บทที่ 2
ตรรกวิทยา (Logic)

ตรรกวิทยา เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องเหตุผล (science of reasoning) โดยกำหนดเหตุและผลในรูปของข้อความและสัญลักษณ์ทางตรรกวิทยา (symbolic logic)

การตัดสินใจในชีวิตประจำวันของมนุษย์ขึ้นอยู่กับ โอกาส อำนาจ กำลังความคิดเห็นของคนส่วนใหญ่ การอุปมาน หรือตรรกวิทยา แต่การตัดสินใจตามแนวทางคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยพื้นฐานทางตรรกวิทยา

2.1 โครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์ (Mathematical System) ระบบคณิตศาสตร์แต่ละระบบประกอบด้วย

2.1.1 อนิยามแท (Undefined term) หรืออนิยาม หมายถึงบทหรือคำศัพท์ที่ไม่ต้องให้คำจำกัดความ เป็นคำศัพท์รากฐาน เช่นคำว่า จุด เส้น เซต เป็นต้น

ถ้าให้คำจำกัดความของจุด หมายถึงสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ความยาว ความหนา มีแต่ตำแหน่ง จะเห็นได้ชัดว่าขัดแย้งกับการปฏิบัติ ไม่ว่าจะสร้างจุดโดยใช้ปากกา ดินสอ หรือชอล์กก็ตาม สามารถวัดความกว้าง ความยาว และความหนาได้ไม่มากก็น้อย จึงให้จุดเป็นอนิยาม ใช้พูดจนเกิดความเข้าใจได้เอง เช่น

จุด A จุด B

ดวงดาวบนท้องฟ้าอยู่เรียงกันเป็นจุด ๆ ระยิบระยับ

คนสองคนเดินพบกันที่จุด ๆ หนึ่ง

ถ้าให้คำจำกัดความของเส้น หมายถึงสิ่งที่ไม่มีความกว้าง ความหนา มีแต่ความยาว ก็ขัดแย้งกับสิ่งที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน เช่น เชือก เส้นก๋วยเตี๋ยว ฯลฯ จึงให้เส้นเป็นอนิยาม เป็นต้น

2.1.2 นิยามแท (Defined term) หมายถึงบทหรือศัพท์ที่ต้องให้คำจำกัดความให้ชัดเจน โดยใช้ศัพท์ต่าง ๆ ของอนิยาม

ตัวอย่างของคำที่ต้องให้นิยาม เช่น เมฆ หมอก ลม ฝน สามเหลี่ยมหน้าจั่ว สี่เหลี่ยมคางหมู เป็นต้น

นั่นคือ อนิยามบทใช้ในการอธิบายนิยามบท

2.1.3 สัจพจน์ (Axiom หรือ Postulate) หมายถึงข้อความที่ยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ใช้อนิยาม หรือ (และ) นิยามในการสร้างสัจพจน์ ดังตัวอย่าง

จุดสองจุดที่แตกต่างกัน ทำให้เกิดเส้นตรงได้เพียงเส้นเดียวและเส้นเดียวเท่านั้น

สัจพจน์ของเปอาโน (Peano's Postulates) :

ให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ และ P_n แทนสัจพจน์ของเปอาโน เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ แล้ว

P_1 : 1 เป็นจำนวนนับ ดังนั้น $1 \in N$

P_2 : ถ้า n เป็นจำนวนนับใด ๆ แล้ว จะมี $n + 1$ เป็นจำนวนนับเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่เป็นพจน์ตามหลังของ n เขียนแทนด้วย n^*

P_3 : จำนวนนับ 1 ไม่เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนนับใด ๆ

P_4 : ถ้า x และ y เป็นจำนวนนับสองจำนวนใด ๆ ซึ่ง $x^* = y^*$ แล้ว $x = y$

P_5 : หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)

ถ้า M เป็นเซตย่อยของ N ซึ่งมีคุณสมบัติ

(1) $1 \in M$

และ (2) สำหรับทุก ๆ $x \in N$ ถ้า $x \in M$ แล้ว $x^* \in M$ ด้วย ดังนั้น $M = N$

อีกตัวอย่างหนึ่งของสัจพจน์

สิ่งที่เท่ากันเมื่อเพิ่มด้วยสิ่งที่เท่ากันผลย่อมเท่ากัน

2.1.4 ทฤษฎี (Theorem) เกิดจากการใช้สัจพจน์ค้นหาความจริงอื่น ๆ ต่อไป โดยใช้เหตุผลทางตรรกวิทยา ความจริงที่ได้จากการพิสูจน์นี้เรียกว่าทฤษฎี และนำไปใช้อ้างเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่น ๆ ได้ เช่นเดียวกับสัจพจน์

ทฤษฎีบท ๆ หนึ่งอาจจะเป็นจริงในระบบหนึ่ง แต่อาจไม่เป็นจริงในอีกระบบหนึ่งได้ เช่น "ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันย่อมเท่ากับสองมุมฉาก" ทฤษฎีนี้เป็นจริงในระบบเรขาคณิตยูคลิด[1] (Euclidean Geometry) แต่เมื่อเปลี่ยนสัจพจน์บางข้อของยูคลิดจะได้ระบบเรขาคณิตที่ไม่ใช่ของยูคลิด เช่น ระบบเรขาคณิตทรงกลม (Spherical Geometry) ทำให้ทฤษฎีดังกล่าวไม่เป็นจริงในระบบนี้

ความสัมพันธ์ระหว่างสัจพจน์ และทฤษฎีแสดงด้วยแผนผังดังนี้

$$\text{สัจพจน์} \xrightarrow{\text{ตรรกศาสตร์}} \text{ทฤษฎี}$$

ตัวอย่างโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์

อนิยาม : p, q, r

นิยาม : 1. $p^r = \overbrace{p \times p \times p \times \ldots \times p}^{r\text{ จำนวน}}$

2. จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่อยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

3. จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

4. จำนวนจริง คือ จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

สัจพจน์ : 1. เมื่อ p, q, r เป็นจำนวนจริงใด ๆ ย่อมได้ $(p.q)^r = p^r.q^r$

2. ผลคูณของจำนวนตรรกยะย่อมเป็นจำนวนตรรกยะ

ทฤษฎี : ถ้า 2^{ℓ} เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว 4^{ℓ} เป็นจำนวนตรรกยะด้วย

จะเห็นว่าทฤษฎีส่วนใหญ่เกิดจากการใช้ตรรกวิทยา จึงต้องศึกษาตรรกวิทยาเสียก่อน

---

[1] Euclid นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ระหว่างปี 365-275 ก่อนคริสตศักราช

2.2 ประพจน์และประโยคเปิด

2.2.1 ประพจน์ (Propositions or Statements)

นิยาม 2.2.1 ประพจน์ คือข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธ ซึ่งเป็นจริงหรือเท็จ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ถ้าประพจน์ใดเป็นจริง กล่าวได้ว่าประพจน์นั้นมี**ค่าความจริง** (truth value) เป็นจริง ประพจน์ใดเป็นเท็จ กล่าวได้ว่าประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.1

ประโยคที่เป็นประพจน์	**ค่าความจริง**
$3+2 > 8$	เท็จ
วันที่ 5 ธันวาคมของทุก ๆ ปีเป็นวันเฉลิมพระชนมพรรษา	จริง
ดวงจันทร์ใหญ่กว่าโลก	เท็จ
กระบวนวิชา SC 101 เป็นวิชาพื้นฐานทั่วไปของคณะมนุษยศาสตร์ ม.ร.	จริง
สำหรับเซต A ใด ๆ $\emptyset \subseteq A$	จริง
จำนวนเฉพาะบางจำนวนเป็นเลขคู่	จริง
กรุงเทพฯ เป็นเมืองที่ผู้คนไม่พลุกพล่าน	เท็จ
π เป็นจำนวนอตรรกยะ	จริง

สำหรับประโยคคำถาม คำสั่ง ขอร้อง อ้อนวอน ห้าม ประโยคแสดงความปรารถนา หรือประโยคอุทาน เป็นประโยคที่ไม่สามารถบอกค่าความจริงได้ว่าจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง ประโยคดังกล่าวนี้จึงไม่เป็นประพจน์

ตัวอย่าง 2.2

ประโยคที่ไม่เป็นประพจน์	ลักษณะประโยค
เธอชอบเรียนคณิตศาสตร์ไหม	คำถาม
ตั้งใจเรียนนะ	คำสั่ง
กรุณาส่งจดหมายให้ด้วย	ขอร้อง
พระเจ้าโปรดช่วยด้วย	อ้อนวอน
อย่าเดินลัดสนาม	ห้าม
เทอมนี้ฉันอยากได้ G 5 ตัว	แสดงความปรารถนา
อุ๊ยตาย ! ได้ F อีกแล้ว	อุทาน

ประโยคบางชนิดไม่สามารถบอกค่าความจริงได้แน่นอนว่าเป็นจริงหรือเท็จ เช่น

มีสิ่งมีชีวิตอยู่บนดาวอังคาร

มนุษย์บนดาวพฤหัสชอบเล่นดนตรี

ชาวสวนดีกว่าชาวนา

ประโยคประเภทนี้มีโอกาสที่จะเป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้นจึงถือว่าเป็นประพจน์ด้วย

หมายเหตุ : ใช้สัญลักษณ์ $p, q, r, \ldots$ แทนประพจน์

ตัวอย่างเช่น

p : แดงเป็นนายกรัฐมนตรี

q : ฉันเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยรามคำแหง เป็นต้น

2.2.2 ประโยคเปิด (Open Sentences)

พิจารณาประโยค $3+2=5$ ซึ่งเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง แต่ถ้าเขียนใหม่เป็น $3 + \square = 5$ ไม่สามารถบอกค่าความจริงได้ จนกว่าจะหาจำนวนใดจำนวนหนึ่งมาเติมลงใน $\square$ จึงจะบอกค่าความจริงได้

ถ้าให้ x แทนจำนวนใด ๆ ดังนั้น $3 + \square = 5$ จึงเขียนได้เป็น $3 + x = 5$ เรียก x ว่า **ตัวแปร** และเรียกประโยค $3 + \square = 5$ หรือ $3 + x = 5$ ว่า**ประโยคเปิด**

ดังนั้น ประโยคเปิดไม่ใช่ประพจน์ เมื่อนำสมาชิกใด ๆ จากเอกภพสัมพัทธ์เติมลงไป หรือแทนค่าลงไปในตัวแปร แล้วทำให้ประโยคเปิดนั้นกลายเป็นประโยคปิด หรือประพจน์

ให้ $P(x), Q(x), \ldots$ แทนประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร เช่น

$P(x)$: $3 + x = 5$

และ $U = \{-1, 1, 2\}$

ดังนั้น $P(-1)$: $3 + (-1) = 5$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$P(1)$: $3 + 1 = 5$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$P(2)$: $3 + 2 = 5$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

เป็นต้น

นิยาม 2.2.1 ประโยคเปิด คือ ประโยคที่มีตัวแปร ไม่เป็นประพจน์สามารถทำให้เป็นประพจน์ได้ โดยการแทนที่ตัวแปรนั้นด้วยสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 2.3

ประโยคเปิด	ตัวแปร
$y + 3 > 8$	y
$x^2 - 6x + 4 = 0$	x
เขาเป็นคนเก่ง	เขา
$x + 5 = 5 + x$	x
$\square - 6 = 34$	$\square$

สำหรับประโยคเปิดที่มีตัวแปรมากกว่า 1 ตัวขึ้นไป เช่น มี 2 ตัวแปรใช้ $P(x,y)$, $Q(x,y), \ldots$ แทน เช่น

$P(x,y)$: $x + 3y > 10$

$Q(x,y)$: $x^2 + 3xy + y^2 = 0$

$R(x,y)$: x เป็นพี่ของ y

R(แดง,ดำ) : แดงเป็นพี่ของดำ

$S(x,y)$: x หาร y ลงตัว

$S(2,4)$: 2 หาร 4 ลงตัว

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ $x + 2 < 5$ เป็นประโยคเปิด ซึ่งมี $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์

ถ้า $P(x)$: $x + 2 < 5$

ดังนั้น

$P(0)$: $0 + 2 < 5$ จริง

$P(1)$: $1 + 2 < 5$ จริง

$P(2)$: $2 + 2 < 5$ จริง

$P(3)$: $3 + 2 < 5$ เท็จ

$P(4)$: $4 + 2 < 5$ เท็จ

$P(5)$: $5 + 2 < 5$ เท็จ

เพราะฉะนั้น เซตคำตอบของประโยคนี้ คือ $\{0,1,2\}$

2.3 ตัวเชื่อมทางตรรกวิทยา (Logical Connectives)

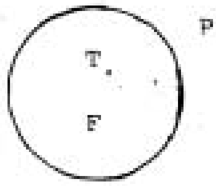
ตัวเชื่อมทางตรรกวิทยา ทำหน้าที่เชื่อมประพจน์ให้เกิดเป็นประพจน์ใหม่ ภาษาที่ใช้พูดหรือเขียนในชีวิตประจำวันนั้น เราพูดเป็นข้อความ (ประพจน์) หลาย ๆ ข้อความมาเรียงต่อหรือเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม เช่น เชื่อมด้วยคำว่า "ไม่" "หรือ" "และ" "ถ้า ... แล้ว ..." "... ก็ต่อเมื่อ..." เป็นต้น ได้ทราบมาแล้วว่า ประพจน์มีค่าความจริงอย่างใดอย่างหนึ่งในสองอย่าง คือ จริง หรือ เท็จ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ใช้สัญลักษณ์ "T" (True) แทนค่าความจริงของประพจน์นั้น และประพจน์ที่มีความจริงเป็นเท็จใช้สัญลักษณ์ "F" (False) แทนค่าความจริงของประพจน์นั้น

ตัวเชื่อมแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

1. ตัวเชื่อมที่ใช้เชื่อมประพจน์เดียวเรียกว่า unary connective

สำหรับประพจน์ที่มีเพียงประพจน์เดียว สมมติว่า เป็น p จะต้องพิจารณาค่าความจริงทั้ง 2 กรณี คือ จริง (T) กับเท็จ (F) เมื่อไม่กำหนดค่าความจริงที่แน่นอนของประพจน์ให้

แสดงด้วยแผนผัง



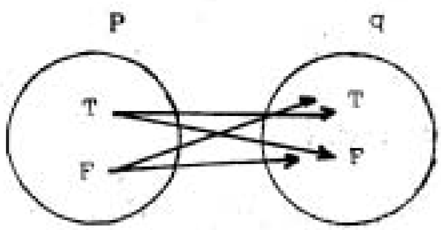
แสดงด้วยตาราง

p
T
F

2. ตัวเชื่อมที่ใช้เชื่อมประพจน์ตั้งแต่สองประพจน์ขึ้นไป เรียกว่า binary connective

สำหรับประพจน์สองประพจน์ สมมติว่าเป็น p กับ q เมื่อไม่กำหนดค่าความจริงที่แน่นอนให้ จะต้องพิจารณาทั้งหมด 4 กรณี ดังนี้

แสดงด้วยแผนผัง



:

T T
T F
F T
F F

แสดงด้วยตาราง

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

ทั้ง 4 กรณีวิเคราะห์ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 p เป็นจริง (T) q เป็นจริง (T)

กรณีที่ 2 p เป็นจริง (T) q เป็นเท็จ (F)

กรณีที่ 3 p เป็นจริง (F) q เป็นจริง (T)

กรณีที่ 4 p เป็นเท็จ (F) q เป็นเท็จ (F)

หมายเหตุ : ถ้ามีสามประพจน์หรือมากกว่า ก็สามารถแสดงได้ด้วยแผนผังและตารางเช่นเดียวกัน แต่จะทำให้เส้นที่ลากเชื่อมโยงดังแผนผังดูสลับซับซ้อน

จึงได้ข้อสังเกตว่า ถ้ามีประพจน์เชื่อมกัน n ประพจน์ จะได้ค่าความจริงที่ต้องพิจารณาทั้งหมด 2^n กรณี เช่น

ถ้ามี 3 ประพจน์คือ p, q และ r ต้องวิเคราะห์ค่าความจริงทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี ซึ่งแสดงด้วยตารางดังนี้

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

2.3.1 นิเสธของประพจน์

นิเสธของประพจน์เป็น **unary connective** ทำหน้าที่ปฏิเสธประพจน์เดิม

ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ นิเสธของ p แทนด้วย ~p ซึ่งอ่านว่า **นิเสธของ** p หรือ **ไม่ใช่** p (not p) หรือไม่จริงที่ว่า p คือประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์ p ดังนั้น

ถ้า p มีค่าความจริงเป็น T แล้ว ~p จะมีค่าความจริงเป็น F

และ ถ้า p มีค่าความจริงเป็น F แล้ว ~p จะมีค่าความจริงเป็น T

แสดงด้วย**ตารางค่าความจริง** (Truth Table) ดังนี้

p	~p
T	F
F	T

ตัวอย่าง 2.5

p : $2 + 5 = 3$ (F)

$\sim p$: $2 + 5 \neq 3$ (T)

ตัวอย่าง 2.6

p : พลเอกชาติชาย ชุณหะวัณ เป็นนายกรัฐมนตรี (T)

$\sim p$: พลเอกชาติชาย ชุณหะวัณ ไม่ เป็นนายกรัฐมนตรี (F)

หมายเหตุ

$\sim p$ ทำหน้าที่ปฏิเสธประพจน์หรือข้อความเดิมเท่านั้น จะเปลี่ยนเป็นข้อความใหม่ไม่ได้ ยกเว้นประพจน์ที่เป็นไปได้สองทางเท่านั้น

เช่น p : นุ้ยเป็นคนสวย

$\sim p$: นุ้ยเป็นคนไม่สวย

จะกล่าวว่า $\sim p$: นุ้ยเป็นคนขี้เหร่ไม่ได้ เพราะไม่สวย อาจหมายถึงพอดูได้

ตัวเชื่อมต่อไปนี้เป็น **binary connective** ทำหน้าที่เชื่อมประพจน์ย่อย (แต่ละประพจน์) ให้เกิดประพจน์ใหม่ ซึ่งเรียกว่า**ประพจน์ผสม (Compound statement)**

2.3.2 และ (conjunction)

ให้ p, q เป็นประพจน์ใด ๆ เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วยตัวเชื่อม "และ" จะได้ประพจน์ใหม่คือ $p \wedge q$ อ่านว่า p และ q

เรียก p, q ว่า ประพจน์ย่อย หรือประพจน์

และ เรียก $p \wedge q$ ว่า ประพจน์ผสม หรือประพจน์

ค่าความจริงของ $p \wedge q$ มีดังนี้

ถ้า p เป็น T , q เป็น T แล้ว $p \wedge q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T , q เป็น F แล้ว $p \wedge q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F , q เป็น T แล้ว $p \wedge q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F , q เป็น F แล้ว $p \wedge q$ เป็น F

แสดงด้วยตารางค่าความจริงดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ข้อสังเกต

1. $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น F ถ้ามี p หรือ q อย่างน้อย 1 ประพจน์เป็น F
2. $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น T กรณีเดียวเท่านั้น คือ เมื่อ p เป็น T, q เป็น T
3. $p \wedge q = q \wedge p$ (คุณสมบัติการสลับที่)

หมายเหตุ

ตัวเชื่อม $\wedge$ นอกจากแทนด้วย "และ" แล้ว อาจแทนด้วยคำว่า "แต่" หรือ "ในขณะที่"

ตัวอย่าง 2.7

ประพจน์	ค่าความจริง
1) $(2 + 2 < 4 + 2) \wedge (1 + 3$ เป็นเลขคี่$)$	F

T F

F

ประพจน์	ค่าความจริง
2) โลกกลม ∧ นกมี 2 ขา	T

2.3.3 หรือ (Disjunction)

ให้ p, q เป็นประพจน์ใด ๆ เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วยตัวเชื่อม "หรือ" จะได้ประพจน์ใหม่ คือ p หรือ q เขียนแทนด้วย $p \vee q$

หรือ ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง

ค่าความจริงของ $p \vee q$ มีดังนี้

ถ้า p เป็น T q เป็น T จะได้ $p \vee q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T q เป็น F จะได้ $p \vee q$ เป็น T

ถ้า p เป็น F q เป็น T จะได้ $p \vee q$ เป็น T

ถ้า p เป็น F q เป็น F จะได้ $p \vee q$ เป็น F

แสดงด้วยตารางค่าความจริงดังนี้

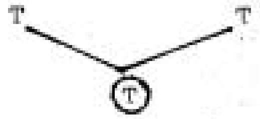
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ข้อสังเกต

1. $p \vee q$ เป็น T ถ้ามี p หรือ q อย่างน้อย 1 ประพจน์เป็น T
2. $p \vee q$ เป็น F กรณีเดียวเท่านั้น คือเมื่อ p เป็น F, q เป็น F
3. $p \vee q \equiv q \vee p$

ตัวอย่าง 2.8

ประพจน์	ค่าความจริง
1) 4 เป็นเลขคู่ **หรือ** 3 เป็นเลขคี่	T



ประพจน์	ค่าความจริง
2) อเมริกาบุกคูเวต **หรือ**น้ำมันขึ้นราคา	T

ประพจน์	ค่าความจริง
3) $5 + 6 = 10 \vee 2$ เป็นจำนวนอตรรกยะ	F

2.3.4 ถ้า...แล้ว... (Condition)

ให้ p, q เป็นประพจน์ใด ๆ เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วยตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..." จะได้ประพจน์ใหม่คือ ถ้า p แล้ว q เขียนแทนด้วย $p \Rightarrow q$

p : น้อยถูกรางวัล

q : น้อยให้นิดสิบบาท

ดังนั้น $p \Rightarrow q$: **ถ้า**น้อยถูกรางวัล**แล้ว**น้อยให้นิดสิบบาท เป็นประโยคเงื่อนไข

ค่าความจริงของ $p \Rightarrow q$ มีดังนี้

ถ้า p เป็น T q เป็น T จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T q เป็น F จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F q เป็น T จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น T

ถ้า p เป็น F q เป็น F จะได้ $p \Rightarrow q$ เป็น T

แสดงด้วยตารางค่าความจริงดังนี้

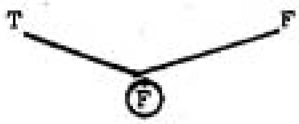
p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ข้อสังเกต

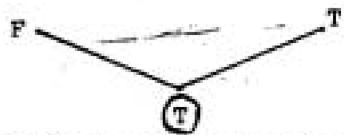
1. ถ้า p หรือตัวต้นเป็น F แล้ว $p \Rightarrow q$ เป็น T
2. ถ้า q หรือตัวตามเป็น T แล้ว $p \Rightarrow q$ เป็น T
3. $p \Rightarrow q \neq q \Rightarrow p$

ตัวอย่าง 2.9

ประพจน์	**ค่าความจริง**
1) $(2 + 2 = 4) \Rightarrow (2 + 3 = 6)$	F



2) เดือนมิถุนายนมี 28 วัน $\Rightarrow (28 + 2 = 30)$	T



3) เชียงใหม่เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย $\Rightarrow$ ยะลาอยู่เหนือกรุงเทพฯ

ตัวอย่าง 2.10 จงวิเคราะห์ค่าความจริงของ "ถ้าแดงปลูกต้นไม้แล้วโลกจะมีสีเขียว"

วิธีทำ ให้ p : แดงปลูกต้นไม้

q : โลกมีสีเขียว

วิเคราะห์ค่าความจริงของ $p \Rightarrow q$ เป็นกรณี ๆ ได้ดังนี้

ก. p เป็น T หมายความว่า แดงปลูกต้นไม้ จริง

q เป็น T หมายความว่า โลกเป็นสีเขียว จริง

ดังนั้น ประโยคนี้เป็นจริง เพราะเป็นไปตามเงื่อนไข

ข. p เป็น T หมายความว่า แดงปลูกต้นไม้ จริง

q เป็น F หมายความว่า โลกไม่เป็นสีเขียว

ดังนั้น ประโยคนี้เป็นเท็จ เพราะไม่เป็นไปตามเงื่อนไข

ค. p เป็น F หมายความว่า แดงไม่ปลูกต้นไม้

q เป็น T หมายความว่า โลกเป็นสีเขียว จริง

ดังนั้น ประโยคนี้เป็นจริง เพราะไม่ขัดแย้งกับเงื่อนไข อาจเป็นสีเขียวด้วยเหตุอื่น

ง. p เป็น F หมายความว่า แดงไม่ปลูกต้นไม้

q เป็น F หมายความว่า โลกไม่เป็นสีเขียว

ดังนั้น ประโยคนี้เป็นจริง เพราะไม่ขัดแย้งกับเงื่อนไข

2.3.5 ...ก็ต่อเมื่อ... (Bicondition)

ให้ p, q เป็นประพจน์ใด ๆ เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วยตัวเชื่อม "...ก็ต่อเมื่อ..." จะได้ประพจน์ใหม่คือ p **ก็ต่อเมื่อ** q เขียนแทนด้วย $p \Leftrightarrow q$

ค่าความจริงของ $p \Leftrightarrow q$ มีดังนี้

ถ้า p เป็น T q เป็น T จะได้ $p \Leftrightarrow q$ เป็น T

ถ้า p เป็น T q เป็น F จะได้ $p \Leftrightarrow q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F q เป็น T จะได้ $p \Leftrightarrow q$ เป็น F

ถ้า p เป็น F q เป็น F จะได้ $p \Leftrightarrow q$ เป็น T

แสดงด้วยตารางค่าความจริงดังนี้

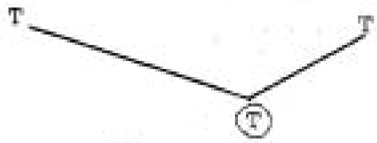
p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ข้อสังเกต

1. $p \Leftrightarrow q$ เป็น T เมื่อ p, q มีค่าความจริงเหมือนกันทั้งคู่
2. $p \Leftrightarrow q$ เป็น F เมื่อ p, q มีค่าความจริงต่างกัน
3. $p \Leftrightarrow q \;=\; q \Leftrightarrow p$
4. $p \Leftrightarrow q \;=\; (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

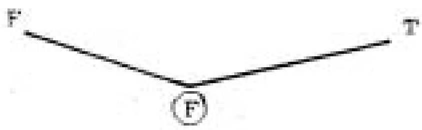
ตัวอย่าง 2.11

ประพจน์	ค่าความจริง
1) $\frac{22}{9}$ เป็นจำนวนตรรกยะ**ก็ต่อเมื่อ** π เป็นจำนวนอตรรกยะ	T



2) $2 > 3$ ก็ต่อเมื่อ $5 + 3 = 6$	T

3) $\sqrt{-1}$ เป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ 3 เป็นจำนวนนับ	F



2.4 การหาค่าความจริงของประพจน์

การหาค่าความจริงของประพจน์ จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่กำหนดค่าความจริงให้ และกรณีที่ไม่กำหนดค่าความจริงให้

2.4.1 กรณีที่กำหนดค่าความจริงให้

เมื่อกำหนดค่าความจริงของแต่ละประพจน์ย่อยให้ สามารถหาค่าความจริงของประพจน์ผสมได้ โดยใช้ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อมที่กำหนดให้ สำหรับประพจน์ผสมที่มีตัวเชื่อมหลายตัว จะใช้วงเล็บเช่นเดียวกับเซตที่มีเครื่องหมายดำเนินการ (operation) มากกว่าหนึ่ง เพื่อชี้บอกว่าจะพิจารณาค่าความจริงที่ใดก่อน ค่าความจริงที่ได้จากการพิจารณาตัวเชื่อมตัวสุดท้าย หรือเรียกว่าตัวเชื่อมหลัก (main connective) จะเป็นค่าความจริง หรือเป็นคำตอบของประพจน์ผสมนั้น

หมายเหตุ : ในบางครั้งจะใช้คำว่า "ประพจน์" แทนคำว่า "ประพจน์ย่อย" และ "ประพจน์ผสม" เพราะเมื่อนำประพจน์ย่อย หรือประพจน์แต่ละประพจน์มาเชื่อมเข้าด้วยกันโดยใช้ตัวเชื่อมต่าง ๆ แล้วยังคงเป็นประพจน์

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดให้ค่าความจริงของ p, q เป็น T และ F ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $p \Rightarrow \sim q$

วิธีทำ เขียนแผนภาพหาค่าความจริงได้ดังนี้

$p \Rightarrow \sim q$

T F

T

T

ดังนั้น ค่าความจริงของประพจน์เป็นจริง

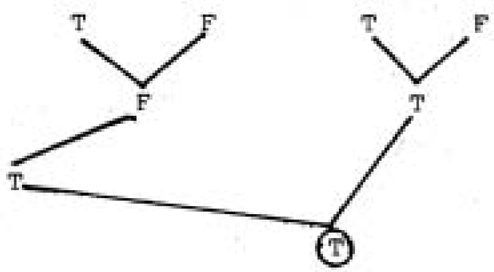
อธิบาย

1. เขียนค่าความจริง T และ F ใต้ประพจน์ p และ q ตามลำดับ
2. เพราะว่า q เป็น F ฉะนั้น ~q เป็น T จึงเขียน T ใต้ตัวเชื่อม ~
3. เนื่องจาก p เป็น T และ ~q เป็น T ดังนั้น p $\Rightarrow$ ~q เป็น T

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดให้ค่าความจริงของ p, q, r และ s เป็น T, T, F และ F ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของ $[\sim(p \wedge s)] \Rightarrow (q \vee r)$

วิธีทำ เขียนแผนภาพหาค่าความจริงได้ดังนี้

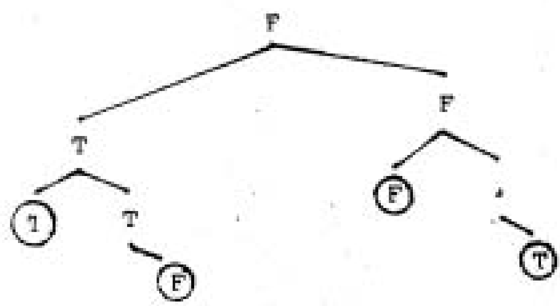
$[\sim (p \wedge s)] \Rightarrow (q \vee r)$



ดังนั้น ค่าความจริงของประพจน์เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.14 กำหนดให้ค่าความจริงของ $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s

วิธีทำ $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$



ดังนั้น ค่าความจริงของ p, q, r และ s ตามลำดับคือ

T, F, F และ T

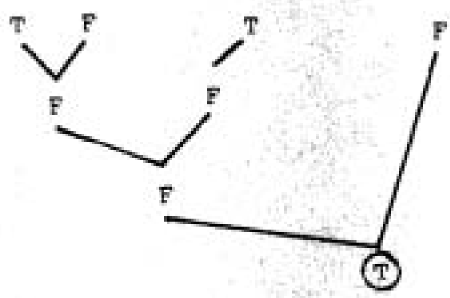
ตัวอย่าง 2.15 กำหนดให้ค่าความจริงของ $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ

$[(p \wedge q) \vee \sim p] \Leftrightarrow q$

วิธีทำ เพราะว่า $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น จากตารางค่าความจริงของตัวเชื่อม $\Rightarrow$ ทำให้ทราบว่าค่าความจริงของ p เป็น T และค่าความจริงของ q เป็น F ซึ่งเขียนแผนภาพของประพจน์ได้ดังนี้

$[(p \wedge q) \quad \vee \quad \sim p] \quad \Leftrightarrow \quad q$



ดังนั้น ค่าความจริงของประพจน์ที่กำหนดให้เป็นจริง

2.4.2 กรณีที่ไม่กำหนดค่าความจริงให้

ในกรณีที่ไม่ได้กำหนดค่าความจริงของแต่ละประพจน์ให้ การหาค่าความจริงของประพจน์ผสมต้องพิจารณาทุก ๆ กรณี โดยนำเสนอในรูปของตาราง ซึ่งเรียกว่า **ตารางวิเคราะห์ค่าความจริง** มีจำนวนกรณีที่ต้องพิจารณาทั้งหมดเท่ากับ 2^n กรณี เมื่อ n คือจำนวนประพจน์ย่อย

วิธีวิเคราะห์ ต้องวิเคราะห์จากประพจน์ที่มีตัวเชื่อมจากกลุ่มย่อยไปสู่กลุ่มใหญ่ โดยอาศัยตารางค่าความจริงในหัวข้อ 2.3 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.16 จงสร้างตารางวิเคราะห์หาค่าความจริงของ $p \Rightarrow \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

อธิบาย เนื่องจากมีประพจน์ย่อยอยู่สองประพจน์ คือ p, q ดังนั้น มีจำนวนกรณีที่จะต้องพิจารณาทั้งหมดเท่ากับ $2^2 = 4$ กรณี จึงกำหนดช่อง p ช่อง q ต่อไป จะหาค่าความจริงของ $p \Rightarrow \sim q$ ได้ ต้องมีช่อง $\sim q$ เสียก่อน แล้วหาค่าความจริงของ $p \Rightarrow \sim q$ ได้จากช่องที่ 1 กับช่องที่ 3 โดยเชื่อมด้วยตัวเชื่อม " $\Rightarrow$ " จึงมีทั้งหมด 4 ช่อง ดังตารางข้างบน

ตัวอย่าง 2.17 จงสร้างตารางวิเคราะห์หาค่าความจริงของ

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

วิธีทำ เนื่องจากมีประพจน์ย่อย 2 ประพจน์ ในที่นี้คือ p, q จึงมีค่าความจริงทั้งหมด 4 กรณี ดังตาราง

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

ค่าความจริงของประพจน์ผสมนี้อยู่ในช่องสุดท้าย จึงสรุปได้ว่า $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ เป็นจริงทุก ๆ กรณี

ตัวอย่าง 2.18 จงสร้างตารางวิเคราะห์หาค่าความจริงของ $\sim[p \vee (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

วิธีทำ มีประพจน์ย่อย 3 ประพจน์ จึงมีค่าความจริงทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี ตัวเชื่อมหลักคือ $\Rightarrow$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$\sim[p \vee (q \wedge r)]$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\sim[p \vee (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	F	F	F

จากตารางนี้สรุปได้ว่าประพจน์มีค่าความจริงไม่แน่นอนเป็นจริงบ้าง เท็จบ้าง แล้วแต่กรณี เช่น กรณีที่ 7 ถ้า p เท็จ q เท็จ และ r เป็นจริงแล้ว ทำให้

$\sim[p \vee (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ เป็นเท็จ

สรุป

จากตัวอย่างทั้งสามข้างบนนี้ จะเห็นว่า การสร้างตารางวิเคราะห์ค่าความจริงมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. หาจำนวนประพจน์ย่อยในประพจน์ผสมที่กำหนดให้ เพื่อจะได้ทราบว่ามีทั้งหมดกี่กรณี
2. สร้างช่องต่าง ๆ ขึ้น จะมีกี่ช่องนั้นขึ้นอยู่กับประพจน์ผสมที่กำหนดให้ ประพจน์ใดหรือกลุ่มใดที่มีความจำเป็นก่อน จะอยู่ในช่องข้างหน้า เช่น จากตัวอย่าง 2.18 ในช่องที่ 6 คือ $\sim[p \vee (q \wedge r)]$ จะหาค่าได้ต้องมีช่องที่ 5 ก่อน คือ $p \vee (q \wedge r)$ พิจารณาอย่างนี้เรื่อยไปจนถึง p, q, r
3. ถ้ามีสามประพจน์ย่อย ประพจน์แรกคือ p จะมีค่าความจริงเป็น T 4 ครั้ง

และเป็น F 4 ครั้ง ประพจน์ถัดมาคือ q จะมีค่าความจริงเป็น T 2 ครั้ง และเป็นเท็จ 2 ครั้ง ประพจน์สุดท้ายคือ r จะมีค่าความจริงเป็น T 1 ครั้ง และเป็น F 1 ครั้งเสมอ

4. ถ้ากำหนดประพจน์ในรูปของข้อความให้แปลงข้อความเหล่านั้นเป็นประโยคตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เสียก่อน แล้วสร้างตารางวิเคราะห์ตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังกล่าวแล้ว

2.5 ประพจน์ที่สมมูลกัน (Equivalent Proposition)

นิยาม 2.5.1 กล่าวได้ว่า ประพจน์ (ผสม) p และ q ใด ๆ สมมูลกัน ก็ต่อเมื่อประพจน์ p และประพจน์ q มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี เขียนแทนด้วย $p \Longleftrightarrow q$ หรือ $p \equiv q$

ดังเช่น $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$ แทนด้วย $p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q$ สมมูลกับ $q \wedge p$ แทนด้วย $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \Longrightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$ แทนด้วย $p \Longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$

เป็นต้น

วิธีตรวจสอบว่าทั้งสองประพจน์นั้นสมมูลกันกระทำได้โดยสร้างตารางวิเคราะห์ค่าความจริง แล้วพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองนั้นว่ามีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี ดังนิยามหรือไม่

ตัวอย่าง 2.19 จงพิจารณาว่า $p \wedge q$ สมมูลกับ $q \wedge p$ หรือไม่

วิธีทำ

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

จากตารางจะเห็นว่า $p \wedge q$ มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณีกับ $q \wedge p$

ดังนั้น $p \wedge q \equiv q \wedge p$ #

จากตัวอย่าง 2.19

ถ้าให้ p : ฉันชอบฟังข่าว

q : ฉันชอบฟังเพลง

ดังนั้น $p \wedge q$: ฉันชอบฟังข่าวและเพลง

และ $q \wedge p$: ฉันชอบฟังเพลงและข่าว

แสดงว่าข้อความหรือประโยค ฉันชอบฟังข่าวและเพลงสมมูลกับประโยค ฉันชอบฟังเพลงและข่าว

ตัวอย่าง 2.20 จงพิจารณาว่า $p \wedge \sim q$ สมมูลกับ $\sim(p \Rightarrow q)$ หรือไม่

วิธีทำ

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F

จะเห็นว่า $p \wedge \sim q$ กับ $\sim(p \Rightarrow q)$ มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี

ดังนั้น $p \wedge \sim q \equiv \sim(p \Rightarrow q)$

ตัวอย่าง 2.21 จงพิจารณาว่า $\sim p \Rightarrow q$ สมมูลกับ $p \vee \sim q$ หรือไม่

วิธีทำ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	T

จะเห็นว่า $\sim p \Rightarrow q$ กับ $p \vee \sim q$ มีค่าความจริงไม่เหมือนกันทุกกรณี เช่น กรณีที่สามและกรณีที่สี่ แสดงว่า $\sim p \Rightarrow q$ ไม่สมมูลกับ $p \vee \sim q$

ดังนั้น $\sim p \Rightarrow q \not\equiv p \vee \sim q$

ตัวอย่าง 2.22 จงพิจารณาว่า $p \Rightarrow (q \wedge r)$ สมมูลกับ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ หรือไม่

วิธีทำ

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

จะเห็นว่า $p \Rightarrow (q \wedge r)$ กับ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี

ดังนั้น $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

หมายเหตุ : ข้อความที่สมมูลกันสามารถใช้แทนกันได้ เพราะถือว่าเป็นข้อความที่มีค่าความจริงเหมือนกัน

2.6 สัจนิรันดร์และความขัดแย้ง (Tautology and Contradiction)

นิยาม 2.6.1 เรียกประพจน์ (ผสม) ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณีว่าสัจนิรันดร์ (tautology)

ตัวอย่าง 2.23 จงแสดงให้เห็นว่า $[\sim p \wedge (\sim q \Rightarrow p)] \Rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow p$	$\sim p \wedge (\sim q \Rightarrow p)$	$[\sim p \wedge (\sim q \Rightarrow p)] \Rightarrow q$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T

จะเห็นว่า $[\sim p \wedge (\sim q \Rightarrow p)] \Rightarrow q$ เป็นจริงทุก ๆ กรณี

ดังนั้น $[\sim p \wedge (\sim q \Rightarrow p)] \Rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.24 ประพจน์ $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F	T	F

จะเห็นว่า $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ มีค่าความจริงเป็นจริงบ้าง เท็จบ้าง (Contingent) นั่นคือไม่เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

โดยการวิเคราะห์ค่าความจริงเช่นเดียวกับตัวอย่างข้างบนนี้ จึงรวบรวม**ข้อความที่เป็นสัจนิรันดร์** (tautology) ที่สำคัญไว้ดังนี้

(1) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (Modus Ponens)

(2) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ (Modus Tollens)

(3) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (Hypothetical Syllogism)

(4) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$ (Disjunctive Syllogism)

(5) $[[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$ (Constructive Dilemma)

(6) $[[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \wedge (\sim q \vee \sim s)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$ (Destructive Dilemma)

(7) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (Contrapositive)

(8) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ (Simplification)

นิยาม 2.6.2 ประพจน์ (ผสม) ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี เรียกว่าเป็น**ความขัดแย้ง** (Contradiction)

ตัวอย่าง 2.25 จงพิจารณาว่า ประพจน์ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$ เป็นประพจน์ความขัดแย้งหรือไม่

วิธีทำ

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

จะเห็นว่า $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี
ดังนั้น ประพจน์ที่กำหนดให้เป็นความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 2.26 จงแสดงให้เห็นว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [\sim(p \Rightarrow r)]$ เป็นความขัดแย้งหรือไม่

วิธีทำ

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$\sim(p \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [\sim(p \Rightarrow r)]$
T	T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	F	F

จะเห็นว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [\sim(p \Rightarrow r)]$ เป็นจริงบ้างเท็จบ้าง ดังนั้น ประพจน์ที่กำหนดให้ไม่เป็นความขัดแย้ง

หมายเหตุ : จากนิยาม 2.3 กล่าวว่า ประพจน์ผสม p สมมูลกับประพจน์ผสม q ซึ่งแทนด้วย $p \Leftrightarrow q$ (หรือ $p \equiv q$) ก็ต่อเมื่อ p, q มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี อาจกล่าวได้อีกทางหนึ่งว่าประพจน์ผสม p สมมูลกับประพจน์ผสม q ก็ต่อเมื่อ $p \Leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ เช่น

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ เป็นสัจนิรันดร์

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

เป็นต้น

2.7 ข้อความสมเหตุสมผล (Validity)

ข้อความสมเหตุสมผล คือข้อความที่ประกอบด้วยสองส่วน ส่วนแรก เรียกว่า **เหตุ** (hypothesis or premises or assumption) ส่วนที่สองเรียกว่า **ผล** (conclusion)

เหตุ หรือสมมติฐานคือปัญหาหรือสิ่งกำหนดให้ จะมีกี่เหตุ หรือกี่ปัญหาก็ตาม ถือว่าเป็นจริง

ให้ $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ เป็นเหตุ

เขียนเป็นประโยคตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ในแนวนอนได้ดังนี้

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n$$

เขียนเป็นประโยคตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ในแนวตั้งได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_n \end{array}$$

ผล คือ ข้อสรุปจากเหตุที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 2.27 เหตุ

1. แดงชอบผลไม้หรือของหวาน

2. แดงไม่ชอบผลไม้

ผล แดงชอบของหวาน เป็นข้อความสมเหตุสมผล

นิยาม 2.7.1 การให้เหตุผล (argument) คือการอ้างจากเหตุ $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ แล้วสรุปเป็นผล C

เขียนเป็นสัญลักษณ์ของการให้เหตุผลได้ดังนี้

แนวนอน : $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$

แนวตั้ง :

$$\begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ \underline{H_n} \\ \therefore C \end{array}$$

การให้เหตุผลที่ถูกต้องในเชิงเหตุผล (อาจไม่ถูกต้องในโลกแห่งความเป็นจริง) เรียกข้อความนั้นว่าสมเหตุสมผล (valid) บางข้อความ อาจ**ไม่สมเหตุสมผล** (invalid) คือ สรุปเป็นผลตามการให้เหตุผลไม่ได้

นิยาม 2.7.2 การให้เหตุผล**สมเหตุสมผล** ก็ต่อเมื่อเหตุทุก ๆ เหตุเป็นจริง แล้วผลเป็นจริงด้วย

นั่นคือ

$$\begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ \underline{H_n} \\ \therefore C \end{array}$$

สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์

นิยาม 2.7.3 การให้เหตุผล**ไม่สมเหตุสมผล** ก็ต่อเมื่อเหตุทุก ๆ เหตุเป็นจริง แล้วผลเป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.28 จงพิจารณาว่าการให้เหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ

1. $p \vee q$
2. $q \Rightarrow r$
3. $\sim p$

ผล r

วิธีทำ

สร้างตารางวิเคราะห์ค่าความจริง ดังนี้

	p	q	r	p ∨ q	q ⇒ r	~p	r
	T	T	T	T	T	F	T
	T	T	F	T	F	F	F
	T	F	T	T	T	F	T
	T	F	F	T	T	F	F
สังเกต*	F	T	T	T*	T*	T*	T*
	F	T	F	T	F	T	F
	F	F	T	F	T	T	T
	F	F	F	F	T	T	F

จากตารางค่าความจริงข้างบนนี้ แสดงว่า $[[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge \sim p]$ ทำให้เกิดผล r

จะเห็นว่า r เป็นจริง เมื่อ $p \vee q$, $q \Rightarrow r$ และ $\sim p$ เป็นจริงทั้งหมด ดังกรณีที่ 5 ในตารางข้างบนนี้

นั่นคือ การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.29 จงพิจารณาว่าการให้เหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผล

ถ้าอิรักไม่ถอนทหารออกจากคูเวตแล้วจะเกิดสงครามโลกครั้งที่สาม

อิรักถอนทหารออกจากคูเวต

ดังนั้น ไม่เกิดสงครามโลกครั้งที่สาม

วิธีทำ

ให้ I : อิรักถอนทหารออกจากคูเวต

W : เกิดสงครามโลกครั้งที่สาม

เหตุ

1. $\sim I \Rightarrow W$
2. I

ผล $\sim W$

	I	W	$\sim I \Rightarrow W$	I	$\sim W$
สังเกต *	T	T	T*	T*	F*
	T	F	T	T	T
	F	T	T	F	F
	F	F	F	F	T

จากตารางข้างบน จะเห็นว่าในกรณีที่หนึ่ง $\sim I \Rightarrow W$, I เป็นจริง ในขณะที่ $\sim W$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $(\sim I \Rightarrow W) \wedge I$ ไม่ทำให้เกิดผล $\sim W$

นั่นคือ การให้เหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

หมายความว่า ถึงแม้อิรักถอนทหารออกจากคูเวตแล้วก็ตาม สงครามโลกอาจเกิดขึ้น อันเนื่องจากสาเหตุอื่นก็ได้

จากตัวอย่าง 2.28 และ 2.29 ถือเป็น**วิธีหนึ่ง** ที่ใช้ตรวจสอบว่าการให้เหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่

วิธีการตรวจสอบความสมเหตุสมผล (valid) ด้วยตารางวิเคราะห์ โดยใช้นิยาม 2.7.2 และนิยาม 2.7.3 นั้นใช้ไม่ได้ผลนักในกรณีที่มีสมมติฐาน (เหตุ) จำนวนมาก เพราะจำนวนประพจน์ย่อยที่เกี่ยวข้องจะมีจำนวนมากไปด้วย เช่น ถ้ามีข้อความ หรือประพจน์ย่อยที่เกี่ยวข้อง 10 ประพจน์แล้วตารางค่าความจริงจะประกอบด้วย 1,024 กรณี จึงมีอีก**วิธีหนึ่ง** ที่ใช้ตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้ คือ **การพิสูจน์หาความสมเหตุสมผล** โดยอาศัย**ทฤษฎีทางตรรกศาสตร์** ดังต่อไปนี้

1. Modus Ponens

เหตุ $p \Rightarrow q$

ผล $\dfrac{p}{q}$

2. Modus Tollens

เหตุ $p \Rightarrow q$

ผล $\dfrac{\sim q}{\sim p}$

3. Hypothetical Syllogism

เหตุ $p \Rightarrow q$

ผล $\dfrac{q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$

4. Disjunctive Syllogism

เหตุ $p \vee q$

$\underline{\sim q}$

ผล p

5. Constructive Dilemma

เหตุ $p \Rightarrow q$

$r \Rightarrow s$

$\underline{p \vee r}$

ผล $q \vee s$

6. Destructive Dilemma

เหตุ $p \Rightarrow q$

$r \Rightarrow s$

$\underline{\sim q \vee \sim s}$

ผล $\sim p \vee \sim r$

7. Contrapositive

เหตุ $\underline{p \Rightarrow q}$

ผล $\sim q \Rightarrow \sim p$

8. Substraction (simplification)

เหตุ $\underline{p \wedge q}$

ผล p

ในการพิสูจน์หาความสมเหตุสมผล โดยเริ่มจากเหตุที่กำหนดให้แล้วใช้ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีทั้ง 8 นี้ พิสูจน์ว่าข้อสรุปเป็นจริง และถ้าได้ผลออกมาตรงกับการให้เหตุผล ถือว่าการให้เหตุผลนั้น ๆ สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.30 จงพิสูจน์ว่าการให้เหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผล

$$d \vee e$$
$$e \Rightarrow f$$
$$\underline{\sim d}$$
$$\therefore f$$

พิสูจน์

	1. $d \vee e$	กำหนดให้
	2. $e \vee d$	1, คุณสมบัติการสลับที่
	3. $\sim d$	กำหนดให้
	4. e	2, 3 disjunctive syllogism
	5. $e \Rightarrow f$	กำหนดให้
$\therefore$	6. f	4,5 Modus Ponens

แสดงว่าการให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล #

ตัวอย่าง 2.31 จงพิจารณาการให้เหตุผล

เหตุ

1) $\sim(p \wedge \sim q)$

2) $q \Rightarrow \sim r$

3) $s \wedge r$

ผล $\sim p$

พิสูจน์

1. $\sim(p \wedge \sim q)$	กำหนดให้
2. $\sim p \vee \sim(\sim q)$	1, กฎของเดอ มอร์กอง
3. $\sim p \vee q$	2, กฎของนิเสธของชั้น
4. $q \Rightarrow \sim r$	กำหนดให้

5. $\sim(\sim r) \Rightarrow \sim q$ 4, contrapositive

6. $r \Rightarrow \sim q$ 5, สมมูล (นิเสธสองชั้น)

7. $s \wedge r$ กำหนดให้ หรือ เหตุ 3)

8. r 7, substraction

9. $\sim q$ 6, 8 Modus Ponens

$\therefore$ 10. $\sim p$ 3, 9 disjunctive syllogism

ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล #

ตัวอย่าง 2.32 จงพิสูจน์ให้เห็นว่าข้อสรุปต่อไปนี้สมเหตุสมผล

ถ้าฉันเข้าชั้นเรียนเวลา 7.30 น. (c) แล้ว ฉันจะต้องตื่นนอนเวลา 6.00 น. (g)

ถ้าฉันไปงานเลี้ยงคืนนี้ (p) แล้วฉันจะต้องอยู่จนถึง 3 นาฬิกา (u)

ถ้าฉันยังคงอยู่จนถึง 3 นาฬิกา และตื่นนอนเวลา 6.00 น. แล้ว ฉันจะได้นอนน้อยกว่า 5 ชั่วโมง (s)

ฉันไม่อยากไม่เข้าเรียนตอน 7.30 น. ดังนั้น ฉันไม่สามารถไปงานเลี้ยงได้

วิธีทำ

ให้ c : ฉันเข้าเรียนเวลา 7.30 น.

g : ฉันตื่นนอนเวลา 6.00 น.

p : ฉันไปงานเลี้ยง

u : ฉันอยู่งานเลี้ยงจนถึง 3 นาฬิกา

s : ฉันนอนน้อยกว่า 5 ชั่วโมง

เหตุ

1) $c \Rightarrow g$

2) $p \Rightarrow u$

3) $(u \wedge g) \Rightarrow s$

4) $\sim s$

5) $\sim(\sim c)$

ผล $\sim p$

พิสูจน์

	1. $c \Rightarrow g$	กำหนดให้ (เหตุ 1))
	2. c	เหตุ 5)
	3. g	1,2 Modus Ponens
	4. $(u \wedge g) \Rightarrow s$	เหตุ 3)
	5. $\sim s$	เหตุ 4)
$\therefore$	6. $\sim(u \wedge g)$	4,5 Modus Tollens
	7. $\sim u \vee \sim g$	6. กฎของนิเสธ
	8. $u \Rightarrow \sim g$	7, สมมูล
	9. $p \Rightarrow u$	เหตุ 2)
$\therefore$	10 $p \Rightarrow \sim g$	9, 8 Hypothetical Syllogism
	11. $g \Rightarrow \sim p$	10, contrapositive
$\therefore$	12. $\sim p$	11, 3 Modus Ponens

ดังนั้น ข้อสรุปดังกล่าวสมเหตุสมผล #

2.8 วลีบอกปริมาณ (Quantifier)

ได้ทราบจากหัวข้อ 2.2.2 แล้วว่าประโยคเปิดทำให้เป็นประพจน์ได้ โดยการแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกต่าง ๆ จากเอกภพสัมพัทธ์ ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่จะทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ได้ คือการเติมวลีบอกปริมาณไว้หน้าประโยคเปิด

วลีบอกปริมาณมี 2 แบบ คือ

1. สำหรับบางสิ่ง (for some)
2. สำหรับทุกสิ่ง (for all)

สำหรับ x บางสิ่งแทนด้วย $\exists x$ อ่านว่า for some x

สำหรับ x ทุกสิ่งแทนด้วย $\forall x$ อ่านว่า for all x

เขียนวลีบอกปริมาณสำหรับ 1 ตัวแปร ได้ 2 แบบคือ

1. $\exists x[p(x)]$ อ่านว่า สำหรับ x บางสิ่ง p(x)

2. $\forall x[p(x)]$ อ่านว่า สำหรับ x ทุกสิ่ง p(x)

ประโยคเปิดที่มี 2 ตัวแปรหรือมากกว่าเขียนเป็นสัญลักษณ์ของประโยควลีบอกปริมาณได้ดังนี้

$\forall x \forall y[p(x, y)]$, $\forall x \exists y[p(x, y)]$ หรือ $\exists x \exists y[p(x,y)]$,

ตัวอย่าง 2.33 จงเขียนประโยคต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์ของประโยควลีบอกปริมาณ

(1) สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x + 3 = 3 + x$

(2) สำหรับจำนวนจริง x บางตัว $x - 5 = 12$

(3) สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x+(-x) = 0$

(4) สำหรับจำนวนจริง x บางตัว x เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นเลขคู่

วิธีทำ

(1) $\forall x[x + 3 = 3 + x]$

(2) $\exists x[x-5 = 12]$

(3) $\forall x[x +(-x) = 0]$

(4) $\exists x$[x เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นเลขคู่]

ค่าความจริงของประโยคที่มีวลีบอกปริมาณ

ค่าความจริงของประโยคหรือประพจน์ที่มีวลีบอกปริมาณขึ้นอยู่กับเอกภพสัมพัทธ์ที่กำหนดให้ ซึ่งเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกต่าง ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์แล้วก็พิจารณาว่าจริงทุกตัว หรือเท็จทุกตัว หรือจริงบ้างเท็จบ้าง จากนั้นก็สรุปค่าความจริง โดยใช้หลักความเข้าใจดังนี้

ถ้า $U = \{a, b, c, \ldots\}$ แล้ว

$\forall x[p(x)] = P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge \ldots$

$\exists x[p(x)] = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee \ldots$

จาก 2 บรรทัดข้างบนนี้สามารถ**สรุปค่าความจริงของ** $\forall x[p(x)]$ **และ** $\exists x[p(x)]$ ได้ดังนี้

1. $\forall x[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง** ก็ต่อเมื่อทุก ๆ x ใน U ทำให้ $p(x)$ เป็นจริง
2. $\forall x[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**เท็จ** ก็ต่อเมื่อมี x บางตัวใน U ที่ทำให้ $p(x)$ เป็นเท็จ
3. $\exists x[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง** ก็ต่อเมื่อมี x บางตัวใน U ที่ทำให้ $p(x)$ เป็นจริง
4. $\exists x[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็น**เท็จ** ก็ต่อเมื่อทุก ๆ x ใน U ทำให้ $p(x)$ เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.34 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{1,2,3\}$ จงพิจารณาค่าความจริงของ $\forall x[x+2 \leq 5]$

วิธีทำ

ให้ $p(x) \;:\; x + 2 \leq 5$

$p(1) \;:\; 1 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

$p(2) \;:\; 2 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

$p(3) \;:\; 3 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

เพราะว่า $p(1) \wedge p(2) \wedge p(3)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[(x + 2) \leq 5]$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.35 กำหนดให้ $U = \{2,3,4\}$ จงพิจารณาค่าความจริงของ $\forall x[x+2 \leq 5]$

วิธีทำ

ให้ $p(x) \;:\; x + 2 \leq 5$

$p(2) \;:\; 2 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

$p(3) \;:\; 3 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

$p(4) \;:\; 4 + 2 \leq 5$ เป็นเท็จ

จะเห็นว่ามี x บางตัว ในที่นี้คือ $x = 4$ ที่ทำให้ $p(x)$ เป็นเท็จ ดังนั้น $\forall x[x + 2 \leq 5]$ เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.36 กำหนดให้ $U = \{1,2,3\}$ จงพิจารณาค่าความจริงของ $\sim \exists x[x + 2 \leq 5]$

วิธีทำ

ให้ $p(x) : x + 2 \leq 5$

$p(1) : 1 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

$p(2) : 2 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

$p(3) : 3 + 2 \leq 5$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x[x + 2 \leq 5]$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sim \exists x[x + 2 \leq 5]$ เป็นเท็จ

แบบฝึกหัดที่ 2

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์จงบอกค่าความจริง

   1.1 $\{2,4,6\} \cap \{1,5,6\} = \emptyset$

   1.2 0 หารด้วย 2 ลงตัว

   1.3 คุณชอบเบิร์ดไหม

   1.4 โปรดเห็นใจผมหน่อย เทอมสุดท้ายแล้ว

   1.5 จำนวนที่น้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งบนเส้นจำนวนจะอยู่ทางซ้าย

   1.6 ประพจน์คืออะไร

   1.7 อย่าเข้ามานะ

   1.8 ประเทศไทยจะทิ้งทุ่งนาไปหานิกส์ (NICS)

   1.9 โอ ! ฉันกลายเป็นเศรษฐีใหม่

   1.10 ป้อมเป็นนักฟุตบอลทีมชาติ

   1.11 กรุงเทพฯ หมองมัว เพราะการจราจรติดขัด

   1.12 ที่ตรงนี้จะสร้างสะพานลอยให้แล้วเสร็จในปี พ.ศ. 2535

   1.13 มีลูกมากจะยากนาน

   1.14 รักดีหามจั่วรักชั่วหามเสา

   1.15 จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานตัดแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

2. จงเขียนประโยคที่เป็นประพจน์มา 5 ประพจน์พร้อมทั้งบอกค่าความจริงด้วย

แบบฝึกหัด 2.2

1. ประโยคต่อไปนี้ประโยคใดเป็นประพจน์ ประโยคเปิด หรือไม่เป็นทั้งประพจน์และประโยคเปิด

   1.1 เขาทำลายสิ่งแวดล้อมโลก

   1.2 อิรักบุกคูเวตจริงหรือ

   1.3 $2x + 3y \leq 4$

   1.4 ป้อมไม่สนใจการเมืองแถบอ่าวเปอร์เซีย

   1.5 เลขตัวใดที่มนุษย์รู้จักเป็นตัวแรก

   1.6 ใคร ๆ ก็สนใจโรคเอดส์ใช่ไหม

   1.7 เธอเป็นคนหนึ่งที่ต่อต้านการตัดไม้ทำลายป่า

   1.8 จำนวนหนึ่งบวกกับอีกจำนวนหนึ่งเป็น 3 เท่าของอีกจำนวนหนึ่ง

   1.9 $x + y = 3z$

   1.10 ชาวนาเดือดร้อน เพราะข้าวเปลือกราคาตกต่ำ

   1.11 กระทรวงพาณิชย์รับซื้อข้าวเปลือกทั้งหมด

   1.12 โอ๊ย ! ฉันเบื่อการเมือง

   1.13 ป้อมสนใจทางภาษาศาสตร์

   1.14 x เกลียด y เพราะ y เกลียด x

   1.15 ทำดีได้ดีมีสุข

2. กำหนดให้ $P(x) \; : \; |x| = x$

   $Q(x) \; : \; x > 1$

   $R(x)$: x หาร 5 ลงตัว

   $S(x,y) : \; x = 2y$

จงเขียนประโยคต่อไปนี้เป็นข้อความ

2.1 $P(5)$

2.2 ถ้า $Q(2)$ แล้ว $P(2)$

2.3 $P(2)$ หรือ $R(3)$

2.4 $S(2,3)$ และ $R(-1)$

2.5 $Q(4)$ ก็ต่อเมื่อ $R(8)$

3. จงหาเซตคำตอบของประโยคเปิดต่อไปนี้

3.1 $x + 1 < 1$, $U = \{-1,0,1,2,3\}$

3.2 $y^2 + 2y + 1 = 0$, $U = N$ (จำนวนนับ)

3.3 $(x-3)(x+1) = 0$, $U = \{-3,-1,0,1,3\}$

3.4 $a^3 - a = 0$, $U = I^-$ (จำนวนเต็มลบ)

3.5 $\square - 8 < 4$, $U = \{0,2,4,6\}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1.1 ดวงจันทร์และโลกอยู่ในระบบสุริยะ

1.2 $3 < 2 \Rightarrow 2 < 3$

1.3 π เป็นจำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

1.4 $\{1,3\} \cap \{5\} = \{1,3,5\}$ และ $\{2,4\} \cup \{5\} = \{2,4,5\}$

1.5 สำหรับเซต A ใดๆ $\emptyset \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup \emptyset = \emptyset$

1.6 ถ้าโลกกลมแล้วนกบินได้

1.7 $4 \notin \{1,5\}$ แต่ $3 \in \{3,5\}$

1.8 นกและแมวเป็นสัตว์เลี้ยง

2. จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปประโยคตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

2.1 ถ้านายกชาติชายลาออกแล้วต้องจัดตั้งรัฐบาลใหม่

2.2 a เป็นตัวอักษรในภาษาอังกฤษ แต่ ก. เป็นตัวอักษรในภาษาไทย

2.3 ฉันชอบเรียงภาษาฝรั่งเศส หรือภาษาเยอรมัน

2.4 ถ้าฝนตกและฟ้าร้องแล้วเด็กร้อง

2.5 ปิ๋มได้เล่นก็ต่อเมื่อปิ๋มได้อาบน้ำและรับประทานอาหารแล้ว

2.6 $\frac{x}{y} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ และ $y \neq 0$

2.7 ถ้าแป๋งเข้าเรียนเป็นประจำและตั้งใจเรียนแล้วแป๋งต้องสอบได้ G

2.8 สี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

3. กำหนดให้ p : ฝนตก

q : ฟ้าร้อง

r : เด็กร้อง

จงเปลี่ยนประโยคตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ต่อไปนี้ให้เป็นข้อความ

3.1 $p \wedge q$

3.2 $p \vee r$

3.3 $r \Leftrightarrow q$

3.4 $\sim p \Rightarrow r$

3.5 $p \Rightarrow (q \wedge r)$

3.6 $(q \wedge r) \Leftrightarrow p$

3.7 $\sim(p \vee r) \wedge q$

3.8 $(p \vee \sim q) \vee r$

4. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

4.1 ป๋องเรียนที่คณะมนุษยศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

4.2 $2 + 3 = 3 + 2$

4.3 พิมพ์ถูกรางวัลที่หนึ่ง

4.4 เส้นตรง l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2

4.5 $3 < 4$

4.6 ฉันชอบดูภาพยนตร์

4.7 แก้วสอบอารยธรรมตะวันตกได้ P

4.8 แววมีเงินมากกว่าวาว

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ p เป็นจริง q เป็นจริง r เป็นเท็จ s เป็นเท็จ t เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   1.1 $(p \wedge r) \Rightarrow (q \vee s)$

   1.2 $\sim r \vee \sim s$

   1.3 $\sim(p \wedge r) \Rightarrow (\sim q \wedge p)$

   1.4 $[p \wedge (q \vee t)] \Leftrightarrow s$

   1.5 $(p \Rightarrow r) \vee \sim(r \Rightarrow s)$

   1.6 $(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee \sim p)$

   1.7 $[[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge \sim s] \Rightarrow t$

   1.8 $\sim p \vee p$

   1.9 $\sim p \wedge p$

   1.10 $(p \wedge q) \Rightarrow p$

2. จงหาค่าความจริงของ p, q จากประพจน์ที่กำหนดให้

   2.1 $p \wedge q$ เป็นเท็จ

   2.2 $p \vee q$ เป็นเท็จ

   2.3 $p \vee q$ เป็นจริง

   2.4 $p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ

   2.5 $p \wedge q$ เป็นจริง

   2.6 $p \Leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

3. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้

	ประพจน์	เงื่อนไข
3.1	$(p \Rightarrow \sim q) \vee \sim p$	$p \wedge q$ เป็นจริง
3.2	$(p \wedge q) \vee \sim q$	$p \vee q$ เป็นเท็จ

	ประพจน์	เงื่อนไข
3.3	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$	$\sim p \vee q$ เป็นเท็จ
3.4	$(q \Rightarrow p) \wedge (p \wedge \sim q)$	$p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ
3.5	$\sim(p \vee q) \wedge (q \vee p)$	$p \Rightarrow q$ เป็นเท็จ

4. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

4.1 $\underset{F}{(p} \wedge q) \Rightarrow r$

4.2 $p \Rightarrow (q \Rightarrow \underset{T}{r})$

4.3 $\underset{F}{(p} \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$

4.4 $(\sim p \vee (q \wedge r) \Rightarrow \underset{F}{p}$

4.5 $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \underset{F}{s})$

4.6 $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \underset{T}{r})$

4.7 $(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge (p \wedge \underset{F}{q}))$

4.8 $p \Rightarrow (q \Rightarrow \underset{T}{r})$

5. จงหาค่าความจริงของ p, q, r

5.1 $p \underset{F}{\Rightarrow} (q \vee r)$

5.2 $p \underset{F}{\wedge} (q \vee r)$

5.3 $(p \wedge q) \underset{F}{\Rightarrow} r$

5.4 $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \underset{F}{\Rightarrow} (\sim r \Rightarrow \sim p)$

5.5 $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \underset{F}{\vee} [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$

6. กำหนดให้ $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s

7. จงสร้างตารางวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

7.1 $\sim p \Rightarrow p$

7.2 $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$

7.3 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p \vee q$

7.4 $p \wedge \sim p$

7.5 $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

7.6 $[(p \Leftrightarrow q)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

7.7 $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

7.8 $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

7.9 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

7.10 $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงพิจารณาดูว่าประพจน์คู่ใดต่อไปนี้สมมูลกัน

1.1 $p \vee q \; ; \; q \vee p$

1.2 $p \vee (q \wedge r) \; ; \; (p \vee q) \wedge r$

1.3 $p \wedge (q \wedge r) \; ; \; (p \wedge q) \wedge r$

1.4 $p \vee (q \wedge r) \; ; \; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1.5 $p \wedge (q \vee r) \; ; \; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.6 $p \wedge q \; ; \; p \Rightarrow \sim q$

1.7 $p \wedge p \; ; \; p$

1.8 $p \vee p \; ; \; p$

1.9 $p \Leftrightarrow q \; ; \; (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

1.10 $p \Rightarrow q \; ; \; \sim p \vee q$

1.11 $\sim(p \vee q)$; $\sim p \wedge q$

1.12 $\sim(p \wedge q)$; $\sim p \wedge \sim q$

1.13 $\sim(p \vee q)$; $\sim p \wedge \sim q$

1.14 $\sim(p \wedge q)$; $\sim p \vee \sim q$

1.15 $(\sim p)$; p

2. จงพิจารณาว่าประพจน์คู่ใดต่อไปนี้สมมูลกัน

2.1 ถ้าทิ้งขยะลงบนถนนแล้วบ้านเมืองจะสกปรก
ไม่ทิ้งขยะลงบนถนน หรือบ้านเมืองสกปรก

2.2 ไม่ใช่ถ้าป้อมขับรถเร็วแล้ว ป้อมจะเป็นคนเก่ง
ป้อมไม่ขับรถเร็ว และป้อมไม่เป็นคนเก่ง

2.3 ถ้าน้ำมันขึ้นราคาและสินค้าขึ้นราคาแล้วประชาชนเดือดร้อน
น้ำมันขึ้นราคา หรือ ถ้าสินค้าขึ้นราคาแล้วประชาชนเดือดร้อน

2.4 โอโซนถูกทำลายก็ต่อเมื่อป่าถูกทำลาย
โอโซนไม่ถูกทำลายหรือป่าถูกทำลาย แต่ถ้าป่าไม้ถูกทำลายแล้วโอโซนไม่ถูกทำลาย

2.5 ไม่ใช่ 2 เป็นเลขคู่ และ 3 เป็นเลขคี่
ไม่ใช่ 2 เป็นเลขคู่ หรือไม่ใช่ 3 เป็นเลขคี่

แบบฝึกหัด 2.6

จงตรวจสอบดูว่าข้อใดต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์ และข้อใดเป็นความขัดแย้ง

1. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
2. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
3. $p \wedge \sim p$
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
5. $(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

6. $q \Rightarrow [p \wedge (p \Rightarrow q)]$

7. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

8. $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$

9. $p \vee \sim p$

10. $(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงพิจารณาว่าการให้เหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้นิยาม

   1.1 ถ้าแป๋วขยันทำแบบฝึกหัดแล้ว แป๋วจะเข้าใจบทเรียนได้ดี
   แป๋วขยันทำแบบฝึกหัด
   ดังนั้น แป๋วเข้าใจบทเรียนได้ดี

   1.2 ถ้านิดชอบฟังเพลงแล้ว นิดจะเป็นคนจิตใจร่าเริง
   นิดไม่ชอบฟังเพลง
   ดังนั้น นิดเป็นคนจิตใจไม่ร่าเริง

   1.3 ถ้าอิรักดื้อรั้น แล้วจะเกิดสงครามโลก
   ถ้าเกิดสงครามโลกแล้วน้ำมันจะขึ้นราคา
   ดังนั้น ถ้าน้ำมันขึ้นราคาแล้วอิรักยังคงดื้อรั้น

   1.4 แดงเป็นวิศวกร หรือแดงไม่เป็นหมอ
   แดงไม่เป็นวิศวกร
   ดังนั้น แดงไม่เป็นหมอ

   1.5 ถ้าฉันชอบเรียนภาษาไทยแล้ว ฉันจะชอบเรียนภาษาอังกฤษ
   ถ้าฉันชอบเรียนประวัติศาสตร์แล้ว ฉันจะชอบเรียนภูมิศาสตร์
   ฉันไม่ชอบเรียนภาษาอังกฤษ หรือไม่ชอบเรียนภูมิศาสตร์
   ดังนั้น ฉันไม่ชอบเรียนภาษาไทย หรือไม่ชอบเรียนประวัติศาสตร์

2. จงแสดงการพิสูจน์หาความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลต่อไปนี้

2.1 เหตุ : $p \Rightarrow q, \quad \sim q \vee s, \quad \sim s$

ผล : $\sim p$

2.2 เหตุ : $p \Leftrightarrow q, \; r \Rightarrow q, \; r$

ผล : p

2.3 เหตุ : $\sim p \vee q, \quad \sim r \Rightarrow \sim q, \; p$

ผล : r

2.4 เหตุ : $\sim p \vee q, \quad \sim r \Rightarrow \sim q$

ผล : $p \Rightarrow r$

2.5 นิดเป็นคนเก่งหรือเป็นคนดี นิดไม่เป็นคนดี ดังนั้น นิดไม่เป็นคนเก่ง

2.6 ถ้าฉันทิ้งขยะลงในแม่น้ำ แล้วน้ำจะเน่าเหม็น ถ้าฉันไม่ทิ้งขยะลงในแม่น้ำแล้วสัตว์น้ำจะมีความสุข แต่น้ำไม่เน่าเหม็น ดังนั้น สัตว์น้ำมีความสุข

2.7 ปิงจะสอบได้ G ก็ต่อเมื่อปิงต้องเข้าเรียนทุกครั้ง และขยันทำแบบฝึกหัดเท่านั้น ปิงเข้าเรียนทุกครั้ง แต่สอบไม่ได้ G เพราะฉะนั้น ปิงไม่ขยันทำแบบฝึกหัด

2.8 ถ้าฉันรู้จักวิธีประกอบอาชีพ แล้วฉันจะต้องเป็นเศรษฐีแน่ ๆ แต่ฉันไม่รู้จักวิธีประกอบอาชีพก็มีทางเป็นเศรษฐีได้ ดังนั้น ฉันได้เป็นเศรษฐีแน่ ๆ

แบบฝึกหัด 2.8

จงหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีวลีบอกปริมาณต่อไปนี้

เมื่อ $U = \{2,3,4\}$ และ $U = \{5,6,7\}$

1. $\forall x[x + 3 \leq 8]$
2. $\exists x[x + 2 \leq 8]$
3. $\forall x[\sim(x + 2 \leq 8]$
4. $\exists x[\sim(x + 4 \leq 8]$

5. $\sim \forall x[x + 2 \geq 7]$

6. $\sim \exists x[x + 3 \leq 6]$

7. $\exists x[\sim(x + 3 \leq 6)]$

8. $\sim \forall x[x - 2 \leq 1]$