอย่างสุ่มของกรรมกร 1600 ราย นั้นให้ค่าเฉลี่ยตัวอย่างต่อวันเป็น 47 บาท และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 บาท แล้วการสรุปผลในการตรวจสอบจะเป็นอย่างไร ถ้าใช้ระดับนัยสำคัญเป็น .05

8. บัณฑิตคนหนึ่งกล่าวว่า "เงินเดือนเริ่มต้นของบัณฑิต ม.ร. จะขึ้นอยู่กับสาขาวิชาที่จบ" เพื่อที่จะสนับสนุนคำกล่าวนี้ เขาจึงทำการศึกษาโดยใช้ตัวอย่างของบัณฑิตที่ทำงานและจบในปีที่แล้วจำนวน 200 ราย ได้ข้อมูลสรุปดังนี้

เงินเดือนเริ่มต้น	น้อยกว่า ๒๕๐๐	๒๕๐๐-๓๕๐๐	มากกว่า ๓๕๐๐
นิติศาสตร์	๓๐	๖๐	๒๐
เศรษฐศาสตร์	๑๐	๒๐	๒๐
รัฐศาสตร์	๒๐	๔๐	๑๐
ศึกษาศาสตร์	๒๐	๑๐	๐

จะสรุปผลการศึกษาว่าอย่างไร?

9. นักปกครองต้องการเปรียบเทียบเกษตรกรที่ประกอบอาชีพทำนาใน 4 ตำบล ว่ามีระดับรายได้แตกต่างกันหรือไม่ จากการสำรวจได้ข้อมูลสรุป ซึ่งเป็นเปอร์เซนต์ของชาวนาในแต่ละตำบล ดังนี้

	ระดับรายได้	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	ขนาดตัวอย่าง
ตำบล	ก	๑๐	๕๐	๔๐	๑๐๐๐
	ข	๑๐	๓๐	๖๐	๑๒๐๐
	ค	๒๐	๕๐	๓๐	๕๐๐
	ง	๒๐	๔๐	๔๐	๓๐๐

จะสรุปผลการสำรวจว่าอย่างไร?

10. จงกำหนดสมมติฐานที่จะทดสอบ (Ho, Ha) ตัวสถิติทดสอบ, เกณฑ์ตัดสินใจ, และสรุปผลการทดสอบ จากปัญหาการทดสอบสมมติฐานต่อไปนี้

ก. ในการศึกษาโดยอาศัยตัวอย่างสุ่ม เพื่อทดสอบคำกล่าวที่ว่า "รายได้เฉลี่ยต่อปีของครอบ-ครัวเกษตกรไทยในภาคอิสาณน้อยกว่า 3000 บาท" นั้นได้ข้อมูลสรุปดังนี้

ขนาดตัวอย่าง	10000 ครอบครัว
รายได้เฉลี่ย	2500 บาท
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	2000 บาท

ข. ในการทดสอบคำกล่าวที่ว่า "รายได้เฉลี่ยต่อเดือนของครอบครัวที่อาศัยอยู่ในสลัมแห่งหนึ่งจะน้อยกว่า 1000 บาท" ได้ใช้ตัวอย่างสุ่มของครอบครัว 100 ราย ปรากฏว่ามีครอบ-ครัวที่มีรายได้ต่ำกว่า 1000 บาท ถึง 70 ครอบครัว

ค. ในการศึกษาครอบครัวตัวอย่างของเกษตรกรไทยในคลองจินดาจำนวน 100 ราย เพื่อทดสอบคำกล่าวที่ว่า "รายได้เฉลี่ยต่อปีของเกษตรกรในปี 2515 และปี 2520 เป็น 30000 และ 31500 บาท ตามลำดับ และได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการเปลี่ยนแปลงในรายได้เป็น 1000 บาท

ง. ครู ป.1 ก มีความสนใจในการแจกแจงอายุของนักเรียนในชั้น โดยเชื่อว่า "นักเรียนในชั้นจะมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุน้อยกว่า 1 ปี" จากตัวอย่างนักเรียน 21 คนได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเป็น 0.95 ปี

หนังสืออ้างอิง

1) ทวี รื่นจินดา **สถิติศาสตร์ ทฤษฎี ปัญหา และวิธีแก้ปัญหา** (โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง กทม.) 2520

สถิติเศรษฐศาสตร์ (โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง กทม.) 2520

2) ยุวดี นนทรีย์ **สถิติเบื้องต้น** (โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง กทม.) 2521

สุชาติ ประสิทธิ์รัฐสินธ์, ธวัชชัย อาทรธุระสุข, และ พิสิฐ ศุกรียพงศ์ **สถิติสำหรับการวิจัยทางสังคมศาสตร์** (คณะสังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล) 2521

3) อนันต์ ศรีโสภา **สถิติเบื้องต้น** (บริษัทโรงพิมพ์ ไทยวัฒนาพานิช จำกัด กทม.) 2521

4) Gupta, S.G.; V.K. Kapoor, **Fundamentals of Applied Statistics,** 2nd edition (Sultan Chand & Sons : New Delhi) 1978

5) Harshbarger, Thad R., **Introductory Statistics, A Decision Map** 2nd ed. (Macmillan Publishing Co., Inc.) 1977

6) Hogg, Robert V. and Elliot A. Tanis, **Probability and Statistical Inference** (Macmillan Publishing Co., Inc.) 1977

7) Jacobson, Perry E. Jr, **Introductory Statistical Measure for the Social and Behavorial Sciences** (The Dryden Press : Illinois) 1976

8) Khazanie, Ramakant, **Elementary Statistics : In a World of Applications** (Goodyear Publishing Co., Inc. : California) 1979