บทที่ 2
ความน่าจะเป็นหรือโอกาส
(PROBABILITY)

2.1 บทนำ

ทุกคนคงจะเคยได้ยินคำที่ว่า "ความไม่แน่นอนเป็นของที่แน่นอนที่สุด" เพราะว่าโดยปกติในการดำเนินการกิจการใด ๆ ก็ตามไม่ว่าจะเป็นกิจการงานอาชีพแม้กระทั่งภาระกิจส่วนตัว มนุษย์จะต้องมีการวินิจฉัยและการตัดสินใจในกิจการหรือภาระกิจที่ตนพัวพันอยู่นั้นเป็นปกติ ซึ่งโดยปกติมักจะเป็นกิจการงานที่จะปรากฏผลในอนาคต นั่นหมายความว่ามนุษย์จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับความเสี่ยงอยู่ตลอดเวลา ยิ่งในกรณีที่จะตัดสินใจในกิจการที่เป็นเรื่องที่ "คอขาดบาดตาย" เช่น ในการลงทุนกิจการค้าขาย การผ่าตัดคนไข้ หรือแม้แต่การไปสำรวจอวกาศ ซึ่งต้องเสี่ยงมากกว่าปกติ ผู้ตัดสินใจจำเป็นต้องระมัดระวังให้มากยิ่งขึ้น จึงจำเป็นจะต้องมีการศึกษาค้นคว้าหาลู่ทางและข้อมูลมาประกอบการตัดสินใจอย่างถี่ถ้วนและมากพอ การตัดสินโดยวิธีพินิจพิจารณา (judgement) ตามแบบดั้งเดิม จะทำให้ผลลัพธ์ที่ไม่น่าไว้วางใจได้มากนัก

ด้วยเหตุที่มนุษย์ต้องตัดสินใจในภาระกิจที่ข้องเกี่ยวกับอนาคตกาล ผลการตัดสินใจทั่วไปจึงอยู่ในรูปของการคาดหมายประมาณการณ์ มนุษย์จึงมักจะใช้คำพูดในทำนองที่ว่า "มันน่าจะ...." "คงจะ...." อยู่เสมอ เช่น "ถ้าลงทุนเลี้ยงหมูตอนนี้คงจะขาดทุนแน่" "ถ้าอ่านหนังสือทุกวันมันน่าจะสอบไล่ได้" ดังนี้เป็นต้น ซึ่งโดยปกติก็ยังไม่มีดัชนีใด ๆ หรือมาตรการใดมาจำกัดให้ชัดเจนลงไปว่า คำว่า "น่าจะ", "คงจะ" มีน้ำหนักความน่าเชื่อถือเพียงใด โดยปกติแล้วคำที่แสดงความไม่แน่นอนพวกนี้จะถือว่าเป็นคำ อัตนิยม เพราะว่าขึ้นอยู่กับผู้พูดเป็นสำคัญ คือถ้าผู้พูดเป็นนักวิชาการหรือนักปกครองชั้นสูงความน่าเชื่อถือหรือน้ำหนักจะโอนเอียงไปในเกณฑ์สูง แต่ถ้าผู้พูดเป็นบุคคลที่มีฐานะต่ำลงมาน้ำหนักของคำว่า "น่าจะ" หรือ "คงจะ" ก็ลดต่ำลงดังนี้เป็นต้น

เนื่องจากช่องโหว่ดังกล่าวข้างต้น จึงได้มีการพยายามที่จะแสดงน้ำหนักของการคาดหมายสถานการณ์ในอนาคตออกมาในรูปมาตรการสากลที่ทุกคนจะสามารถใช้และเข้าใจไปในทำนองเดียวกันได้อันจะมีผลให้บุคคลตัดสินใจโน้มเอียงไปในทำนองเดียวกันมาตรการดังกล่าวเรียกว่า "ความน่าจะเป็น" หรือ "โอกาสที่พึงเป็นไปได้" โดยคำนวณค่าออกมาเป็นตัวเลข ซึ่งอาจเสนอ

เป็นร้อยละหรือสัดส่วนก็ได้ ค่าดังกล่าวจะเป็นดัชนีชี้ให้เห็นว่าสถานการณ์ที่กำลังสนใจอยู่นั้นจะมีโอกาสเกิดขึ้นได้มากน้อยเพียงใด ถ้าค่าของความน่าจะเป็นสูงแสดงว่าสถานการณ์นั้นน่าจะเกิดขึ้นได้มาก ถ้ามีค่าต่ำแสดงว่าน่าจะเกิดขึ้นได้น้อย การตัดสินใจจะกระทำสิ่งใดลงไปจึงควรยึดถือค่าดังกล่าวเป็นแนวทางร่วมตัดสินใจถ้ามองในแง่การบริหารงาน ค่าดังกล่าวจะเป็นข้อมูลอีกประการหนึ่งในหลาย ๆ ประการซึ่งช่วยให้นักบริหารสามารถตัดสินใจได้ง่ายขึ้น การจะตัดสินใจถูกผิดประการใดจึงเป็นเรื่องของนักบริหารเอง มิใช่ค่าความน่าจะเป็นผิด (สมมุติว่าคำนวณถูก) ตัวอย่างเช่น นาย ก. จะลงทุนทำบ้านจัดสรร เขาได้พิจารณาปัจจัยร่วมทุกประการ ตั้งแต่แหล่งเงินทุน ที่ดิน อัตราดอกเบี้ย และอื่น ๆ ทุกประการและคำนวณค่าความน่าจะเป็นได้ว่า โอกาสที่จะขายบ้านได้หมดภายใน 1 ปีมีค่าเท่ากับ .70 (หรือ 70%) ดังนั้นหาก นาย ก. จะดำเนินการจัดสรรจริง แต่ปรากฏว่าบ้านขายไม่ออกก็มิได้หมายความว่าความน่าจะเป็นนี้ผิดพลาด นาย ก. อาจพิจารณาปัจจัยร่วมอื่น ๆ ไม่ถี่ถ้วนพอก็ได้ ค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 70% ชี้ให้เห็นว่าน่าจะขายบ้านได้หมดมากกว่าที่จะขายไม่หมด (โอกาสที่จะขายไม่หมดเท่ากับ 30%) เท่านั้น อีกตัวอย่างหนึ่งก็คือเรื่องการคาดหมายสภาพดินฟ้าอากาศ กรมอุตุนิยมวิทยาประกาศว่า "วันนี้โอกาสที่ฝนจะตกเท่ากับ 80%" หมายความว่าฝนน่าจะตกมากกว่าไม่ตก เป็นเพียงการคาดหมายแต่จริง ๆ อาจพลิกความคาดหมายได้เพราะเป็นเรื่องของอนาคต คำว่าวันนี้โอกาสที่ฝนตก 80% เป็นตัวเลขที่ยืนยันว่า ถ้ามีวันที่มีสถานการณ์คล้าย ๆ กับวันนี้ (มีความชื้น ความเข้มของแสง ปริมาณเมฆ ฯลฯ แบบเดียวกัน) 100 วันจะมีวันที่ฝนตก 80 วัน เช่นเดียวกันกับเรื่องการทำบ้านจัดสรรซึ่งมีความน่าจะเป็นที่จะขายหมด 70% หมายความว่าในสถานการณ์แวดล้อมคล้าย ๆ กันนี้ 100 ราย ผู้จัดสรร 70 รายจะสามารถขายบ้านได้หมด นั่นหมายความว่ายังมีอีก 30 รายที่ขายบ้านไม่หมด นาย ก. ขายบ้านไม่หมดจึงมิได้หมายความว่าค่าความน่าจะเป็นผิดหรือไม่ให้ประโยชน์ แต่นาย ก. อาจเข้าข่ายนักจัดสรร 30 รายนั้นก็ได้

ค่าความน่าจะเป็นจึงทำหน้าที่เสมือนหมอดูที่ช่วยคาดหมายอนาคตให้ลูกค้า ลูกค้าจะตัดสินใจอย่างไรเป็นเรื่องของลูกค้า เช่นเดียวกับเรื่องการคาดหมายสภาพดินฟ้าอากาศ โอกาสที่จะมีฝนตก 80% แปลว่าฝนน่าจะตก นาง ก. จะซักผ้าห่มในวันนี้ นาง ข. จะไปจ่ายตลาด นาง ค. จะปลูกผัก ก็เป็นเรื่องที่คนทั้งสามจะไปวินิจฉัยเอาเองว่าน่าจะทำเช่นนั้นหรือไม่ ถ้ามองกันในแง่วิชาการนาง ก. ก็ไม่น่าจะซักผ้าห่มเพราะฝนอาจจะตก นาง ข. น่าจะรีบไปตลาด นาง ค. ควรจะปลูกผัก ทั้งนี้เพราะโอกาสที่ฝนจะตกนั้นเป็นไปได้มาก ดังนี้จึงเห็นได้ว่าความน่าจะเป็นก็คือมาตรการที่กำหนดค่าเป็นตัวเลขที่ช่วยหันเหวิธีคาดหมายโดยเชิงอัตนิยมมาสู่หลักเกณฑ์ทางวิชาการที่ชัดเจนขึ้น ปัญหาก็คือ เราจะคำนวณค่าความน่าจะเป็นดังกล่าวได้อย่างไร

2.2 การคำนวณความน่าจะเป็น

การคำนวณค่าความน่าจะเป็นยึดถือแนวความคิดที่ว่า "การคำนวณต้องคำนึงถึงหนทางที่จะเกิดเหตุการณ์ที่มุ่งศึกษานั้นทุก ๆ หนทางที่พึงเป็นไปได้" จำนวนหนทางทั้งหมดที่พึงเป็นไปได้ (all possible outcome) อาจปรากฏออกมาในรูปของการทดลองหรือการสำรวจด้วยตัวอย่าง หรือแม้แต่การพิจารณาไตร่ตรองอย่างถี่ถ้วน ดังนั้นเราจึงจำแนกวิธีคำนวณค่าความน่าจะเป็นออกเป็น 2 วิธีตามประเภทของงานคือ

ก. การคำนวณค่าความน่าจะเป็นโดยอาศัยผลการทดลองหรือผลการสำรวจ

วิธีนี้เป็นวิธีคิดที่ค่อนข้างง่ายและใช้มากในทางปฏิบัติโดยเฉพาะในงานวิจัยทางสังคมหรือแม้แต่ในชีวิตประจำวัน จำนวนหนทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดก็คือจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมด หรือจำนวนตัวอย่างทั้งหมด ความน่าจะเป็นคำนวณออกมาได้ง่าย ๆ โดยการเอาจำนวนครั้งของการทดลองที่สนใจหารด้วยจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดหรือจำนวนหรือความถี่ของเหตุการณ์ที่สนใจหารด้วยขนาดตัวอย่าง

ให้ n = จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดหรือขนาดตัวอย่าง (Sample size)

f = จำนวนครั้งของผลการทดลองที่สนใจหรือความถี่ของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ $= f/n$

หรือ Pr (เกิดเหตุการณ์ที่สนใจ) $= f/n$

ตัวอย่างเช่น นายก. อยากทราบว่าตนเองเป็นที่รักใคร่ในหมู่มิตรสหายของตนหรือไม่ หลังจากนายก. สอบถามเพื่อนฝูงทั้งสิ้น 60 คน พบว่ามีผู้ชมชอบนายก. 12 คน ดังนี้จะเห็นได้ว่า $n = 60$, $f = 12$ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าความน่าจะเป็นที่นาย ก. จะได้รับความนิยมชมชอบจากมิตรสหายเท่ากับ $\frac{12}{60} = .20$ หรือนายข. ต้องการทราบว่าตนเองปาลูกดอกแม่นยำเพียงใด นายข. จึงทดลองปาลูกดอก 120 ครั้ง ผลปรากฏว่าในจำนวนนั้นมีอยู่ 12 ครั้งที่นายข. ปาเข้าเป้าในที่สุด ดังนี้ โอกาสที่นายข. จะปาเข้าเป้าในสุดเท่ากับ $12/120 = .10$ หรือ 10% นายค. อยากจะทราบว่าลูกกุ้งที่เพาะเลี้ยงไว้ดีแล้วจะมีโอกาสเติบโตหรือเลี้ยงในน้ำจืดได้หรือไม่ จากการทดลองปล่อยกุ้งในนากุ้ง 5,000 ตัวปรากฏว่ากุ้งสามารถมีชีวิตรอดเพียง 1,000 ตัว ดังนี้ก็แสดงว่า โอกาสที่ลูกกุ้งจะมีชีวิตรอดในนาน้ำจืดเท่ากับ $1{,}000/5{,}000 = .20 = 20\%$ นายง. เป็นนักสำรวจประชามติ เขาอยากทราบว่าในการเลือกตั้งสมัยต่อไปพรรคประชาธิปัตย์จะมีโอกาสได้รับเลือกตั้งมากน้อยเพียงใด จากการสำรวจความคิดเห็นของประชาชนผู้มีสิทธิออกเสียงเลือกตั้ง 2,000 คน ดังนี้ความน่าจะเป็นที่พรรคประชาธิปัตย์จะได้รับการเลือกตั้งเท่ากับ $1200/2000 = .60 = 60\%$ หรือนัยหนึ่ง ผู้สมัครรับเลือกตั้งที่สังกัดพรรคประชาธิปัตย์จะมีโอกาสได้เป็น ส.ส.ถึง 60% ในสมัยหน้า นาย จ. อยากทราบว่าบัณฑิตจากมหาวิทยาลัยรามคำแหงจะมีโอกาสได้งานทำหลังจาก

สำเร็จการศึกษาไปแล้ว 1 ปีเป็นเท่าไร จากการติดตามผลบัณฑิตพบว่าบัณฑิตจากมหาวิทยาลัยรามคำแหง 3,000 คนมีอยู่ 1,000 คนที่ได้งานทำภายใน 1 ปีนับแต่สำเร็จการศึกษา ดังนี้แสดงว่าโอกาสที่บัณฑิตจากมหาวิทยาลัยรามคำแหงจะได้มีงานทำภายหลังจากสำเร็จการศึกษาไปแล้ว 1 ปีเท่ากับ 1,000/3,000 = .3333 = 33.33% ดังนี้เป็นต้น

นักศึกษาจะสังเกตเห็นได้ว่าการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นโดยวิธีนี้เป็นวิธีที่ค่อนข้างง่ายและนักศึกษาเองก็คุ้นเคยกับวิธีการนี้มานาน กล่าวได้ว่าพอคิดเลขเป็นก็คำนวณหาความน่าจะเป็นได้แล้ว เพียงแต่ไม่ทราบชื่อเรียกเท่านั้น โดยทั่วไปจะรู้จักกันในรูปของร้อยละ อนึ่ง ขอให้สังเกตเพิ่มเติมไว้ในที่นี้ด้วยว่า ค่าความน่าจะเป็นจะมีความถูกต้องยิ่งขึ้นถ้าตัวอย่าง (n) มีขนาดใหญ่ขึ้นหรือมีการทดลองซ้ำ ๆ กันมากครั้งขึ้น เรื่องนี้เป็นเรื่องปกติธรรมดาที่ทุกคนระลึกถึงอยู่เสมอไม่ว่าในการปฏิบัติงานประเภทใด

ข. การคำนวณโดยยึดหลักเกณฑ์ทางทฤษฎี

ในบางครั้งสภาพการณ์ต่าง ๆ ที่กำลังศึกษาอยู่นั้นมิได้ปรากฏออกมาในลักษณะที่พบเห็นในข้อ ก. โดยเฉพาะในกรณีของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่จะต้องนำมาใช้ในการพัฒนากฎเกณฑ์ทางสถิติ ซึ่งเป็นเรื่องที่ข้องเกี่ยวเน้นหนักไปในทางคณิตศาสตร์ เช่นการคำนวณสูตรสำหรับกะประมาณค่าเฉลี่ย สูตรสำหรับประมาณค่าความแปรปรวน สูตรสำหรับทดสอบสมมุติฐานของพารามิเตอร์ (คุณลักษณะทางประชากร) หรืออื่น ๆ ในกรณีเช่นนี้จำเป็นต้องคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นโดยนัยทางทฤษฎีซึ่งจะได้กล่าวโดยละเอียดต่อไป และในรายละเอียดที่นักศึกษาจะได้พบในตอนต่าง ๆ ต่อไปนี้ตั้งแต่ตอน 2.3 เป็นต้นไป ล้วนเป็นวิธีที่สนองกระบวนการคำนวณหาความน่าจะเป็นโดยวิธีนี้ทั้งสิ้น

การคำนวณหาความน่าจะเป็นตามวิธีข้อข.นี้ นักศึกษาจำเป็นต้องคำนึงถึงเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องทั้งหมดที่พึงเป็นไปได้มาร่วมพิจารณาแล้วศึกษา (คำนวณ) ดูว่าจำนวนเหตุการณ์ที่มุ่งหวังมีอยู่ทั้งสิ้นเท่าไรจากจำนวนที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด ค่าความน่าจะเป็นจะมีค่าเท่ากับจำนวนเหตุการณ์ที่มุ่งหวังหรือเหตุการณ์ที่สนใจหารด้วยจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่เกี่ยวข้อง ซึ่งนัยแห่งการคำนวณกระทำเช่นนี้ก็คือวิธีเดียวกับข้อก. โดยจำนวนเหตุการณ์ที่สนใจทำหน้าที่เป็น f จำนวนเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด ทำหน้าที่เป็น n ค่าความน่าจะเป็นจึงเท่ากับ f/n ตัวอย่างเช่น ในการซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล โอกาสที่จะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัวเท่ากับ 1/100 หรือ 1% ทั้งนี้เพราะเลขท้าย 2 ตัวอาจจะออกเลขใด ๆ ก็ได้ตั้งแต่ 00,01,10,02, 20,....99 ซึ่งจะพบว่าตัวเลขที่จะออกเป็นเลขท้ายสองตัวที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด มีอยู่ทั้งสิ้น 100 จำนวน ถ้านายก. ซื้อสลากกินแบ่งมา 1 ฉบับ (ซึ่งก็คือ 1 หมายเลขจากจำนวน 100 หมายเลข) โอกาสที่นายก. จะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัวจึงมีค่าเท่ากับ 1/100 ดังนี้เป็นต้น

เราจะเริ่มศึกษาหลักเกณฑ์ทางทฤษฎีที่สนองวิธีคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นกันโดยละเอียดต่อไป

3 ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด (all possible outcome หรือ Sample Space)

ดังที่กล่าวมาแล้วในตอนที่ผ่านมา การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นนั้นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงคือหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่จะเกิดผลลัพธ์ที่ต้องการเสมอ มิเช่นนั้นค่าความน่าจะเป็นที่ได้จะผิดพลาด ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้อาจได้จากการสำรวจ (ตอนที่ 2.2 ก.) หรืออาจได้จากการคำนวณก็ได้

ผลลัพธ์คืออะไร ผลลัพธ์ในที่นี้หมายถึงผลที่พึงได้รับจากการทดลองเชิงสุ่ม (Random experiment)[1] ซึ่งปรากฏเป็นรูปใดก็ได้ที่ผู้ทดลองไม่อาจตอบผลนั้นไว้ล่วงหน้าได้ เมื่อนำผลของการทดลองเรื่องใดเรื่องหนึ่งมาประมวลกันเข้าเป็นกลุ่ม กลุ่มของผลการทดลองเรียกว่าผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด หรือโดยนัยกลับกัน ผลลัพธ์ก็คือสมาชิกตัวหนึ่งในเซทของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

โดยปกติเพื่อความสะดวกสบายในการอธิบายเราจะเสนอผลการทดลองออกมาในรูปของเซท ทั้งนี้เพราะนอกจากง่ายในการทำความเข้าใจแล้วยังเป็นที่เข้าใจของคนทั่ว ๆ ไปด้วย

ตัวอย่างเช่น นายก. เข้าสอบวิชาหนึ่งซึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัยและนายก. ไม่เคยเตรียมตัวมาสอบเลยเข้าห้องสอบได้ก็เดาอย่างเดียว ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดคือ

$S = \{A,B,C,D.F\}$ ในระบบ 5 เกรด

หรือ

$S = \{G,P,F\}$ ในระบบ 3 เกรด

---

1. การทดลองเชิงสุ่ม (Random experiment) คือการทดลองซึ่งอาจปรากฏผลการทดลองออกมาในลักษณะใด ๆ ก็ได้ โดยที่ไม่อาจคาดหมายได้ล่วงหน้าว่าผลลัพธ์จะออกมาในรูปใด ผลลัพธ์ (Outcome) ดังกล่าวอาจมีได้มากมายหลายแบบตามลักษณะของการทดลองนั้น ๆ ซึ่งเมื่อประมาณผลลัพธ์เอาไว้เป็นกลุ่มก้อน (Set) หมู่ของผลลัพธ์นี้เรียกว่า "ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด" เช่นการโยนเหรียญ 1 ครั้ง ผลอาจเป็นหงายหัวหรือหงายก้อยก็ได้ การสอบวิชาใดวิชาหนึ่งที่เป็นข้อสอบแบบปรนัยและผู้สอบไม่เคยอ่านหนังสือเลย (เดาอย่างเดียว) ผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้อาจเป็น ได้เกรด A,B,C,D,F (หรือ G,P,F) ก็ได้ ความคิดเห็นของผู้ตอบแบบสอบถามในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง ผู้ตอบอาจตอบอย่างไรก็ได้ตามความคิดของเขา อาจเป็น เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย เฉย ๆ ไม่เห็นด้วย ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง ดังนี้เป็นต้น ดังนั้นโดยนัยที่ตรงกันข้าม ถ้าการทดลองใดหรือเหตุการณ์ใดเป็นการทดลองที่สามารถคาดหมายผลลัพธ์ได้ การทดลองนั้นมิใช่การทดลองเชิงสุ่ม ทั้งนี้เพราะนอกจากง่ายในการทำความเข้าใจแล้วยังเป็นที่เข้าใจของคนทั่ว ๆ ไปด้วย

นายข. ต้องการขึ้นรถเมล์จากหน้ามหาวิทยาลัยรามคำแหงไปคลองตัน ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ในที่นี้คือจำนวนสายรถเมล์ที่ผ่านจุดทั้งสอง ซึ่งมีทั้งสิ้น 7 สายคือ สาย 58, 60, 61, 71, 91, 92, 93 ดังนั้น

$S = \{58, 60, 61, 71, 91, 92, 93\}$

นายค. เล่นปั่นแปะโยนเหรียญ 1 ครั้ง ผลการทดลองอาจเป็นไปได้ก็คือ ขึ้นหัวหรือขึ้นก้อย (หัว = H และก้อย = T)

$S = \{H, T\}$

ดังนี้เป็นต้น

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. การกระทำต่อไปนี้ถือว่าเป็นการทดลองเชิงสุ่มหรือไม่

   ก. นำ Hydrogen 2 อะตอมมาทำปฏิกริยากับ Oxygen 1 อะตอม

   คำตอบ ....

   ข. การมีชีวิตต่อไปในอนาคตของแต่ละบุคคล

   คำตอบ ....

   ค. การซื้อสลากกินแบ่ง

   คำตอบ ....

   ง. การเลือกตั้งสมาชิกสภาผู้แทนราษฎรในแต่ละคราว

   คำตอบ ....

   จ. ราคาของสินค้าเมื่อราคาของน้ำมันสูงขึ้น

   คำตอบ ....

2. จะสร้างเลขได้กี่จำนวนโดยที่แต่ละจำนวนมีลักษณะดังนี้

   ก. มีเลข 3 หลัก

   ข. ห้ามมีเลขซ้ำกันในเลข 3 หลักนั้น

3. มีถนนเชื่อมจากกรุงเทพถึงชลบุรีอยู่ 5 สาย และจากชลบุรีถึงตราดมีถนนเชื่อมอยู่ 3 สาย จงหาวิธีจะเดินทางไปกลับ กรุงเทพถึงตราด โดยมีข้อแม้ดังนี้

   1. เดินทางอย่างไรก็ได้
   2. การเดินทางไปกลับไม่ใช่ถนนสายซ้ำกัน

4. นักศึกษาปี 1 ในมหาวิทยาลัยต้องลงทะเบียนวิชาดังนี้ ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ สังคมวิทยา และจิตวิทยา โดยมีเงื่อนไขดังนี้

   ภาษาอังกฤษมี 4 กลุ่ม ให้เลือก 1 กลุ่ม

   คณิตศาสตร์มี 3 กลุ่ม ให้เลือก 1 กลุ่ม

   สังคมวิทยามี 2 กลุ่ม ให้เลือก 1 กลุ่ม

   จิตวิทยามี 1 กลุ่ม ต้องลงทุกคน

จงหาวิธีทั้งหมดที่มีนักศึกษาคนหนึ่ง ๆ จะลงทะเบียนเรียน

การคำนวณหาจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดนั้นโดยทั่วไปเราสามารถกระทำได้ 3 วิธี นักศึกษาจะเลือกใช้วิธีใดก็ตามความถนัด คือ

1. การคำนวณหาโดยอาศัยกฎการคูณหรือ tree diagram
2. การคำนวณหาโดยอาศัยวิธีการจัดลำดับ (Permutation)
3. การคำนวณโดยอาศัยวิธีการจัดหมู่ (Combination)

วิธีทั้งสามมีกฎเกณฑ์ไม่ยาก เริ่มพัฒนาขึ้นมาจากความคิดง่าย ๆ การศึกษาเรื่องราวเหล่านี้มีจุดมุ่งหมายเพียงเพื่อหาจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดเพื่อใช้เป็นหลักในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นต่อไป (อ่านต่อ 2.2) การศึกษาเรื่องเหล่านี้อาจเป็นเรื่องยากถ้าผู้ศึกษาไม่พยายามใช้ความคิดตรึกตรองถี่ถ้วนพอ จึงขอเตือนไว้ก่อนว่า นักศึกษาควรทำความใจให้กว้างพร้อมที่จะคิดคำนึงถึงหนทางที่เป็นไปได้และข้อจำกัดต่าง ๆ ไว้มิเช่นนั้นการศึกษาเรื่องเหล่านี้จะเป็นไปโดยยาก และขอย้ำไว้ด้วยว่าเรื่องของความน่าจะเป็นนั้นพื้นฐานที่สำคัญที่สุดหรือหัวใจของเรื่องก็คือผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด นี้เอง หากไม่เข้าใจหรือไม่ใส่ใจเรื่องนี้ การศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นและหลักเกณฑ์ทางสถิติต่าง ๆ จะล้มเหลวโดยสิ้นเชิง

2.3.1 การคำนวณหาผลลัพธ์ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดโดยการใช้กฎการคูณหรือ tree diagram

วิธีนี้กระทำได้โดยการนำจำนวนหนทางที่จะเกิดเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องมาคูณกัน ผลก็คือจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดกล่าวคือ

"ถ้าการทดลองใดสามารถกระทำได้เป็น 2 ขั้นตอน โดยขั้นตอนที่ 1 ให้ผลการทดลองเป็น n_1 ประการ (วิธี) และแต่ละผลการทดลองเหล่านี้สามารถให้ผลการทดลองขั้นที่ 2 ได้ n_2 ทุกประการ (วิธี) ดังนี้ จำนวนผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะมีจำนวนทั้งสิ้น n_1n_2 ประการ"

จะขอยกตัวอย่างให้นักศึกษามองเห็นได้ดังนี้ ภายหลังจากนี้จึงจะแสดงให้เห็น เป็นหลักพื้นฐานอันเป็นตัวก่อให้เกิดวิธีการดังกล่าว

ตัวอย่าง 2.1 ในการเดินทางระหว่างกรุงเทพฯ-นนทบุรี นั้นมีรถประจำทางวิ่งติดต่อระหว่าง 2 จังหวัดอยู่ 3 สายคือสาย 1 สาย 2 และสาย 3 ถ้านายก. ต้องการเดินทางด้วยรถประจำทางดังกล่าวจากกรุงเทพฯ เมื่อทำธุรกิจเสร็จก็เดินทางกลับด้วยรถประจำทางเช่นเดิม

ก. อยากทราบว่านายก. สามารถเลือกรถเมล์เพื่อเดินทางไปกลับได้กี่วิธี

ข. ถ้านายก. ถือเคล็ดว่าจะไม่เดินทางไปกลับด้วยรถเมล์สายเดิม อยากทราบว่า ถ้าเป็นดังนี้แล้ว นายก. จะเลือกรถเมล์เพื่อเดินทางไปกลับได้กี่วิธี

หมายเหตุ คำว่าเลือกรถเมล์ หมายถึงเลือกสายรถเมล์ เช่นเลือกนั่งสาย 1, 2 หรือ 3 ไม่ได้หมายถึงเลือกรถเมล์คันโน้นคันนี้

วิธีทำ

ก. เนื่องจากมีรถเมล์วิ่งติดต่อระหว่างกรุงเทพฯ-นนทบุรี 3 สาย ดังนั้นเมื่อเดินทางออกจากกรุงเทพฯ นายก. จึงสามารถเลือกนั่งรถเมล์สายใดสายหนึ่ง ใน 3 สายก็ได้ แปลว่ามีสิทธิเลือกได้ 3 วิธี เมื่อเดินทางกลับก็เลือกนั่งสายใดสายหนึ่งใน 3 สายก็ได้ แปลว่ามีสิทธิเลือกได้ 3 วิธีเช่นกัน ดังนั้น นายก. จึงสามารถเลือกสายรถเมล์เมื่อเดินทางไปกลับได้เท่ากับ $3 \times 3 = 9$ วิธี

เมื่อพิจารณารายละเอียดจะสามารถสร้างแผนการเดินทางของนายก. ได้ดังนี้

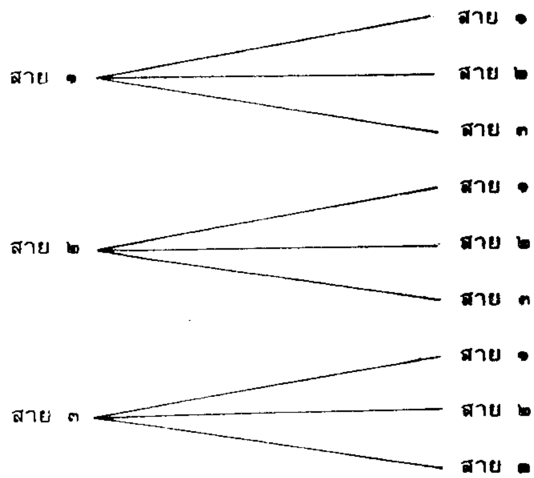
1. ไปสาย 1 - กลับสาย 1 2. ไปสาย 1 - กลับสาย 2 3. ไปสาย 1 - กลับสาย 3

4. ไปสาย 2 - กลับสาย 1 5. ไปสาย 2 - กลับสาย 2 6. ไปสาย 2 - กลับสาย 3

7. ไปสาย 3 - กลับสาย 1 8. ไปสาย 3 - กลับสาย 2 9. ไปสาย 3 - กลับสาย 3

รวมเท่ากับ 9 วิธี

หรือสามารถจำแนกแผนการเดินทางได้ด้วย tree diagram ดังนี้



หรือ $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

(1,1) อ่านว่าไปสาย 1 - กลับสาย 1 (1,2) อ่านว่าไปสาย 1 - กลับสาย 2......

ซึ่งผลที่ได้รับก็คือแผนการเดินทางไปกลับของนายดำ

ขอให้ระลึกไว้ด้วยว่าแผนเหล่านี้คือแผนการที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดที่อาจเลือกปฏิบัติได้ตามอัธยาศัย หนทางปฏิบัติจริงนั้นนายดำจะเลือกแผนใดแผนหนึ่งจากที่มีอยู่ทั้งหมดนี้เท่านั้น ไม่ว่าจะจงใจหรือไม่จงใจกระทำเช่นนั้น

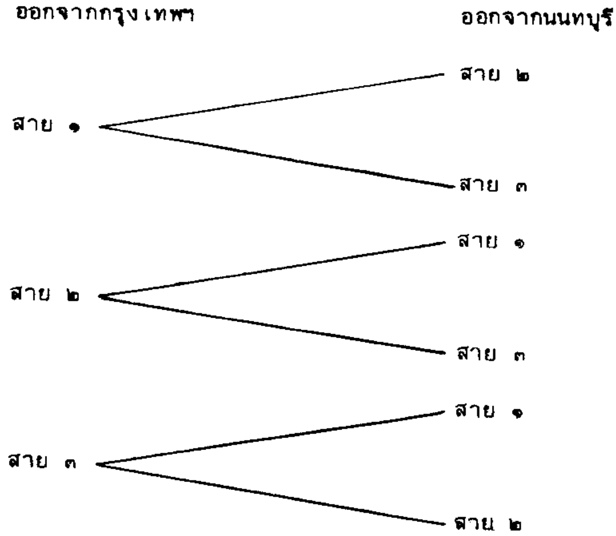
ข. เนื่องจากรถเมล์ที่วิ่งติดต่อระหว่าง 2 จังหวัดมีอยู่ 3 สาย ดังนั้นเมื่อนายดำจะเดินทางออกจากกรุงเทพฯ นายดำจึงมีสิทธิเลือกรถเมล์สายใดสายหนึ่งใน 3 สาย แต่เมื่อขากลับออกจากนนทบุรีนายดำจะไม่นั่งซ้ำเบอร์เดิม ดังนั้นเที่ยวกลับนายดำจึงมีสิทธิเลือกรถเมล์ได้เพียง 2 สาย แผนการเดินทางไป - กลับของนายดำจึงประกอบด้วยวิธีเดินทางเท่ากับ $3 \times 2 = 6$ วิธี

เมื่อแจงแผนการเดินทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดจะปรากฏดังนี้

1. ไปสาย 1 – กลับสาย 2
2. ไปสาย 1 - กลับสาย 3
3. ไปสาย 2 - กลับสาย 1
4. ไปสาย 2 - กลับสาย 3
5. ไปสาย 3 - กลับสาย 1
6. ไปสาย 3 - กลับสาย 2

รวม 6 วิธี

หรือแจงให้เห็นด้วย tree diagram ดังนี้



หรือ $S = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3.2)\}$

ตัวอย่างที่ยกมาให้ดูเป็นตัวอย่างที่ค่อนข้างง่ายและเห็นจริง ถ้าหากว่าสิ่งที่เราสนใจเกิดขึ้นในลักษณะที่ซับซ้อนมีหลายขั้นตอนการเขียน เซทของ S ก็อาจจะยุ่งยากขึ้นบ้าง ดังนั้นในขั้นต้นนี้จะขอยกตัวอย่างของการทดลองพื้นฐาน เช่นการโยนเหรียญ หรือโยนลูกเต๋า ซึ่งนักศึกษาได้เข้าใจลักษณะการทดลองและวิธีการคำนวณอย่างถูกต้องแล้วก็จะสามารถนำหลักเกณฑ์ดังกล่าวไปประยุกต์กับการดำเนินการอย่างอื่นได้ ซึ่งจะขอยกตัวอย่างประกอบการศึกษาในภายหลัง

ตัวอย่าง 2.2 โยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง และโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง จงเขียนผลของการทดลองดังกล่าว

วิธีทำ

การทดลองนี้ก็คือการโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง (หรือจะกล่าวได้ว่า 1 การทดลองประกอบด้วย การโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง)

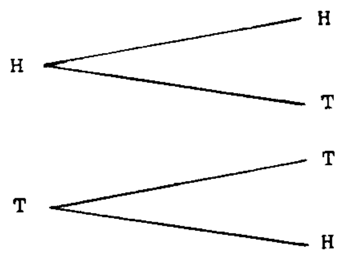
ผลของการทดลองทั้งหมดจะได้ 4 สมาชิก หรือ 4 ผลลัพธ์ (Outcome) ดังนี้

1. ครั้งแรกได้ H ครั้งที่สองได้ H
2. ครั้งแรกได้ H ครั้งที่สองได้ T
3. ครั้งแรกได้ T ครั้งที่สองได้ T
4. ครั้งแรกได้ T ครั้งที่สองได้ H

ดังนั้น $S = \{(H,H), (H,T), (T,T), (T,H)\}$

เพื่อเป็นการสะดวกและง่ายแก่การทำความเข้าใจ เราสามารถจะหาผลการทดลองที่เป็นไปได้ของการทดลองนี้โดยการเขียน tree diagram ได้ดังนี้

โยนเหรียญครั้งที่ 1 โยนเหรียญครั้งที่ 2

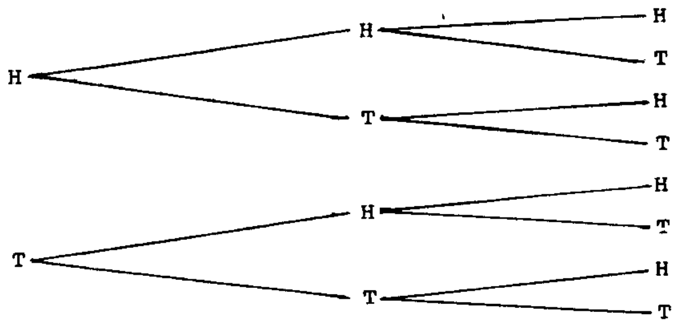


จำนวนสมาชิกใน $S = 2 \times 2 = 4$

ถ้าหากขยายการทดลองโดยการโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง ซึ่งการทดลองนี้มีผลเช่นเดียวกันกับการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง

ผลที่เป็นไปได้ปรากฏดังนี้

โยนครั้งที่๑ **โยนครั้งที่๒** **โยนครั้งที่๓**



ดังนั้น S = { (H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T) }

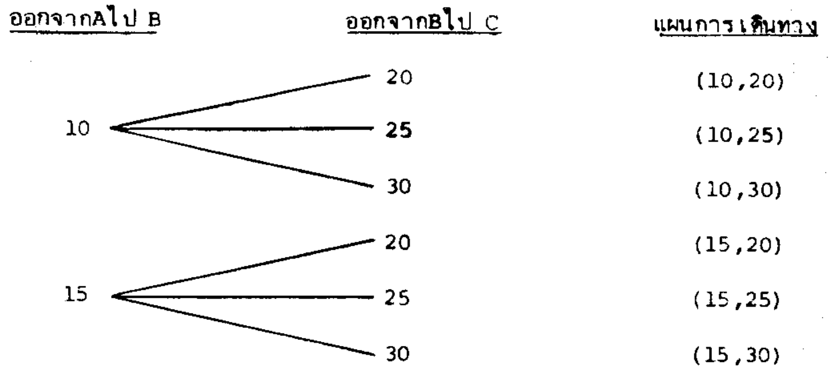
จึงเห็นว่าจำนวนสมาชิกในเซท S = 8 ซึ่งคิดได้มาจาก $2 \times 2 \times 2$ หรือ $m \times n \times r$ ซึ่ง ถ้าหากว่าการทดลองประกอบด้วยการโยนเหรียญ 5 ครั้ง จะพบว่าจำนวนผลการทดลอง (สมาชิกใน S) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ ครั้ง และเมื่อขยายการทดลองไปเรื่อย ๆ จนถึงโยนเหรียญ n ครั้งจะพบว่า ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดหรือจำนวนสมาชิกของเซท S จะมีจำนวนทั้งสิ้น $2 \times 2 \times 2 \times \ldots = 2^n$ ครั้ง การที่เราจำเป็นต้องรู้จำนวนสมาชิกในเซท S ก็เพื่อนำไปใช้เป็นหลักในการหาค่าความน่าจะเป็น ในบางครั้งถ้าหากเราไม่ต้องการทราบรายละเอียดของเซท S หรือสมาชิกบางส่วนของ S (อนุเซทของ) ซึ่งอาจใช้ประโยชน์ในการหาจำนวน f (ดูตอน 2.2 ก) เราไม่จำเป็นต้องเขียนผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้ในเซทของ S ออกมาก็ได้ เพราะในบางปัญหาการจะแจกแจงออกมาจนครบจำนวนอาจจะยืดยาวและเสียเวลาไปโดยใช่เหตุ เพียงแต่ขอให้ทราบว่าในเซท S มีอยู่กี่สมาชิกก็เพียงพอแล้ว

ตัวอย่าง 2.3 ถ้าเราต้องการเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B และจากจุด B เดินทางต่อไปยังจุด C เป็นที่ทราบกันว่าจากจุด A ไปยังจุด B มีรถผ่านอยู่ 2 สายคือ สาย 11 และสาย 15 และจากจุด B ไปยังจุด C มีรถผ่านอยู่ 3 สายคือ สาย 20 สาย 25 สาย 30 จงหาหนทางทั้งหมดที่จะเดินทางโดยรถจากจุด A ไปยังจุด C (นั่งรถ 2 ต่อ)

วิธีทำ ในที่นี้เปรียบ 1 การทดลองได้กับการเดินทางด้วยรถจากจุด A ไปยังจุด B และจุด B ไปยัง C การเดินทางจากจุด A ไปยังจุด B เรามีสิทธิเลือกรถเมล์ได้ 2 สาย ไปต่อรถที่จุด B และพบว่าจากจุด B ไปยังจุด C เรามีสิทธินั่งรถเมล์ 3 สาย ดังนั้นแผนการเดินทางจากจุด A ไปยัง C จึงประกอบไปด้วยวิธีเดินทางทั้งสิ้น $2 \times 3 = 6$ วิธี

1. ไปสาย 11 - ต่อสาย 20 2. ไปสาย 10 - ต่อสาย 25 3. ไปสาย 10 - ต่อสาย 30
4. ไปสาย 15 - ต่อสาย 20 5. ไปสาย 15 - ต่อสาย 25 6. ไปสาย 15 - ต่อสาย 30

หรือแสดงให้เห็นได้ด้วย tree diagram ดังนี้



$S = \{(10,20), (10,25), (10,30), (15,20), (15,25), (15,30)\}$

เรื่องของการนับจำนวนสมาชิกในเซทของ S จะมีประโยชน์ในเรื่องเกี่ยวกับการหาค่าความน่าจะเป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นจะขอแทรกเกี่ยวกับการหาจำนวนสมาชิกเข้ามาในตอนนี้ เพื่อให้นักศึกษาได้ เข้าใจยิ่งขึ้นก่อนที่จะไปถึง เรื่องของการหาค่าความน่าจะเป็นในตอนต่อไป

จากตัวอย่างและวิธีการสามารถสรุปได้ว่า

"ถ้าการทดลองหนึ่งประกอบด้วยการทดลองย่อย ๆ k การทดลอง โดยที่แต่ละการทดลองย่อยมีทางที่จะเป็นไปได้แตกต่างกันไปดังนี้ คือ การทดลองที่ 1 มีผลการทดลองที่เป็นไปได้ n_1 ประการ การทดลองที่ 2 มีผลการทดลองที่เป็นไปได้ n_2 ประการ....การทดลองที่ k มีผลการทดลองที่เป็นไปได้ n_k ประการ

ดังนั้น ผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้จะมีอยู่ทั้งสิ้น "$n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots \times n_k$ ประการ"

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. นักศึกษาคนหนึ่งลงทะเบียน 6 วิชา จงเขียนเซทของผลลัพธ์ที่จะสอบได้ (จำนวนวิชาที่จะสอบได้)

   คำตอบ

2. โยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ให้เขียนเซทของผลการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้ (เติมให้ครบ)

   S = { (1,1), ( ), ( ), ( ), ( ), ( )
   (2,1)..
   (3,1), ...
   (4,1), ...
   (5,1), ...
   (6,1) ....}

   (1,1) คืออะไร

3. โยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

   S = { (H,H), ( ), ( ), ( ), }

   (T,H) คือ..

4. ถ้ากำหนดว่า โยนเหรียญได้หัว = 1 และก้อย = 0 ดังนั้น ในปัญหาที่ 3 จะเขียน S ได้ดังนี้คือ

   S = { (1,1), ( ), ( ), ( ) }

5. นำหลอดไฟ 3 หลอดมาตรวจสอบดูว่าใช้ได้หรือไม่ จงเขียน Sample Space

6. สุ่มนักศึกษามา 3 คน เมื่อถามว่าเขาเห็นด้วยกับการที่จะให้มหาวิทยาลัยรามคำแหง เป็นมหาวิทยาลัยปิดหรือไม่ จงเขียนคำตอบที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด

7. นักศึกษาที่ลงทะเบียนวิชาปีหนึ่ง จะต้องลงทะเบียนวิชาบังคับ 3 วิชา คือวิชา EN 101 ซึ่งมีอยู่ 3 section วิชา TH 101 มีอยู่ 2 section และวิชา SO 103 ซึ่งมี 4 section จงเขียน Sample space ของ การเลือกเรียนวิชาบังคับทั้งสาม

2.3.2 การคำนวณหาผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดโดยอาศัยวิธีการจัดลำดับ (Permutation)

การจัดลำดับคือการจัดกลุ่มวัตถุสิ่งของเป็นหมวดหมู่โดยถือว่าลำดับที่ของวัตถุสิ่งของในหมวดหมู่มีความสำคัญรวมในการจำแนกหมู่ จำนวนหมู่ที่มีอยู่ทั้งหมดจะเป็นตัวแสดงจำนวนผลลัพธ์หรือหนทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองนั้น ๆ

ที่กล่าวว่า "ลำดับที่ของวัตถุสิ่งของในหมวดหมู่มีความสำคัญร่วมในการจำแนกหมู่" ก็เพื่อชี้ให้เห็นความแตกต่างเฉพาะตัวกับการจัดหมู่อีกวิธีหนึ่งที่เรียกว่า Combination ทั้งนี้เพราะในเรื่อง Combination นั้นลำดับที่ของวัตถุสิ่งของมิได้มีความหมายในการจำแนกหมู่แต่ประการใด ซึ่งโดยปกติทั้ง Permutation และ Combination จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นแต่ใช้ประโยชน์ในลักษณะงานที่ต่างกันหรือมีข้อจำกัดต่างกัน นักศึกษาจะได้พบข้อแตกต่างเหล่านี้ในลำดับต่อไปและจะได้ศึกษาเรื่อง Combination ในตอน 3.2.3

การจัดลำดับเป็นเรื่องที่ถูกนำมาใช้งานที่ถือว่าการสลับที่ของวัตถุสิ่งของจะมีผลให้ความหมายของหมู่ผิดไปจากเดิม เช่น การเสนอรายชื่อของผู้แทนตามลำดับคะแนนนิยม ชื่อต้นแสดงว่าได้รับความนิยมสูงสุด ชื่อ 2 ที่ 3....เป็นรายชื่อของผู้ที่ได้รับความนิยมในลำดับรองลดหลั่นกันไป ดังนี้ถ้าต้องการเสนอชื่อผู้แทน 2 คนคือ นายดำและนายขาว ถ้าเสนอชื่อเป็น (นายดำ, นายขาว) กับ (นายขาว, นายดำ) ความหมายของหมู่ย่อยผิดแผกกัน จึงเห็นว่าข้อจำกัดที่ใช้ในที่นี้ก็คือ "ลำดับของความนิยม" แต่ถ้าตัดข้อจำกัดนี้ทิ้งไปเหลือเพียงแต่เสนอว่า คน 2 คนไปเป็นตัวแทน เช่น เสนอชื่อเจ้าหน้าที่เข้ารับการอบรมหลักสูตรพิเศษทางด้านคอมพิวเตอร์ "ดังนี้หมู่ทั้งสองคือ" ขอเสนอนายดำและนายขาวเข้ารับการอบรม "กับ" ขอเสนอนายขาวและนายดำเข้ารับการอบรม "ย่อมมีความหมายว่าส่งคนคู่นี้เข้ารับการอบรมเหมือนเดิม" ไม่ผิดแผกกันแต่ประการใด ดังนี้การจัดหมวดหมู่กรณีแรกคือ Permutation ส่วนกรณีที่ 2 คือ Combination นักศึกษาคงพอจำแนกความแตกต่างได้

ต่อไปนี้เราจะเริ่มศึกษาถึงเรื่องของ Permutation เป็นลำดับ ๆ ไปจากตัวอย่างง่าย ๆ จนถึงเรื่องราวที่ค่อนข้างซับซ้อน

ก. การจัดเรียงวัตถุในแนวเส้นตรง

การจัดเรียงวัตถุที่มีอยู่ใส่ในตำแหน่งที่เรียงภายในแนวเส้นตรงหรือในลำดับก่อนหลังตามปกติให้คิดโดยพิจารณาวิธีจัดวางวัตถุวางในตำแหน่งต่าง ๆ ทีละตำแหน่ง ตำแหน่งต้น ๆ ย่อมจัดวางวัตถุลงได้มากวิธีกว่าตำแหน่งหลัง ๆ เพราะวัตถุที่จัดวางลงไปย่อมคงที่ไม่อาจนำมาร่วมพิจารณาได้อีกต่อไป ขอให้ทำความเข้าใจตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.4 นายเขียวฝันเห็นเลขเด่น 3 ตัว คือ 1, 5 และ 7 เขาคาดว่างวดนี้หวยจะต้องออกเลขเหล่านี้ไม่เลขใดก็เลขหนึ่งขอให้กลับเลขให้ดี ถ้านายเขียวต้องการแทงหวยทั้งชนิด 3 ตัว และ 2 ตัว และ 1 ตัว เลขละ 1 บาทเฉพาะบน (คำว่า "บน" เป็นคำเฉพาะของวงการสลากกินรวบ หมายถึงเลขท้ายของรางวัลที่ 1) อยากทราบว่านายเขียวต้องเสียเงินซื้อหวยกี่บาท

วิธีทำ เลขที่ต้องการคือ 1, 5, 7

1. ถ้าซื้อเลข 3 ตัว จะพบว่าต้องซื้อถึง 6 หมายเลขคือ
   157, 175, 517, 715, 751
2. ถ้าซื้อเลข 2 ตัวจะพบว่าต้องซื้อถึง 6 หมายเลขคือ
   15, 51, 17, 71, 57, 75
3. ถ้าซื้อเลข 1 ตัว จะพบว่าต้องซื้อ 3 หมายเลขคือ 1, 5, 7
   ดังนั้นนายเขียวต้องลงทุนซื้อหวยถึง 15 หมายเลข เป็นเงิน 15 บาท

หมายเหตุ กรณีที่เลขซ้ำกันไม่ถือว่าเป็นเรื่องของ Permutation แต่เป็นเรื่องของการเลือกตัวอย่างโดยสุ่มแล้วใส่คืน (Sampling with relplacement) นักศึกษาได้พบมาแล้วในบทที่ 1 สำหรับเรื่องสลากกินแบ่งทั้งของรัฐบาลหรือเอกชน เลขรางวัลมีสิทธิ์เป็นเลขใดก็ได้ ซ้ำกันหรือสลับเลขกันก็ได้ แต่เนื่องจากทั้ง Permutation และ Combination เป็นเรื่องของการเลือกตัวอย่างโดยสุ่มแล้วไม่ใส่คืน (Sampling without replacement) การเลือกหน่วยซ้ำหรือเลขซ้ำคือ 111, 555,777, 11, 55 และ 77 จึงไม่ปรากฏ

ตัวอย่าง 2.5 ในการเลือกกรรมการชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยประธานกรรมการ รองประธานและเลขานุการจากการเลือกตั้งถือว่าคนที่ได้รับคะแนนสูงสุดได้เป็นประธาน คะแนนลำดับที่ 2 ได้เป็นรองประธานและคะแนนลำดับที่ 3 ได้เป็นเลขานุการ

ถ้าคราวนี้มีผู้สมัครเข้ารับเลือกตั้ง 5 คน อยากทราบว่าท่านจะมีวิธีจัดคนเข้ารับตำแหน่งเหล่านี้ได้กี่วิธี (ถือว่าตราบใดที่ยังไม่ทราบผลการลงคะแนน ผู้สมัครอาจได้รับตำแหน่งใดก็ได้)

วิธีทำ

เราสามารถจัดบุคคล (ผู้มีบัตร) ให้เข้ารับตำแหน่งที่มีอยู่ 3 ตำแหน่งดังนี้

(1) ผู้สมัครมีอยู่ทั้งสิ้น 5 คน แต่ละคนย่อมมีสิทธิได้รับเลือกเป็นประธาน ดังนั้นสามารถจัดคน 5 คน เข้ารับตำแหน่งประธานได้ 5 วิธี (คือนายก. เป็นประธาน หรือ นายข. เป็นประธานหรือนายค. เป็นประธานหรือนายง. เป็นประธานหรือนายจ. เป็นประธาน)

(2) ถ้าผู้สมัครคนหนึ่งถูกจัดให้เป็นประธานไปแล้ว จึงเหลือผู้สมัครอีก 4 คน คนทั้ง 4 มีสิทธิได้รับเลือกเป็นรองประธาน ดังนี้สามารถจัดคน 4 คนเข้ารับตำแหน่งรองประธานได้ 4 วิธี

(3) ถ้าผู้สมัครคนหนึ่งถูกจัด (เลือก) เป็นประธาน อีกคนหนึ่งถูกจัดให้เป็นรองประธานแสดงว่าเหลือผู้สมัครอีก 3 คนมีสิทธิชิงตำแหน่งเลขานุการ ดังนั้นสามารถจัดคน 3 คนเข้ารับตำแหน่งเลขานุการได้ 3 วิธี ดังนั้น เราสามารถจัดคน 5 คน เข้ารับตำแหน่งที่มีอยู่ 3 ตำแหน่งได้ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธีหรือแจกแจงรายละเอียดได้ดังนี้

S = { (กขค), (กขง), (กขจ), (กคข), (กคง), (กคจ), (กงข), (กงค), (กงจ), (กจข), (กจค), (กจง), (ขกค), (จกง), (ขกจ), (ขคก), (ขคง), (ขคจ), (ขงก), (ขงค), (ขงจ), (ขจก), (ขจค), (ขจง), (คกข), (คกง), (คกจ), (คขก), (คขง), (คขจ), (คงก), (คงข), (คงจ), (คจก), (คจข), (คจง), (งกข), (งกค), (งกจ), (งขก), (งขค), (งขจ), (งคก), (งคข), (งคจ), (งจก), (งจข), (งจค), (จกข), (จกค), (จกง), (จขก), (จขค), (จขง), (จคก), (จคข), (จคง), (จงก), (จงข), (จงค) }

หมายเหตุ (กขค) อ่านว่า นายก. เป็นประธาน นายข. เป็นรองประธาน นายค. เป็นเลขานุการ
(กขง) อ่านว่า นายก. เป็นประธาน นายข. เป็นรองประธาน นายง. เป็นเลขานุการ

.

.

.

(จงค) อ่านว่า นายจ. เป็นประธาน นายง. เป็นรองประธาน นายค. เป็นเลขานุการ

จากตัวอย่างทั้งสองนักศึกษาจะพบว่าการหาหนทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดโดยวิธี Permutation ไม่ใช่เรื่องยากลำบาก แต่ถ้าจะต้องแจกแจงผลลัพธ์ทั้งหมดออกมาเป็นเซท S ดังตัวอย่างที่ 2 รู้สึกจะไม่ใช่เรื่องง่าย เพราะกินเวลามิใช่น้อยและเกินความจำเป็น สิ่งที่เราต้องการจริง ๆ มีเพียงตัวเลขที่แสดงจำนวนหนทางทั้งหมดที่เป็นไปได้เท่านั้น โดยทั่วไปไม่ต้องการแจกแจงรายละเอียดเช่นนั้นโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้ามีการจัดตำแหน่งสำหรับกรณีเลขจำนวนมาก เช่น จัดตำแหน่ง 11 ตำแหน่งให้ผู้สมัคร 100 คน ซึ่งมีได้ถึง $100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times 94 \times 93 \times 92 \times 91 \times = 6.28156509 \times 10^{19}$ วิธี ซึ่งถ้าต้องแจกแจงโดยละเอียดคงไม่ใช่เรื่องน่ายินดี

วิธีการที่จะหาจำนวนหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วยวิธีที่สะดวกกว่าการแจกแจงเป็นเซทข้างต้นก็คือวิธีคำนวณด้วยสูตร

พิจารณาตัวอย่างที่ 2.5 จะพบว่า

1. ตำแหน่งประธาน สามารถจัดคนเข้ารับตำแหน่งได้ 5 วิธี

2. ตำแหน่งรองประธานสามารถจัดคนเข้ารับตำแหน่งได้ 4 วิธี ทั้งนี้เพราะหักคนที่ไปรับตำแหน่งประธานออกไปแล้ว 1 คน จึงเหลือคนเพียง 4 คนสำหรับตำแหน่งรองประธาน

3. ตำแหน่งเลขานุการสามารถจัดคนเข้ารับตำแหน่งได้ 3 วิธี ทั้งนี้เพราะหักคนที่ไปรับตำแหน่งประธานออกไป 1 คน และตำแหน่งรองประธานอีก 1 คน จึงเหลือเพียง 3 คนสำหรับตำแหน่งเลขานุการ

ดังนั้นเมื่อมีผู้สมัคร 5 คนสำหรับตำแหน่ง จึงหมายถึงการจัดคน 5 คนเข้ารับตำแหน่ง 3 ตำแหน่ง สามารถกระทำได้ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

เราเรียกวิธีจัดคน 5 คน เข้ารับตำแหน่ง โดยจัดคราวละ 3 คนว่า Permutation ให้สัญลักษณ์ ${}^5P_3$ อ่านว่า "5 Permutation 3" หรือ "คน 5 คนนำมาจัดลำดับทีละ 3 คน"

ดังนั้น ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

หรือ ${}^5P_3 = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

สิ่งที่นักศึกษาพึงเรียนรู้ในขณะนี้ก็คือ Factorial ซึ่งใช้สัญลักษณ์ "!" แฟคเตอร์เรียล ก็คือการคูณเลขตั้งแต่ค่าที่กำหนดกับค่าที่ลดหลั่นลงทีละหน่วย เรื่อยไปจนถึง 1 กล่าวคือ

$2! = 2 \times 1$ อ่านว่า 2 แฟคตอเรียล $= 2 \times 1$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ อ่านว่า 5 แฟคตอเรียล $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ อ่านว่า 10 แฟคตอเรียลเท่ากับ $10 \times 9 \times 8 \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ดังนั้น เมื่อ n! เป็นจำนวนเต็มบวก ๆ ใด ๆ

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

ดังนั้น โดยอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับแฟคตอเรียล เราจะพบว่า

ก. ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$

ขอให้สังเกตว่า $3 = 5 - (3-1) = 5-3+1$

ข. ${}^{100}P_{10} = 100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times 94 \times 93 \times 92 \times 91$

$$= \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times 95 \times 94 \times 93 \times 92 \times 91 \times 90 .. \times 3 \times 2 \times 1}{90 \times 89 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{100!}{90!} = \frac{100}{(100-10)!}$$

ขอให้สังเกตว่า $91 = 100 - (10-1) = 100-10+1$

ดังนั้น ถ้ามีวัตถุ (คน สัตว์ สิ่งของ) n ชิ้น ถ้าจัดลำดับคราวละ r ชิ้น จะพบว่าจำนวนวิธีจัดลำดับมีอยู่ทั้งสิ้น ${}^nP_r$ วิธีโดยที่

$${}^nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

$$= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r+1) .. 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \ldots 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

สรุป

1. ในการจัดเรียงลำดับวัตถุ (คน, สัตว์, สิ่งของ) n ชิ้นคราวละ r ชิ้นเมื่อ n และ r เป็นเลขจำนวนเต็มจะพบว่า

ตำแหน่งที่ 1 จัดเรียงวัตถุได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 จัดเรียงวัตถุได้ (n − 1) วิธี

ตำแหน่งที่ 3 จัดเรียงวัตถุได้ (n − 2) วิธี

.

.

.

ตำแหน่งที่ r จัดเรียงวัตถุได้ n − (r − 1) วิธี

ดังนั้น $^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(r-1))$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)..(n-r+1)(n-r)(n-r-1)..3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots3.2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

หรือ $^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)$$

1. $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3.2.1$

2. $1! = 1$[1]

3. $0! = 1$[2]

4. $^{n}P_{o} = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$ หมายความว่ามีวัตถุอยู่ n ชิ้นและไม่จัดเรียง (จัดเรียงคราวละ 0 ชิ้น)ย่อมกระทำได้ 1 วิธีคือ "วิธีไม่จัด"

6. $^{n}P_{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

กล่าวคือวัตถุอยู่ n ชิ้น จัดให้แก่ตำแหน่งที่มีอยู่เพียง 1 ตำแหน่ง ย่อมจัดได้ n วิธี เช่นมีตำแหน่งนายกเทศมนตรีเพียง 1 ตำแหน่ง มีผู้สมัคร 10 คน ตำแหน่งนี้จึงสามารถจัดให้กับผู้สมัครได้ 10 วิธี ผู้สมัครคนใดคนหนึ่งสามารถรับตำแหน่งก็ได้

---

1. และ 2. นักศึกษาสามารถพิสูจน์ได้เองเมื่อศึกษาถึงเรื่อง Combination

7. $^{n}P_{n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$

กล่าวคือมีวัตถุอยู่ n ชิ้น มีตำแหน่งรอรับไว้ n ตำแหน่ง ย่อมจัดได้ n! วิธี ทั้งนี้ เพราะสามารถสลับตำแหน่งกันได้ระหว่างวัตถุเหล่านั้น โดยนัยนี้ ตำแหน่งที่ 1 สามารถให้วัตถุอยู่ได้ n วิธี ตำแหน่งที่ 2 สามารถจัดให้วัตถุได้ $n-1$ วิธี ตำแหน่งที่ 3 สามารถจัดให้วัตถุได้ $n-2$ วิธี...ตำแหน่งสุดท้ายคือตำแหน่งที่ n สามารถจัดให้วัตถุอยู่ได้ 1 วิธี

เช่น $^{3}P_{3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{1} = 3.2.1 = 6$ วิธี

ตัวอย่าง 2.6 มีหัวเทียนรถยนต์ 4 ตัวท่านจะสามารถจัดหัวเทียนเหล่านี้ใส่ลงในที่ใส่หัวเทียนในเสื้อสูบ 4 แห่งได้กี่วิธี

วิธีทำ

มีหัวเทียน 4 ตัวต้องจัดใส่ลงในที่ของหัวเทียน 4 แห่ง จะเห็นว่ามีตำแหน่งสำหรับใส่หัวเทียนได้ 4 ตำแหน่ง ตำแหน่งที่ 1 สามารถเลือกหัวเทียนใส่ได้ 4 วิธี (หรือ 4 ตัวใดตัวหนึ่ง) เหลือหัวเทียนอีก 3 ตัวสำหรับตำแหน่งที่ 2 ดังนั้นตำแหน่งที่ 2 สามารถเลือกหัวเทียนใส่ได้ 3 วิธี เหลือหัวเทียนอีก 2 ตัว สำหรับตำแหน่งที่ 3 ดังนั้นตำแหน่งที่ 3 สามารถเลือกใส่หัวเทียนได้ 2 วิธี เหลือหัวเทียนอีก 1 ตัวสำหรับตำแหน่งสุดท้าย แสดงว่าตำแหน่งที่ 4 นั้นสามารถจัดหัวเทียนใส่ได้ 1 วิธี

ดังนั้น เราสามารถจัดหัวเทียนใส่ลงในช่องหัวเทียนได้ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี หรือสามารถจัดหัวเทียนใส่ในช่องหัวเทียนได้ $^{4}P_{4} = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

ตัวอย่าง 2.7 จากเลข 4 ตัวคือ 9, 5, 3, 1 ท่านสามารถนำมาสร้างเป็นเลขหลัก 10 ได้กี่วิธี

วิธีทำ

เลขหลักสิบคือเลข 2 หลัก ประกอบด้วยหลักหน่วยกับหลักสิบ

(1) หลักสิบสามารถจัดเลขตัวใดตัวหนึ่งใน 4 ตัว คือ 9, 5, 3, 1 ไว้ในตำแหน่ง ดังนั้นจึงจัดเลข 4 ตัวไว้ในตำแหน่งหลักสิบได้ 4 วิธี

(2) เมื่อจัดเลขหนึ่งไปเป็นเลขในตำแหน่งหลักสิบ จึงเหลือเลขเพียง 3 ตัวสำหรับตำแหน่งหลักหน่วย

ดังนั้นจากเลข 4 ตัวที่กำหนดให้ เราสามารถจัดเป็นเลขหลักสิบได้ $4 \times 3 = 12$ วิธี หรือจัดไว้ $^{4}P_{2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$ วิธี

สามารถแจกแจงได้ดังนี้

$$= \{(9\ 5), (9\ 3), (9\ 1), (5\ 9), (5\ 3), (5\ 1), (3\ 9), (3\ 5)\ (3\ 1), (1\ 9), (1\ 5), (1\ 3)\}$$

ตัวอย่าง 2.8 มีตัวอักษรอยู่ 8 ตัวคือ A, B, C, D, E, F, G, U
จะสามารถจัดเรียงเป็นกลุ่มตัวอักษรกลุ่มละ 3 ตัวได้กี่วิธี

วิธีทำ

มีอักษรอยู่ 8 ตัว ที่จะต้องจัดวางในตำแหน่งต่าง ๆ 3 ตำแหน่งรวมเป็นกลุ่มตัวอักษรกลุ่มละ 3 ตัวจะพบว่า

(1) ตำแหน่งที่ 1 จัดเรียงตัวอักษรวางไว้ได้ 8 วิธี

(2) เมื่อจัดตัวอักษรตัวใดใส่ในตำแหน่งที่ 1 จะเหลือตัวอักษรสำหรับใส่ในตำแหน่งที่ 2 อีก 7 ตัว แสดงว่าตำแหน่งที่ 2 สามารถจัดตัวอักษรใส่ได้ 7 วิธี

(3) เมื่อจัดตัวอักษร 2 ตัวใส่ลงในตำแหน่งที่ 1 และ 2 แล้ว จะเหลือตัวอักษรอีก 6 ตัวสำหรับตำแหน่งที่ 3 ดังนั้นตำแหน่งที่ 3 สามารถจัดตัวอักษรใส่ได้ 6 วิธี

ดังนั้นตัวอักษร ตัวสามารถจัดเป็นกลุ่มตัวอักษรกลุ่มละ 3 ตัวได้ $8 \times 7 \times 6 = 336$

หรือจัดได้ $^{8}P_{3} = \dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$ วิธี

ตัวอย่าง 2.9 มีเก้าอี้รับแขกอยู่ 10 ตัว และมีผู้มาเยือน 10 คน ท่านจะสามารถจัดให้แขกนั่งเก้าอี้ที่มีอยู่ได้กี่วิธี

วิธีทำ

สามารถจัดได้ $^{10}P_{10} = \dfrac{10!}{(10-10)!} = \dfrac{10!}{0!} = \dfrac{10!}{1} = 10!$

$= 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$ วิธี

ตัวอย่าง 2.10 มีหนังสืออยู่ 3 เล่ม ท่านสามารถจัดหนังสือเข้าชั้นได้กี่วิธี

วิธีทำ

การจัดชั้นหนังสือเราสามารถจัดวางได้คือวางสลับไปมาอย่างไรก็ได้ขอให้เป็นระเบียบ

ดังนั้น เราจึงสามารถจัดได้ $^{3}P_{3} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

หรือ พิจารณาแจกแจงวิธีคิดดังนี้

(1) ตำแหน่งที่ 1 จัดหนังสือวางไว้ 3 วิธี

(2) เหลือหนังสืออีก 2 เล่มสำหรับตำแหน่งที่ 2 ดังนั้นจึงจัดหนังสือที่เหลืออยู่วางในตำแหน่งที่ 2 ได้ 2 วิธี

(3) เหลือหนังสืออีก 1 เล่มสำหรับตำแหน่งสุดท้าย ผู้ที่จัดไม่มีสิทธิเลือกต้องจัดหนังสือวางในตำแหน่งที่เหลือ จึงทำได้ 1 วิธี

ดังนั้น จึงจัดหนังสือได้ ${}^{3}P_{3} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ถ้าแจงออกเป็นเซท S และให้ชื่อหนังสือ 3 เล่มนั้นเป็น ก, ข, ค จะพบว่า

S = { (กขค), (กคข), (ขคก), (ขกค), (คกข), (คขก) } รวม 6 วิธี

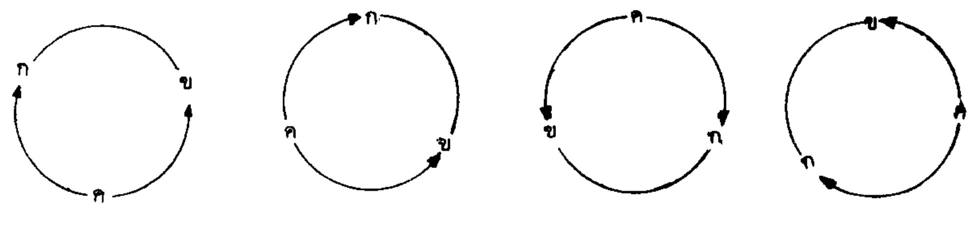
ข. การจัดเรียงวัตถุในแนววงกลม

การจัดเรียงวัตถุในแนววงกลมหมายถึงตำแหน่งต่าง ๆ ที่มีอยู่นั้นวางเรียงภายในแนวที่ต่อเนื่องถึงกันตลอดไม่จำเป็นต้องหมายถึงวงกลม อาจเป็นวงรีหรือรูปเหลี่ยมก็ได้ เช่น จัดเก้าอี้สัมนากลุ่มย่อยเป็นวงกลม โต๊ะประชุมเป็นรูปวงรีที่มีผู้ร่วมประชุมทุกคนสามารถมองเห็นหน้ากันหมด การนั่งล้อมวงรับประทานอาหารหรือสนทนากัน ฯลฯ

การจัดเรียงวัตถุสำหรับตำแหน่งเช่นนี้ต้องมีเทคนิคเล็กน้อย กล่าวคือ เราจะต้องยึดตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งคงที่ไว้ตายตัว ส่วนตำแหน่งอื่น ๆ สามารถจัดวัตถุใส่ได้โดยจะสลับที่กันอย่างไรก็ได้ ดังนั้นถ้ามีตำแหน่งอยู่ n ตำแหน่ง มีวัตถุอยู่ n ชิ้น ตำแหน่งหนึ่ง (จะเป็นตำแหน่งใดก็ได้) ต้องยึดให้คงที่ไว้ จึงเหลือตำแหน่งอยู่อีกเพียง $n-1$ ตำแหน่งสำหรับวัตถุ $n-1$ ชิ้น สามารถจัดเรียงในตำแหน่งที่มีอยู่ $n-1$ ตำแหน่งได้ ${}^{(n-1)}P_{(n-1)} = (n-1)!$ วิธี นั่นคือ ถ้ามีวัตถุอยู่ n ชิ้น ต้องจัดเรียงในตำแหน่ง n ตำแหน่งที่เรียงรายในรูปวงกลม จะจัดได้ $(n-1)!$ วิธี

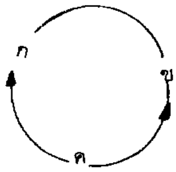
เพราะเหตุใดจึงเป็นเช่นนี้

ที่เป็นเช่นนี้เพราะการเรียงวัตถุในตำแหน่งวงกลมยึดถือทิศทางและวัตถุที่อยู่ในตำแหน่งข้างเดียวเข้าร่วมพิจารณา เช่น ชาย 3 คน คือ นายก. นายข. และนายค. นั่งล้อมวงคุยกัน ถ้านายก. นั่งทางซ้าย นายข. นั่งทางขวา นายค. นั่งกลางเช่นนี้เสมอไป ไม่ว่านายค. จะหันหลับไปทิศใด การขยับที่นั่งคุยกันของคนทั้งสามก็ยังคงถือว่าตำแหน่งการนั่งแบบเดิม ดังภาพ

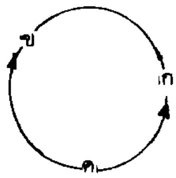


โดยนัยนี้ การจัดที่นั่งของคนทั้งสามจึงมีได้เพียง $(3-1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$ วิธี

คือเมื่อ นายก. นั่งเฉียงซ้าย นายข. นั่งเฉียงขวา และนายค. นั่งอยู่กลาง กับนายข. นั่งเฉียงซ้ายและนายก. นั่งเฉียงขวา นายค. อยู่กลาง ดังภาพ



และ



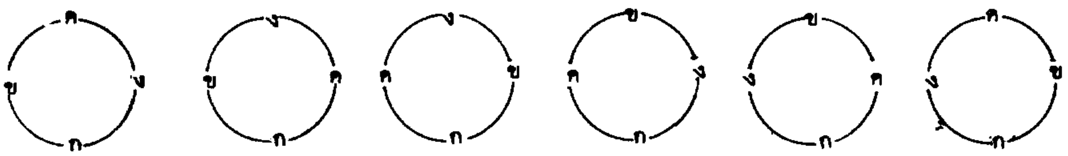
จะเห็นว่าไม่ว่านายค. หันหลังไปทิศอะไรก็ตาม การจัดที่นั่ง 3 ที่สำหรับชาย 3 คน ก็ยังคงมีได้เพียง 2 วิธีเท่านั้น ทั้งนี้เพราะเรายึดถือตำแหน่งการนั่งและทิศทางของคนข้างเดียวเป็นสำคัญ ขอให้สังเกตุว่าเราจัดให้นายค. อยู่นิ่ง ๆ นายก. กับนายข. สลับที่กันเอง

นักศึกษาอาจเริ่มสงสัยว่า ถ้าเป็นดังนี้ ถ้าจะลองแจกแจงวิธีนั่งของคนหลาย ๆ คน เช่น คน 5 คน 10 คน หรือ 100 คนหรือมากกว่านั้นจะทำได้อย่างไร มิวุ่นวายแย่หรือ เรื่องนี้ไม่ยากเราทำได้โดยง่ายเพียงแต่จัดให้ใครคนหนึ่งหรือตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง **คงที่ไว้** ส่วนที่เหลือก็จัดเรียงกันตามปกติแบบเดียวกันกับการจัดเรียงในแนวเส้นตรง นั่นคือ ถ้าคน 5 คนนั่งคุยกันก็สามารถสลับที่นั่งกันไป $4! = 24$ วิธี เพราะยึดตำแหน่งหนึ่งคงที่ไว้ คิดง่าย ๆ ก็คือให้คนหนึ่งนั่งนิ่ง ๆ อีก 4 คนสลับที่นั่งกัน ซึ่งสามารถสลับได้ 24 วิธี

ตัวอย่าง 2.11 ชาย 4 คนนั่งเล่นไพ่กัน คือนายก. นายข. นายค. และนายง. อยากทราบว่า ถ้าจะสลับที่นั่งกันใหม่ จะกระทำได้กี่วิธี พร้อมทั้งวาดภาพประกอบ

วิธีทำ

ให้คนใดคนหนึ่งนั่งคงที่ไว้ในตำแหน่งหนึ่งในที่นี้ให้นายก. นั่งคงที่ ส่วนตำแหน่งที่เหลืออีก 3 ตำแหน่งให้ชายทั้ง 3 คนนั่งสลับที่นั่งกัน ซึ่งจะกระทำได้ ${}^{3}P_{3} = 3! = 6$ วิธีดังภาพ

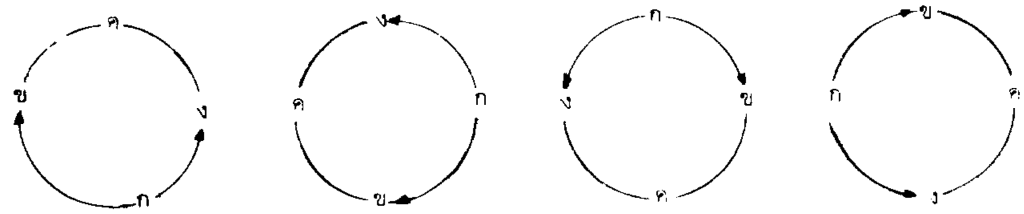


หรือดังภาพแผนการจัดที่ดังนี้

$S = \{$ (กขคง), (กขงค), (กคงข), (กคขง), (กงขค), (กงคข) $\}$

ขอให้สังเกตว่า กรณีนี้เราให้นายก. นั่งคงที่ ส่วนนายข, ค, ง สลับที่นั่งกันเอง นักศึกษาจะให้ใครนั่งคงที่ก็ย่อมมีผลต้องกันคือจัดที่นั่งได้ 6 วิธีเช่นกัน

จากตัวอย่างนี้สมมติวิธีนั่งแบบ (กขคง) ไม่ว่านายก. จะหันหลังไปทิศใด ถ้านายข. นั่งทางซ้าย นายง. นั่งทางขวา นายค. นั่งตรงกันข้าม เราถือว่าเป็นวิธีนั่งแบบเดียวกันคือ นายก. กันไพ่นายง. นายง. กันไพ่นายค. นายค. กันไพ่นายข. นายข. กันไพ่นายก. ดังภาพ



สำหรับเรื่องนี้ คงทำให้นักศึกษามองเห็นภาพได้ดีขึ้น เว้นแต่เฉพาะกรณีที่นักศึกษาไม่เคยรู้เรื่องการเล่นไพ่รัมมี่เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.12 นำลูกปัด 4 ลูก สีแดง สีน้ำเงิน สีเขียว และสีขาวมาร้อยเป็นวงแหวนสลับกันได้กี่วิธี

วิธีทำ

ให้ลูกปัดสีใดสีหนึ่งวางไว้ในตำแหน่งที่คงที่ ส่วนสีอื่นสลับที่กันได้

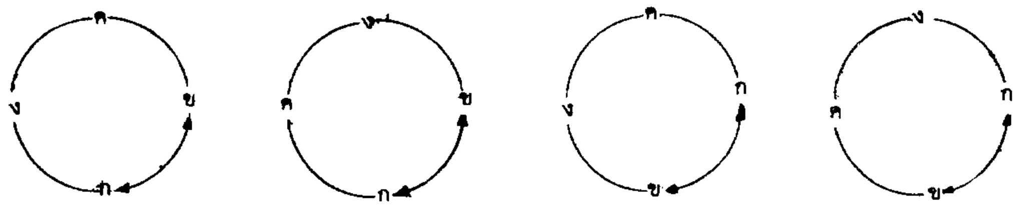
ดังนั้นจึงสามารถร้อยแหวนลูกปัดสลับสีกันได้ $(4-1)! = 3! = 6$ วิธี

ตัวอย่าง 2.13 ชาย 4 คนนั่งล้อมวงสนทนากัน คือนายก. นายข. นายค. และนายง. จะจัดที่นั่งให้คนทั้งสี่ได้กี่วิธี ถ้าหากว่านายก. และนายข. จะต้องนั่งติดกันเสมอ

วิธีทำ

การคำนวณกระทำได้เช่นเดียวกับตัวอย่างข้างต้น ต่างกันเฉพาะเงื่อนไขเพิ่มเติม การที่นายก. และนายข. จะต้องนั่งติดกันเสมอ ทำให้จำเป็นที่จะต้องจัดที่นั่งให้คนทั้งสองคงที่ ส่วนนายค. และนายจ. นั้นจะสลับที่นั่งกันได้ ดังนั้น ในชั้นต้นจึงจัดที่นั่งได้เพียง $(4-2)! = 2! = 2$ วิธี แต่แม้ว่านายก. กับนายข. จะต้องนั่งติดกัน คนทั้งสองก็สลับที่นั่งกันได้ กล่าวคือนายก. จะนั่งซ้าย นายข. นั่งขวา หรือนายก. นั่งขวาหรือนายข. นั่งซ้ายก็มีความหมายว่าคนทั้งสองนั่งติดกัน ดังนั้นนายก. และนายข. จะจัดที่นั่งกันเองได้ 4 วิธี

การจัดที่นั่งตามเงื่อนไขนี้จึงได้กระทำได้ $2! \times 2! = 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4$ วิธี ดังภาพ



หมายเหตุ ถ้านักศึกษาสงสัยว่าทำไมจึงได้ $2! \times 2!$ น่าจะเป็น $2! + 2!$ มากกว่า เรื่องนี้ตอบไม่ยากนักศึกษาสามารถหาคำตอบได้เอง โดยการทดลองขยายตัวอย่างนี้ออกไปแล้ววาดภาพประกอบการพิจารณาอาจให้ชาย 5 คนนั่งสลับกันเป็นวงกลมโดยให้ชาย 2 คนนั่งติดกัน หรือชาย 6 คนนั่งล้อมวงสนทนากันโดยที่ชาย 3 คนนั่งติดกัน

ค. การจัดเรียงวัตถุทั้งชุดเมื่อวัตถุบางชิ้นมีลักษณะเดียวกัน (แยกไม่ออก)

กรณีนี้มีวิธีคิดเช่นเดียวกับวิธีจัดเรียงวัตถุในแนวเส้นตรง ต่างกันแต่เพียงหักจำนวนกลุ่มที่ซ้ำกันออกให้หมด

พิจารณาการจัดเรียงอักษร 3 ตัว คือ A, A, B ซึ่งจะเห็นว่ามีอักษร A ซ้ำกัน 2 ตัว จะพบว่า ถ้าจัดโดยวิธีปกติจะจัดได้ $^3P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 6$ วิธี คือ

$$S = \{ (\underset{1}{A\,AB}), (\underset{2}{A\,BA}), (\underset{3}{AB\,A}), (\underset{4}{A\,A\,B}), (\underset{5}{B\,A\,A}), (\underset{6}{BA\,A}) \}$$

หมายเหตุ A หมายถึง A แรกในกลุ่มอักษร AAB A และ A ก็คือ A เดียวกัน ที่เขียนวงกลมล้อมไว้มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้สังเกตง่ายและเพื่อประโยชน์ในการอธิบาย

จะเห็นว่าการจัดวิธีที่ 1 กับวิธีที่ 4 คือวิธีเดียวกัน ต่างก็เป็น (AAB) แบบเดียวกัน
การจัดวิธีที่ 2 กับวิธีที่ 3 คือวิธีเดียวกัน ต่างก็เป็น (ABA) แบบเดียวกัน
การจัดวิธีที่ 5 กับวิธีที่ 6 คือวิธีเดียวกัน ต่างก็เป็น (BAA) แบบเดียวกัน

ดังนั้น เมื่อพิจารณาโดยถี่ถ้วนแล้ว จึงพบว่าเราสามารถจัดเรียงอักษร A, A, B ได้เพียง 3 วิธี

หรือ $\frac{3!}{2!} = 3$ วิธี คือ $S = \{(AAB), (ABA), (BAA)\}$

พิจารณาการจัดเรียงอักษร A, B, B, C

$$
\begin{aligned}
S = \{ & \underset{1}{(A\text{Ⓑ}BC)}, \underset{2}{(A\text{Ⓑ}CB)}, \underset{3}{(ABC\text{Ⓑ})}, \underset{4}{(AB\text{Ⓑ}C)}, \underset{5}{(AC\text{Ⓑ}B)}, \underset{6}{(ACB\text{Ⓑ})} \\
& \underset{7}{(\text{Ⓑ}BCA)}, \underset{8}{(\text{Ⓑ}BAC)}, \underset{9}{(\text{Ⓑ}CAB)}, \underset{10}{(\text{Ⓑ}CBA)}, \underset{11}{(\text{Ⓑ}ABC)}, \underset{12}{(\text{Ⓑ}ACB)} \\
& \underset{13}{(BCA\text{Ⓑ})}, \underset{14}{(BC\text{Ⓑ}A)}, \underset{15}{(BA\text{Ⓑ}C)}, \underset{16}{(BAC\text{Ⓑ})}, \underset{17}{(B\text{Ⓑ}CA)}, \underset{18}{(B\text{Ⓑ}AC)} \\
& \underset{19}{(CA\text{Ⓑ}B)}, \underset{20}{(CAB\text{Ⓑ})}, \underset{21}{(CBA\text{Ⓑ})}, \underset{22}{(CB\text{Ⓑ}A)}, \underset{23}{(C\text{Ⓑ}BA)}, \underset{24}{(C\text{Ⓑ}AB)} \}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 1,4 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ ABBC
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 2,3 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ ABCB
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 5,6 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ ACBB
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 7,17 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ BBCA
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 8,18 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ BBAC
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 9,13 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ BCAB
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 10,14 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ BCBA
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 11,15 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ BABC
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 12,16 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ BACB
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 19,20 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ CABB
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 21,24 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ CBAB
จะเห็นว่าวิธีจัดแบบที่ 22,23 เป็นวิธีจัดแบบเดียวกันคือ CBBA

จะเห็นว่าในบรรดาการจัดเรียงอักษรทั้งหมด 24 วิธี จะเป็นวิธีซ้ำ ๆ กันอยู่ วิธีการจัดนี้แตกต่างกันตามต้องการจึงมีเพียง 12 วิธี หรือ $\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 12$ วิธีคือ

$$
\begin{aligned}
S = \{ & (ABBC), (ABCB), (ACBB), (BBCA), (BBAC), (BCAB), (BCBA) \\
& (BABC), (BACB), (CABB), (CBAB), (CBBA) \}
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างทั้งสองนี้เราจึงสามารถสรุปได้ว่า "ถ้ามีวัตถุ n ชิ้นที่จะต้องเรียงและปรากฏว่ามีวัตถุที่มีลักษณะเดียวกัน (ซ้ำกัน) ปนอยู่ r ชิ้น จะพบว่าเราสามารถจัดเรียงวัตถุเหล่านี้ได้ $\frac{n!}{r!}$ วิธี" ตามตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า $r = 2 = n = 4$

โดยนัยเดียวกัน เราสามารถขยายความ (Generalize) ไปสู่กรณีที่มีวัตถุซ้ำกันมากกว่า 1 ชนิด ได้ดังนี้ "ถ้ามีวัตถุอยู่ n ชิ้นที่จะต้องจัดเรียงลำดับและปรากฏว่าในบรรดาวัตถุเหล่านั้นมีวัตถุที่ซ้ำ ๆ กันปนอยู่ k พวก แต่ละพวกมีจำนวน $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ขึ้นตามลำดับ เราสามารถจัด

เรียงวัตถุเหล่านี้ได้ทั้งสิ้น $\dfrac{n!}{r_1!r_2!r_3! \ldots r_k!}$ วิธี

ตัวอย่าง 2.14 ถ้านำอักษร pupil มาจัดเรียงลำดับอักษรใหม่จะกระทำได้กี่วิธี

วิธีทำ

ในบรรดาอักษร pupil 5 ตัว มีอักษร p ซ้ำกันอยู่ 2 ตัว ซึ่งมีผลให้กลุ่มคำแต่ละคำเกิดขึ้นในลักษณะเดียวกันได้ 2! = 2 วิธี ดังนั้นเราจะพบเมื่อนำตัวอักษร pupil มาจัดเรียงลำดับใหม่ได้เพียง $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$ วิธี

ตัวอย่าง 2.15 อักษร S T A T I S T I C S นำมาจัดสรรลำดับอักษรใหม่ได้กี่วิธี

วิธีทำ

ในบรรดาตัวอักษร 10 ตัว คือ S T A T I S T I C S มีอักษรซ้ำกันดังนี้คือ อักษร S ซ้ำกัน 3 ตัว อักษร T ซ้ำกับ 3 ตัว และอักษร I ซ้ำกันกัน 2 ตัว
ดังนั้นเราจึงสามารถจัดเรียงลำดับอักษร S T A T I S T I C S ใหม่ได้เพียง

$$\frac{10!}{3!3!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!3!2!}$$

$$= 50{,}400 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง 2.16 มีดอกมะลิอยู่ 20 ดอก กุหลาบ 10 ดอก และดอกรัก 50 ดอก อยากทราบว่าจะนำมาร้อยเป็นมาลัยสลับสีได้กี่วิธี

วิธีทำ

มีดอกมะลิอยู่ 20 ดอก กุหลาบแดง 10 ดอก ดอกรัก 50 ดอก รวมขณะนี้มีดอกไม้ทั้ง 3 ชนิดอยู่ทั้งสิ้น 80 ดอก

ดอกไม้ทั้ง 3 ชนิดมีสีต่างกัน แสดงว่ามีดอกไม้สีขาว (มะลิ) ซ้ำกัน 20 ดอก ดอกไม้สีแดง (กุหลาบแดง) ซ้ำกัน 10 ดอก และดอกไม้สีม่วงอ่อน (ดอกรัก) ซ้ำกัน 50 ดอก ดังนั้นเราจึงสามารถนำดอกไม้สีต่าง ๆ เหล่านี้มาร้อยมาลีสีแปลก ๆ แตกต่างกันได้ $\frac{(80-1)!}{20!10!50!}$ วิธี

หมายเหตุ ในตัวอย่างทั้งสามคือตั้งแต่ตัวอย่าง 2.14 ถึง 2.16 ถ้านักศึกษายังสงสัยในวิธีคำนวณขอให้ศึกษาลองแจกแจงการจัดกลุ่มออกมาเป็นเซท S จะพบข้อเท็จจริงได้ทันที ถ้ามีแรงและเวลาทำเช่นนั้น

แบบฝึกหัด 2.3

1) คำว่า PROBABILITY ถ้านำมาเรียงกันเป็นคำใหม่จะได้ทั้งหมดกี่คำ

2. ในปัญหาข้อ 1. คำที่ขึ้นต้นด้วย L มีกี่คำ

3) เลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพฯในแต่ละหมวดมีกี่หมายเลข

หมายเหตุ หมายเลขทะเบียนรถยนต์ในกรุงเทพฯเป็นเลข 4 หลัก แต่ละหมวดคือขึ้นต้นด้วยอักษรในภาษาไทย

4) มีเลขอยู่ 6 ตัวคือ 3, 7, 4, 8, 5, 2 จะนำสร้างเลขหลักสิบได้กี่จำนวน

5) ในปัญหาที่ 4 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าเลขหลักสิบจะต้องขึ้นต้นด้วยเลขคู่ เลขดังกล่าวจะมีกี่จำนวน (ข้อแนะนำ ให้จัดเลข หลักหน่วยก่อน แล้วค่อยจัดหลักสิบที่เป็นเลขคู่)

6) มีหนังสือ ST 103 อยู่ 5 เล่ม PY 103 อยู่ 10 เล่ม MA 112 อยู่ 6 เล่ม และ PC 103 อยู่ 7 เล่ม จะเรียงเข้าหิ้งหนังสือได้กี่วิธี

7) นายแดงต้องเดินทางจากบ้านที่ฝั่งธนมาลงที่สนามหลวงมามหาวิทยาลัยรามคำแหง จากบ้านของเขามาสนามหลวงมีรถเมล์สาย 1, 3, 5 จากสนามหลวงมารามคำแหงมีรถเมล์สาย 9, 10, 11, 12 จงหาวิธีในการเดินทางจากบ้านของเขามามหาวิทยาลัย (ให้ใช้ Tree diagram ในปัญหานี้)

8) มีอยู่กี่วิธีในการจะจัดเรียงลูกปัดสีแดง 4 ลูก สีขาว 5 ลูก และสีน้ำเงิน 3 ลูก ให้สลับสีกันในแถวเดียวกัน

9) มีลูกปัดอยู่ 7 ลูก 7 สี จะนำมาร้อยเป็นสร้อยข้อมือได้วิธีต่าง ๆ กันกี่วิธี

10) จงแสดงว่า $\frac{{}^{(n-1)}P_r}{(n+1)} = {}^{n}P_{(r-1)}$

11) จะสลับอักษรในคำเหล่านี้เป็นคำใหม่ได้กี่คำ

a. ALGEBRA

b. COLLEGE

c. TENNESSEE

12) จงแก้สมการหาค่าของ n

${}^{n}P_5 = 20.{}^{n}P_3$

13) จงหาค่าของ ${}^{4}P_1 + {}^{4}P_2 + {}^{4}P_3 + {}^{4}P_4$

14) ในชั้นเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนอยู่ 50 คน จะมีการออกเสียงเลือกประธานกรรมการ รองประธาน และเลขานุการ ของห้องโดยข้อตกลงว่า การโหวตครั้งที่ 1 ผู้ได้เสียงข้างมากจะ

เป็นประธาน ครั้งที่ 2 จะได้เป็นรองประธาน และครั้งที่ 3 จะได้เป็นเลขานุการ จงหาจำนวนวิธีในการเลือกครั้งนี้

15) มีอยู่กี่วิธีในการจะจัดเด็กชาย 4 คนและเด็กหญิง 4 คน ให้นั่งในแถวหนึ่งโดยมีข้อแม้ดังนี้
   ก. ทุกคนจะนั่งอย่างไรก็ได้
   2. เด็กหญิงจะต้องนั่งสลับกับเด็กชาย
   ค. ต้องให้เด็กชายนั่งหัวแถวและปลายแถว

16) มีกี่วิธีที่ชาย 8 คนจะนั่งเรียงเป็นวงกลมโดยมีข้อแม้ว่าชาย 3 คนจะต้องนั่งติดกัน

2.3.2 การคำนวณหาผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดโดยอาศัยวิธีจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่เป็นวิธีคำนวณหาจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดอีกวิธีหนึ่ง เป็นวิธีที่ใช้มากในทางปฏิบัติโดยเฉพาะในงานทางสถิติและการวิจัย เช่น การสุ่มตัวอย่าง (random sample) การจัดสรรทีมฟุตบอล การเลือกวัตถุมาตรวจสอบ ฯลฯ การจัดหมู่แตกต่างไปจากการจัดลำดับตรงที่ การจัดหมู่ถือว่าลำดับที่ของตำแหน่งต่าง ๆ ในกลุ่มไม่มีความหมาย หากพิจารณาถึงเพียงเฉพาะองค์ประกอบรวม ๆ ของกลุ่ม ๆ ว่าประกอบไปด้วยใครหรืออะไรบ้างเท่านั้น กล่าวคือถ้าในกลุ่มมีองค์ประกอบเช่นเดิม ไม่ว่าจะสลับที่กันไปอย่างไรก็คงถือว่าเป็นกลุ่มเดิมเพราะองค์ประกอบมิได้ผิดแผกไปจากเดิม เช่นตัวแทนของนักศึกษาประกอบด้วยนายดำ นายแดง และนายขาว แม้จะสลับเป็น (นายดำ นายขาว นายแดง), (นายขาว นายแดง นายดำ), (นายขาว นายดำ นายแดง), (นายแดง นายขาว นายดำ), (นายแดง นายดำ นายขาว) ก็คงหมายถึงกลุ่มที่ประกอบด้วยคน 3 คน เดิมนั่นเอง ข้อนี้จึงชี้ให้เห็นความแตกต่างระหว่างการจัดลำดับและการจัดหมู่ได้อย่างชัดเจน หากนักศึกษาสงสัยว่าประเด็นที่กำลังศึกษาอยู่นั้นควรจะใช้วิธีจัดหมู่หรือจัดลำดับจึงจะถูกต้อง ก็ขอให้นักศึกษาพิจารณาดูเองว่างานนั้นหากมีการสลับตำแหน่งกันภายในกลุ่มจะมีผลแตกต่างไปจากเดิมหรือไม่ ถ้าสลับตำแหน่งกันแล้วมีผลให้ความหมายของกลุ่มผิดไปจากเดิม การจัดกลุ่มก็ควรใช้วิธี Permutation ถ้าสลับกันแล้วความหมายของกลุ่มไม่ผิดไปจากเดิม การจัดกลุ่มก็ควรใช้วิธี Combination แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นก็ขึ้นอยู่กับเจตนาของการจัดกลุ่มด้วยว่าจัดเพื่ออะไรด้วย (พิจารณาตัวอย่าง 2.5 อีกครั้ง)

วิธีคำนวณให้เริ่มต้นคำนวณด้วยวิธีจัดลำดับก่อน กล่าวคือ คำนวณหาจำนวนกลุ่มทั้งหมดที่พึงเป็นไปได้ หลังจากนั้นก็พิจารณาว่ากลุ่มใดมีลักษณะองค์ประกอบภายในเหมือนกัน ถ้าพบกลุ่มที่มีองค์ประกอบภายในซ้ำกันเราก็หักจำนวนที่เกินความจำเป็นนั้นออก

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.16 พี่น้อง 3 คน คือนายก. นายข. นายค. จำเป็นต้องพบนายอำเภอเพื่อชี้แจงเรื่องภาษีเงินได้ของครอบครัว แต่นายอำเภออนุญาตให้เข้าพบได้เพียง 2 คน อยากทราบว่าชายทั้งสามจะคัดตัวแทน 2 คน เข้าพบนายอำเภอได้กี่วิธี

วิธีทำ

ให้เริ่มคิดจากจัดลำดับก่อนคือ

ชาย 3 คน ต้องเลือกตัวแทนเพียง 2 คน จะสามารถคัดเลือกตัวแทนได้ดังนี้

S = { (กข), (ขก), (กค), (คก), (ขค), (คข) }

จะเห็นว่าสามารถจัดได้ 6 วิธี หรือ $^3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$ วิธี

พิจารณาวิธีจัดทั้ง 6 วิธี จะพบว่า

(กข) และ (ขก) ก็คือวิธีจัดแบบเดียวกัน หมายความว่า นายก. และนายข. เข้าพบนายอำเภอหรือนายข. และนายก. เข้าพบนายอำเภอก็คือคน 2 คนเดิมนั่นเอง คือ นายก. นายข.

ทำนองเดียวกัน (กค) และ (คก) ก็คือวิธีจัดแบบเดียวกันนั่นเอง และ (ขค) กับ (คข) ก็คือ วิธีจัดแบบเดียวกัน

ดังนั้น เมื่อหักวิธีจัดที่ซ้ำ ๆ กันออก จึงเหลือวิธีจัดคนเข้าพบนายอำเภอเพียง 3 วิธีคือ

S = { (กข), (กค), (ขค) }

ขอให้สังเกตุว่าจำนวนวิธีจัดหมู่ = 3 = $\frac{6}{2} = \frac{6}{2!} = \frac{^3P_2}{2!} = \frac{3!}{(3-2)!2!}$

ลองพิจารณาตัวอย่างที่ขยายใหญ่ขึ้น

ตัวอย่าง 2.17 สำนักงานทะเบียนท้องถิ่นมีนักการภารโรงอยู่ 4 คนที่แข็งแรงพอ ๆ กัน คือ นายก. นายข. นายค. และนายง. หัวหน้าเขตต้องการใช้ภารโรง 3 คนช่วยยกตู้เหล็ก (คนที่เหลือให้ทำหน้าที่อย่างอื่น) อยากทราบว่าหัวหน้าเขตจะมีวิธีเลือก (เลือกโดยสุ่ม) กี่วิธี

วิธีทำ

ให้เริ่มคิดจากวิธีจัดลำดับก่อน คือจัดคน 3 คนจาก 4 คน จะพบว่าเราจัดได้

$= \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี คือ

S = { (กขค), (กคข), (กขง), (กงข), (กคง), (ขงค), (ขกค), (ขคก), (ขงก), (ขกง), (คงก), (คกง), (คงข), (คขง), (คกข), (คขก), (งกข), (งขก), (งกค), (งคก), (งขค), (งคข) }

หมายเหตุ (กขค) อ่านว่าหัวหน้าเขตใช้ให้นายก. นายข. และนายค. ยกตู้เหล็ก และนายง. ทำงานอย่างอื่น

(กคข) อ่านว่าหัวหน้าเขตใช้ให้นายก. นายค. และนายข. ยกตู้เหล็ก และนายง. ทำงานอย่างอื่น

(งคข) อ่านว่าหัวหน้าเขตใช้ให้นายง. นายค. และนายข. ยกตู้เหล็กและนายก. ทำงานอย่างอื่น

จากวิธีจัดดังรายละเอียดให้เซท S จะพบว่า

(กขค), (กคข), (ขกค), (ขคก), (คขก) และ (คกข) คือคนชุดเดียวกันคือนายก. นายข. และนายค.
(กขง), (กงข), (ขงก), (ขกง), (งกข) และ (งขก) คือคนชุดเดียวกันคือนายก. นายข. และนายง.
(กคง), (กงค), (คงก), (คกง), (งกค) และ (งคก) คือคนชุดเดียวกันคือนายก. นายค. และนายง.
(ขคง), (ขงค), (คงข), (คขง), (งขค) และ (งคข) คือคนชุดเดียวกันคือนายข. นายค. และนายง.

ดังนั้นเมื่อพิจารณาโดยถี่ถ้วนแล้ว โดยหักวิธีที่ซ้ำ ๆ กันออกจะเห็นว่าหัวหน้าเขตสามารถเลือกนักการภารโรงมาช่วยยกตู้เหล็กได้เพียง 4 วิธีคือ

S = { (กขค), (กขง), (กคง), (ขคง) }

จำนวนวิธี 4 วิธีจะเห็นว่า $4 = \frac{24}{6} = \frac{24}{3!} = \frac{^4P_3}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!}$

จากตัวอย่างทั้งสองเราจึงสามารถสรุปความเป็นมาของวิธีการคำนวณหาจำนวนวิธีจัดหมวดหมู่ออกเป็นหลักเกณฑ์ได้ดังนี้

"ถ้ามีวัตถุ (คน สัตว์ สิ่งของ) อยู่ n ชิ้น ต้องการจัดเลือกมาเป็นหมู่หมู่ละ r ชิ้น โดยที่การสลับลำดับของวัตถุในหมู่มีความหมายไม่ผิดไปจากเดิม แล้วเราจะสามารถจัดหมู่ได้

$\frac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี

ตามตัวอย่าง 2.17 ข้างต้น $n = 4, r = 3$

ขอให้สังเกตว่า $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ กระจายมาจาก $\frac{^nP_r}{r!}$ เราใช้สัญลักษณ์สำหรับการจัดหมู่เป็น $\binom{n}{r}$ อ่านว่า "n Combination r" คือ "วัตถุ n ชิ้นจัดเป็นหมู่ ๆ ละ r ชิ้น" นั่นคือ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

ตัวอย่าง 2.18 ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งประกอบด้วยครัวเรือนต่าง ๆ 120 ครัวเรือน ครูวิชัยต้องการทราบว่าชาวบ้านในหมู่บ้านนี้จะพอใจบริการต่าง ๆ ที่โรงเรียนจัดให้แก่หมู่บ้านหรือไม่และชาวบ้านต้องการบริการอย่างอื่น ๆ จากโรงเรียนหรือไม่ เขาตัดสินใจเลือกตัวอย่างโดยการสุ่มครัวเรือนมา 20% ของครัวเรือนทั้งหมด หรือ 24 ครัวเรือน เพื่อใช้เป็นกลุ่มตัวอย่าง อยากทราบว่าครูวิชัยจะสามารถเลือกกลุ่มตัวอย่างได้กี่วิธี

วิธีทำ

จากโจทย์จะพบว่า $n = 120, \ r = 24$

ดังนั้นครูวิชัยสามารถเลือกตัวอย่างได้ $\binom{120}{24} = \frac{120!}{(120-24)!24!}$ วิธี

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้เป็นเรื่องของการประยุกต์หลักเกณฑ์ของการจัดหมู่ไปในงานสำรวจด้วยตัวอย่าง $\binom{120}{24}$ คือจำนวนกลุ่มตัวอย่างขนาดโต 24 หน่วยทั้งหมดที่พึงเป็นไปได้ all possible sample ซึ่งในเรื่องนี้การสุ่มตัวอย่างเราอาจถือว่า 120 คือขนาดประชากร (Population size) และ 24 คือขนาดตัวอย่าง (Sample size)

แบบฝึกหัด 2.4

1) จงหาค่าของ

a. $\binom{7}{4}$

b. $\binom{5}{1}$

c. $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

2) จงพิสูจน์ว่า $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3) มีลูกบอลอยู่ 12 ลูก สีต่าง ๆ กัน หยิบลูกบอลมา 6 ลูก โดยสุ่ม จงหาจำนวนหนทางที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด

4) หยิบไพ่ 7 ใบมาจากไพ่ทั้งสำรับ จะมีทางเป็นไปได้ทั้งสิ้นเท่าไร

5. มีจุดอยู่ 5 จุดจะสร้างรูปตามเงื่อนไขต่อไปนี้ทั้งสิ้นกี่รูป

5.1 รูปสามเหลี่ยม

5.2 รูปสี่เหลี่ยม

5.3 เส้นตรง

6) ในเขตพญาไทซึ่งมีส.ส.ได้ 2 คน ปรากฏว่ามีพรรคประชาธิปัตย์ส่งเข้าสมัคร 1 คน พรรคแนวร่วมรักชาติ 1 คน พรรคสหประชาไทย 1 คน และพรรคชาวนา 1 คน จะมีวิธีเลือกส.ส.ได้ทั้งสิ้นกี่แบบ

ตาราง 1

1 Factorial Function. Binomial Coefficients.

factorials

$$n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1$$

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5,040
8	40,320
9	362,880
10	3,628,800
11	39,916,800
12	479,001,600
13	6,227,020,800
14	87,178,291,200
15	1,307,674,368,000
16	20,922,789,888,000
17	355,687,428,096,000
18	6,402,373,705,728,000
19	121,645,100,408,832,000
20	2,432,902,008,176,640,000
21	51,090,942,171,709,440,000
22	1,124,000,727,777,607,680,000
23	25,852,016,738,884,976,640,000
24	620,448,401,733,239,439,360,000
25	15,511,210,043,330,985,984,000,000
26	403,291,461,126,605,635,584,000,000
27	10,888,869,450,418,352,160,768,000,000
28	304,888,344,611,713,860,501,504,000,000
29	8,841,761,993,739,701,954,543,616,000,000
30	265,252,859,812,191,058,636,308,480,000,000

Coefficients of the Binomial Distribution

Example If $n = 8$ and $x = 6$, $\binom{8}{6} = 28$.

This table gives the value of $\binom{n}{x}$ in $\binom{n}{x}q^{n-x}p^x$, the general term of $(q + p)^n$

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

2.4 เหตุการณ์ (Event)

เหตุการณ์คือส่วนหนึ่งของจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด ส่วนหนึ่งที่กล่าวถึงนี้อาจมีจำนวนมากน้อยเท่าไรก็ได้ (แต่ต้องไม่เกินจำนวนที่มีอยู่ทั้งหมด) ขึ้นอยู่กับความสนใจหรือข้อจำกัด ซึ่งเรากำหนดเองตามความสนใจหรือตามความจำเป็น

ตามตัวอย่างที่กล่าวมาทั้งหมดตั้งแต่ต้น (ตอน 2.3) นักศึกษาได้เรียนรู้ถึงวิธีคำนวณหาจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้และแจกแจงผลลัพธ์เหล่านั้นออกมาในรูปเซท และจากตัวอย่างเหล่านั้นถ้านักศึกษาจำกัดความสนใจเฉพาะเจาะจงลงไป เช่น ต้องการหาจำนวนหนทางที่จะต้องนั่งรถเมล์ไปกลับกรุงเทพฯ-นนทบุรี ด้วยรถเมล์สายเดิม จำนวนหนทางที่จะได้หัว (H) ทั้งสองครั้งในการทดลองทอดเหรียญ 2 ครั้ง จำนวนหนทางที่จะได้ก้อย 2 ครั้งหัว 1 ครั้งในการทอดเหรียญ 3 ครั้ง เรื่อยมาจนถึงจำนวนวิธีเลือกนักการภารโรงที่จะต้องมีนายก.อยู่ด้วยเสมอ เหล่านี้คือเหตุการณ์ ข้อจำกัดที่กำหนดขึ้นโดยผู้ใช้งาน ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นเช่นนี้เสมอไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสนใจเป็นสำคัญดังตัวอย่างที่ 2.17 จะเห็นว่า

S = { (กขค), (กขง), (กคง), (ขคง) }

คือเซทที่แสดงการแจกแจงจำนวนหนทางการเลือกนักการภารโรงมายกตู้เหล็ก 3 คน จากที่มีอยู่ทั้งสิ้น 4 คน ถ้าท่านมีความสนใจ (หรือมีข้อจำกัด) จะเลือกนักการภารโรงมา 3 คนจากที่มีอยู่ 4 คน โดยที่คนทั้งสามนี้จะต้องมีนายง. อยู่ด้วยเสมอ เหตุการณ์นี้ก็คือ

S = { (กขง), (กคง), (ขคง) }

ถ้ามีความสนใจจะเลือกนักการภารโรงมา 3 คน จากที่มีอยู่ 4 คน โดยคนทั้งสามจะต้องเป็นนายก. นายข. และนายง. เหตุการณ์นี้ก็คือ

S = { (กขง) }

ดังนี้เป็นต้น

ขอให้สังเกตุว่า เรานิยมเสนอเหตุการณ์เป็นรูปเซท เพราะแสดงรวดเร็วและง่ายแก่การเข้าใจ จำนวนสมาชิกในเซททั้งหมดจะแสดงจำนวนหนทางที่จะพึงเป็นไปได้สำหรับเหตุการณ์ที่มีข้อจำกัดนั้น ๆ เป็นอย่าง ๆ ไป เรานิยมใช้อักษร A ถึง Z แทนชื่อของเหตุการณ์ แต่ถ้านักศึกษายังไม่คุ้นเคยกับเรื่องเซท นักศึกษาก็สามารถใช้คำพูดแทนกันได้แต่จะต้องเสียเวลามากกว่าเช่น A = { (กขค), (กขง) } นักศึกษาสามารถใช้คำพูดแทนกันได้ดังนี้ "เหตุการณ์ที่จะเลือกนักการภารโรงมา 3 คน จากที่มีอยู่ทั้งสิ้น 4 คน โดยคนในกลุ่มคนทั้ง 3 คนนี้จะต้องเป็นนายก. และนายข. ส่วนอีกคนหนึ่งจะเป็นใครก็ได้นั้น เราสามารถเลือกนักการได้ 2 วิธีคือ วิธีที่ 1 ได้นายก. นายข. และนายค. กับอีกวิธีหนึ่งได้นายก. นายข. และนายง."

อนึ่งขอให้สังเกตไว้ด้วยว่าขณะนี้เรากำลังเดินเข้ามาถึงเขตแดนของการหาค่าความน่า

จะเป็นแล้ว ตามตัวอย่างที่ยกมา ถ้านักศึกษาต้องการหาค่าความน่าจะเป็นที่กลุ่มนักการภารโรงทั้ง 3 จะต้องเป็นนายก. และนายข. และคนอื่นอีก 1 คน ก็ทำได้โดยง่ายเพียงแต่นับจำนวนหนทางที่จะเกิดเหตุการณ์ A กับจำนวนหนทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการเลือกคนมา 3 คนจากที่มีอยู่ 4 คน แล้วนำมาหารกันตามหลักเดิมคือ $\frac{f}{n}$ เมื่อ f = จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจ และ n = จำนวนหนทาง (สมาชิก) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดหรือจำนวนสมาชิกในเซทของ S

ดังนั้น

ความน่าจะเป็นที่กลุ่มนักการภารโรงจะเป็นนายก. นายข. และคนอื่นอีก 1 คน

$$= \Pr(A) = \frac{2}{4} = .5$$

ความน่าจะเป็นที่กลุ่มนักการภารโรง 3 คนนี้จะต้องมีนายง. อยู่ด้วยเสมอ

$$= \Pr(B) = \frac{3}{4} = .75$$

ความน่าจะเป็นที่กลุ่มนักการภารโรง 3 คนนี้จะเป็นทั้งนายก. นายข. และนายค.

$$= \Pr(C) = \frac{1}{4} = .25$$

ดังนี้เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม ในเรื่องของเหตุการณ์ซึ่งเป็นเรื่องของเซทนั้นก็ยังมีความซับซ้อนอยู่หลายประการ ควรที่นักศึกษาจะได้ทำความรู้จักให้กระจ่างชัดเสียก่อน ก่อนที่จะก้าวเข้าไปศึกษาถึงเรื่องความน่าจะเป็นในทันทีทันใด

หมายเหตุ เหตุการณ์มี 2 ชนิดตามลักษณะโครงสร้างภายในคือเหตุการณ์อย่างง่าย (Simple event) คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงตัวเดียว เช่น C = { (กขค) } และเหตุการณ์เชิงซ้อน (Compound event) ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกมากกว่า 1 ตัวเช่น

A = { (กขค), (กขง) } และ B = { (กขง), (กคง), (ขคง) }

หรือในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง หน้าลูกเต๋า ที่อาจหงายขึ้นมาคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ดังนั้น S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ถ้าให้ A = เหตุการณ์ ลูกเต๋าจะหงายเอี่ยว จะเห็นว่า A = { 1 } อย่างนี้ถือเป็นเหตุการณ์อย่างง่าย แต่ถ้าให้ B = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าตั้งแต่ 4 จุดขึ้นไป จะเห็นว่า B = { 4, 5, 6 } อย่างนี้เป็นเหตุการณ์เชิงซ้อน

2.4.1 พีชคณิตของเหตุการณ์ (Algebra of Event)

ดังที่กล่าวในข้างต้น เหตุการณ์ก็คือส่วนหนึ่งของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (เซท S) ดังนั้นเหตุการณ์ก็คือเซทแต่เป็นเซทของ S (อนุเซทของ S ก็คือส่วนหนึ่งของ S หรือเซท S ทั้ง

เซท) ดังนั้นพีชคณิตของเหตุการณ์ก็คือพีชคณิตของเซทนั่นเอง (Algebra of Set) ดังนั้นสิ่งที่ควรศึกษาในที่นี้ก็คือ การรวมเหตุการณ์ (Union หรือ Union of Event) การหาเหตุการณ์ร่วม (Intersection หรือ Intersection of Event) และการหาเหตุการณ์ที่เป็นส่วนเติมเต็ม (Complement หรือ Complement of Event)

ก. การรวมเหตุการณ์ (Union of Event)

การรวมเหตุการณ์ก็คือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจากเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้อง โดยนับรวมทั้งสมาชิกที่ต่างกันและสมาชิกที่ซ้ำกัน เฉพาะสมาชิกที่ซ้ำกันซึ่งเป็นสมาชิกของทุกเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องให้นำมาเป็นสมาชิกของเซทใหม่เพียงตัวเดียว

เราใส่สัญญลักษณ์ U แทนคำว่ารวมเหตุการณ์ (Union) ดังนั้น เราสามารถสรุปลักษณะของ Union ได้ดังนี้

"ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ $A \cup B$ คือเหตุการณ์ใหม่ที่เกิดขึ้นจากการรวมสมาชิกของทั้งเหตุการณ์ A และ B โดยสมาชิกใดที่ซ้ำกันจะนับรวมเพียงตัวเดียว ดังนั้นเหตุการณ์ $A \cup B$ จึงเป็นเหตุการณ์ที่สมาชิกของ $A \cup B$ อาจเป็นสมาชิกของ A หรือ B หรือทั้งของ A และ B"

ตัวอย่าง 2.19 ในการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ซึ่งปรากฏผลลัพธ์การทดลองเป็น $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ถ้า A, B, C, D เป็นเหตุการณ์ต่อไปนี้

A = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าคู่

B = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าไม่เกิน 3 จุด

C = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าคี่

D = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเอี่ยว

ดังนั้น

(1) $A \cup B$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเลขคู่หรือหงายหน้าไม่เกิน 3 จุด

$= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

จะเห็นได้ว่าสมาชิกของเหตุการณ์ $A \cup B$ คือเหตุการณ์ที่สมาชิกของเหตุการณ์เป็นเลขคู่หรือไม่ก็เป็นเลขไม่เกิน 3 ขอให้สังเกตุว่า 2 เป็นสมาชิกของ A และ B เรานำมารวมกันไว้ในเหตุการณ์ $A \cup B$ เพียงตัวเดียว ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าเลขคู่หรือไม่ก็หน้าไม่เกิน 3 จุด = $Pr(A \cup B)$

$$\frac{\text{จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ } A \cup B}{\text{จำนวนสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดในเซท}} = \frac{5}{6}$$

$A \cup C$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าคู่หรือไม่ก็หงายหน้าคี่

$= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

จะเห็นได้ว่าเหตุการณ์ $A \cup C$ คือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่หงายขึ้นหน้าเลขคู่ก็หงายขึ้นหน้าเลขคี่ จะสังเกตุว่าเหตุการณ์ $A \cup C = S$ ดังนั้นในการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะไม่หงายหน้าเลขคู่ก็หงายเลขคี่ $= \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cup C}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \dfrac{6}{6} = 1$

(3) $A \cup D$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่หงายหน้าเลขคู่ก็หงายหน้าเอี่ยว (อ่านว่า $A \cup D$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเลขคู่หรือหน้าเอี่ยว คำว่า "หรือ" หมายถึงอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง)

ดังนั้น $A \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{1\}$

$= \{1, 2, 4, 6\}$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าอาจหงายหน้าเอี่ยวหรือหน้าเลขคู่ $= \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

(4) $B \cup C$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าไม่เกิน 3 จุดหรือไม่ก็หงายหน้าคี่

$= \{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 5\}$

ขอให้สังเกตุว่า 1 และ 3 ปรากฏอยู่ทั้งในเหตุการณ์ B และเหตุการณ์ C เราจะนำมารวมในเหตุการณ์ $B \cup C$ เพียงตัวเดียว

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าไม่เกิน 3 จุดหรือไม่ก็หงายหน้าเลขคี่จากการทอดลูกเต๋าเพียง 1 ครั้ง $= \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

(5) $B \cup D$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าไม่เกิน 3 จุดหรือไม่ก็หงายหน้าเอี่ยว

$= \{1, 2, 3\} \cup \{1\}$

$= \{1, 2, 3\}$

ดังนั้น ในการทอดลูกเต๋าเพียง 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าอาจหงายหน้าไม่เกิน 3 จุด หรือหน้าเอี่ยว $= \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ } B \cup D}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(6) $C \cup D$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเลขคี่หรือไม่ก็หงายหน้าเอี่ยว

$= \{1, 3, 5\} \cup \{1\}$

$= \{1, 3, 5\}$

ดังนั้นในการทอดลูกเต๋าเพียง 2 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าอาจหงายหน้าเลขคี่หรือ

$$\text{ไม่ก็หงายหน้าเลขเอี่ยว} = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ } C \cup D}{\text{จำนวนสมาชิกในเซทของ } S} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ข. เหตุการณ์ร่วม (Intersection)

เหตุการณ์ร่วมก็คือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นใหม่จากเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องโดยนับเฉพาะสมาชิกที่เป็นเฉพาะร่วมกันของทุกเหตุการณ์เกี่ยวข้อง เราใช้สัญลักษณ์ $\cap$ แทนคำว่า Intersection ดังนั้นเราจึงสามารถสรุปลักษณะของ Intersection ได้ดังนี้

"ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ $A \cap B$ คือเหตุการณ์ใหม่ที่สมาชิกของ $A \cap B$ เป็นสมาชิกของทั้งเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B ร่วมกัน ถ้าเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องเหล่านั้นมิได้มีสมาชิกรวมกันเรียกเหตุการณ์เหล่านั้นว่าเหตุการณ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกัน (Mutually exclusive)

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.20 จากตัวอย่าง 2.19 จงหาเหตุการณ์ $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$

วิธีทำ

(1) $A \cap B$ = เหตุการณ์ที่สมาชิกของ $A \cap B$ เป็นทั้งสมาชิกของ A และสามาชิกของ B หรือเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเลขคู่และ (แต่) มีค่าไม่เกิน 3 จุด

$$= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3\}$$

$$= \{2\}$$

ขอให้สังเกตุว่าสมาชิก $A \cap B$ คือ 2 เป็นทั้งสมาชิกของ A และ B ดังนั้นในการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่เป็นเลขคู่แต่ไม่เกิน 3 จุด

$$= \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A \cap B}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{1}{6}$$

(2) $A \cap C$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าเลขคู่ที่เป็นเลขคี่ หรือหงายหน้าเป็นทั้งเลขคู่และเลขคี่

$$= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \{\}$$

กรณีนี้จะเห็นว่า A และ C ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลยเพราะลูกเต๋าหงาย 1 ครั้ง จะออกทั้งหน้าเลขคู่และหน้าเลขที่พร้อมกันไม่ได้ ดังนั้น $A \cap C = \{\ \}$ เรียกว่า empty set คือไม่มีสมาชิก หรือเหตุการณ์ที่ไม่ปรากฏหรือเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นเมื่อทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่หน้าที่หงายจะเป็นทั้งเลขคู่และเลขที่ $= \frac{0}{6} = 0$

(4) $B \cap C$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าไม่เกินจุดและเป็นเลขคี่

$= \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$

ขอให้สังเกตุว่า ถ้าสมาชิกของ B และ C ซ้ำกันเราจะนำมารวมเป็นสมาชิกของ $B \cap C$ เพียงตัวเดียว และจะเห็นว่า 1 และ 3 เป็นสมาชิกร่วมของทั้ง B และ C

ดังนั้นในการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่เป็นเลขคี่แต่

ไม่เกิน 3 จุด $= \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกของ } B \cap C}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(5) $B \cap D$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าไม่เกิน 3 จุดและเป็นหน้าเอี่ยว (หน้าเลข 1 จุด)

$= \{1, 2, 3\} \cap \{1\} = \{1\}$

ดังนั้นในการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าไม่เกิน 3 จุด และ

เป็นเอี่ยวด้วย $= \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกของ } B \cap D}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \dfrac{1}{6}$

(6) $C \cap D$ = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเลขคี่และเป็นหน้าเอี่ยว

$= \{1, 3, 5\} \cap \{1\} = \{1\}$

ดังนั้นในการทอดลูกเต๋า 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าเป็นเลขคี่และเป็นหน้าเอี่ยวด้วย

P (เป็นหน้าเลขคี่ที่เป็นเอี่ยว) $= \dfrac{1}{6}$

ค. **เหตุการณ์ที่เป็นส่วนเติมเต็ม** (Complementary หรือ Complement Event)

เหตุการณ์ที่เป็นส่วนเติมเต็มคือเหตุการณ์ที่มิใช่เหตุการณ์ที่ระบุ เช่นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A คือเหตุการณ์ที่มิใช่เหตุการณ์ A โดยนับเฉพาะสมาชิกที่เหลืออยู่ใน S หลังจากหักสมาชิกที่สอดคล้องกับเหตุการณ์ A ออกแล้ว เช่น $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $A = \{1, 3, 5\}$ ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A คือเหตุการณ์ $B = \{2, 4, 6\}$ ขอให้สังเกตว่า 2, 4 และ 6 คือสมาชิกของ S หลังจากหัก 1, 3, 5 ซึ่งสมาชิกของ A ออกแล้ว หรือ ตัวอย่างเช่นให้ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ และ $C = \{TT\}$ ดังนั้นส่วนเติมเต็มของ C คือ $D = \{HH, HT, TH\}$ โดยปกติเราใช้เครื่องหมาย " – " หรืออักษร "C" เขียนไว้ข้างบนอักษรชื่อของเหตุการณ์ที่กำหนด ไม่นิยมให้ชื่อเป็นอักษรใหม่ เช่น ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A คือ $\bar{A}$ หรือ $A^c = \{2, 4, 6\}$ และส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ C คือ $\bar{C}$ หรือ $C^c = \{HH, HT, TH\}$

ตัวอย่าง 2.21 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกกวาด 3 ลูกสีแดง สีขาว และ สีเขียว จงหาส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A และ B เมื่อ

A = เหตุการณ์ที่หยิบลูกกวาดมา 1 ลูกได้สีแดง

B = เหตุการณ์ที่หยิบลูกกวาดมา 2 ลูกได้สีแดงและสีเขียว

วิธีทำ

S = { แดง, เขียว, ขาว }

(1) A = เหตุการณ์ที่หยิบลูกกวาดมา 1 ลูกได้สีแดง = { แดง }

ดังนั้น $\bar{A}$ = { ขาว, เขียว }

(2) B = เหตุการณ์ที่หยิบลูกกวาดมา 2 ลูกได้ลูกสีแดงและสีเขียว

= { แดง, เขียว }

ดังนั้น $\bar{B}$ = { ขาว }

ขอให้สังเกตว่า $A \cup \bar{A} = S$, $A \cap \bar{A} = \{\ \}$ และ $B \cup B = S$, $B \cap B = \{\ \}$

ตัวอย่าง 2.22 เป็นที่น่าสังเกตว่าโดยทั่วไปแล้วนักธุรกิจจะตายด้วยโรคหัวใจ โรคกระเพาะอาหาร และโรคมะเร็ง ถ้าให้ A คือเหตุการณ์ที่นักธุรกิจตายด้วยโรคกระเพาะอาหาร จงหาส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์

วิธีทำ

S = { โรคหัวใจ, โรคกระเพาะอาหาร, โรคมะเร็ง }

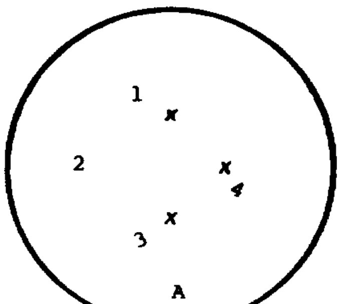
A = { โรคกระเพาะอาหาร }

ดังนั้น $\bar{A}$ = { โรคหัวใจ, โรคมะเร็ง }

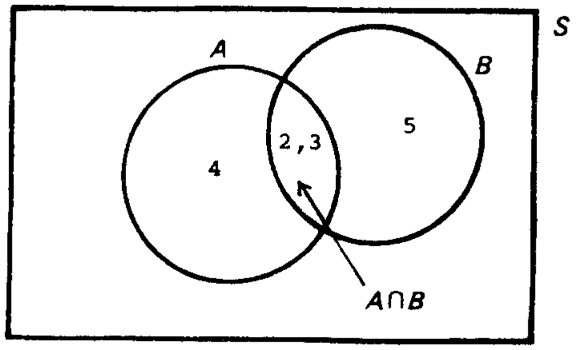
24.2 เวนน์ไดอะแกรม (Venn Diagram)

เราสามารถเขียนรูปของเซทของเหตุการณ์ที่ศึกษาในรูปของ Venn Diagram ดังต่อไปนี้

1. A = { 1, 2, 3, 4 } เราสามารถเขียนแทนเซท A ได้ดังนี้



2.

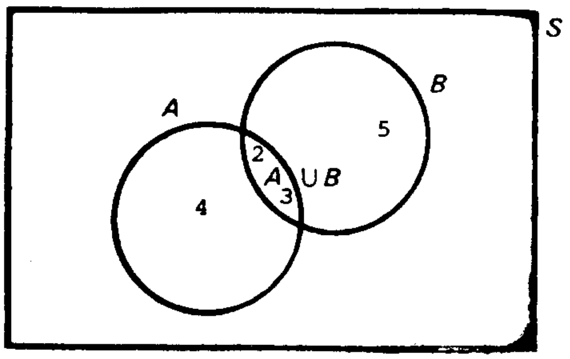


$A = \{2,3,4\}$

$B = \{2,3,5\}$

$A \cap B = \{2,3\}$

3.

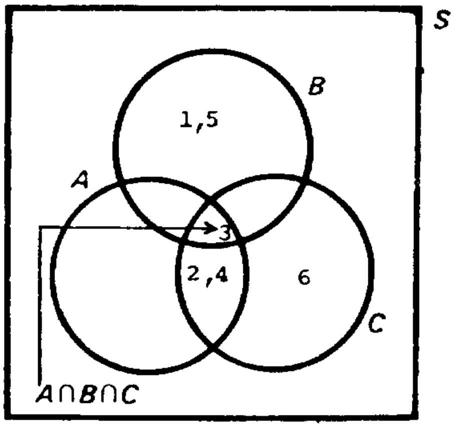


$A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

4.



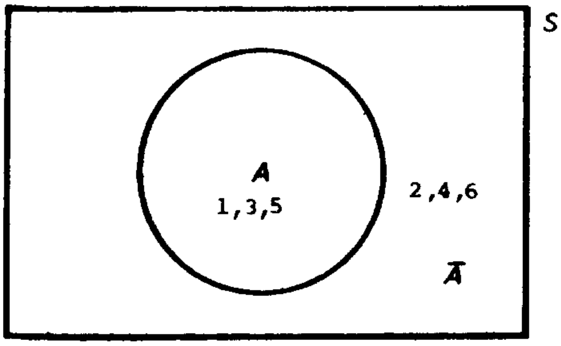
A = { 2, 3, 4 }

B = { 1, 3, 5 }

C = { 2, 3, 4, 6 }

A∩B∩C = { 3 }

5.

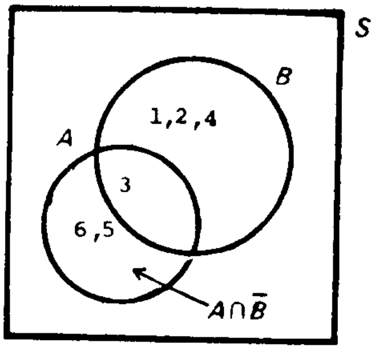


S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

A = { 1, 3, 5 }

$\bar{A}$ = {2, 4, 6}

6.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

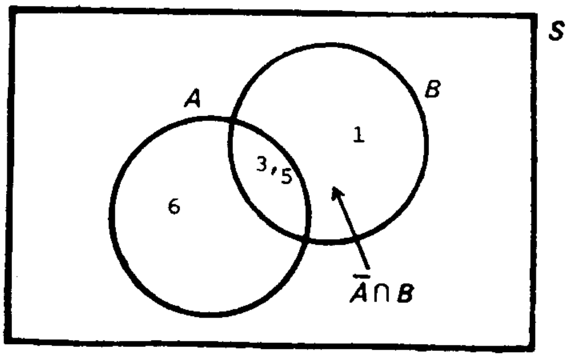
$A = \{3, 5, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{5, 6\}$

$A \cap B = \{5, 6\}$

7.



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{3, 5, 6\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$\bar{A} = \{1, 2, 4\}$

$\bar{A} \cap B = \{1\}$

แบบฝึกหัดที่ 2.5

1. ถนนสายหนึ่งฝั่งซ้ายให้จอดรถเฉพาะวันคี่ ฝั่งขวาให้จอดเฉพาะวันคู่ ถ้าเราศึกษาในเดือนมกราคม

   ให้ A_1 = เหตุการณ์ที่จอดรถฝั่งซ้าย

   A_2 = เหตุการณ์ที่จอดรถฝั่งขวา

   A_3 = เหตุการณ์ที่จอดรถทั้งสองฝั่ง

   A_4 = เหตุการณ์ที่จอดรถไม่ได้ทั้งสองฝั่ง

   จงเขียนเซทของ A_i ; $i = 1,2,3,4$

2. ผู้นำชุมชนแห่งหนึ่งประกอบด้วยนายก. นายข. นายค. และนายง. ต่อมามีการพัฒนาท้องถิ่นแห่งนั้นมีผู้เสนอให้ใช้แผน "001" ในการพัฒนาท้องถิ่น แต่ปรากฏว่า ตกลงกันไม่ได้ว่าจะมีการรับแผนนี้หรือปฏิเสธแผนนี้ จึงได้มีการตกลงว่าจะเลือกผู้นำมา 4 คน เพื่อตัดสินเรื่องนี้ เป็นที่ทราบกันดีว่านาย ก. และนาย ข. ต้องรับแผนนี้แน่ ส่วนนาย ค. และนาย ง. จะต้องปฏิเสธแผนนี้

   ก. จงเขียนผลการเลือกผู้ตัดสินทั้งหมดที่เป็นไปได้

   ข. จงเขียนเหตุการณ์ที่แผนนี้จะถูกรับ

   ค. จงเขียนเหตุการณ์ที่แผนนี้จะถูกปฏิเสธ

   ง. จงเขียนเหตุการณ์ที่จะหาข้อยุติไม่ได้

   จ. จงเขียนเหตุการณ์ที่จะหาข้อยุติได้

3. เมื่อเราไปเที่ยวเขาดิน เราอาจจะพบกับเหตุการณ์ต่อไปนี้

   A = เหตุการณ์ที่ได้เห็นช้าง

   B = เหตุการณ์ที่ได้เห็นลิง

   C = เหตุการณ์ที่ได้เห็นนก

จงอธิบายความหมายของเหตุการณ์ต่อไปนี้

   3.1 $\bar{A}$

   3.2 $A \cap B \cap C$

   3.3 $A \cup B$

4. มีอักษรอยู่ 4 ตัวคือ BELT เราจะสามารถสร้างเป็นคำใหม่ได้ทั้งหมดกี่คำ โดยที่

   A = คือเหตุการณ์ที่คำนั้นลงท้ายด้วย T

B = คือเหตุการณ์ที่คำนั้นลงท้ายด้วย E

จงเขียนเซทของ A และ B ที่เกิดขึ้น

5. เลขทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วยตัวเลข 4 ตัว กำหนดให้

A เหตุการณ์ที่เลขทะเบียนรถลงท้ายด้วย 0

B เหตุการณ์ที่เลขทะเบียนเป็นเลขซ้ำกันทั้ง 4 ตัว

5.1 จงเขียนเซทของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B

5.2 จงเขียนเซทของเหตุการณ์ $A \cap B$, $A \cup B$

5.3 จงเขียนเซทของเหตุการณ์ $A \cap B$ และเหตุการณ์ $A \cap B$ คือเหตุการณ์อะไร

5.4 เหตุการณ์ $A \cup B$ คืออะไร

6. นายก.และนายข. เล่นหมากรุกแข่งกัน 5 กระดาน ปรากฏว่านายก. เล่นชนะนายข. จงเขียนเหตุการณ์ดังกล่าวในรูปของเซท

7. มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งกำลังสรรหาอธิการบดี บุคคลที่เข้าข่ายก็คือ คณบดีคณะต่าง ๆ บุคคลภายนอกที่กรรมการสรรหามา,ข้าราชการตุลาการ, ข้าราชการทหาร ถ้า A คือเหตุการณ์ที่อธิการบดีมาจากตำแหน่งคณบดีแล้ว $\bar{A}$ คือเหตุการณ์อะไร

2.5 การหาค่าความน่าจะเป็น

ในตอนที่ 2.3 และ 2.4 นักศึกษาคงพอเข้าใจวิธีการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นได้แล้ว หลักการโดยสรุปก็คือ ในชั้นต้นคำนวณหาจำนวนผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดเสียก่อน อาจคำนวณโดยอาศัยกฎการคูณหรือ Tree diagram การจัดเรียงลำดับ (Permutation) หรือการจัดหมู่ (Combination) ซึ่งจะใช้เป็นตัวหาร (n) และต่อมาคำนวณหาตัวตั้ง (f) โดยคำนวณหรือนับจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจ ผลหาร $\frac{f}{n}$ ที่ได้คือค่าของความน่าจะเป็น ค่าความน่าจะเป็นจะมีค่าเป็นไปได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 หรือ 0% ถึง 100% โดยที่ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ใดมีค่าเป็นศูนย์หมายความว่าเหตุการณ์นั้นไม่มีโอกาสเกิดขึ้นหรือเป็นไปไม่ได้ เช่น ความน่าจะเป็นที่มนุษย์เกิดมาแล้วไม่ตาย ความน่าจะเป็นที่ทีมฟุตบอลไทยได้เป็นแชมเปี้ยนโลก ฯลฯ ส่วนความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ใดมีค่าเท่ากับ 1 ก็หมายความว่าเหตุการณ์เช่นนั้นจะต้องเกิดขึ้นแน่นอน เช่นเหตุการณ์ที่มนุษย์เกิดมาแล้วจะต้องตาย เหตุการณ์ที่คนในกรุงเทพฯ จะถูกยุงกัด ฯลฯ ดังนี้เป็นต้น ดังนั้น เมื่อค่าความน่าจะเป็นมีค่าเป็นไปได้ระหว่าง 0 ถึง 1 ค่าความน่าจะเป็นใดใกล้มาทาง 0 เราก็ถือว่าโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์นั้นมีอยู่ค่อนข้างต่ำ ถ้าค่า

ความน่าจะเป็นวิ่งใกล้ 1 เราก็ตีความน่าจะเกิดเหตุการณ์นั้นอยู่ในเกณฑ์สูงหรือเป็นไปได้มาก และเราสามารถเสนอค่าความน่าจะเป็นด้วยเศษส่วน (ที่ไม่เกิน 1) หรือทศนิยม หรือร้อยละ (%) ก็ได้

ขอให้พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.23 ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกันจงคำนวณหา

ก. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าเดียวกันทั้งสองลูก

ข. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าต่างกัน

ค. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่รวมแต้มแล้วมีค่าตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไป

ง. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่รวมแต้มแล้วมีค่าตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไป และเป็นหน้าเดียวกัน

จ. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่รวมแต้มแล้วมีค่าตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไปหรือไม่ก็เป็นหน้าเดียวกัน

วิธีทำ

เราสามารถแจกแจงผลการทดลองได้เป็น 36 outcome ดังนี้ (ลูกที่ 1 อาจหงายได้ 6 หน้า และลูกที่ 2 อาจหงายได้ 6 หน้า โดยอาศัยกฎการคูณ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $6 \times 6 = 36$ outcome)

	หน้าลูกเต๋าลูกที่๑					
หน้าลูกเต๋าลูกที่๒	๑	๒	๓	๔	๕	๖
๑	๑ ๑	๒ ๑	๓ ๑	๔ ๑	๕ ๑	๖ ๑
๒	๑ ๒	๒ ๒	๓ ๑	๔ ๒	๕ ๒	๖ ๒
๓	๑ ๓	๒ ๓	๓ ๓	๔ ๓	๕ ๓	๖ ๓
๔	๑ ๔	๒ ๔	๓ ๔	๔ ๔	๕ ๔	๖ ๔
๕	๑ ๕	๒ ๕	๓ ๖	๔ ๕	๕ ๕	๖ ๕
๖	๑ ๖	๒ ๖	๓ ๖	๔ ๖	๕ ๖	๖ ๖

หมายเหตุ (1 1) หมายความว่าลูกที่ 1 หงายเอี่ยว ลูกที่ 2 หงายเอี่ยว (1 2) หมายความว่าลูกที่ 1 หงายเอี่ยว ลูกที่ 2 หงาย 2 (2 1) หมายความว่าลูกที่ 1 หงาย 2 ลูกที่ 2 หงายเอี่ยว

ก. ให้ A = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองจะหงายหน้าเดี่ยวกัน ผลการทดลองปรากฏในแนวทะแยงมุม

ดังนั้น A = { (1 1), (2 2), (3 3), (4 4), (5 5), (6 6) }

∴ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าเดียวกัน $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ข. ให้ A = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าต่างกัน (คนละหน้า)

จากตารางจะเห็นผลการทดลองที่ลูกเต๋าหงายหน้าต่างกันปรากฏนอกแนวทะแยง ซึ่งก็คือส่วนเติมเต็มของ A ซึ่งเมื่อนับผลลัพธ์ของ $\bar{A}$ ปรากฏว่ามีอยู่ทั้งสิ้น 30 outcome

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าต่างกัน $= \frac{30}{36}$

ขอให้สังเกตว่า $\frac{30}{36} = 1 - \frac{6}{36} = 1 - Pr(A)$

นั่นคือ $Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A)$ ในทำนองเดียวกัน $Pr(A) = 1 - Pr(\bar{A})$

ค. ให้ B = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่แต้มรวมตั้งแต่ 10 ขึ้นไป

ขอให้สังเกตว่า เหตุการณ์ B คือ B = { (4 6), (6 4), (5 6), (6 5), (5 5), (6 6) }

หรือดูได้จากตารางที่มีเส้นประกันไว้

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าให้แต้มรวมตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไป = Pr (B) $= \frac{6}{36}$

ง. ให้ C = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่แต้มรวมมีค่าตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไปและเป็นหน้าเดียวกัน

∵ B = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่แต้มรวมมีค่าตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไป

A = เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเดียวกัน

ดังนั้น

$$C = B \cap A = \{(4,6), (6,4), (5,6), (6,5), (5,5), (6,6)\} \cap \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$= \{(5,5), (6,6)\}$$

หรือดูจากตารางได้จากส่วนที่เซท 2 เซท ตัดกัน ตัวประกอบร่วมคือ (5,5) และ (6,6)

∴ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่แต้มรวมกันมีค่าตั้งแต่ 10 แต้มขึ้นไปและเป็นหน้าเดียวกัน $= Pr(B \cap A) = \frac{2}{36}$

จ. ให้ D = ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงานหน้าที่รวมแต้มแล้วมีค่าตั้งแต่ 10 จุดขึ้นไป หรือไม่ก็เป็นหน้าเดียวกัน

ดังนั้น $D = B \cup A$ และ $Pr(B \cup A) = \frac{10}{36}$

ขอให้สังเกตว่าสมาชิก (5,5) และ (6,6) ปรากฏซ้ำทั้งในเหตุการณ์ B และเหตุการณ์ A ดังนั้นเราจึงนำสมาชิก (5,5) และ (6,6) ใส่ไว้ในเหตุการณ์ $B \cup A$ เพียงครั้งเดียว ซึ่ง (5,5) และ (6,6) อยู่ในเหตุการณ์ $B \cap A = \{(5,5), (6,6)\}$

ดังนั้น $Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{10}{36} = Pr(A \cup B)$

ดังนั้น ณ จุดนี้เราสามารถสรุปได้ว่า $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$

ตัวอย่าง 2.24 นายก. นายข. และนายค. ไปชมภาพยนต์ด้วยกัน แต่นายก. ชอบพากษ์และเล่าเรื่องเกี่ยวกับภาพยนตร์เรื่องนั้นไปด้วยตลอดเวลาเพราะเคยชมมาก่อนแล้ว ซึ่งทำให้นายข. รู้สึกรำคาญชมภาพยนตร์ไม่สนุกแต่ก็ไม่อยากว่าให้เพื่อนเสียน้ำใจถ้าการจัดที่นั่งชมภาพยนตร์เป็นไปโดยสุ่ม โดยที่นายข. ไม่อาจจะเลือกที่นั่งได้ตามใจชอบ จงหาความน่าจะเป็นที่นายข. จะไม่นั่งติดกับนายก.

วิธีทำ

จากโจทย์จะเห็นว่าลำดับที่ของที่นั่งมีความหมาย ดังนั้นคนทั้งสามจึงสลับที่นั่งกันได้ ${}^3P_3 = 6$ วิธี คือ S = { กขค, กคข, ขคก, ขกค, คกข, คขก }

จะเห็นว่าเหตุการณ์ที่นายข. นั่งไม่ติดกับนายก. คือ

A = { กคข, ขคก } รวม 2 วิธี

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่นายข. จะไม่นั่งติดกับนายก. $= Pr(A) = \frac{2}{6} = .3333 = 33.33\%$

หมายเหตุ การคำนวณหาจำนวนวิธีที่นายข. จะไม่นั่งติดกับนายก. เราสามารถคำนวณจากสูตรได้ในตอน 2.3 ได้ โดยเริ่มคำนวณจากวิธีที่นายข. นั่งไม่ติดกับนายก. ก่อน แล้วค่อยหักออกจาก 6 ผลต่าง (ซึ่งก็คือส่วนเติมเต็มของการนั่งติดกัน) ที่ได้คือจำนวนวิธีที่นายข. นั่งไม่ติดกับนายก. ดังนี้

นายก. สามารถนั่งติดกับนายข. ได้ $= (3-1)! \times 2! = 4$ วิธี $(3-1)!$ คือจำนวนวิธีที่นายก. กับนายข. นั่งติดกันเสมอ (ขอให้นึกว่าตอนนี้เราจับนายก. กับนายข. มัดติดกัน) ซึ่งก็คือ (ก,ข,ค), (ค,ก,ข) แต่นายก. กับนายข. นั่งสลับกันได้ 2! วิธี ดังนั้นผลการนั่งที่นายก. ต้องนั่งติดกับนายข. เสมอคือ (ก,ข,ค), (ข,ก,ค), (ค,ก,ข) และ (ค,ข,ก) รวม $(3-1)! \times 2! = 4$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่นายข. ไม่นั่งติดกับนายก. $= 6 - 4 = 2$ วิธี

ตัวอย่าง 2.25 เป็นที่น่าสังเกตว่า 80% ของชาวอเมริกันชอบไปเที่ยวปารีส 70% ชอบไปเที่ยวเบอร์ลิน และ 60% ชอบไปเที่ยวปารีสและเบอร์ลิน

ก. จงหาร้อยละของชาวอเมริกันที่ชอบไปเที่ยวปารีสหรือไม่ก็เบอร์ลินหรือทั้งสองเมือง

ข. จงหาร้อยละของชาวอเมริกันที่ไม่ชอบเที่ยวทั้งเบอร์ลินและปารีส

วิธีทำ

ให้ A = เหตุการณ์ที่ชาวอเมริกันชอบไปเที่ยวปารีส

B = เหตุการณ์ที่ชาวอเมริกันชอบไปเที่ยวเบอร์ลิน

$A \cup B$ = เหตุการณ์ที่ชาวอเมริกันชอบไปเที่ยวปารีสหรือไม่ก็เบอร์ลินหรือทั้งสองเมือง

$\bar{A} \cup \bar{B}$ = เหตุการณ์ที่ชาวอเมริกันไม่ชอบไปเที่ยวทั้งเบอร์ลินหรือปารีสหรือทั้งสองเมือง

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ชาวอเมริกันชอบไปเที่ยวทั้งเบอร์ลินและปารีส

ดังนั้น $Pr(A) = .80$, $Pr(B) = .70$, $Pr(A \cap B) = .60$

ก. $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$

$= .80 + .70 - .60$

$= .90 = 90\%$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ชาวอเมริกันจะชอบไปเที่ยวปารีสหรือไม่ก็เบอร์ลินหรือทั้งสองเมือง = 90

ข. $Pr(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - Pr(A \cup B) = 1 - .90 \quad .10$ หรือ 10%

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ชาวอเมริกันจะไม่ชอบไปเที่ยวปารีสหรือเบอร์ลินหรือทั้งสองเมือง = 10%

แบบฝึกหัดที่ 2.6

1. กำหนดให้ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ เป็นดังนี้

   1.1 $P(A) = 0.2, \quad P(B) = 0.7, \quad P(C) = 0.1$

   1.2 $P(A) = -0.5, P(B) = 0.8, \quad P(C) = 0.7$

   1.3 $P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.6, \quad P(C) = 0.2$

   โดยที่ $A \cup B \cup C = S$ และ A,B,C เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมกันเลย จงตรวจสอบข้อสอบดูว่าข้อใดที่ไม่มีคุณสมบัติของฟังค์ชั่นความน่าจะเป็น

2. นายก. และนายข. เล่นหมากรุกแข่งกันโดยมีกติกาว่า ถ้าใครชนะสองในสามกระดานจะเป็นผู้ได้รับรางวัล จงหาความน่าจะเป็นที่นายก. จะได้รับรางวัล (สมมติว่าทั้งคู่เก่งเท่า ๆ กัน)

3. NB1 มีประตูอยู่ 5 ประตู จงหาความน่าจะเป็นที่คนใดคนหนึ่งจะเข้าและออกโดยใช้ประตูเดิม

4. มีครอบครัวหนึ่งมีบุตรอยู่ 4 คน ปรากฏว่าทุกคนเกิดวันศุกร์ จงหาโอกาสที่เหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้น

5. นายก. และนายข. เป็นนักโดดร่ม เป็นที่ทราบกันว่า นายก. เก่งกว่านายข. เป็นสองเท่า และโอกาสที่นายข. จะได้รับอุบัติเหตุในการกระโดดร่มแต่ละครั้งเท่ากับ 0.4 วันหนึ่งนายก. และนายข. ได้รับคำสั่งให้ ไปโดดร่มเพียง 2 คน ถามว่า

   1. โอกาสที่วันนั้นจะไม่มีใครได้รับอุบัติเหตุเป็นเท่าไร
   2. โอกาสที่จะมีอุบัติเหตุทั้งคู่
   3. โอกาสที่จะต้องมีผู้ได้รับอุบัติเหตุ

6. เราสามารถอธิบายเหตุการณ์ A ได้อย่างไร ให้ยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่เข้าข่ายคุณลักษณะแบบ A โดยที่ $P(A) = 1$

7. วิชาหนึ่งออกข้อสอบเป็นปรนัย 100 ข้อแต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก 4 คอบ จงหาความน่าจะเป็นที่นายก. ซึ่งไม่มีความรู้วิชานี้เลยจะสอบผ่านวิชานี้ไปได้ ถ้าเกณฑ์ในการตัดสินคือ 60 คะแนน

8. จากคำถามที่ 7 ถ้าอาจารย์ตัดสินด้วยเกณฑ์ 30 คะแนนโอกาสที่นายก. จะสอบได้จะเป็นเท่าไร ให้เปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับข้อ 7.

หนังสืออ้างอิง

1. Croxton, Frederick E.,& Cowden Dudley J., and Klein Sidney., **Applied General Statistics,** 3 rd ed., London Sir Isac Pitman And Sons Ltd, 1968, 754 pp.
2. Leabo Dick A., **Basic Statistics,** Richard D.Irwin, Inc,. Homewood, Illinois Irwin-Dorsev Limited, Nobleton, Ontario, 3rd, 1973, 465 pp.
3. Lindgren, Bernard W., **Statistical Theory,** 3rd, Macmillan Publishing, Inc New York, 1979, 564 pp.
4. Mathai, AM., and Rathe, PN., **Probability and Statistics,** Printed and bound in India at Macmillan India Press, Madras, 600 002, 1977, 406 pp.
5. Weinberg & Schumaker, **Statistics An Intuitive Approach,** Wadsworth Publishing Company, Inc., Belmont California., 2nd ed., 1979, 362 pp.