บทที่ 5
ความน่าจะเป็น (Probability)

ในบทที่ 4 นั้นเป็นการศึกษาวิชาสถิติทางด้านสถิติเชิงพรรณนา ซึ่งส่วนใหญ่จะมุ่งถึงวิธีการที่จะรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูลและการบรรยายลักษณะของข้อมูลที่ได้ สำหรับในบทที่ 5 นี้เป็นการศึกษาวิชาสถิติทางด้านสถิติอนุมาน (Statistical inference) ซึ่งเป็นการรวบรวมข้อเท็จจริงจากตัวอย่างของข้อมูล แล้วใช้ข้อเท็จจริงที่ได้ไปอ้างอิงเกี่ยวกับข้อมูลเบื้องต้นที่ตัวอย่างได้ถูกเลือกมาในการศึกษา เรื่องสถิติอนุมานนั้นจำเป็นจะต้องใช้ทฤษฎีความน่าจะเป็นมาสนับสนุนการวิเคราะห์ทางสถิติ

จุดมุ่งหมายในการศึกษาความน่าจะเป็นในบทนี้ก็เพื่อให้เข้าใจความหมายของคำว่าความน่าจะเป็น วิธีการคำนวณหาความน่าจะเป็นของผลการทดลองต่าง ๆ การคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับความน่าจะเป็น และนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นเหล่านี้ไปช่วยในการวิเคราะห์ทางสถิติต่อไป

ก่อนที่จะศึกษาเรื่องความน่าจะเป็น นักศึกษาควรจะทราบความหมายของการทดลองเชิงสุ่ม (Random trial) กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) เหตุการณ์ (Event) ดังนี้

นักวิทยาศาสตร์ได้แบ่งการทดลอง (trial) ใด ๆ ออกเป็น 2 ประเภทด้วยกัน คือ

ก. การทดลองที่ทราบผลลัพธ์แน่นอน เป็นการทดลองที่เราทราบผลของการทดลองล่วงหน้าว่าจะเป็นอะไร การเกิดของผลการทดลองนี้อาศัยทฤษฎีหรือกฎเกณฑ์ตามธรรมชาติ เช่น การทดลองทางวิทยาศาสตร์ต่าง ๆ ซึ่งการทดลองประเภทนี้จะไม่นำมาคำนวณหาความน่าจะเป็น

ข. การทดลองเชิงสุ่ม เป็นการทดลองใด ๆ ที่ผลลัพธ์ของการทดลองที่ออกมาไม่สามารถทำนายได้ล่วงหน้าว่าผลลัพธ์จะออกมาในรูปใด ผลลัพธ์ดังกล่าวขึ้นอยู่กับตัวประกอบบางประการซึ่งไม่สามารถควบคุมได้ และตัวประกอบเหล่านี้จัดรวมกันเข้าเรียกว่า ตัวประกอบเชิงสุ่ม ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 1 เหรียญผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมีได้ 2 อย่างคือ หงายหน้าหัวหรือหงายหน้าก้อย ซึ่งไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่า เหรียญที่โยนไปนั้นจะหงายหัวหรือหงายก้อย การ

โยนเหรียญจึงเป็นการทดลองเชิงสุ่มหรือการหยิบไพ่ การหยิบลูกบอลจากกล่อง การขับรถไปตามถนน ฯลฯ เป็นต้น เป็นการทดลองเชิงสุ่มทั้งนั้น การทดลองประเภทนี้จะนำมาคำนวณหาความน่าจะเป็น

กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) เมื่อพิจารณาการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ คือ กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ และแต่ละผลลัพธ์ของการทดลองที่ได้ เรียกว่า outcome หรือ Sample point ซึ่งนิยามคำว่า Sample Space ไว้ดังนี้

> **นิยาม 5.1** Sample Space ของการทดลองหนึ่ง ๆ คือ เซตของผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองนั้น ๆ และเขียนแทนด้วยตัว "S"

ถ้าให้ $o_1, o_2, \ldots$ แทนผลลัพธ์แต่ละผลลัพธ์ที่ได้

$\therefore \quad S = \{o_1, o_2, \ldots\}$

ตัวอย่างเช่น 1. Sample Space ของการโยนลูกเต๋า 1 ลูก คือ

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Sample Space ของเลือกคณะกรรมการ 2 คน จากคนทั้งหมด 4 คน คือ ก, ข, ค, ง

S = {กข, กค, กง, ขค, ขง, คง}

3. Sample Space ของการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง

S = {♢A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q
♡A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q
♣A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q
♠A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q}

4. Sample Space ของการโยนเหรียญ 2 เหรียญ คือ

S = {HH, HT, TH, TT}

5. Sample Space ของการโยนลูกเต๋า 2 ลูก คือ

S =	{11	12	13	14	15	16
	21	22	23	24	25	26
	31	32	33	34	35	36
	41	42	43	44	45	46
	51	52	53	54	55	56
	61	62	63	64	65	66}

6. Sample space ของจำนวนครั้งที่มีโทรศัพท์ โทร เข้ามายังสำนักงานแห่งหนึ่งใน 1 วัน คือ

S = {0, 1, 2, 3, ...}

จากตัวอย่างข้างต้น นักศึกษาคงจะทราบแนวทางที่จะหากลุ่มผลการทดลองของการทดลองเชิงสุ่มได้บ้าง ซึ่งวิธีการคำนวณหาหนทางที่เกิดขึ้นของการทดลองเชิงสุ่มต่าง ๆ จะใช้เทคนิคในการนับมาช่วยในการหากลุ่มผลการทดลองได้อย่างถูกต้อง ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในภายหลัง Sample Space ที่หาได้จากการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ สามารถแยกได้เป็น 2 ชนิดด้วยกัน คือ

ก. กลุ่มผลการทดลองจำกัด (Finite Sample Space) เป็น Sample Space ที่มีจำนวนผลลัพธ์การทดลองที่สามารถนับได้ถ้วน

ข. กลุ่มผลการทดลองไม่จำกัด (Infinite Sample Space) เป็น Sample Space ที่มีจำนวนผลลัพธ์การทดลองที่ไม่สามารถนับได้ถ้วน

เหตุการณ์ (Event) เป็นซับเซตหรือเซตย่อยของกลุ่มผลการทดลอง เขียนแทนด้วยอักษรตัวใหญ่ เช่น E, F, H, A, B เป็นต้น และจำนวนสมาชิกที่อยู่ในซับเซตเหล่านี้จะมีจำนวนเท่าใดก็ได้ แต่ต้องไม่เกินจำนวนสมาชิกหรือผลลัพธ์การทดลองที่มีอยู่ใน Sample Space ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับความสนใจหรือข้อจำกัดที่กำหนดไว้ ซึ่งสามารถแบ่งเหตุการณ์ออกเป็น 2 ประเภทด้วยกันคือ เหตุการณ์อย่างง่าย (Simple event) เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลลัพธ์เพียง 1 ผลลัพธ์

เช่น $A = \{HH\}$, $B = \{กข\}$ เป็นต้น แต่ถ้าเป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลลัพธ์มากกว่า 1 ผลลัพธ์ขึ้นไปเรียกว่า เหตุการณ์ประกอบ (Compound event) เช่น $E = \{HH, TT\}$, $F = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$ เป็นต้น นอกจากนี้ เซตที่ว่างเปล่า (ϕ) ก็ถือว่าเป็นเหตุการณ์หนึ่งด้วยเหมือนกัน และจำนวนซับเซตที่สามารถสร้างได้จะมีค่าเท่ากับ 2^n เมื่อ n คือจำนวนสมาชิกของเซตที่จะนำมาสร้างซับเซต เช่น $A = \{1, 3, 5\}$ สามารถที่จะนำมาสร้างซับเซตได้จำนวน $2^3 = 8$ ซับเซตหรือเหตุการณ์

การรวมตัวของเหตุการณ์ (Event operation) เหมือนกับการรวมตัวของเซต เนื่องจากเหตุการณ์เป็นเซต ซึ่งการรวมตัวของเหตุการณ์มีดังนี้

1. **เหตุการณ์ A และ B** หรือที่เรียกว่าผลร่วม (Intersection) ของเหตุการณ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อทั้ง A และ B เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน หรือเป็นเซตของ outcomes ที่เป็นทั้ง outcomes ของ A และในขณะเดียวกันก็เป็น outcomes ของ B ด้วยพร้อม ๆ กัน นั่นคือ

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

ถ้า A และ B ไม่มีผลร่วมกันจะเรียกว่า Disjoint event **หรือ** Mutually exclusive event นั่นคือ

$$A \cap B = \phi$$

2. **เหตุการณ์ A และ/หรือ B** หรือที่เรียกว่าผลรวม (union) ของเหตุการณ์เขียนแทนด้วย $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่อยู่ในเหตุการณ์ A หรือ B นั่นคือ

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

3. **เหตุการณ์ที่ไม่ใช่ A** หรือที่เรียกว่าส่วนเติมเต็ม (complement) ของ A เขียนแทนด้วย A' หรือ $\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเหตุการณ์ A ไม่ได้เกิดขึ้น นั่นคือ

$$\bar{A} = \{x | x \in S, x \notin A\}$$

การนับจำนวนผลลัพธ์ในเหตุการณ์และกลุ่มผลการทดลองนั้น ถ้าผลลัพธ์ของการทดลองนั้น ๆ มีไม่มากนัก ก็สามารถทำการแจงนับเอาได้ แต่ผลลัพธ์ของการทดลองบางอย่างมีมากทำให้การทำการแจงนับลำบาก จึงต้องอาศัยเทคนิคเกี่ยวกับการนับเข้าช่วยซึ่งเทคนิคต่าง ๆ มีดังนี้

ก. การคำนวณหาโดยใช้กฎการคูณหรือ Tree diagram คำนวณหาผลลัพธ์ของการทดลองได้โดยอาศัยทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 5.1 ถ้าการทดลองใด ๆ สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น 2 ขั้นตอน ในขั้นแรกมีหนทางที่จะเกิดขึ้น n_1 วิธีที่แตกต่างกัน และในขั้นที่ 2 มีหนทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_2 วิธีที่แตกต่างกันจำนวนหนทางทั้งหมดที่จะทำการทดลองนี้จะเท่ากับ $n_1 \times n_2$ วิธี

บทแทรกทฤษฎีที่ 5.1 ถ้าในการทดลองใด ๆ สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น k ขั้นตอน ในขั้นตอนแรกมีหนทางที่จะเกิดขึ้น n_1 วิธีที่แตกต่างกัน ขั้นตอนที่ 2 มีหนทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_2 วิธีที่แตกต่างกันไปจนถึงขั้นที่ k มีหนทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_k วิธีที่แตกต่างกัน จำนวนหนทางทั้งหมดที่จะทำการทดลองนี้จะเท่ากับ $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5.1 โยนเหรียญ 5 ครั้ง จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

การโยนเหรียญ 5 ครั้ง เปรียบเสมือนการทดลองนี้แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอน ซึ่งในแต่ละขั้นตอนมีหนทางที่จะเกิดขึ้น 2 หนทาง คือโยนแล้วหงายหน้าหัว และโยนแล้วหงายหน้าก้อย ดังนั้น ถ้าโยน 5 ครั้ง จำนวนผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นทั้งหมดที่เป็นไปได้จะเท่ากับ 2^5 หนทางซึ่งเท่ากับ 32 หนทาง

ข. การคำนวณโดยใช้การจัดลำดับ (Permutation) เป็นการจัดเรียงสิ่งของทั้ง-หมดหรือเพียงบางส่วนโดยคำนึงถึงลำดับที่เป็นสำคัญ ตัวอย่างเช่น มีอักษรอยู่ 3 ตัว คือ A, B, C ถ้านำมาจัดเรียงลำดับทั้ง 3 ตัว จะได้ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA และถ้านำมาเรียงครั้งละ 2 ตัวจะได้ AB, BA, AC, CA, BC, CA ซึ่งการจัดลำดับนั้นอาศัยทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 5.2 (การนำสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันมาจัดเรียงลำดับครั้งละ n สิ่ง)

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกัน จำนวนหนทางที่จะนำสิ่งของเหล่านี้มาจัดเรียงลำดับครั้งละ n สิ่งจะเท่ากับ ${}^{n}P_{n}$

เมื่อ $\quad {}^{n}P_{n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ วิธี

หรือ $\quad {}^{n}P_{n} = n!$ วิธี

ตัวอย่าง 5.2 จะจัดเรียงลำดับความนิยมของผู้ดื่มน้ำอัดลม 3 ชนิด จะจัดได้เท่ากับ

${}^{3}P_{3} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ทฤษฎีที่ 5.3 (การนำสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันมาจัดเรียงลำดับครั้งละ r เมื่อ $r < n$)

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกันจำนวนหนทางที่จะนำสิ่งของเหล่านี้มาจัดเรียงครั้งละ r สิ่งจะเท่ากับ ${}^{n}P_{r}$ เมื่อ

$${}^{n}P_{r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) \text{ วิธี}$$

หรือ $\quad {}^{n}P_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 5.3 จะหาจำนวนวิธีเรียงลำดับหนังสือ 7 เล่มที่ไม่ซ้ำกันเลย โดยนำมาเรียงคราวละ 3 เล่ม

$\therefore$ จัดเรียงได้เท่ากับ

$$\begin{aligned} {}^{7}P_{3} &= \frac{7!}{(7-3)!} \\ &= \frac{7!}{4!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 7 \times 6 \times 5 \\ &= 210 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 5.4 (การจัดเรียงลำดับเป็นวงกลม)

นำของ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกันมาจัดเรียงเป็นวงกลมจะจัดได้เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่าง 5.4 จะหาจำนวนวิธีที่จะจัดเรียงชาย 4 คน คือ ก, ข, ค และ ง นั่งล้อมวงเล่นไพ่กัน ได้ $(4-1)! = 3! = 6$ วิธี

ทฤษฎีที่ 5.5 (การจัดเรียงลำดับในกรณีที่ของ n สิ่งมีบางสิ่งที่เหมือนกัน)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่งซึ่งแบ่งออกได้เป็น k พวก แต่ละพวกมีลักษณะเหมือนกัน และมีจำนวนเท่ากับ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับ $(n_1+n_2+\ldots+n_k = n)$ นำของ n สิ่งนี้มาจัดเรียงลำดับจะมีหนทางที่จัดได้เท่ากับ ${}^{n}P_{(n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k)}$ ซึ่ง

$$ {}^{n}P_{(n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k)} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_k!} \text{ วิธี} $$

ตัวอย่าง 5.5 นำอักษรในคำว่า "Assess" มาจัดเรียงลำดับได้เท่ากับ

$$ {}^{6}P_{(1,\, 4,\, 1)} = \frac{6!}{1!\times 4!\, 1!} = 30 \text{ วิธี} $$

ค. การคำนวณโดยใช้การจัดกลุ่ม (Combination) เป็นการจัดกลุ่มโดยไม่คำนึงถึงอันดับที่ เช่น มีอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C นำมาจัดกลุ่มได้เพียงกลุ่มเดียวเท่านั้น แต่ถ้านำมาจัดกลุ่มครั้งละ 2 ตัว จะได้ AB, AC และ BC การจัดกลุ่มทำได้โดยอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 5.6 หากมีของอยู่ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกันมาจัดกลุ่มที่มีจำนวน r สิ่ง $(r < n)$ จำนวนหนทางที่จะจัดได้จะเท่ากับ ${}^{n}C_{r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ ซึ่ง ${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ วิธี

ตัวอย่าง 5.6 เลือกคน 2 คน จากคนทั้งหมด 5 คนจะได้เท่ากับ

$$ {}^{5}C_{2} = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{5!}{3!\;2!} = 10 \text{ วิธี} $$

เทคนิคในการนับทั้ง 3 วิธีนี้ จะช่วยให้สามารถหากลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ของการทดลองเชิงสุ่มที่ต้องการและช่วยให้สามารถหาผลลัพธ์ที่เกิดในเหตุการณ์ที่สนใจด้วย

5.1 ความหมายของความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น (Probability) มีความหมายอยู่ 2 ประการ คือ

ก. ความน่าจะเป็น คือ ศาสตร์หรือวิชาที่บรรยายความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นผลลัพธ์จากการทดลองเชิงสุ่ม (Random trial) และการใช้ความน่าจะเป็นมาบรรยายความไม่แน่นอนนี้จะนำมาใช้ก่อนที่จะทำการทดลองแล้วเสร็จ เพราะยังไม่ทราบผลลัพธ์ของการทดลองเชิงสุ่มนั้นว่าจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร แต่ถ้าทราบผลลัพธ์ของการทดลองแล้วว่าเป็นอย่างไร การนำความน่าจะเป็นมาใช้บรรยายผลลัพธ์ของการทดลองเชิงสุ่มนั้นก็จะไม่มีความหมายเลย

ข. ความน่าจะเป็น คือ ตัวเลขที่ใช้เป็นมาตรการในการวัดโอกาสของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ว่ามีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด ตัวเลขที่ได้นี้จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 โดยที่ถ้าตัวเลขนั้นมีค่าเข้าใกล้ 0 แสดงว่าเหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นน้อยมาก หรือเท่ากับ 0 แสดงว่าเหตุการณ์นั้นไม่เกิดขึ้นแน่นอน ถ้ามีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่าเหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นมาก และถ้ามีค่าเท่ากับ 1 แสดงว่าเหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นแน่นอน

นิยาม 5.2 (ความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลอง)

ความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลองเป็นตัวเลขที่กำหนดให้แก่แต่ละผลลัพธ์การทดลอง โดยแทนตัวเลขนี้ด้วย P_i และเรียกตัวเลขนี้ว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่ i โดย P_i จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leq P_i \leq 1$ หมายความว่าค่าของ P_i มีพิสัยจาก 0 ถึง 1
2. $\sum_{\text{all } i} P_i = 1$ หมายความว่าผลรวมของความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลองทั้งมีค่าเท่ากับ 1

นิยาม 5.3 (ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์)

ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย P(A) คือ ผลรวมของความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ การทดลองทั้งหมดที่อยู่ในเหตุการณ์ A นั่นคือ

$$P(A) = \sum_{O_i \in A} P_i$$

5.2 การคำนวณหาความน่าจะเป็น จากนิยามของความน่าจะเป็น ที่ว่า ความน่าจะเป็นคือตัวเลขที่ใช้วัดโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจว่ามีมากน้อยเพียงใด ซึ่งตัวเลขที่ได้มักจะอยู่ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยม หรือเปอร์เซ็นต์ โดยตัวเลขที่ได้นี้มีวิธีการกำหนดอยู่ 2 วิธี คือ

5.2.1 วิธีอัตนัย เป็นการกำหนดความน่าจะเป็นโดยยึดตัวบุคคลเป็นหลัก และใช้ระดับความเชื่ออย่างมีเหตุผลเป็นประโยชน์ในการกำหนดความน่าจะเป็น ซึ่งการกำหนดแบบนี้จะถูกต้องตามความน่าจะเป็นที่แท้จริงหรือใกล้เคียงความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากน้อยแค่ไหนไม่สามารถพิสูจน์ได้ การวัดโดยวิธีนี้ในปัจจุบันนำไปใช้ในทฤษฎีการตัดสินใจซึ่งก็ถือว่ายังมีประโยชน์อยู่บ้างดีกว่าที่จะไม่ใช้ความน่าจะเป็นมาประกอบการตัดสินใจเสียเลย ตัวอย่างเช่น นักศึกษาที่เรียนวิชา SC 101 ผลสอบของนักศึกษาแต่ละคนเป็นการทดลองเชิงสุ่มซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการสอบ อาจจะเป็น G, P หรือ F นักศึกษาแต่ละคนสามารถที่จะประมาณความน่าจะเป็นที่จะสอบได้เกรดใด ๆ ได้จากการประมาณสติปัญญา ความสามารถของตนเอง การมาเรียนโดยสม่ำเสมอ การเข้าใจในบทเรียน เป็นต้น เช่น อาจจะประมาณความน่าจะเป็นที่จะได้เกรด P เท่ากับ 0.60 ความน่าจะเป็นที่จะได้เกรด G เท่ากับ 0.10 และความน่าจะเป็นที่จะได้เกรด F เท่ากับ 0.30 เป็นต้น

5.2.2 วิธีปรนัย เป็นการกำหนดความน่าจะเป็นโดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

1. โดยอาศัยความจริงหรือเหตุผลและข้อสมมติที่ว่า ผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองจะไม่มีผลร่วมกัน แต่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน (Mutually exclusive and Equally likely) ดังนั้น ตัวเลขหรือความน่าจะเป็นที่จะกำหนดให้แก่แต่ละผลการ

ทดลองจะมีค่าเท่า ๆ กัน คือ ถ้าการทดลองเชิงสุ่มหนึ่งมีผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด หรือ Sample space มีจำนวนผลลัพธ์การทดลองที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ n แล้ว ตัวเลขหรือความน่าจะเป็นที่จะกำหนดให้แก่แต่ละผลการทดลองจะเท่ากับ $\frac{1}{n}$ ตัวอย่างเช่น

ก. โยนเหรียญ 1 เหรียญ

$S = \{H, T\}$

$\therefore P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$

ข. โยนเหรียญ 2 เหรียญ

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore P(HH) = P(HT) = P(TH) = P(TT) = \frac{1}{4}$

ค. โยนลูกเต๋า 1 ลูก

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P_i = \frac{1}{6}$

ง. โยนลูกเต๋า 2 ลูก

$$S = \{11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26 \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36 \\ 41, 42, 43, 44, 45, 46 \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56 \\ 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

$\therefore P_i = \frac{1}{36}$

จ. หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง

$$S = \{\spadesuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \\ \clubsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \\ \diamondsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \\ \heartsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q\}$$

. $P_1 = \frac{1}{52}$

ฉ. สุ่มเลือกคนมา 2 คนจากคน 4 คน คือ ก, ข, ค, ง

S = {กข, กค, กง, ขค, ขง, คง}

$\therefore P_i$ = a

ในกรณีที่เป็นการกำหนดความน่าจะเป็นให้กับเหตุการณ์หนึ่ง ๆ นั้น การกำหนดความน่าจะเป็นกำหนดได้จากนิยามต่อไปนี้

นิยาม 5.๒ ถ้ากลุ่มผลการทดลอง S ประกอบด้วยผลการทดลองที่ไม่มีผลร่วมกันเลย แต่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันเป็นจำนวน $n(S)$ และ ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่สนใจ ซึ่งอยู่ใน S ประกอบด้วยผลการทดลองเป็นจำนวน $n(A)$ แล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A)$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{n(A)}{n(S)}$ หรือ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ก. โยนเหรียญ 2 เหรียญ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 2 เหรียญแล้วได้หน้าเหมือนกัน จงหา $P(A)$

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A = \{HH, TT\}$$

จาก $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ข. โยนลูกเต๋า 1 ลูก ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูก แล้วได้เลขคู่ จงหา $P(A)$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ค. โยนลูกเต๋า 2 ลูก ให้ A เป็นผลบวกของลูกเต๋าทั้ง 2 เท่ากับ 5 จงหา P(A)

$S = \{11, 12, \ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots$
$61, 62, \ldots\ldots 66\}$

$A = \{14, 23, 32, 41\}$

$\therefore P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

ง. สุ่มคนมา 2 คนจากคน 4 คน ก, ข, ค, ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ นาย ก รวมอยู่ด้วยเสมอ จงหา P(A)

S = {กข, กค, กง, ขค, ขง, คง}

A = {กข, กค, กง}

$\therefore P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

จ. หยิบไพ่ 2 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ 2 ใบ เป็นโพแดงทั้งคู่ จงหา P(A)

Sample Space มีจำนวนเท่ากับ $^{52}C_2 = \frac{52!}{50!2!} = 1326$

เหตุการณ์ A มีจำนวนผลลัพธ์ $= {}^{13}C_2 = \frac{13!}{11!\ 2!} = 78$

$\therefore P(A) = \frac{78}{1326} = 0.059$

ฉ. ห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียน 12 คน เป็นนักเรียนหญิง 5 คน ที่เหลือเป็นนักเรียนชาย สุ่มนักเรียนมา 3 คน ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่สุ่มแล้วได้นักเรียนชายทั้ง 3 คน จงหา P(A)

จำนวนผลลัพธ์ใน S $= {}^{12}C_3 = \frac{12!}{9!3!}$

$= 220$

จำนวนผลลัพธ์ใน A $= {}^{7}C_0 \times {}^{5}C_3$

$= \frac{7!}{7!0!} \times \frac{5!}{2!3!}$

$= 1 \times 5 \times 2 = \mathbf{10}$

$\therefore P(A) = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

2. โดยอาศัยการทดลอง หรือ ความถี่สัมพัทธ์ (Relative frequency) วิธีนี้ทำได้โดยกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจในเทอมของความถี่สัมพัทธ์ ซึ่งอยู่ในรูปของอัตราส่วนของจำนวนครั้งที่เหตุการณ์เกิดขึ้นกับจำนวนครั้งทั้งหมดที่ทำการทดลอง การกำหนดความน่าจะเป็นโดยวิธีนี้ต้องสามารถทำการทดลองกับการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ซ้ำกันได้หลาย ๆ ครั้งภายใต้สภาวการณ์เดียวกัน และแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระต่อกันด้วย

นิยาม 5.5 ในการทดลอง n ครั้ง ถ้าเหตุการณ์ที่สนใจเกิดขึ้น f ครั้ง ความถี่สัมพัทธ์ $\frac{f}{n}$ จะเข้าใกล้เลขจำนวนหนึ่ง เลขจำนวนนี้เรียกว่า ขีดจำกัดของความถี่สัมพัทธ์ ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A) = \lim_{n \to \alpha} \frac{f}{n}$

นิยาม 5.6 ในการทดลองเชิงสุ่มที่ทำการทดลอง n ครั้ง เหตุการณ์ที่สนใจ A เกิดขึ้น f ครั้ง สัดส่วน $\frac{f}{n}$ จะมีแนวโน้มจะคงที่ ณ ค่า P(A) ในเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นไม่จำกัดจำนวนและเรียก $\frac{f}{n}$ ว่าเป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

$$\therefore \quad P(A) = \frac{f}{n}$$

โดยที่ P(A) จะมีค่าอยู่ในช่วงดังนี้

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ในกรณีที่การทดลองนั้น ๆ จำกัดจำนวนครั้งที่ทำการทดลองค่า $\frac{f}{n}$ ที่หาได้จะเป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น แต่ถ้าสามารถเพิ่มจำนวนครั้งของการทดลองให้มากพอ ค่า $\frac{f}{n}$ ที่หาได้จะใกล้เคียงกับความน่าจะเป็นจริง ๆ ของเหตุการณ์ A ตัวอย่างเช่น ทำการทดลองโยนเหรียญ 1,000 ครั้ง ปรากฏว่าหงายหน้าหัว 506 ครั้ง จะได้ $\frac{506}{1000} = .506$ เป็นค่าประมาณของความน่าจะเป็นที่จะหงายหัวจริง ๆ คือ 0.50 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกันมาก เนื่องจากจำนวนครั้งของการทดลองโยนเหรียญมากพอ

5.3 กฎความน่าจะเป็นเบื้องต้น (Fundamental Probability Rules)

กฎที่ 1 ถ้าให้ S เป็น Sample Space ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่งๆ $P(S) = 1$

ตัวอย่าง 5.7 โยนเหรียญ 1 เหรียญ

$$S = \{H, T\}$$

$$\therefore P(S) = P(H) + P(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

กฎที่ 2 ถ้า ϕ เป็นเซตที่ว่าง $P(\phi) = 0$

ตัวอย่าง 5.8 โยนลูกเต๋า 1 ลูก ให้ลูกเต๋าหงาย 7 จุด เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงาย 7 จุด ไม่มี ∴ เป็นเซตว่าง ($\emptyset$)

$$\therefore P(\phi) = \frac{0}{n(s)} = 0$$

กฎที่ 3 ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใดๆ ใน S และส่วนเติมเต็มของ A คือ $\bar{A}$ จะได้
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
หรือ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

ตัวอย่าง 5.9 โยนลูกเต๋า 2 ลูก ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าเหมือนกัน จงหาความน่าจะเป็นของ A และ $\bar{A}$

$$A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{6}$$

$\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าต่างกัน

$$\therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

กฎที่ 4 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive **events**) จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ตัวอย่าง 5.10 หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ Ace และ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ King จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ Ace หรือ King คือ $P(A \cup B)$

$$A = \{\spadesuit A, \heartsuit A, \clubsuit A, \diamondsuit A\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{52}$$

$$B = \{\spadesuit K, \heartsuit K, \clubsuit K, \diamondsuit K\}$$

$$\therefore P(B) = \frac{4}{52}$$

เนื่องจากเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน เพราะไม่มีผลการทดลองร่วมกันเลย

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$$

กฎที่ 5 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ตัวอย่าง 5.11 โยนเหรียญ 2 เหรียญ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าเหมือนกัน B เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัวอย่างน้อย 1 หัว

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A = \{HH, TT\}$$

$$B = \{HH, HT, TH\}$$

$$P(A) = \frac{2}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

เนื่องจาก A และ B มีผลการทดลองร่วมกัน

$$\therefore A \cap B = \{HH\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1 = P(s) \because A \cup B = s$$

5.4 ตัวแปรเชิงสุ่ม และการแจกแจง

ในการทดลองเชิงสุ่มใดๆ ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองทั้งหมดบางครั้งเราไม่สนใจในรายละเอียดของผลการทดลอง แต่เราสนใจตัวเลขที่แสดงถึงผลการทดลองนั้นๆ เช่น โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง ได้ผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด 8 ผลการทดลองแต่เราไม่ได้สนใจในรายละเอียดของผลการทดลองทั้ง 8 อย่างนั้น เช่น ถ้าเราสนใจจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ในกรณีนี้ค่าของผลการทดลองต่างๆ จะมีได้ตั้งแต่ 0 ถึง 3 ซึ่งค่าเหล่านี้ถือว่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable) และเราสามารถที่จะคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของค่าตัวแปรเชิงสุ่มแต่ละค่าได้ ถ้าให้ x เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งแทนจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ดังนั้น ค่าของ x จะมีค่าเป็น 0, 1, 2 และ 3 วิธีการที่จะคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม x จะมีค่าต่างๆ เหล่านี้ ทำได้โดยใช้วิธีการหาความน่าจะเป็นของผลการทดลองในหัวข้อ 5.2 ดังนี้

$$s = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

x = แทนจำนวนหัวที่ได้

$$\therefore x = \{0, 1, 2, 3\}$$

ต้องการหา $P[X = x]$ ดังนี้

$P[X=0]$ = P[โยนเหรียญ 3 เหรียญ แล้วไม่ได้หัวเลย]

= $P[TTT] = \frac{1}{8}$

$P[X=1]$ = P[โยนเหรียญ 3 เหรียญ แล้วได้หัว 1 หัว]

= $P[HTT, THT, TTH] = \frac{3}{8}$

$P[X=2]$ = P[โยนเหรียญ 3 เหรียญ แล้วได้หัว 2 หัว]

= $P[HHT, HTH, THH] = \frac{3}{8}$

$P[X=3]$ = P[โยนเหรียญ 3 เหรียญ แล้วได้หัว 3 หัว]

= $P[HHH] = \frac{1}{8}$

นอกจากนี้ เรายังสามารถที่จะหา $P[X>x]$ หรือ $P[a\leq X\leq b]$ หรือ $P[X\leq x]$ หรือ $P[X\leq x]$ หรือ $P[X\geq x]$ ได้ด้วย

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม 1 ค่า ก็จะมีความน่าจะเป็น 1 ค่า ดังนั้น เราจึงได้การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มขึ้นมาอันหนึ่ง ซึ่งการแจกแจงนี้อาศัยค่าความน่าจะเป็นเราจึงเรียกว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม ในทางปฏิบัติข้อมูลที่ได้จากการทดลองมักจะมีรูปการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่งเสมอ ซึ่งถ้าทราบว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบใดก็จะทำให้ทราบถึงวิธีการอนุมานได้ถูกต้อง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มที่สำคัญๆ และพบกันอยู่เสมอมีหลายการแจกแจงด้วยกัน แต่ใน SC 101 จะกล่าวถึงเพียง 2 การแจกแจงเท่านั้น ดังนี้

5.4.1 การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial distribution) เป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่มาจากการทดลองเชิงสุ่มที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. การทดลองประกอบด้วยการกระทำซ้ำๆ กัน n ครั้ง ภายใต้สภาวการณ์เดียวกัน

2. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน

3. การทดลองแต่ละครั้งจะให้ผลการทดลอง 2 ประเภท คือ สำเร็จ(Success แทนด้วย S) และไม่สำเร็จ (Failure แทนด้วย F)

4. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ที่สำเร็จ (s) จะคงที่ตลอดการทดลองเท่ากับ p นั่นคือ P(S) = p

5. ถ้าเราสนใจจำนวนครั้งที่สำเร็จ (s) ในการทดลอง n ครั้ง ซึ่งมีค่าเป็น 0, 1, 2, ..., n และค่าเหล่านี้จะเป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินาม

ถ้าให้ x แทนจำนวนครั้งที่เกิดความสำเร็จ (s) ในการทดลอง n ครั้ง การแจกแจงของ x กำหนดไว้ดังนี้

$$P[X=x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots , n$$

เมื่อ n = จำนวนครั้งที่ทำการทดลอง

x = จำนวนครั้งที่เกิดความสำเร็จ (s)

p = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จ (s)

q = 1 − p คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลที่ไม่สำเร็จ (F)

ตัวอย่าง 5.12 โยนเหรียญ 5 ครั้ง ให้ x แทนจำนวนหัวที่เกิดขึ้น

$$\therefore \; P(H) = \frac{1}{2} = p \text{ และ } q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$n = 5$$

x แทนจำนวนหัวที่เกิดขึ้น ซึ่งจะมีการแจกแจงแบบทวินามดังนี้

$$P[X=x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

$$= \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} \; ; \; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ถ้าต้องการที่จะหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 3 หัว

$$\therefore \; P[X=3] = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5!}{2!3!}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5 \times 2}{8 \times 4} = \frac{\mathbf{10}}{32}$$

ความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 2 หัว คือ

$$\therefore \; P[X=2] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{5!}{3!2!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{10}{32}$$

ความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 1 หัว คือ

$$P[X=1] = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1}$$

$$= 5 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{5}{32}$$

ซึ่งถ้าหาจนครบค่าของ x ก็จะได้ดังตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4	5
P[X = x]	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

นอกจากนี้ เรายังสามารถหาความน่าจะเป็นเมื่อ x มีค่าต่าง ๆ ที่เราสนใจได้ เช่น จะหา $P[X \geq 2]$ ซึ่งหมายความว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดหน้าหัวอย่างน้อยที่สุด 2 หัว

$$\therefore \; P[X \geq 2] = P[X = 2] + P[X=3] + P[X=4] + P[X=5]$$

$$= \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{26}{32}$$

หรืออาจจะหาจาก

$P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1]$ ก็ได้

เมื่อ $P[X \leq 1] = P[X=0] + P[X=1]$

$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32}$$

$$\therefore \quad P[X \geq 2] = 1 - \frac{6}{32}$$

$$= \frac{26}{32}$$

ถ้าต้องการจะหา $P[X \leq 3]$ จะหาได้ดังนี้

$$P[X \leq 3] = \sum_{x=0}^{3} P[X = x]$$

$$= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{26}{32}$$

ถ้าต้องการจะหา $P[2 \leq X \leq 4]$ จะหาได้ดังนี้

$$P[2 < X \leq 4] = \sum_{x=3}^{4} P[X = x]$$

$$= P[X = 3] + P[X = 4]$$

$$= \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{15}{32}$$

การคำนวณหาความน่าจะเป็นแบบทวินามตามวิธีในตัวอย่างข้างต้น ถ้า มีค่ามากขึ้น การคำนวณความน่าจะเป็นจะยุ่งยากทั้งในการคำนวณหา Combination และการยกกำลังค่า p และ q ซึ่งเป็นทศนิยม ดังนั้น ในทางปฏิบัติเรามักจะหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินามจากตารางทวินาม (Binomial table) ซึ่งมีอยู่ 2 ตารางด้วยกัน คือ

ก. ตารางทวินามเฉพาะค่าเดี่ยว

เมื่อต้องการจะหาความน่าจะเป็นของแต่ละค่าในการแจกแจงแบบทวินาม เช่น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 4 ครั้งในการทดลอง n ครั้ง ดังนั้น จะหาความน่าจะเป็นโดยใช้ตารางเฉพาะค่าเดี่ยว ซึ่งจากสูตรการหาความน่าจะเป็นแบบทวินามจะเห็นว่าจะต้องทราบค่าต่าง ๆ 3 ค่าด้วยกันคือ n (จำนวนครั้งที่ทำการทดลอง) p (ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ) และ x (จำนวนความสำเร็จที่ต้องการ) ตารางความน่าจะเป็นเฉพาะค่าเดี่ยวจะอยู่ในภาคผนวก

วิธีอ่านค่าจากตารางเริ่มแรกให้เลือกค่าของ p ซึ่งจะมีตั้งแต่ $p = 0.05$ ถึง $p = 0.95$ จากนั้นเลือกค่าของ n ซึ่งจะอยู่ทางซ้ายสุดจะเห็นว่าค่า n แต่ละค่านั้นจะมีจำนวนครั้งที่สำเร็จที่จะเป็นไปได้ (ตั้งแต่ 0 ถึง n) ถ้าเราต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดสำเร็จ 5 ครั้ง ($x = 5$) ในการทดลอง 8 ครั้ง ($n = 8$) และความน่าจะเป็นที่จะเกิดสำเร็จ (s) เท่ากับ 0.30 จะหาความน่าจะเป็นที่ต้องการโดยใช้ตารางเฉพาะค่าเดี่ยวได้ดังนี้

1. อ่านหัวตารางจนกระทั่งพบค่า p ที่เราต้องการหาในที่นี้ คือ $p = 0.30$

2. อ่านค่า $n = 8$ แล้วหาจำนวนครั้งที่ต้องการให้เกิดความสำเร็จ (x) ในที่นี้ $x = 5$

3. ความน่าจะเป็นที่ได้จะอยู่ที่แถวที่ได้ในข้อ (2) ตัดกับสดมภ์ที่ได้ในข้อ (1) ซึ่งคือความน่าจะเป็นที่ต้องการนั่นเอง ในที่นี้เท่ากับ 0.0467

ข. ตารางทวินามแบบสะสม

การใช้ตารางแบบสะสมมีวิธีการใช้เหมือนกับตารางทวินามเฉพาะค่าเดี่ยว คือ เริ่มแรกเลือกค่า p แล้วดูค่า n แล้วจึงเลือกจำนวนครั้งที่สำเร็จ (x) ค่าที่ตัดกันระหว่างสดมภ์ที่เลือก p และแถวที่เลือกค่า n และ x คือความน่าจะเป็นแบบสะสมที่ต้องการ ตารางนี้เป็นความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ (s) จำนวน x ครั้ง หรือน้อยกว่า x ครั้ง คือ $P[X \leq x]$ ซึ่งต่างจากตารางเฉพาะค่าเดี่ยวที่ให้ค่า $P[X = x]$ ตารางสะสมมีอยู่ในภาคผนวก เช่น จะหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 2 ครั้ง หรือน้อยกว่า 2 ครั้ง คือ $P[X \leq 2]$ จากการทดลอง 3 ครั้ง เมื่อ $P(S) = 0.40$ ดูจากตารางจะใช้ความน่าจะเป็นที่ต้องการเท่ากับ 0.9360

ตารางแบบสะสมนี้มีประโยชน์มาก เพราะปัญหาต่าง ๆ ทางสถิติมักจะต้องการให้หาความน่าจะเป็นแบบรวมเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งตารางแบบสะสมสามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นได้หลายแบบด้วยกัน ดังนี้

1. สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นแบบสะสมได้โดยตรงคือหาความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับหรือน้อยกว่า ค่าที่กำหนดให้คือ $P[X \leq x]$

2. สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นที่ X จะมากกว่าจำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จที่ต้องการ คือ $P[X \geq x]$

3. สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นที่ x จะเท่ากับจำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จที่ต้องการได้คือ $P[X = x]$ เช่น จะหา $P[X > 6]$ ถ้า $P[X \leq 6] = 0.72$ ก็จะหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
P[X > 6] &= 1 - P[X \leq 6] \\
&= 1 - 0.72 \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

คุณสมบัติของการแจกแจงแบบทวินาม

1. ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบทวินาม (μ) เท่ากับ np

2. ความแปรปรวนของการแจกแจงแบบทวินาม (σ^2) เท่ากับ npq

3. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงแบบทวินาม (σ) เท่ากับ $\sqrt{npq}$

ตัวอย่างเช่น หอดลูกเต๋า 1 ลูก 180 ครั้ง จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนครั้งที่จะได้หน้า 6

$$P[\text{ได้หน้า } 6] = p = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$n = 180$$

$$\therefore \quad \text{ค่าเฉลี่ย} = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30$$

$$\text{ส่วนเบียงเบนมาตรฐาน} = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}$$

$$= 5$$

5.4.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) เป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีบทบาทสำคัญมากในทางสถิติ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจกแบบปกติ คือ

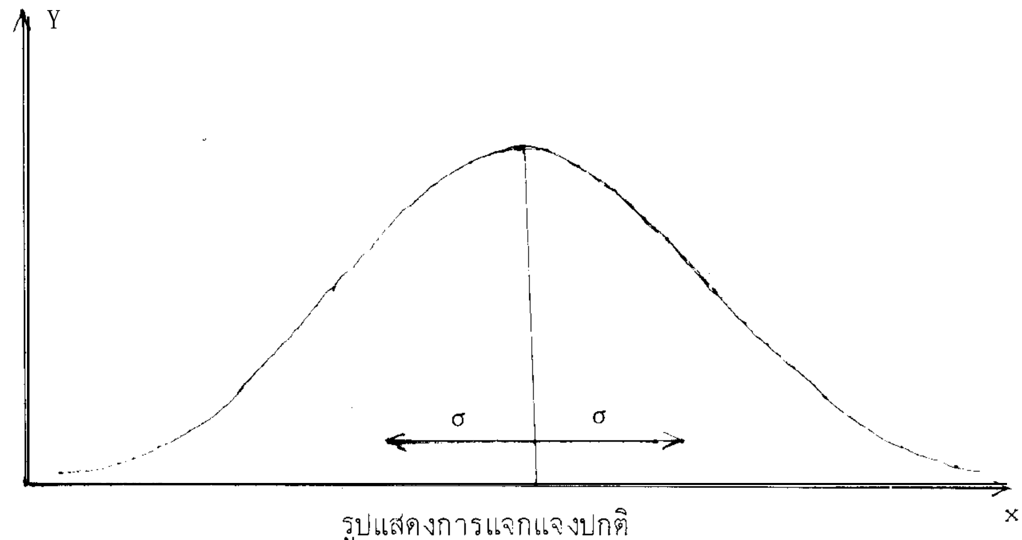
$$P[X = x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \, . \, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad , \; -\infty \leq x \leq +\infty$$

เมื่อ μ, σ เป็นค่าคงที่และ $\sigma > 0$

$$e = 2.71728...$$

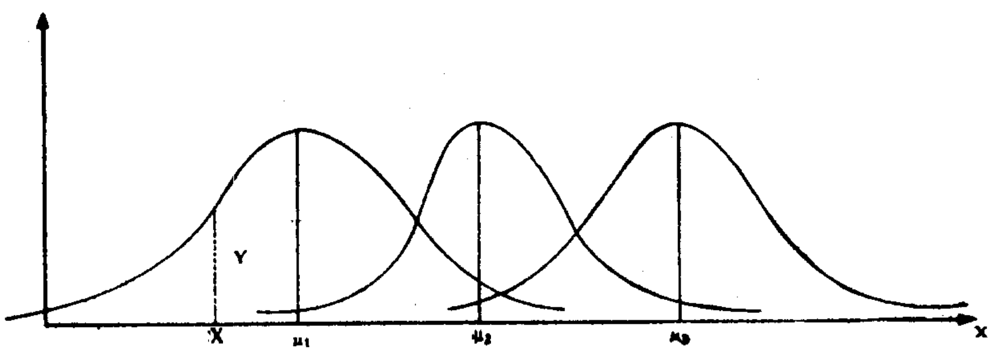
$$\pi = 3.14159$$

รูปร่างของโค้งปกติ (Normal curve) จะมีลักษณะเหมือนระฆังคว่ำ และมีลักษณะสมมาตร ส่วนสูงสุดของส้นโค้งอยู่ตรงกลางพอดี ซึ่งตรงกับค่าเฉลี่ย (μ) ดังรูป



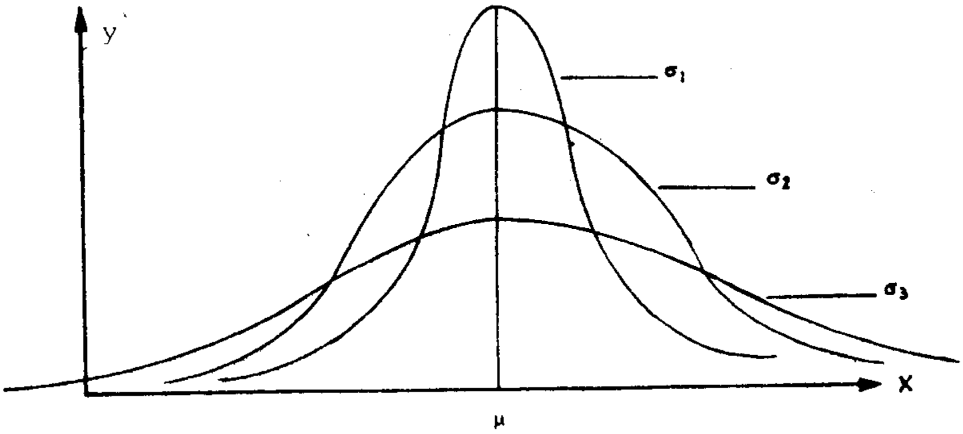
รูปแสดงการแจกแจงปกติ

เนื่องจากการแจกแจงแบบปกติขึ้นอยู่กับค่า μ และ σ โดยที่ μ แสดงที่ตั้งของโค้ง และแกนกลางของโค้ง และ σ แสดงรูปร่างของโค้งว่าเป็นโค้งที่กว้างหรือโค้งที่แคบ ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ σ คงที่และให้ μ เปลี่ยนแปลงไปแล้วโค้งปกติจะมีรูปร่างเหมือนเดิม แต่จุดสมมาตรจะเปลี่ยนแปลงไปดังรูป



การแจกแจงปกติที่มี σ เท่ากันแต่ μ ต่างกัน

ถ้ากำหนดให้ μ คงที่ และให้ σ เปลี่ยนแปลงไปรูปร่างของโค้งปกติจะไม่เหมือนกัน แต่จุดสมมาตรจะอยู่ที่เดียวกัน ดังรูป



แสดงการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากันแต่ส่วนเบี่ยงเบนต่างกัน

คุณสมบัติของโค้งปกติ

1. โค้งของการแจกแจงแบบปกติจะเป็นรูประฆังคว่ำ

2. มีลักษณะสมมาตร

3. พื้นที่ใต้โค้งรวมกันจะมีค่าเท่ากับ 1

4. การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่องโดยที่ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มมีได้ไม่จำกัดจาก $-\infty$ ถึง $+\infty$

5. การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ μ และ σ^2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ อ่านว่า X มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard normal distribution)

เนื่องจากเส้นโค้งปกติขึ้นอยู่กับค่า μ และ σ ดังนั้น จึงมีเส้นโค้งปกติแตกต่างกันมากมายหลายแบบ และเพื่อให้มีเส้นโค้งปกติแบบมาตรฐานแบบหนึ่ง โดยทั่วไปจึงสร้างเส้นโค้งปกติ

มาตรฐานที่มี $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ นั่นคือ เราสามารถเปลี่ยนเส้นโค้งใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ให้เป็นโค้งปกติมาตรฐานด้วยการแปลงค่าจากสูตร $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ซึ่ง z ก็ยังคงมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวนเท่ากับ 1 และเขียนแทนด้วย $Z \sim N(0,1)$ และเรียกตัวแปรเชิงสุ่ม Z ว่าเป็น Standard Normal Random Variable ซึ่งตัวแปรเชิงสุ่ม Z จะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่ง่ายกว่าเดิม คือ

$$P[Z=z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty \leq z \leq +\infty$$

การที่ต้องแปลงโค้งปกติใด ๆ ให้เป็นโค้งปกติมาตรฐานเนื่องจากพื้นที่ใต้โค้งปกติมีแต่ตาราง z ซึ่งอยู่ในภาคผนวก ดังนั้น เมื่อต้องการหาพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ระหว่างจุดใด ๆ ภายใต้โค้งปกติ จึงต้องแปลงค่าจุดนั้นให้อยู่ในรูปของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐานก่อนโดยใช้สูตร

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

แล้วจึงไปเปิดตารางหาพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ที่ต้องการได้

ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ

เป็นตารางที่แสดงค่าสะสมพื้นที่จากปลายซ้ายของโค้งไปสู่ปลายขวาของโค้ง ดังนั้น การหาพื้นที่ใต้โค้งจึงเป็นแบบสะสมคือ $P[Z \leq z]$ ซึ่งถ้าจะหา $P[Z > z]$ ก็หาได้จาก $1 - P[Z \leq z]$

วิธีใช้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ

ก่อนใช้ตารางจะต้องเปลี่ยนค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม x ให้เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม z เสียก่อน จาก $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ เมื่อเปลี่ยนแล้วก็นำไปเปิดตารางหาพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ใต้โค้งปกติได้ รูปร่างของตารางจะประกอบด้วยค่า z และพื้นที่ใต้โค้ง สำหรับค่า z นั้นจะอยู่ทั้งทาง row และทาง column โดยที่ทาง row คือค่า z ที่เป็นจำนวนเต็มและทศนิยม ตำแหน่งที่ 1 ซึ่งจะเริ่มตั้งแต่ -3.4 จนถึง 3.4 ส่วนทาง column คือค่า z ที่เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ 2 ซึ่งจะเริ่มตั้งแต่ 0.00, 0.01 จนถึง 0.09 และค่าในตารางที่อยู่ตรง row ตัดกับ column ที่ต้องการจะเป็นพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ใต้โค้งที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น จะหาพื้นที่ใต้โค้งที่ $z = -1.96$ ก็ให้ดูค่า z ทาง row จาก -3.4 ไล่ไปเรื่อย ๆ จนถึง -1.9 ซึ่งยังไม่ครบขาดอีก 0.06 ต้องดูค่า z ทาง column จาก 0.00 ไล่ไปเรื่อย ๆ จนถึง 0.06 ค่าของพื้นที่ในตารางตรงที่ตัดกัน

ระหว่าง row และ column ดังกล่าวจะเป็นความน่าจะเป็น หรือพื้นที่ใต้โค้งที่ต้องการซึ่งในที่นี้อ่านค่าได้ 0.0250

ตัวอย่าง 5.13 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม x มีการแจกแจงแบบปกติที่มี $\mu = 68$, $\sigma = 2.5$ จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม x จะมีค่าอยู่ระหว่าง 73 ถึง 75.5

จากโจทย์กำหนดให้ $x_1 = 73$, $x_2 = 75.5$

ต้องการหา $P[73 < x < 75.5]$

ดังนั้น ต้องแปลงค่า x ทั้ง 2 ค่าให้เป็นค่า z เสียก่อน ดังนี้

จาก $x_1 = 73 \quad \therefore z_1 = \frac{73-68}{2.5} = 2$

$x_2 = 75.5 \quad \therefore z_2 = \frac{75.5-68}{2.5} = 3$

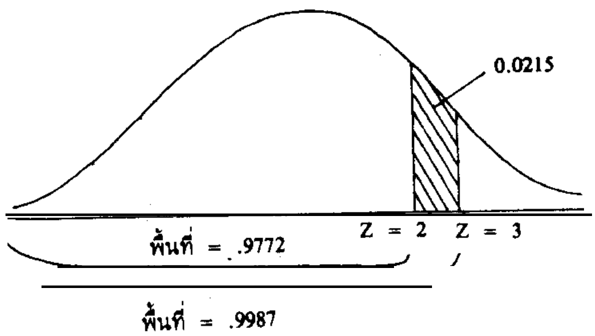
$$\therefore P[73 < x < 75.5] = P[2 < z < 3]$$

$$P[Z \le 3] - P[Z \le 2]$$

$$= 0.9987 - 0.9772$$

$$= 0.0215$$

เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงอธิบายความหมายของคำต่อไปนี้

   ก. ความน่าจะเป็น　　ข. การทดลอง　　ค. กลุ่มผลการทดลอง

   ง. เหตุการณ์　　จ. เหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

2. จงยกตัวอย่าง การทดลองทางสถิติมาให้ดู 3 การทดลอง

3. จงเขียนกลุ่มผลการทดลองของการทดลองต่อไปนี้

   ก. โยนเหรียญหนึ่งเหรียญจนกระทั่งได้หัว

   ข. จำนวนคนที่สูบบุหรี่ในห้องเรียนหนึ่งที่มีนักศึกษา 30 คน

4. ในกลุ่มผลการทดลองของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้หน้า 6 F เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าคู่ G เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าน้อยกว่า 3 จงเขียนผลการทดลองของแต่ละเหตุการณ์ต่อไปนี้

   ก. $E \cap G$　　ข. $F \cup G$　　ค. $(E \cap G)'$

5. การเรียงลำดับและการจัดกลุ่มแตกต่างกันอย่างไร จงอธิบาย

6. โยนลูกเต๋า 5 ลูก จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

7. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 4 ครั้ง จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

8. คำว่า "banana" ถ้านำมาเรียงเป็นคำใหม่จะได้ทั้งหมดกี่คำ

9. คำว่า "Statistics" ถ้านำมาเรียงเป็นคำใหม่จะได้ทั้งหมดกี่คำ

10. มีเลขโดด 5 ตัว คือ 1, 3, 4, 7, 9 จะนำมาสร้างเลขหลักสิบได้กี่จำนวน และนำมาสร้างเลขหลักพันได้กี่จำนวน

11. จงเขียนผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจากการโยนลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมทั้งคำนวณหาความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลอง และจงนำความน่าจะเป็นที่ได้ทั้งหมดมาบวกกัน

12. ชั้นเรียนวิชาสถิติชั้นหนึ่งมีนักศึกษา 30 คน เป็นชาย 24 คน และหญิง 6 คน

ก. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน

ข. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน โดยให้มีผู้หญิงรวมอยู่ด้วย 2 คน

ค. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน โดยให้มีผู้หญิงรวมอยู่ด้วย 1 คน

ง. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นในข้อ ก.

จ. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นในข้อ ข.

ฉ. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นในข้อ ค.

13. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็น

ก. ที่ลูกเต๋าจะหงาย 6 จุด

ข. ที่ลูกเต๋าจะหงาย 5 จุด, 6 จุด หรือ 7 จุด

ค. ที่ลูกเต๋าจะหงายได้จุดเป็นเลขคู่

ง. ที่ลูกเต๋าจะหงายได้จุดน้อยกว่า 4 จุด

14. ให้ $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.80$ และ $P(A \cap B) = 0.15$

ก. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกันหรือไม่ทำไม?

ข. จงหา $P(B')$

ค. จงหา $P(A \cup B)$

15. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน จงหา

ก. $P(A \cup B)$

ข. $P(A \cup B)'$

ค. $P(A \cap B)$

16. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 หรือ 7 ครั้ง ในสัปดาห์หนึ่งระหว่างตีหนึ่งถึง 6 โมงเช้า มีดังนี้ตามลำดับ คือ 0.08, 0.15, 0.20, 0.25, 0.18, 0.07, 0.04 และ 0.01 จงหาความน่าจะเป็นที่ในสัปดาห์หนึ่งระหว่างระยะเวลาดังกล่าวจะเกิดอุบัติเหตุดังนี้

ก. น้อยกว่า 3 ครั้ง ข. 3 ครั้งหรือน้อยกว่า ค. 3 ครั้งเท่านั้น

ง. ไม่มีอุบัติเหตุเลย จ. มากกว่า 7 ครั้ง

17. จงหาค่าของ

ก. $\binom{3}{2}$ ข. $\binom{4}{4}$ ค. $\binom{5}{1}$ ง. $\binom{9}{6}$

18. จงหาค่าของ

ก. ${}^{3}P_{2}$ ข. ${}^{4}P_{4}$ ค. ${}^{5}P_{1}$ ง. ${}^{9}P_{6}$ จ. ${}^{1}P_{0}$

19. จงอธิบายว่าเพราะอะไรความน่าจะเป็นต่อไปนี้จึงใช้ไม่ได้

ก. $P(A) = -0.45$

ข. $P(A) = 1.30$

ค. $P(A) = 0.60$ และ $P(A') = 0.60$

ง. $P(A \cup B) = 1.04$

20. จงนิยามความหมายของคำต่อไปนี้

ก. การแจกแจงแบบทวินาม

ข. การแจกแจงแบบปกติ

21. สมมติว่ามี 10% ของสกรูที่ผลิตจากเครื่องจักรอัตโนมัติเครื่องหนึ่งเป็นสกรูที่ใช้ไม่ได้ จงหาความ่าจะเป็นที่สกรู 30 ตัวที่เลือกมาอย่างสุ่มจะมี

ก. สกรูที่ใช้ไม่ได้อย่างมากที่สุด 3 ตัว

ข. สกรูที่ใช้ไม่ได้อย่างน้อยที่สุด 3 ตัว

ค. สกรูที่ใช้ไม่ได้ระหว่าง 2 ถึง 4 ตัว

22. ให้ X เป็นจำนวนหัวที่ได้จากการทอดเหรียญ 50 ครั้ง จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

23. ให้ $X \sim N(100, 225)$ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. $P[X \leqslant 92.5]$

ข. $P[X \geqslant 76]$

ค. $P[X \leqslant 107.5]$

ง. $P[X \geqslant 124]$

24. การแจกแจงความสูงของนักเรียนเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็น 2.3 และ 0.3 นิ้วตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นของเด็กที่มีความสูง 3.1 นิ้ว หรือมากกว่า

25. สุ่มสินค้ามา 10 ชิ้น จากกระบวนการผลิตหนึ่งที่มีสินค้าชำรุด 10% จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีสินค้าชำรุดเกิน 3 ชิ้น

26. หยิบหลอดไฟ 3 หลอดจากกลุ่มที่มี 15 หลอด และในกล่องนี้มีหลอดเสียอยู่ 5 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด

27. บริษัทผลิตยาสีฟันยี่ห้อหนึ่งโฆษณาว่า 50% ของแม่บ้านในอำเภอบางระกำจะใช้ยาสีฟันของบริษัทจากการสุ่มตัวอย่าง แม่บ้านในอำเภอบางระกำมา 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบว่าแม่บ้านอย่างน้อย 1 คน ใช้ยาสีฟันของบริษัท